M2 Image, Développement et Technologie 3D (ID3D) - UE Animation, Corps Articulés et Moteurs Physiques
Partie - Simulation par modèles physiques
Cours 5 - Simulation de fluides

Florence Zara

LIRIS - Université Lyon 1

http://liris.cnrs.fr/florence.zara
E-mail: florence.zara@liris.cnrs.fr

Plan du cours

- Introduction
- Equations de la dynamique des fluides
- Présentation de la méthode SPH
- Références bibliographiques

Modélisation d'un fluide

Caractéristiques d'un fluide

- $\mathbf{v}$ - champs de vitesse du fluide
- $\rho = m/V$ - la densité volumique du fluide
- p - champs de pression du fluide - force par unité de surface que le fluide exerce sur n'importe quoi

Nous observons ensuite l'évolution de ces quantités au cours du temps à partir de deux équations

Equations de la dynamique des fluides

Première équation assure la conservation de la masse

Conservation de la masse

- Masse du domaine reste constante pendant son mouvement :

$$\frac{d}{dt}\, m = \frac{d}{dt} \int_{D_t} \rho \, dv = 0$$

- Si nous utilisons formules dérivées particulaires d'une intégrale de volume, nous obtenons :

$$\int_{D_t} \left(\frac{\partial}{\partial t}\, \rho + div\, (\rho\, \vec{v}) \right) dv = 0 \quad \text{ou} \quad \int_{D_t} \left(\frac{\partial}{\partial t}\, \rho + \rho\, div\, \vec{v} \right) dv = 0$$

- Nous en déduisons formes locales de la conservation de la masse :

$$\frac{\partial}{\partial t}\, \rho + \nabla \cdot (\rho\, \vec{v}) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial t}\, \rho + \rho\, \nabla \cdot \vec{v} = 0$$

Pour rappel, soit $\vec{u}$ un vecteur de composantes (u_1, u_2, u_3),
$div\ \vec{u} = \nabla \cdot\ \vec{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}$ (un scalaire).

Seconde équation issue de l'équation du mouvement

Equation de Navier-Stokes pour fluide incompressible

- En considérant la gravité, nous avons :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \, \mathbf{g}$$

avec μ la viscosité du fluide

Equation de Navier-Stokes pour fluide incompressible

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho\, \mathbf{g}$$

Partie de gauche : ρ * accélération du fluide

$\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}\right)$: représente l'accélération du fluide

Partie de droite : somme des forces

- $-\nabla p$: la pression - gradient de pression - fluide essaie de s'écouler loin des régions à hautes pressions
- $\mu \nabla^2 \mathbf{v}$: la viscosité - considère la dérivée seconde des vitesses cad étalement des infos dans le champs des vitesses. Terme exclus dans le cas de l'eau ou de l'air avec μ faible
- $\rho\, \mathbf{g}$: les forces extérieures (ici seulement la gravité)

  avec $\mathbf{g}$ le vecteur de densité de force par unité de volume

Equation de Navier-Stokes pour fluide incompressible

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \, \mathbf{g}$$

Définition de l'advection

- Transport d'une quantité (scalaire ou vectorielle) d'un élément donné par le mouvement (et donc la vitesse) du milieu environnant
- Advection est égale au produit scalaire du vecteur vitesse $\mathbf{v}$ par le vecteur gradient ∇ soit $\mathbf{v} \cdot \nabla$

$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$: advection du champ de vitesse du fluide avec lui-même

Si nous représentons le fluide par un ensemble de particules, toutes les caractéristiques des particules du fluide sont advectées lors du déplacement du fluide au sein de l'écoulement

Equation du fluide : $\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}\right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \, \mathbf{g}$

Soit $\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}\right)$ et $\mathbf{f} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \, \mathbf{g}$

$$\Rightarrow \rho \, \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{f}$$

$\mathbf{f}$ détermine le changement de mouvement $\rho \, \frac{D\mathbf{v}}{Dt}$ des particules

Les particules se déplaçant avec le fluide, $\frac{D\mathbf{v}}{Dt}$ est tout simplement $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$, cad que nous ne considérons pas le terme $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$

Equation de Navier-Stokes pour fluide incompressible

Si nous considérons une particule i, son accélération est donnée par :

$$\mathbf{a}_i = \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \frac{\mathbf{f}_i}{\rho_i}$$

- $\mathbf{v}_i = d\mathbf{x}_i/dt$: vitesse de la particule i
- $\mathbf{f}_i$ et ρ_i : vecteur densité de force et la densité évalués à la position $\mathbf{x}_i$ de la particule i

Equation de Navier-Stokes pour fluide incompressible

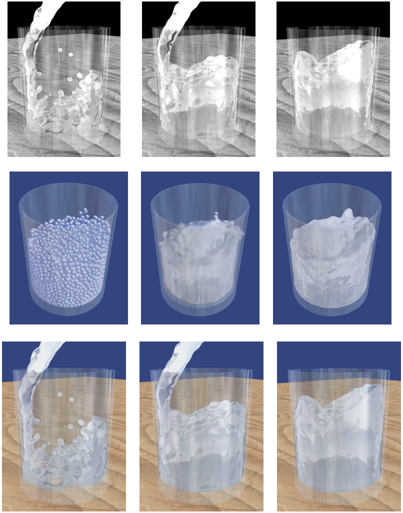
Si nous considérons une particule i, nous obtenons :

$$\mathbf{a}_i = \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \frac{\mathbf{f}_i}{\rho_i} = -\frac{1}{\rho_i}\,\nabla p_i + \frac{\mu}{\rho_i}\nabla^2\mathbf{v}_i + \mathbf{g}$$

- $\frac{1}{\rho_i}\,\nabla p_i$: décrit l'accélération de la particule due aux différences de pression dans le fluide
- $\frac{\mu}{\rho_i}\nabla^2\mathbf{v}_i$: décrit l'accélération de la particule due aux forces de friction entre les particules ayant des vitesses différentes

Simulation du comportement d’un fluide - SPH [1]

Nous allons voir comment modéliser $\mathbf{f}_i$ et ρ_i avec méthode SPH



SPH - Smoothed particle hydrodynamics

Simulation basée sur la méthode SPH publiée par Müller [1]

Fluide représenté par un ensemble de paramètres

- Densité : ρ_0 $(= 1000,0$ Kg$/m^3$ eau à 4 degrès Celsius)
- Module de Bulk : K $(= 2,2$ GPa pour l'eau)
- Viscosité : μ $(= 1,002 \times 10^{-3}$ Pa.s pour l'eau à 20 degrès)
- Choix du module de Bulk tel que la vitesse du son $c_s = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}} >>$ vitesse de la simulation

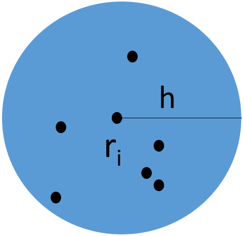
SPH - Smoothed particle hydrodynamics

Principe de la méthode

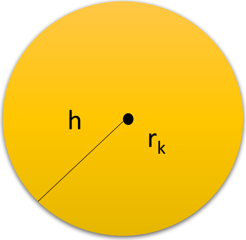
- **Simulation du comportement de fluides basée particules**
  - Fluide représenté par un ensemble de particules
  - Particules de masse m et de rayons d'interaction h
- Chaque particule i comporte des informations sur le fluide par rapport à une petite région
  - une position $\mathbf{r}_i$, une vitesse $\mathbf{v}_i$, une densité ρ_i
- Les particules interagissent entre elles de façon à modéliser la dynamique d'un fluide
- Puis résolution d'un système d'équations différentielles

Principe de la méthode

- Particule i de position $\mathbf{r}_i$ interagit avec l'ensemble N_i de particules dans le rayon h de i



Ensemble Ni de particules en interaction avec particule i



Boucle de simulation issue de la dynamique Newtonienne

- **Calcul des forces appliquées aux particules**
  - Force d'interaction entre particules : $\mathbf{f}_{ij}^{\text{interact}}(t)$
  - Force de gravité : $\mathbf{f}_g = m\ \mathbf{g}$
- **Calcul des accélérations des particules :**
  - Principe fondamental de la dynamique : $\sum F_i = m\ \mathbf{a}_i = \rho\ V\ \mathbf{a}_i$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbf{a}_i(t) &= \sum F_i(t)/m \\ \mathbf{a}_i(t) &= \frac{1}{\rho_i} \sum_{j \in N_i} \mathbf{f}_{ij}^{\text{interact}}(t) + \mathbf{g} \end{aligned}$$

- **Intégration pour obtenir les vitesses et positions**
  - $\mathbf{v}_i(t + dt) = \ldots$
  - $\mathbf{x}_i(t + dt) = \ldots$

Calcul au niveau des particules

Il faut calculer les forces d'interaction et la densité des particules

A chaque pas de temps

- **La densité de chaque particule** i est donnée par :

$$\rho_i = \frac{4m}{\pi h^8} \sum_{j \in N_i} (h^2 - r^2)^3$$

- Recherche des voisins $j \in N_i$ de la particule i
- Solution la plus simple (mais pas la plus efficace) :
  - Parcours de toutes les particules
  - Considère les particules tq : $h^2 - r^2 > 0$
    où $r^2 = \|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|^2$ distance au carré entre les particules i et j

Calcul de la densité de chaque particule

Considérons un fluide modélisé en n particules

- **Parcours de toutes les particules i de 0 à $n-1$**

  // Pour considérer la particule i elle-même
  - Accumulation dans ρ_i de $4m/\pi h^2$ (cas $r^2 = 0$)

  // Pour considérer les voisins j de i
  - **Parcours de toutes les particules j de $i+1$ à $n-1$**
    - Si $h^2 - r^2 > 0$:

      - calcul de $\rho_{ij} = \frac{4m}{\pi h^8} \sum_{j \in N_i} (h^2 - r^2)^3$
      - ajout de ρ_{ij} à ρ_i et à ρ_j

A chaque pas de temps

- **Force d'interaction entre particules** i **et** j définie par :

$$\mathbf{f}_{ij}^{\text{interact}} = \frac{m_j}{\pi h^4 \rho_j}(1-q_{ij}) \left[15\ K(\rho_i + \rho_j - 2\rho_0)\frac{(1-q_{ij})}{q_{ij}}\mathbf{r}_{ij} - 40\mu\ \mathbf{v}_{ij} \right]$$

- $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$
- $\mathbf{v}_{ij} = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j$
- $q_{ij} = \|\mathbf{r}_{ij}\|/h$

Symétrie des forces d'interaction avec :

$$\mathbf{f}_{ij}^{\text{interact}}(t) = -\mathbf{f}_{ji}^{\text{interact}}(t)$$

Rappel : calcul effectué ssi $h^2 - r^2 > 0$

Remarque par rapport au code du TP :

- Calcul direct de $\mathbf{f}_{ij}^{\mathrm{interact}}/\rho_i$
- Modification à faire au niveau du solveur dans le cas SPH :

```
void SolveurExpl::CalculAccel_ForceGravite(...)
```

// On a calcule dans Force[i] : fij / rho_i

// Il ne reste qu'à ajouter le vecteur **g**

A[i] = Force[i] + g ;

Simulation de fluide - code TP

Récupération du code SPH

- Modifications faites dans la base Git du code du TP
- Il faut donc récupérer les modifications apportées :

```
git pull
```

Simulation à faire

- Simulation d'un fluide représenté par un ensemble de particules
- Considère que ce fluide est contenu dans une boite
- Collision à gérer avec les frontières de cette boite
- Modification du signe des vitesses des particules en collision pour qu'elles rebondissent

Références bibliographiques

M. Müller, D. Charypar, and M. Gross.
Particle-based fluid simulation for interactive applications, in Proceedings of Eurographics/SIGGRAPH Symposium on Computer Animation, 2003.

Bindel, Fall. *Applications of Parallel Computers (CS 5220)*, 2011.