

M2 Image, Développement et Technologie 3D
(ID3D) - UE Animation, Corps Articulés et
Moteurs Physiques
Partie - Simulation par modèles physiques
Cours 3 - Simulation d'objets déformables

Florence Zara

LIRIS - Université Lyon 1

<http://liris.cnrs.fr/florence.zara>

E-mail: florence.zara@liris.cnrs.fr

Plan du cours

Simulation d'objets déformables

- Exemples d'objet déformables
- Caractéristiques des objets déformables
- Mécanique des Milieux Continus (MMC)

Modélisation physique basée sur un système masses-ressorts

- Définition
- Application à une simulation de textiles
- Travail possible en TP

Simulation d'objets déformables : exemples 1D

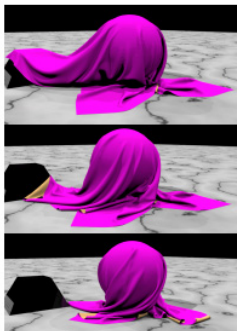
- 1D - Simulation de cheveux



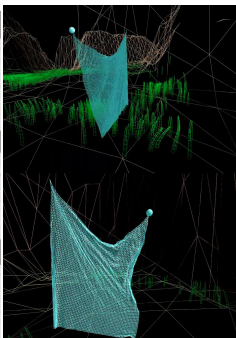
[Bertails, et. al. 2006]

Simulation d'objets déformables : exemples 2D

- 2D - Simulation de textiles



[Bridson, et. al. 2002]



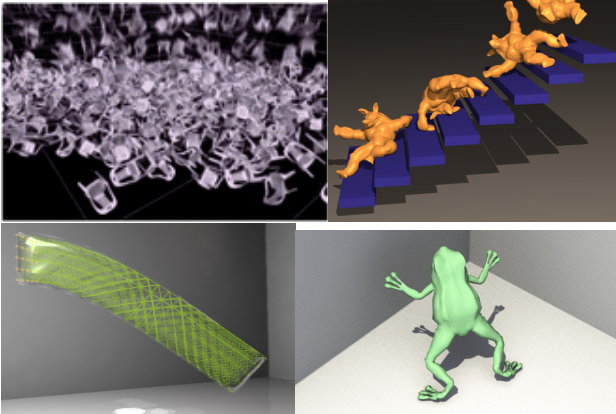
[Zara, et. al. 2003]



[MIRALab]

Simulation d'objets déformables : exemples 3D

- 3D - Simulation d'objets déformables divers et variés



Comment caractériser les objets déformables ?

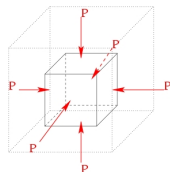
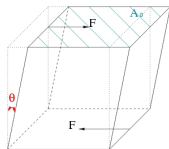
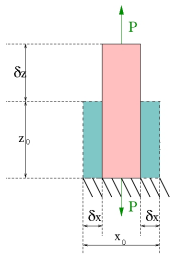
Deux notions importantes : contrainte et déformation

- Le rapport $\frac{\text{contrainte}}{\text{déformation}}$ caractérise un objet déformable
- Plusieurs types de contraintes / déformations
 - ⇒ plusieurs **coefficients** caractérisant les objets déformables
 - ⇒ effectue des **tests** sur les matériaux pour mesurer ces coefficients

Tests pour caractériser les objets déformables

Tests de déformations mettent en avant **paramètres d'élasticité** :

- **Etirement** \Rightarrow **module de Young, coefficient de Poisson**
- **Cisaillement** \Rightarrow **module de cisaillement (*shear*)**
- **Compression** \Rightarrow **module de compressibilité (*Bulk*)**



1 - Test de traction / étirement

Contrainte de traction

- Intensité de la force appliquée divisée par l'aire de la surface sur laquelle la force est exercée : $\sigma = F/A$
- Tension importante quand :
 - Intensité de la force importante
 - Surface petite

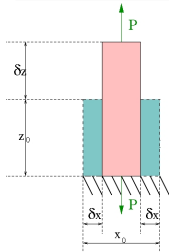
Exemple

- Corps rigide de masse m soumis à la force de gravité $\vec{F} = m\vec{g}$
- Corps posé sur un cylindre de rayon r
- Tension sur le cylindre : $\sigma = F/A = \frac{mg}{\pi r^2}$

Test de traction / étirement - Module de Young

Etirement

- Applique pression F sur un côté de surface A , de longueur L
- ⇒ Longueur change de ΔL
- ⇒ Déformation ou allongement relatif : $\frac{\Delta L}{L}$
- ⇒ Contrainte de traction : $\sigma = \frac{F}{A}$

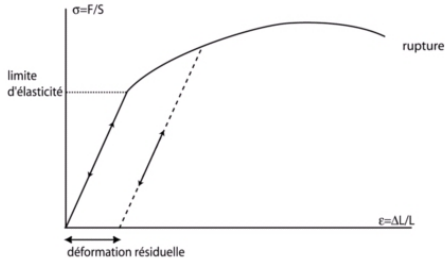


Module de Young

- Contrainte de traction / déformation
- ⇒ $E = \frac{F/A}{\Delta L/L} = \frac{\sigma}{\epsilon}$
- Loi de Hooke - loi de comportement linéaire :
contrainte (σ) = Young (E) * déformation (ϵ)

Module de Young (ou module d'élasticité)

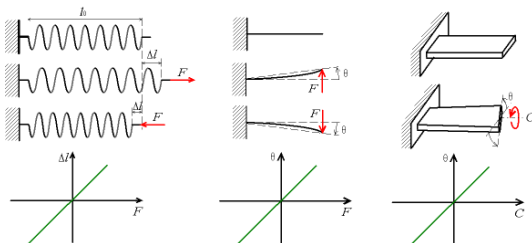
- **Module de Young** est caractérisé dans le cadre de déformation dite **élastique**, c.a.d. que le matériau revient à sa forme d'origine quand on relâche la contrainte
- **Partie linéaire** de la loi de comportement du matériau



- **Limite d'élasticité** : contrainte à partir de laquelle le matériau commence à se déformer de manière irréversible

Module de Young (ou module d'élasticité)

- Cas simple de déformation élastique : les ressorts



Images issues de Wikipedia

- Pour loi de déformation linéaire, le coefficient de proportionnalité est appelé raideur (k) du ressort
 - $F = k_1 \Delta L$ pour une traction-compression
 - $F = k_2 \theta$ pour une flexion
 - $C = k_3 \theta$ pour une torsion

Module de Young (ou module d'élasticité)

- **Module de Young très élevé : matériau rigide**
- Matériaux très rigides : acier, iridium, diamant
- Matériaux moins rigides : aluminium, plomb
- Matériaux peu rigides : matières plastiques et organiques

Module de Young (ou module d'élasticité)

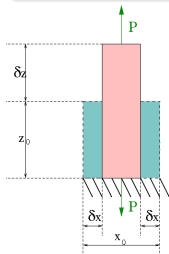
Modules de Young approximatifs de divers solides

Matériel	Module de Young (e) dedans GPa	Module de Young (e) en livrein ² (livre par pouce carré)
Le caoutchouc (petite contrainte)	0.01-0.1	1 500-15.000
Polyéthylène de faible densité	0.2	30 000
Polypropylène	1.5-2	217.000-290 000
Téréphtalate de polyéthylène	2-2.5	290.000-360 000
Polystyrène	3-3.5	435.000-505 000
Nylon	2-4	290.000-580 000
Chêne bois (le long du grain)	11	1 600.000
De haute résistance concret (une fois comprimé)	30	4 350.000
Magnésium métal	45	6 500.000
Aluminium alliage	69	10 000.000
Verre (tous les types)	72	10 400.000
Laiton et bronze	103-124	17 000.000
Titane (Ti)	105-120	15 000.000-17.500.000
Plastique renforcé de fibres de carbone (continu, le long du grain)	150	21 800 000
Fer travaillé et acier	190-210	30 000.000
Tungstène (w)	400-410	58.000.000-59.500.000
Carbure de silicium (SiC)	450	65 000 000
Carbure de tungstène (CARTE DE TRAVAIL)	450-650	65.000.000-94.000.000
Nanotube simple de carbone [1]	approximativement. 1.000	approximativement. 145.000.000
Diamant	1.050-1.200	150.000.000-175.000.000

Test de traction / étirement - Coefficient de Poisson

Elargissement

- Quand exerce un étirement ou une compression, la largeur de la pièce varie également, à l'inverse de l'allongement



Coefficient de Poisson

- $$\nu = -\frac{\text{Elargissement}}{\text{Déformation}} = -\frac{\text{Elargissement}}{(\Delta L/L)}$$

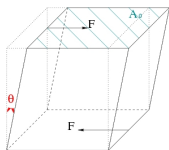
Coefficient de Poisson

- **Valeur du coeff. de Poisson comprise entre -1 et 0.5**
- **Matériau isotrope : valeur de $1/4$**
Même déformation dans toutes les directions
- **Matériau incompressible : valeur de $1/2$**
Exemple : Un ballon étant comprimé
- **Aucune conservation du volume : valeur de 0**
Exemple : boîte de conserve creuse en train d'être écrasée
- **Expansion du matériau lorsqu'il est soumis à une contrainte : valeur de -1**
Exemple : maillet de dessin animé frappant le sol et s'agrandissant au fur et à mesure qu'il frappe

2 - Test de cisaillement - Module de Coulomb

Cisaillement

- Cisaillement : variation de l'angle, qui n'est plus droit
- Cela correspond à des forces s'exerçant parallèlement à la face
- Contrainte = scission = F / A
- Déformation = écart à l'angle droit = cisaillement



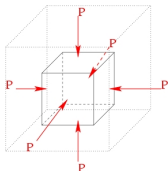
Module de cisaillement ou de Coulomb

- $G = \frac{\text{contrainte}}{\text{déformation}} = \frac{F/A}{\theta}$
- Si milieu isotrope (même comportement dans toutes les directions), $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

3 - Test de compression - Bulk modulus

Compression

- Exerce une force
 - isotrope : même valeur dans toutes les directions
 - perpendiculaire en tout point de la surface
- Pression $P = F/A \Rightarrow$ variation ΔP
- Objet de volume $V \Rightarrow$ variation ΔV



Module de compressibilité ou d'élasticité

- Contrainte volumique / déformation volumique
- $$\Rightarrow B = \frac{\Delta P}{\Delta V/V}$$

Mécanique des Milieux Continus - MMC

- Coefficient de Poisson, modules de Young, de compressibilité, et de cisaillement
⇒ Mécanique des Milieux Continus (MMC)
- MMC donne une description du comportement d'un objet qui se déforme ou se déplace sous l'influence de contraintes
⇒ Notions de déplacement, contrainte, déformation, loi de comportement, tenseurs, etc.
⇒ Allons un peu plus loin en MMC

Loi fondamentale de la dynamique - milieu continu

PFD appliqué à tout élément de volume :

- Au temps t_0 , volume dV centré autour position X
- Au temps t , volume dv centré autour de la position $x(t)$
- Nous obtenons alors :

$$m \vec{a}(t) = m \frac{d}{dt} \vec{v}(t) = \rho V \frac{d}{dt} \vec{v}(t) = \frac{d}{dt} \int_{D_t} \rho \vec{v}(t) dv.$$

- **PFD devient :**

$$\frac{d}{dt} \int_{D_t} \rho \vec{v}(t) dv = \int_{D_t} \rho \vec{f}_{\text{ext}} dv + \int_{\partial D_t} \vec{T} ds$$

- $\vec{f}_{\text{ext}} \in \mathbb{R}^3$ forces extérieures volumiques appliquées sur l'objet
- $\vec{T} \in \mathbb{R}^3$ forces appliquées sur la surface de l'objet

Vecteur de traction et tenseur de contraintes (1)

- \vec{T} : **vecteur de contraintes (ou de tractions)** qui correspond aux forces appliquées sur le bord externe de l'objet = forces appliquées par unité de surface = contraintes
- \vec{T} est défini pour une unité de surface ds autour de ce point :

$$\vec{T} = \sigma \cdot \vec{n}, \quad T_i = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} n_j$$

- $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ la normale à l'élément de surface ds
- σ tenseur de contrainte d'ordre 2

Vecteur de traction et tenseur de contraintes (2)

Tenseur de contrainte :

- Tenseur (matrice 3×3) qui caractérise l'état de contrainte
- Tenseur symétrique avec :

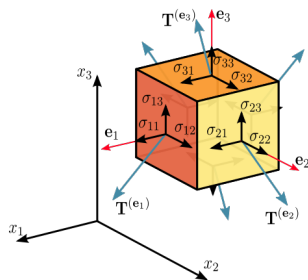
$$\sigma(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix}$$

Éléments diagonaux : contraintes normales

Éléments non diagonaux : contraintes de cisaillement

Vecteur de traction et tenseur de contraintes (3)

Tenseur de contrainte pour un élément 3D de matière :

On a comme relation : $\vec{T} ds = \vec{\text{div}} \sigma dv$

$$\vec{\text{div}} \sigma = \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial z} \right) \vec{e}_1 + \left(\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial z} \right) \vec{e}_2 + \left(\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} \right) \vec{e}_3$$

Loi fondamentale de la dynamique - milieu continu

- PFD s'écrit au final :

$$\rho \frac{d}{dt} \vec{v}(t) = \rho \vec{f}_{ext} + \operatorname{div} \sigma$$

- **Inconnues** : masse volumique ρ (volume de l'objet peut changer au cours du mouvement si pas incompressible), le vecteur vitesse \vec{v} et le tenseur de contraintes σ
- Pour résoudre cette équation, il faut **relier vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ au tenseur de contraintes σ**

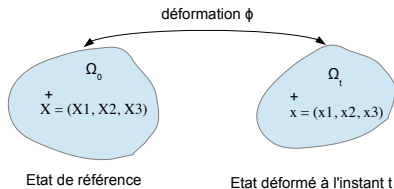
Cas des objets élastiques

- Objet élastique caractérisé par le fait qu'ils retournent à leur forme initiale une fois que nous relâchons la contrainte
- On souhaite caractériser la **déformation** d'un objet élastique
- Objet est composé d'un **ensemble de points**
- Nous allons observer la différence de **déplacement** entre un point de l'objet et un autre point

→ Lien entre les notions de déformation et de déplacement
(exemple de l'éponge)

Cas des objets élastiques - Déformation

- Nous considérons l'objet au travers de 2 états :
 - **état de référence** - Ω_0 (état non-déformé au temps t_0)
 - **état déformé** - Ω_t (état courant au temps t)
- La déformation Φ = relation entre les 2 configurations
 - Φ permet de passer de la position initiale \mathbf{X} d'un point de l'objet à position courante $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{X}, t)$ de ce point
 - Position \mathbf{X} = position initiale = constante dans le temps
 - Si objet élastique, déformation est réversible : $\mathbf{X} = \phi^{-1}(\mathbf{x}, t)$



Lien entre déformation et déplacement

- Déplacement d'un point de l'objet entre l'état de référence et l'état déformé :

$$\vec{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$$

- Relation directe entre déformation et déplacement :

$$\phi(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x} = \mathbf{X} + \vec{u}$$

Gradient des grandeurs physiques

- Gradient d'une quantité donne indication sur la variation de cette quantité dans toutes les directions de l'espace
- **Gradient du déplacement** : $\mathbb{U} = \nabla \vec{u} = \partial \vec{u} / \partial \mathbf{X} \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$
- **Gradient de la déformation** :
 $\mathbb{F} = \nabla \phi(\mathbf{X}, t) = \partial \phi(\mathbf{X}, t) / \partial \mathbf{X} = \partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{X} \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$
 - $F_{ij} = \partial x_i / \partial X_j$ pour $i, j = 1, 2, 3$
 - \mathbb{F} = jacobienne du mouvement défini par déformation ϕ
 - \mathbb{F} mesure pour chaque direction de l'espace la variation du point \mathbf{x} par rapport à la variation subie par le point \mathbf{X}

Gradient des grandeurs physiques

- Il est intéressant de relier \mathbb{U} à \mathbb{F} :

$$\begin{aligned}\mathbb{F} &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \phi(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} = \nabla \phi(\mathbf{X}, t) = \nabla(\mathbf{x} + \vec{u}) \\ &= \nabla \mathbf{x} + \nabla \vec{u} \\ &= \mathbb{1} + \mathbb{U}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{U} &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial \mathbf{X}} = \nabla \vec{u} = \nabla(\mathbf{x} - \mathbf{X}) = \nabla(\phi(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}) \\ &= \nabla \phi(\mathbf{X}, t) - \nabla \mathbf{X} \\ &= \mathbb{F} - \mathbb{1}\end{aligned}$$

- $\mathbb{F} = \mathbb{1} + \mathbb{U}$ ou $\mathbb{U} = \mathbb{F} - \mathbb{1}$
- $\frac{\partial x_i}{\partial X_j} = F_{ij} = \delta_{ij} + u_{ij}$ ou $\frac{\partial u_i}{\partial X_j} = F_{ij} - \delta_{ij}$

Tenseur de déformation

Tenseur de déformation :

- Tenseur de déformation (matrice 3×3) décrit l'état de déformation local résultant de contraintes (efforts internes)
- Il permet ainsi de quantifier la déformation avec

$$\epsilon(X) = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix}$$

Éléments diagonaux : étirement dans les 3 directions

Éléments non diagonaux : cisaillement

Tenseur déformation exprimé en fonction du gradient déplacement

Tenseur de déformation

- Tenseur de déformation doit être nul pour un mouvement de corps rigide (pas de variation entre 2 points de l'objet)
- Il existe plusieurs tenseurs de déformation en fonction de la déformation que nous souhaitons mettre en avant : tenseur de déformation de Cauchy-Green droit, de Cauchy-Green gauche, de Green-Lagrange (ou Green-Saint Venant), etc.

Tenseur de déformation de Cauchy-Green droit

- Le **tenseur de déformation de Cauchy-Green droit** se calcule à partir du carré du vecteur \vec{dx} avec ¹ :

$$\begin{aligned}(\vec{dx})^2 &= \vec{dx} \cdot \vec{dx} = (\mathbb{F} \cdot \vec{dX}) \cdot (\mathbb{F} \cdot \vec{dX}) \\ &= (\mathbb{F}^T \mathbb{F} \cdot \vec{dX}) \cdot \vec{dX} \\ &= \vec{dX} \cdot (\mathbb{F}^T \mathbb{F} \cdot \vec{dX})\end{aligned}$$

- Le tenseur de Cauchy-Green droit est défini par

$$\epsilon^{cd} = \mathbb{F}^T \mathbb{F}$$

1. A noter que nous avons utilisé la formule $\vec{v} \cdot \mathbb{A} \vec{u} = \mathbb{A}^T \vec{v} \cdot \vec{u}$ de l'algèbre tensorielle avec \vec{u}, \vec{v} des vecteurs et \mathbb{A} un tenseur d'ordre 2, en considérant dans notre cas $\vec{v} = \mathbb{F} \cdot \vec{dX}$, $\mathbb{A} = \mathbb{F}$ et $\vec{u} = \vec{dX}$.

Tenseur de déformation de Green-Lagrange

- Le **tenseur de déformation de Green-Lagrange** est calculé à partir de la différence entre les carrés de la configuration initiale et de la configuration déformée avec :

$$\begin{aligned}(\vec{dx})^2 - (\vec{dX})^2 &= \vec{dX} \cdot (\epsilon^{cd} \cdot \vec{dX}) - (\vec{dX} \cdot \vec{dX}) \\ &= \vec{dX} \cdot (\epsilon^{cd} \vec{dX} - \vec{dX}) \\ &= \vec{dX} \cdot (\epsilon^{cd} - \mathbb{1}) \cdot \vec{dX} \\ &= 2 \vec{dX} \cdot \left(\frac{1}{2}(\epsilon^{cd} - \mathbb{1}) \cdot \vec{dX}\right)\end{aligned}$$

- Le tenseur de Green-Lagrange est défini par

$$\epsilon^g = \frac{1}{2}(\epsilon^{cd} - \mathbb{1}) = \frac{1}{2}(\mathbb{F}^T \mathbb{F} - \mathbb{1})$$

Tenseur de déformation de Green-Lagrange

- Pour obtenir la formulation du tenseur de Green-Lagrange en fonction du déplacement, nous utilisons la relation $\mathbb{F} = \mathbb{1} + \mathbb{U}$:

$$\begin{aligned}\epsilon^g &= \frac{1}{2}(\mathbb{F}^T \mathbb{F} - \mathbb{1}) \\ &= \frac{1}{2}((\mathbb{1} + \mathbb{U})^T \cdot (\mathbb{1} + \mathbb{U}) - \mathbb{1}) \\ &= \frac{1}{2}((\mathbb{1} + \mathbb{U})^T + (\mathbb{1} + \mathbb{U})^T \cdot \mathbb{U} - \mathbb{1}) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbb{U}^T + \mathbb{U} + \mathbb{U}^T \cdot \mathbb{U})\end{aligned}$$

Tenseur de déformation de Green-Lagrange

- Nous avons donc :

$$\epsilon^g(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \left(\nabla U^T(\mathbf{X}) + \nabla U(\mathbf{X}) + \nabla U^T(\mathbf{X}) \nabla U(\mathbf{X}) \right)$$

avec

$$\nabla U(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial U_x(\mathbf{X})}{\partial x} & \frac{\partial U_x(\mathbf{X})}{\partial y} & \frac{\partial U_x(\mathbf{X})}{\partial z} \\ \frac{\partial U_y(\mathbf{X})}{\partial x} & \frac{\partial U_y(\mathbf{X})}{\partial y} & \frac{\partial U_y(\mathbf{X})}{\partial z} \\ \frac{\partial U_z(\mathbf{X})}{\partial x} & \frac{\partial U_z(\mathbf{X})}{\partial y} & \frac{\partial U_z(\mathbf{X})}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

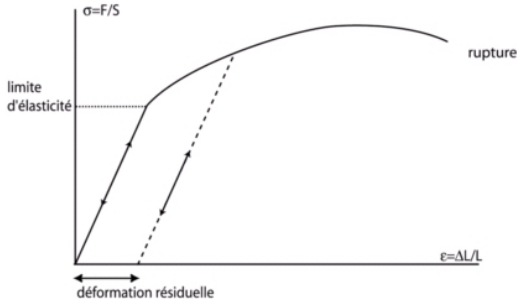
Partie linéaire - Cas élasticité linéaire avec loi de Hooke

Partie non-linéaire - Cas élasticité non-linéaire

Loi de comportement

Loi de comportement des matériaux :

- Relation entre la contrainte et la déformation : $[\sigma] = [C][\epsilon]$



→ Il faut trouver la loi qui correspond au matériau qu'on souhaite simuler → Tenseur $[C]$ est une donnée du problème (connu)

Loi de comportement - Elasticité linéaire

Cas de l'élasticité linéaire :

- Partie linéaire de la courbe précédente
- Concerne les petites déformations ($< 10\%$ taille objet)
- Déformation élastique est réversible : objet retourne à son état initial quand la contrainte est supprimée
- Utilisation de la partie linéaire du **tenseur de déformation** de Green-Saint Venant :

$$\epsilon(X) = \frac{1}{2} \left(\nabla U^T(X) + \nabla U(X) \right)$$

Loi de comportement - Elasticité linéaire

Loi de comportement pour l'élasticité linéaire (**matériau isotrope**) =
Loi de Hooke

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{23} \end{bmatrix}$$

avec λ et μ coefficients de Lamé (dépendant du matériau) : $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{23} \end{bmatrix}$$

Loi de comportement - Élasticité non-linéaire

Cas de l'élasticité non-linéaire :

- Permet de simuler des déformations plus grandes
- Plusieurs lois de comportement possibles pour le cas non-linéaire (matériaux hyper-élastiques)
- Par ex. utilisation du tenseur de déformation de Green-Saint Venant :

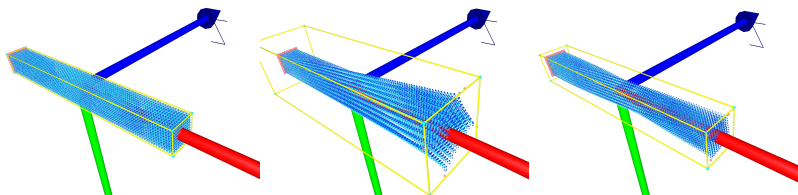
$$\frac{1}{2} \left(\nabla U^T(X) + \nabla U(X) + \nabla U^T(X) \nabla U(X) \right)$$

- Mais existe d'autres lois : Mooney-Rivlin, Neo-Hooke, etc.
- Expérimentations pour savoir quelle loi correspond au matériau

Linéaire vs. non-linéaire

Exemple de comportement :

- Hooke (linéaire) vs. Saint Venant-Kirchhoff (non-linéaire)



→ Elargissement de la poutre dans le cas de l'élasticité linéaire car n'est pas invariant par rotation

→ Quand un élément de volume subit une rotation, interprété comme une augmentation de l'énergie élastique se traduisant par une distorsion

Simulation en MMC

Et donc ?

Comment simuler comportement objet déformable ?

- Nous souhaitons résoudre l'équation du mouvement :

$$\rho \frac{d}{dt} \vec{v}(t) = \rho \vec{f}_{ext} + \operatorname{div} \sigma$$

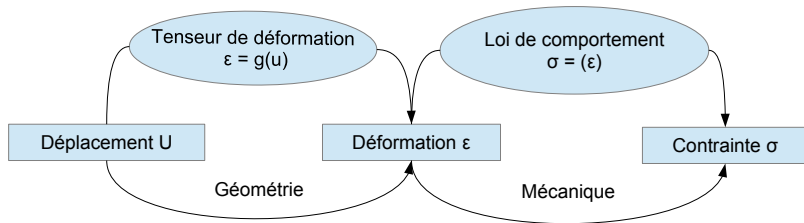
- Besoin de relier la vitesse $\vec{v}(t)$ au tenseur de contraintes σ
- Lien effectué en exprimant la vitesse et le tenseur de contraintes en fonction du déplacement $\vec{u}(t)$

Simulation en MMC

- Pour la vitesse, cette relation est immédiate puisque la vitesse correspond à la dérivée par rapport au temps du déplacement avec $\vec{v}(t) = d\vec{u}(t)/dt$.
- Pour le tenseur de contraintes, nous allons utiliser la loi de comportement de l'objet puisqu'elle permet de relier le tenseur de contraintes σ à la déformation ϵ
- Ensuite il suffit d'exprimer la déformation en fonction du déplacement $\vec{u}(t)$, pour au final relier σ à $\vec{u}(t)$.

Simulation en MMC

- Lien établi entre contrainte σ et déplacement $\vec{u}(t)$:

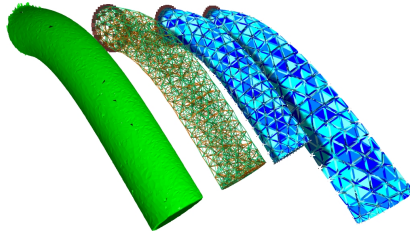


Pour définir équation du mouvement d'un objet, nous devons choisir tenseur de déformation et loi de comportement

Simulation en MMC

Comment résoudre l'équation continue ?

- Discrétisation de l'objet en éléments
 - Maille du maillage = noeuds + fonctions d'interpolation
 - Formulation déplacement de tout point à l'intérieur d'un élément en fonction des valeurs aux noeuds
- Résolution équation pour obtenir déplacement $\vec{u}(t)$



Méthode des Éléments Finis (MEF)

- Résolution par la MEF pour obtenir déplacement $\vec{u}(t)$:
 - Discrétisation du domaine en éléments
 - Définition de fonctions de formes
 - Loi de comportement : lien entre contrainte et déformation
 - Tenseur de déformation : lien entre déformation et déplacement
 - Déduit le lien entre la contrainte et le déplacement
 - Equation bilan du système : Force = ...
 - Bilan des efforts, des contraintes (exprimé en fonction du déplacement)
 - Sort le U de la formulation
 - Equation du mouvement : Force = ...
 - Sort le U de la formulation
- Assemblage de la matrice K
- Résolution pour obtenir U

Comment simuler comportement objet déformable ?

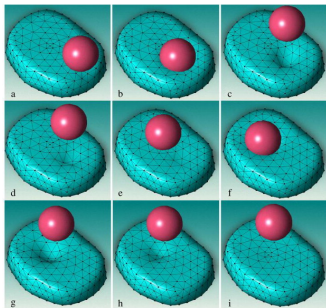
- Alternatives possibles pour modéliser objets déformables
 - ① **Basée sur des principes physiques, nécessitant résolution systèmes d'équations différentielles**
⇒ objet discrétisé en un ensemble de masses connectées par des ressorts (système masses-ressorts)
 - ② **Non basées sur des principes physiques mais solutions semblent physiquement correctes**
⇒ objet borné par une surface paramétrique avec des points de contrôle (B-spline, NURBS)
 - ③ **Déformation de la région contenant l'objet déformable**
Surface de l'objet représentée par un maillage triangulaire ou par une surface paramétrique avec points de contrôle
⇒ déformation de la région engendre la déformation de l'objet

Comment simuler comportement objet déformable ?

- ④ **Objet modélisé par une région bornée par une surface définie implicitement par $F(x, y, z) = 0$**
Intérieur de l'objet = ens. des points tels que $F(x, y, z) < 0$
Force exercée sur l'objet simulée par l'ajout d'une fonction de déformation $D(x, y, z)$ à $F(x, y, z)$
⇒ surface déformée définie implicitement par
 $F(x, y, z) + D(x, y, z) = 0$
⇒ intérieur de l'objet déformé défini par
 $F(x, y, z) + D(x, y, z) < 0$

Comment simuler comportement objet déformable ?

Etude des systèmes masses-ressorts



Système masses-ressorts

Définition

- Objet déformable modélisé par un ensemble de masses connectées par des ressorts
- Les objets ainsi modélisés peuvent être :
 - des courbes (cheveux, cordes, etc.) \Rightarrow 1 dimension
 - des surfaces (textiles, surface de l'eau, etc.) \Rightarrow 2 dimensions
 - des volumes (objets volumiques visqueux) \Rightarrow 3 dimensions

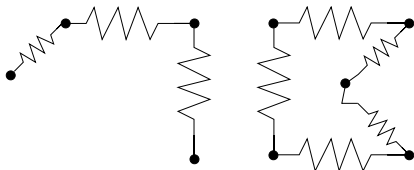
Complexité du système dépend

- du nombre de masses
- de leurs connections

Système masses-ressorts - 1D

Cas 1D : ligne polygonale

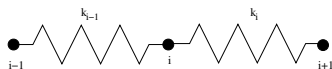
- Soit une courbe ouverte avec deux points terminaux
- Soit une courbe fermée (tous les points sont reliés)
- Chaque sommet représente une masse
- Chaque arête représente un ressort reliant les deux masses se trouvant aux deux extrémités de l'arête



Système masses-ressorts - 1D

Formulation pour une chaîne ouverte

- Système avec p masses et $p - 1$ ressorts les connectant
- Masses m_i de positions \mathbf{x}_i , pour $1 \leq i \leq p$
- Ressort i relie les masses m_i et m_{i+1}
- Point i connecté par deux ressorts aux points $i - 1$ et $i + 1$
 \Rightarrow point i soumis aux forces exercées par ces deux ressorts



Système masses-ressorts - Animation 1D

Paramètres du système

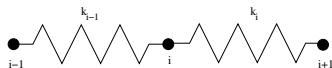
- Ressort reliant i et $i + 1$: raideur k_i , longueur au repos l_i
- \mathbf{F}_i : forces externes appliquées au point i (vent, gravité, etc.)

Formulation du système différentielle

- Pour le point i :

$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i =$ somme des forces appliquées sur i

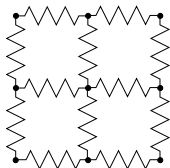
$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = k_{i-1} (\|\mathbf{x}_{i-1} - \mathbf{x}_i\| - l_{i-1}) + k_i (\|\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i\| - l_i) + \mathbf{F}_i$$



Système masses-ressorts - Animation 2D

Définition de la surface

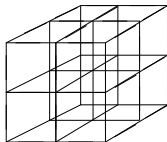
- Surface représentée par un ensemble de particules
- Particule i connectées à 4 particules voisines
- Pour le point i : $m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \sum_j \mathbf{f}_{i,j} + \mathbf{F}_i$
avec $\mathbf{f}_{i,j} = k_{ij} (\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| - l_{ij})$, j voisin de i



Système masses-ressorts - Animation 3D

Définition du volume

- Volume représentée par un ensemble de particules
- Particule i connectées à 8 particules voisines
- Pour le point i : $m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \sum_j \mathbf{f}_{i,j} + \mathbf{F}_i$
avec $\mathbf{f}_{i,j} = k_{ij} (\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| - l_{ij})$, j voisin de i



Système masses-ressorts - Généralisation

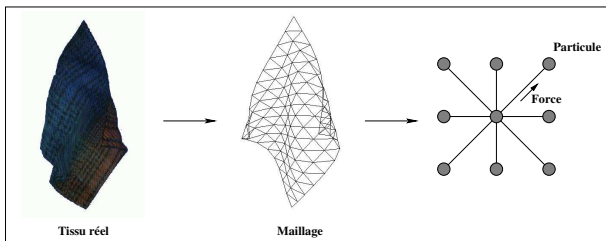
Formulation d'un système masses-ressorts

- Système contenant p particules de masses m_i , de position \mathbf{x}_i
- Chaque ressort relie masses m_i et m_j , de raideur $k_{ij} > 0$, de longueur au repos l_{ij}
- Soit $\mathcal{A}_i =$ ensemble des indices j tels que m_i connectée à m_j
- Equation du mouvement de la particule i :

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \sum_{j \in \mathcal{A}_i} k_{ij} (\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| - l_{ij}) + \mathbf{F}_i$$

Application à une simulation de textiles

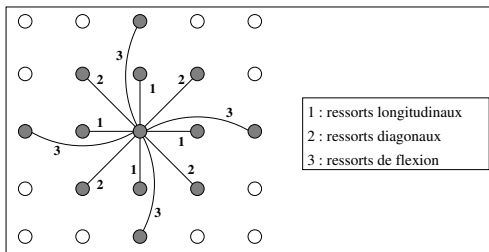
- Discrétisation du textile en un maillage polygonal
- Sommets correspondent aux particules
- Topologie définit les interactions



[Breen, House, Getto 1994]

Application à une simulation de textiles

- Système masses-ressorts définit les interactions entre particules
 - Particules connectées par des ressorts
 - Paramètres physiques des ressorts : k , l_0 et ν



[Provot 1995]

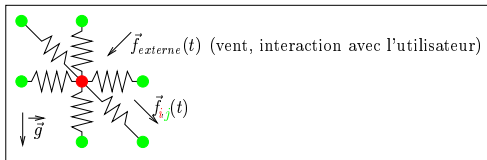
Rappel dynamique Newtonienne

Boucle d'animation

- Calcul des forces appliquées sur les particules : forces exercées par les ressorts
- Calcul des accélérations : principe fondamental de la dynamique
- Intégration pour obtenir les nouvelles vitesses et positions

Calcul des forces

- Calcul des forces exercées sur chaque particule
 - $\vec{f}_i(t) = \sum_{j|j \text{ voisin de } i} [\vec{f}_{i,j}^e(t) + \vec{f}_{i,j}^v(t)] + \text{gravité} + \text{interactions}$



$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{f}_{i,j}^e(t) = k_{ij} (\|x_i(t) - x_j(t)\| - l_{ij}) \frac{x_i(t) - x_j(t)}{\|x_i(t) - x_j(t)\|} \quad \text{élasticité} \\ \vec{f}_{i,j}^v(t) = \left(\nu_{ij} (\dot{x}_i(t) - \dot{x}_j(t)) \cdot \frac{x_i(t) - x_j(t)}{\|x_i(t) - x_j(t)\|} \right) \frac{x_i(t) - x_j(t)}{\|x_i(t) - x_j(t)\|} \quad \text{viscosité} \end{array} \right.$$

Calcul des accélérations

- Loi fondamentale de la dynamique appliquée à chaque particule i :

$$\ddot{x}_i(t) = m_i^{-1} f_i(x(t), \dot{x}(t))$$

- $\ddot{x}_i(t)$: accélération de la particule i au temps t
- m_i : masse de la particule i
- f_i : forces exercées sur la particule i
- $x(t)$: vecteur des positions des particules au temps t
- $\dot{x}(t)$: vecteur des vitesses des particules au temps t

Équation du mouvement

- Système différentiel associé aux p particules

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) &= M^{-1}f(t, x(t), \dot{x}(t)) \\ \dot{x}(t_0) &= v_0 \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

→ f dépend de la définition des interactions

- Peut être transformé en système du premier ordre

$$\begin{pmatrix} \dot{v}(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M^{-1}f(t, x(t), v(t)) \\ v(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v(t_0) \\ x(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \\ x_0 \end{pmatrix}.$$

- Intégration pour obtenir les vitesses et les positions

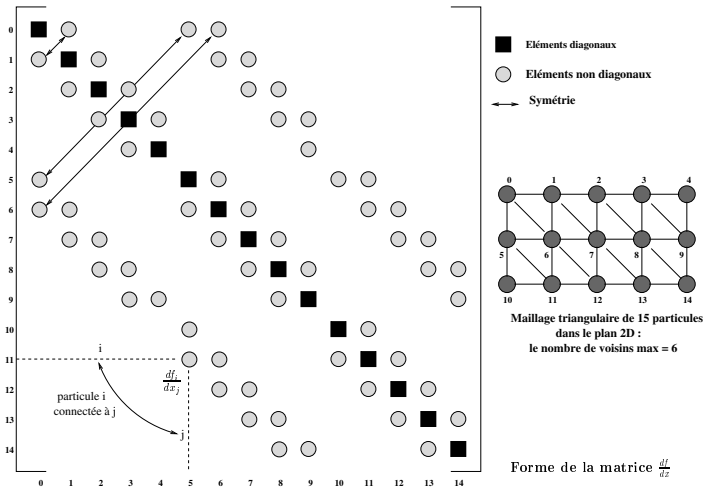
Euler implicite - Évaluation des matrices $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial v}$

- Définition de [Volino, Magnenat-Thalmann 2000]

Matrices creuses des contributions des forces

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = k_{ij} u_{ij} u_{ij}^T \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \sum_j \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f_i}{\partial v_j} = \nu_{ij} u_{ij} u_{ij}^T \\ \frac{\partial f_i}{\partial v_j} = -\frac{\partial f_j}{\partial v_i} \\ \frac{\partial f_i}{\partial v_j} = \sum_j \frac{\partial f_j}{\partial v_j} \end{array} \right.$$

Euler implicite - Matrices des contributions des forces



Animation possible à réaliser en TP

Travail demandé - Regarder la page Web

- Récupérer l'archive du code existant
- Comprendre et compiler le code grâce à la doc
- Compléter le code :
 - Fonction d'affichage
 - Calcul des forces, accélérations, vitesses et des positions
 - Rajouter de l'interaction (mouvement coin du tissu)
 - Collision du tissu avec le sol
 - ...

