

M2 Image, Développement et Technologie 3D
(ID3D) - UE Animation, Corps Articulés et
Moteurs Physiques
Partie - Simulation par modèles physiques
Cours 2 - Dynamique Newtonienne

Florence Zara

LIRIS - Université Lyon 1

<http://liris.cnrs.fr/florence.zara>

E-mail: florence.zara@liris.cnrs.fr

Plan du cours

Dynamique Newtonienne

- Rappel de cinématique
- Lois de Newton
- Boucle de simulation
- Quelques exemples de forces

Moteur physique

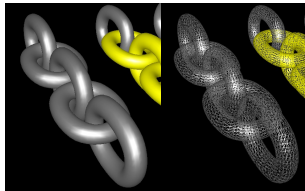
- Méthodes d'intégration numérique
- Stabilité des méthodes d'intégration

Cinématique

Point matériel : morceau de matière suffisamment petit pour repérer sa **position** par ses coordonnées.

Corps solide : assimilé à un point matériel si son mouvement est limité à l'étude du mouvement de son **centre de masse**.

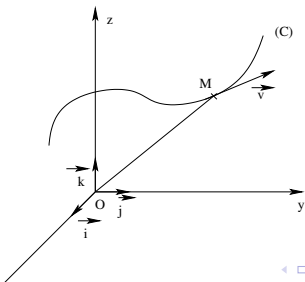
Objet déformable basé sur un système de particules : discrétisation de l'objet en un nombre fini de particules (p), particule i de masse m_i et de position x_i avec $0 \leq i \leq p$.



Cinématique du point matériel

Coordonnées cartésiennes en 3D

- **Position** : $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$
- **Trajectoire** : ensemble des positions successives de M lorsque ses coordonnées varient au cours du temps (courbe C)
- **Equation horaire** : $\vec{X}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$
↪ position du point M au cours du temps



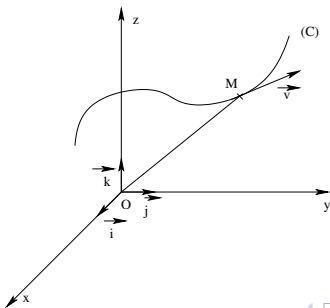
Cinématique du point matériel

Coordonnées cartésiennes en 3D

- **Vitesse** : $\vec{V}(t) = \dot{\mathbf{X}}(t) = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k}$
- **Accélération** : $\vec{A}(t) = \dot{\vec{V}}(t) = \ddot{\mathbf{X}}(t) = \ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t)\vec{j} + \ddot{z}(t)\vec{k}$

Notation « point » = dérivée par rapport au temps $t = d/dt$

Vitesse de la particule au temps t = longueur du vecteur vitesse



Lois de Newton

Notions de masse et de force

- Mouvement d'un objet caractérisé par sa position, vitesse et accélération
- Objet également caractérisé par sa **masse** (en Kg) et par sa **force** (en N)
- Accélération de l'objet proportionnelle à l'intensité de la force
- Force d'un Newton = intensité de la force requise pour donner une accélération d'un mètre par seconde au carré à une masse d'un kilogramme

Lois de Newton

Première loi

- En l'absence de toute force externe, un objet au repos reste au repos.
- Si l'objet est en mouvement, et qu'aucune force extérieure ne lui est appliquée, sa vitesse reste constante
↪ le mouvement d'un objet ne peut être modifié que par l'intervention d'une force

Seconde loi = principe fondamentale de la dynamique

- Soit un objet de masse constante m , accélération \ddot{x} , force F .
- **Equation du mouvement** : $F = m\ddot{x}$

Boucle de simulation

Simulation basée sur l'équation du mouvement : $F = m\ddot{x}$
 \Rightarrow accélération de l'objet définie par : $\ddot{x} = F/m$

Boucle de simulation basée sur la dynamique Newtonienne

- 1 **Calcul des forces F appliquées sur l'objet**
(dépend du modèle physique employé pour modéliser l'objet)
- 2 **Calcul de la nouvelle position x de l'objet**
Résolution système différentielle du second ordre ($\ddot{x} = F/m$)
pour obtenir le mouvement de l'objet (position x)
ordre = degré de la plus haute dérivée

Dynamique Newtonienne

Etape 1 : Calcul des forces appliquées sur l'objet

Quelles forces peuvent être appliquées ?

Forces de gravitation

- Soient deux masses de 1 Kg distantes de 1 m ayant des interactions gravitationnelles
- Ces deux masses s'attirent avec une force d'intensité égale mais de directions opposées

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{N} \cdot (\text{Kg}^{-2}) \cdot (\text{m}^2)$$

- De manière générale, pour deux masses m et M distantes de r , la loi universelle de la gravitation de Newton donne :

$$F_{\text{gravité}} = \frac{GmM}{r^2}$$

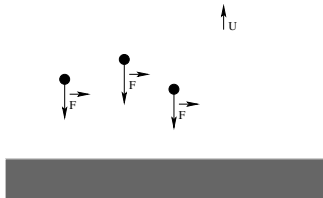
Quelles forces peuvent être appliquées ?

Constante et force de gravité

- Terre représentée par son centre de masse M
- Constante de gravité :

$$g = \frac{GM}{r^2} = 9.81 m.s^{-2} = 9.81 N$$

- **Force de gravité appliquée à un objet de masse m :**
 $\vec{F} = -mg\vec{u}$ (force à utiliser pour faire tomber un objet)



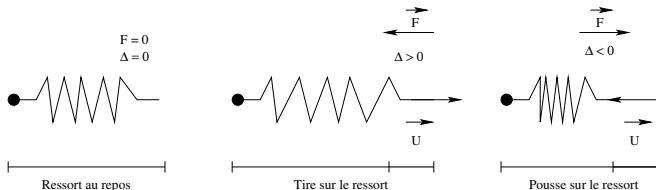
Quelles forces peuvent être appliquées ?

Force exercée par un ressort

- Un côté du ressort est fixé, l'autre est libre pour pouvoir pousser ou tirer sur le ressort
- Force de rappel exercée par le ressort (loi de Hooke) :

$$\vec{F} = -k\Delta\vec{u}$$

- Force toujours opposée à la déformation
- Δ le déplacement du ressort
- k la constante de raideur du ressort ($N.m^{-1}$)



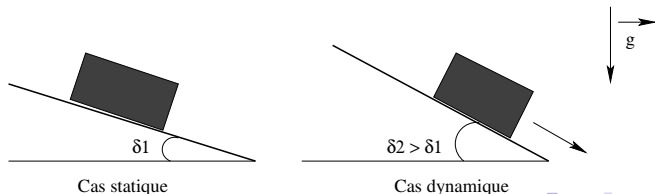
Quelles forces peuvent être appliquées ?

Forces de dispersion

- Force pour laquelle l'énergie du système décroît
- Exemple : forces de friction, amortissement

Forces de friction / frottement

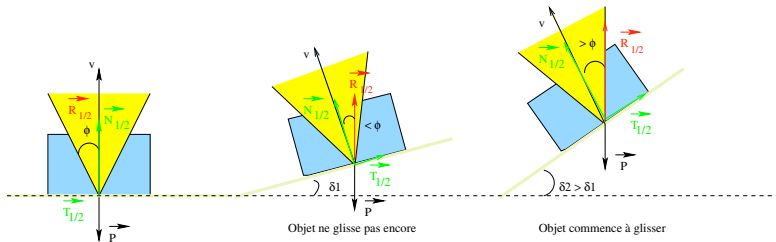
- Force de frottement entre deux objets
↪ par exemple glissement d'une brique sur une plaque
- Brique glisse si l'angle d'inclinaison atteint une certaine valeur



Quelles forces peuvent être appliquées ?

Forces de friction / frottement entre deux objets

- Réaction $R_{12}^{\vec{}}$: comp. tangentielle ($T_{12}^{\vec{}}$) et normale ($N_{12}^{\vec{}}$)
- Coefficient d'adhérence = $\tan \phi \geq \frac{T}{N}$
→ cône de frottement d'adhérence
- Objet commence à glisser quand angle $\geq \phi$ (angle d'adhérence)



Quelles forces peuvent être appliquées ?

Force de friction

- Force tangente à la surface, opposée au déplacement

$$F = \mu F_N$$

- Deux coefficients de friction μ
 - **Coefficient de friction statique** : μ_s (objet à l'arrêt)
Force de friction statique : force minimale à appliquer pour que le solide se déplace (s'oppose au déplacement - même à l'arrêt)
 - **Coefficient de friction dynamique** : μ_d (objet en mouvement) Force de friction dynamique s'oppose au mouvement quand l'objet bouge
 - $\mu_d < \mu_s \implies \mu_d F_N < \mu_s F_N \implies F_{\text{friction}_{\text{dynamique}}} < F_{\text{friction}_{\text{statique}}}$

Quelles forces peuvent être appliquées ?

Amortissement

- Partie de l'énergie totale dispersée (souvent en chaleur) créant une force d'amortissement
- Force de direction opposée au déplacement de l'objet
- Coefficient d'amortissement : $\nu (> 0)$
- Force : $\vec{F} = -\nu\vec{v}$

Beaucoup de forces au final

Etat d'équilibre

- Plusieurs forces sont appliquées sur un objet
- Objet est à l'équilibre si :
 - $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0$, avec \vec{F}_i forces extérieures appliquées à l'objet
- Simulation jusqu'à cet état d'équilibre (si pas de nouvelles forces dues par exemple à des interactions)

Dynamique Newtonienne

Etape 2 : Résolution système différentielle du second ordre

$$\ddot{x} = F/m$$

Rappel du problème

Dynamique Newtonienne

- Objet de masse m
- Position \mathbf{x} , vitesse $\dot{\mathbf{x}}$, accélération $\ddot{\mathbf{x}}$
- Ensemble des forces exercées sur l'objet : \mathbf{F}
- Seconde loi de Newton : $m \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F} \Rightarrow \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}/m$

↔ Système d'équations différentielles du 2^e ordre à résoudre pour obtenir la nouvelle position (\mathbf{x})

Problème : méthodes d'intégration
pour résoudre des systèmes du 1^{er} ordre

Reformulation du système différentiel

Passage du 2^e au 1^{er} ordre

- Système peut être reformulé en un système du 1^{er} ordre
- Considère la vitesse comme une variable du système avec
 $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{F}}{m}$
- Système d'équations différentielles devient alors :

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \frac{\mathbf{F}}{m} \end{bmatrix}$$

Dynamique Newtonienne

Définition du système

- Définition de la structure de l'objet :
$$\begin{bmatrix} x \\ v \\ F \\ m \end{bmatrix}$$
- Position dans l'espace des phases :
$$\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}$$
- Vitesse dans l'espace des phases :
$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ F/m \end{bmatrix}$$

But de la simulation :

mettre à jour le vecteur $\mathbf{S}(t) = [\mathbf{xv}]^T$ au cours du temps

↔ mettre à jour les vitesses et les positions (état de l'objet)

Dynamique Newtonienne

Cas d'un objet discrétisé en n particules

- Définition d'une particule i :
$$\begin{bmatrix} x_i \\ v_i \\ F_i \\ m_i \end{bmatrix}$$
- Applique la loi de Newton aux n particules :

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ x_n \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{v}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \\ \dot{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \frac{F_1}{m_1} \\ \vdots \\ v_n \\ \frac{F_n}{m_n} \end{bmatrix}$$

Dynamique Newtonienne - Point de vue animation 3D

Données de départ au temps t_0

- Masse de l'objet : m
- Position initiale de l'objet : $\mathbf{x}(t_0)$
- Vitesse initiale de l'objet : $\mathbf{v}(t_0)$
- Pas de temps de la simulation : h

Boucle de l'animation au cours du temps

- 1 Affichage de l'objet : position au temps t_0
- 2 Calcul des forces exercées sur l'objet au temps t_0 : $\mathbf{F}(t_0)$
- 3 Calcul de l'accélération au temps t_0 : $\mathbf{a}(t_0) = \mathbf{F}(t_0)/m$
- 4 **Intégration** de $\mathbf{a}(t_0)$ pour obtenir $\mathbf{v}(t_0 + h)$
- 5 **Intégration** de $\mathbf{v}(t_0)$ pour obtenir $\mathbf{x}(t_0 + h)$
- 6 et on boucle...

Suite du cours - Comment on intègre ?

Moteur Physique

- Différentes méthodes d'intégration numérique
 - Méthode d'Euler
 - Taylor
 - Runge-Kutta
 - Verlet
- Critère pour choisir : la stabilité des méthodes d'intégration

Étude des méthodes d'intégration numérique

Formulation abstraite du système EDO du 1^{er} ordre

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), t \geq t_0 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

avec $\dot{x}(t)$ dérivée de $x(t)$ par rapport à t

Connaissant $\dot{x}(t)$ pour tout t , on cherche $x(t)$

- Intégration de la vitesse $\dot{x}(t)$ pour obtenir la position $x(t)$
- $x(t) = \int \dot{x}(t) dt = \int f(t, x(t)) dt$
- Étude des méthodes sur cette formulation abstraite

Méthodes d'intégration numérique

Choix de la méthode d'intégration

- Il existe de nombreuses méthodes d'intégration
- Compromis entre le temps de calcul et la précision / stabilité
- Deux grandes classes :
 - méthodes explicites
 - méthodes implicites

Théorème de Taylor

■ Si $x(t)$ et ses dérivées $x^{(k)}(t)$, pour $1 \leq k \leq n$ sont continues sur l'intervalle fermé $[t_0, t_1]$ avec $x^{(n)}(t)$ dérivable sur l'intervalle ouvert (t_0, t_1) , alors il existe un $\tau \in [t_0, t_1]$ tel que :

$$\begin{aligned}x(t_1) &= x(t_0) + \frac{\dot{x}(t_0)}{1!}(t_1 - t_0) + \frac{\ddot{x}(t_0)}{2!}(t_1 - t_0)^2 + \dots + \frac{x^{(n)}(t_0)}{n!}(t_1 - t_0)^n + R(t_1) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{x^{(k)}(t_0)}{k!}(t_1 - t_0)^k + R(t_1)\end{aligned}$$

avec $R(t_1) = \frac{x^{(n+1)}(\tau)}{(n+1)!}(t_1 - t_0)^{n+1}$ (erreur généralement bornée)

et $\sum_{k=0}^n \frac{x^{(k)}(t_0)}{k!}(t_1 - t_0)^k$ polynôme de Taylor de degré n . ■

Méthode d'Euler explicite

Présentation de la méthode pour $\dot{x}(t_i) = f(t_i, x(t_i))$

- Méthode d'Euler utilise le théorème de Taylor avec $n = 1$ sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$, avec $h = t_{i+1} - t_i > 0$ et $\tau \in [t_i, t_{i+1}]$:

$$\begin{aligned}x(t_{i+1}) &= x(t_i) + \dot{x}(t_i)h + \ddot{x}(\tau)\frac{h^2}{2} \\ &= x(t_i) + h f(t_i, x(t_i)) + \ddot{x}(\tau)\frac{h^2}{2}\end{aligned}$$

Méthode d'Euler explicite

Reformulation

- Soit $x_i = x(t_i)$ pour tout i avec x_i valeur exacte de la solution de l'équation différentielle au temps t_i
- Soit y_i l'approximation de x_i
- Ne tient pas compte du terme de l'erreur
- La méthode d'Euler explicite s'écrit sous la forme :

$$y_{i+1} = y_i + h f(t_i, y_i), i \geq 0, y_0 = x_0$$

Méthode d'Euler explicite

Concrètement

- Au temps t_0 , x_0 connu
 - $y_0 = x_0$
- Au temps t_1 , première approximation :
 - $y_1 = y_0 + h f(t_0, y_0)$
- Au temps t_2 , on continue à partir de cette approximation :
 - $y_2 = y_1 + h f(t_1, y_1)$
- etc.

Méthode d'Euler explicite

Autre manière de l'appréhender

- Temps est décomposé en intervalles de longueur h
- Solution au temps t va fournir la solution au temps $(t + h)$
- Dérivée $y'(t)$ remplacée par son approximation mathématique

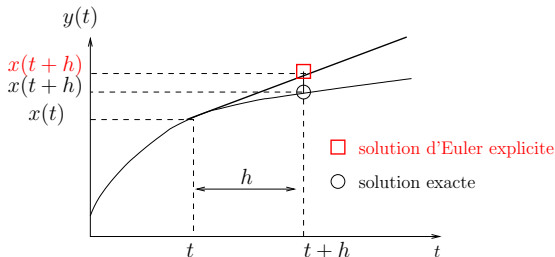
$$\frac{y(t+h) - y(t)}{h} \approx y'(t) = f(t, y(t))$$

Formulation du schéma pour un avancement h dans le temps

$$y(t+h) = y(t) + h f(t, y(t))$$

Méthode d'Euler explicite - Interprétation géométrique

- Revient à calculer la tangente à la solution au temps t pour obtenir la solution au temps $t + h$
- Séquence d'approximations $Y_n \approx y(t_n) = y(t_0 + nh)$



- Attention à la taille des intervalles de temps
- Méthode d'ordre 1 (elle converge linéairement)

Méthode d'Euler explicite - Point de vue animation 3D

Données

Forces au temps t : $f(t, x(t), v(t))$

Vitesse au temps t : $v(t)$

Position au temps t : $x(t)$

Schéma d'intégration numérique

Accélération au temps t : $\dot{v}(t) = M^{-1}f(t, x(t), v(t))$

Vitesse au temps $t + h$: $v(t + h) = v(t) + h \dot{v}(t)$

Position au temps $t + h$: $x(t + h) = x(t) + h v(t)$

Bilan

- Méthode très simple et beaucoup utilisée
- Mais méthode instable et peu précise

Méthode d'Euler semi-implicite - Point de vue animation 3D

En pratique, utilise schéma d'Euler semi-implicite :

- Encore plus facile à mettre en oeuvre
- Plus stable

Données

Forces au temps t : $f(t, x(t), v(t))$

Vitesse au temps t : $v(t)$

Position au temps t : $x(t)$

Schéma d'intégration numérique

$$\text{Accélération au temps } t : \quad \dot{v}(t) = M^{-1}f(t, x(t), v(t))$$

$$\text{Vitesse au temps } t + h : \quad v(t + h) = v(t) + h \dot{v}(t)$$

$$\text{Position au temps } t + h : \quad x(t + h) = x(t) + h v(t + h)$$

Méthodes de Taylor d'ordres plus élevés

- **Méthode d'Euler explicite :**
utilisation du polynôme de Taylor de degré 1 de $x(t)$ pour obtenir une approximation de $x(t + h)$
- **Utilisation du polynôme avec degré plus élevés :**
méthodes de Taylor d'ordres plus élevés

Méthode avec une formulation intégrale

Formulation initial

- Problème initial : $\dot{x} = f(t, x), t \geq t_0, x(t_0) = x_0$
- On cherche : $x(t) = \int f(t, x) dt$
- Sur intervalle $[t_i, t_{i+1}]$,
$$x(t) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, x) dt = [F(t, x)]_{t_i}^{t_{i+1}} = F(t_{i+1}) - F(t_i)$$
avec $F(t, x) = x(t)$ la primitive de $\dot{x}(t)$
- On a donc : $\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, x) dt = x(t_{i+1}) - x(t_i)$
$$\Rightarrow x(t_{i+1}) = x(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, x(t)) dt$$

Reformulation

- Soit $\phi(t) = f(t, x(t)), \phi(t) > 0$
$$\Rightarrow x(t_{i+1}) = x(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \phi(t) dt$$
- **Intégrale** = surface bornée par la courbe de $\phi(t)$, l'axe t , et lignes verticales $t = t_i$ et $t = t_{i+1}$

Méthode avec une formulation intégrale

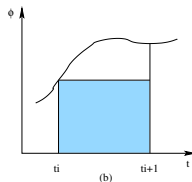
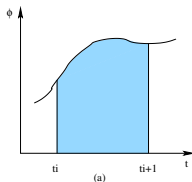
Approximation de l'intégrale par un rectangle

- Figure (b) : **approximation de l'intégrale par un rectangle**

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, x(t)) dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \phi(t) dt \doteq (t_{i+1} - t_i) \phi(t_i) = (t_{i+1} - t_i) f(t_i, x_i)$$

$$\Rightarrow x(t_{i+1}) = x(t_i) + (t_{i+1} - t_i) f(t_i, x_i)$$

- Soient : $x(t_i) = x_i$, y_i approximation de x_i et $h = t_{i+1} - t_i$
 \Rightarrow **méthode d'Euler explicite** : $y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i)$



Méthode avec une formulation intégrale

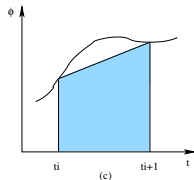
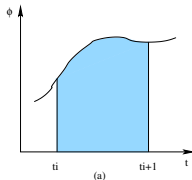
Approximation de l'intégrale par un trapèze

- Figure (c) : **approximation de l'intégrale par un trapèze**

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, x(t)) dt \doteq (t_{i+1} - t_i) \frac{f(t_i, x_i) + f(t_{i+1}, x_{i+1})}{2}$$

$$\Rightarrow \underline{y_{i+1}} = y_i + \frac{h}{2} \left(f(t_i, x_i) + f(t_{i+1}, \underline{y_{i+1}}) \right)$$

Rappel : aire du trapèze = moyenne des bases \times hauteur



Méthode avec une formulation intégrale

Approximation de l'intégrale par un trapèze

- Terme y_{i+1} intervient des deux côtés de l'équation
- Utilise un pas d'Euler explicite pour y remédier avec
$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, x_i)$$
$$\Rightarrow y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} (f(t_i, x_i) + f(t_i + h, y_i + hf(t_i, x_i)))$$
$$\Rightarrow \text{schéma d'Euler modifié}$$
$$\Rightarrow \text{schéma explicite car terme } y_{i+1} \text{ défini explicitement par } t_i$$
et y_i calculé au temps précédent

Méthode d'Euler implicite

Idée

- Dérivée $y'(t+h)$ remplacée par son approximation mathématique

$$\frac{y(t+h) - y(t)}{h} \approx y'(t+h) = f(t+h, y(t+h))$$

Formulation du schéma pour un avancement h dans le temps

$$y(t+h) = y(t) + h f(t+h, y(t+h))$$

→ Schéma implicite car $y(t+h)$ apparaît des deux côtés de l'équation

Méthode d'Euler implicite - Point de vue animation 3D

Données

Forces au temps t : $f(t, x(t), v(t))$

Vitesse au temps t : $v(t)$

Position au temps t : $x(t)$

Schéma d'intégration numérique

$$\text{Accélération au temps } t : \quad \dot{v}(t) = M^{-1}f(t, x(t), v(t))$$

$$\text{Vitesse au temps } t + h : \quad v(t + h) = v(t) + h \dot{v}(t + h)$$

$$\text{Position au temps } t + h : \quad x(t + h) = x(t) + h v(t + h)$$

Méthode d'Euler implicite - Point de vue animation 3D

$$\text{Soient } \begin{cases} \Delta v &= v(t+h) - v(t) \\ \Delta x &= x(t+h) - x(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta v = h \dot{v}(t+h) = h M^{-1} f(t, x(t+h), v(t+h)) \\ \Delta x = h v(t+h) = h (v(t) + \Delta v) \end{cases}$$

$$\text{On obtient : } \begin{pmatrix} \Delta v \\ \Delta x \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} M^{-1} f(x(t) + \Delta x, v(t) + \Delta v) \\ v(t) + \Delta v \end{pmatrix}$$

↔ Système à résoudre pour obtenir les valeurs de Δv et Δx

Méthode d'Euler implicite - Point de vue animation 3D

Utilisation des séries de Taylor appliquée à f pour obtenir approximation du premier degré :

$$f(x(t) + \Delta x, v(t) + \Delta v) = f(t) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial v} \Delta v$$

Le système devient :

$$\begin{pmatrix} \Delta v \\ \Delta x \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} M^{-1} \left(f(t) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial v} \Delta v \right) \\ v(t) + \Delta v \end{pmatrix}$$

↪ matrices jacobiennes $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial v}$ à calculer

Méthode d'Euler implicite - Point de vue animation 3D

On considère la première équation du système.

On remplace Δx par $h(v(t) + \Delta v)$:

$$\Delta v = h M^{-1} \left(f(t) + \frac{\partial f}{\partial x} h(v(t) + \Delta v) + \frac{\partial f}{\partial v} \Delta v \right)$$

Soit I la matrice identité.

$$\Rightarrow \left(I - hM^{-1} \frac{\partial f}{\partial v} - h^2 M^{-1} \frac{\partial f}{\partial x} \right) \Delta v = hM^{-1} \left(f(t) + h \frac{\partial f}{\partial x} v(t) \right)$$

$$\Rightarrow \left(M - h \frac{\partial f}{\partial v} - h^2 \frac{\partial f}{\partial x} \right) \Delta v = h \left(f(t) + h \frac{\partial f}{\partial x} v(t) \right)$$

\Leftrightarrow Système à résoudre pour obtenir Δv , pour ensuite calculer :

$$\begin{cases} v(t+h) = v(t) + \Delta v, \\ x(t+h) = x(t) + hv(t+h). \end{cases}$$

Méthode d'Euler implicite - Point de vue animation 3D

- En résumé, utilisation du système différentiel reformulé [Baraff, Witkin 1998] :

$$\Leftrightarrow \left(M - h \frac{\partial f}{\partial v} - h^2 \frac{\partial f}{\partial x} \right) \Delta v = h \left(f(t) + h \frac{\partial f}{\partial x} v(t) \right)$$

- 1 Évaluation des matrices $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial v}$
- 2 Résolution du système pour obtenir Δv
- 3 Calcul des nouvelles positions et vitesses

$$\begin{cases} v(t+h) = v(t) + \Delta v \\ x(t+h) = x(t) + hv(t+h) \end{cases}$$

Méthode de Runge-Kutta

Méthodes de Taylor

- Permettent une troncature des erreurs d'ordre élevé
- Mais nécessitent le calcul des dérivées partielles de $f(t, x)$

Méthodes de Runge-Kutta

- Permettent également une troncature des erreurs d'ordre élevé
- Utilisent seulement approximation de $f(t, x)$

Théorème de Taylor pour les fonctions à 2 variables

■ Supposons $f(t, x)$ et ses dérivées partielles d'ordres 1 à $n + 1$ soient continues sur un domaine rectangulaire D . Soit $(t_0, x_0) \in D$. Pour tout $(t, x) \in D$, il existe un $\bar{t} \in [t_0, t]$ et un $\bar{x} \in [x_0, x]$ tels que $f(t, x) = P_n(t, x) + R_n(t, x)$ où :

$$P_n(t, x) = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} \frac{\partial^j f(t_0, x_0)}{\partial t^{j-i} \partial x^i} (t - t_0)^{j-i} (x - x_0)^i$$

est le polynôme de Taylor de degré n et où :

$$R_n(t, x) = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} \frac{\partial^{n+1} f(\bar{t}, \bar{x})}{\partial t^{n+1-i} \partial x^i} (t - t_0)^{n+1-i} (x - x_0)^i$$

est le reste. ■

Méthode de Runge-Kutta d'ordre deux

Soient $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ et $f_t = \frac{\partial f}{\partial t}$, $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$

On a :

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) &= \frac{d}{dt} f(t, x(t)) \\ &= f_t(t, x(t)) + f_x(t, x(t)) \dot{x}(t) \\ &= f_t(t, x(t)) + f_x(t, x(t)) f(t, x(t))\end{aligned}$$

Application du théorème de Taylor sur $x(t)$:

$$\begin{aligned}x(t+h) &= x(t) + h\dot{x}(t) + \frac{h^2}{2}\ddot{x}(t) + R(t), R(t) \text{ reste en } O(h^3) \\ &= x(t) + hf(t, x) + \frac{h^2}{2} (f_t(t, x) + f_x(t, x) f(t, x)) + R(t)\end{aligned}$$

↔ nécessite l'évaluation des dérivées partielles du 1^{er} ordre de f

↔ en modifiant le reste, recherche autre formulation nécessitant juste calcul de f et non des dérivées partielles

Méthode de Runge-Kutta d'ordre deux

A la place, on souhaite obtenir une expression du type :

$$x(t+h) = x(t) + h A f(t, x(t) + C) + \bar{R}(t), \text{ avec } \bar{R}(t) \text{ en } O(h^3)$$

Utilise théorème de Taylor pour fonction à deux variables :

$$A f(t, x(t) + C) = A f(t, x) + A B f_t(t, x) + A C f_x(t, x) + S(t)$$

avec $S(t)$ en $O(h^2)$

$$\Rightarrow x(t+h) =$$

$$x(t) + h A f(t, x) + h A B f_t(t, x) + h A C f_x(t, x) + h S(t) + \bar{R}(t)$$

Comparaison avec :

$$x(t+h) = x(t) + h f(t, x) + \frac{h^2}{2} (f_t(t, x) + f_x(t, x) f(t, x)) + R(t)$$

$$\Rightarrow A = 1, AB = h/2, AC = (h/2)f, R(t) = hS(t) + \bar{R}(t)$$

On obtient le schéma de la méthode de la tangente améliorée (*midpoint method*) :

$$y_{i+1} = y_i + hf \left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(t_i, y_i) \right)$$

Méthode de Runge-Kutta d'ordre deux

En utilisant le polynôme de Taylor de degré 1 pour approcher $x(t)$, on a obtenu un schéma numérique d'erreur en $O(h^2)$

On peut utiliser le même raisonnement avec :

$$x(t+h) = x(t) + hf(t, x) + \frac{h^2}{2} \frac{d}{dt} f_t(t, x) + \frac{h^3}{6} \frac{d^2}{dt^2} f_t(t, x) + R(t)$$

avec $R(t)$, le reste en $O(h^4)$

On obtient alors le schéma d'Euler modifié ou de Heun :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{4} \left(f(t_i, y_i) + 3f \left(t_i + \frac{2}{3}h, y_i + \frac{2}{3}hf(t_i, y_i) \right) \right)$$

Méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre (RK4)

Il existe plusieurs méthodes de Runge-Kutta d'ordre 4.

Méthode RK4 est une méthode d'ordre 4, ce qui signifie que l'erreur commise à chaque étape est de l'ordre de h^5 , alors que l'erreur totale accumulée est de l'ordre de h^4 .

Polynôme de Taylor utilisé pour la méthode RK4 :

$$x(t+h) \doteq x(t) + h f + \frac{h^2}{2} \frac{df}{dt} + \frac{h^3}{6} \frac{d^2f}{dt^2} + \frac{h^4}{24} \frac{d^3f}{dt^3}$$

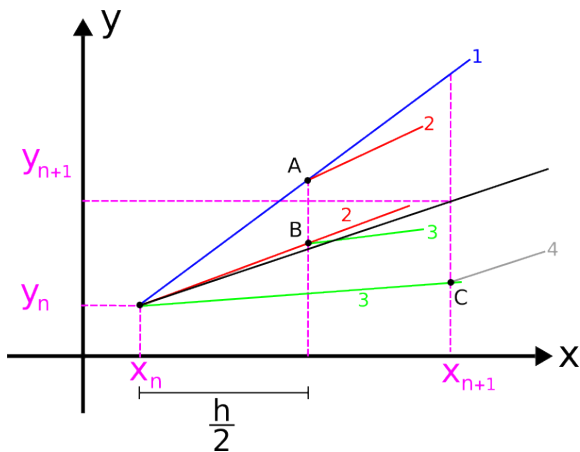
Méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre (RK4)

Méthode classique de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4) :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \text{ avec :}$$

- $k_1 = h f(t_i, y_i)$, la pente au début de l'intervalle
- $k_2 = h f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right)$, la pente au milieu de l'intervalle en utilisant la pente k_1 pour calculer la valeur de y_i au point $t_i + \frac{h}{2}$ par le biais de la méthode d'Euler
- $k_3 = h f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right)$, la pente au milieu de l'intervalle, mais obtenue cette fois en utilisant la pente k_2 pour calculer y_i
- $k_4 = h f(t_i + h, y_i + k_3)$, la pente à la fin de l'intervalle, avec la valeur de y calculée en utilisant k_3

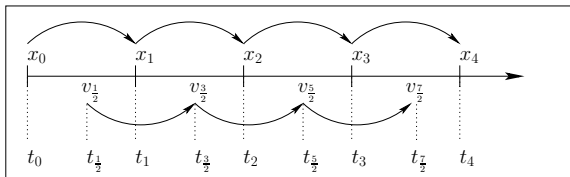
RK4 : interprétation géométrique



Méthode de Störmer-Verlet / leapfrog

Idée

- Schéma non applicable sur système du premier ordre
- Considère système du second ordre $\ddot{x}(t) = M^{-1}f(t, x(t))$
- Approxime la vitesse v au temps $t + \frac{h}{2}$
- Approxime la position x au temps $t + h$



Méthode de Störmer-Verlet / leapfrog

- **Calcul de la vitesse au milieu de l'intervalle :**

Utilise le théorème de Taylor :

$$\dot{x}(t+h) = \dot{x}(t) + h \ddot{x}(t) + \frac{h^2}{2} x^{(3)}(t) + \frac{h^3}{6} x^{(4)}(t) + \frac{h^4}{24} x^{(5)}(t) + O(h^5)$$

$$\dot{x}(t-h) = \dot{x}(t) - h \ddot{x}(t) + \frac{h^2}{2} x^{(3)}(t) - \frac{h^3}{6} x^{(4)}(t) + \frac{h^4}{24} x^{(5)}(t) + O(h^5)$$

$$\Rightarrow \dot{x}(t+h) - \dot{x}(t-h) = 2h \ddot{x}(t) + \frac{h^3}{3} x^{(4)}(t) + O(h^5)$$

$$\Rightarrow \dot{x}(t+h) = \dot{x}(t-h) + 2h \ddot{x}(t) + O(h^3)$$

$$\Rightarrow \dot{x}(t + \frac{h}{2}) = \dot{x}(t - \frac{h}{2}) + h \ddot{x}(t) + O(h^3)$$

$$\Rightarrow v(t + \frac{h}{2}) = v(t - \frac{h}{2}) + h a(t)$$

Méthode de Störmer-Verlet / leapfrog

- **Calcul de la position :**

Position calculée sur l'intervalle $[t, t + h]$ en utilisant l'approximation de la vitesse au milieu de l'intervalle (*midpoint method*) :

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} = v\left(t + \frac{h}{2}\right)$$

$$\Rightarrow x(t+h) = x(t) + h v\left(t + \frac{h}{2}\right)$$

Méthode de leapfrog - Point de vue animation 3D

Données de départ

Position au temps t_0 : $x(t_0)$

Vitesse au temps t_0 : $v(t_0)$

Accélération au temps t_0 : $M^{-1}f(t_0, x(t_0), v(t_0))$

Vitesse au temps $t_0 + h/2$: $v(t_{1/2}) = v(t_0) + h/2 \dot{v}(t_0)$

Vitesse au temps $t_0 + h$: $v(t_1) = v(t_0) + h \dot{v}(t_0)$

Position au temps $t_0 + h$: $x(t_1) = x(t_0) + h v(t_{1/2})$

Schéma d'intégration numérique

Accélération au temps t : $\dot{v}(t) = M^{-1}f(t, x(t), v(t))$

Vitesse au temps $t + \frac{h}{2}$: $v(t + \frac{h}{2}) = v(t - \frac{h}{2}) + h \dot{v}(t)$

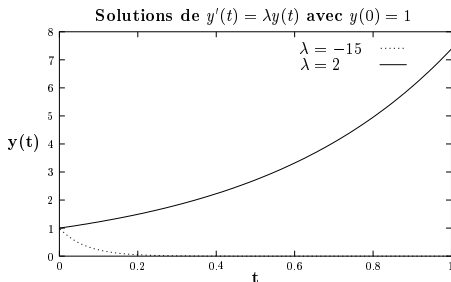
Vitesse au temps $t + h$: $v(t + h) = v(t + \frac{h}{2}) + h/2 \dot{v}(t)$

Position au temps $t + h$: $x(t + h) = x(t) + h v(t + \frac{h}{2})$

Stabilité des méthodes d'intégration numérique

Test de Dahlquist pour évaluer la stabilité numérique

- Équation $y'(t) = \lambda y(t)$, $\lambda \in \mathbb{C}$; valeur initiale $y(0) = y_0$
- Solution exacte $y(t) = e^{\lambda t} y_0$



→ Amortissement caractérisé par partie réelle de λ négative

Stabilité - Euler explicite et implicite

Applique le schéma d'Euler explicite pour $y'(t) = \lambda y(t)$

- $Y_1 = y(t_0 + h) = y(t_0) + h\lambda y(t_0) = y(t_0)(1 + \lambda h)$
- $Y_2 = y(t_0 + 2h) = y(t_0)(1 + \lambda h) + h\lambda y(t_0 + h) = y(t_0)(1 + \lambda h)^2$
- $n^{\text{ième}}$ point de chaque solution donné par $Y_n = (1 + h\lambda)^n y_0$

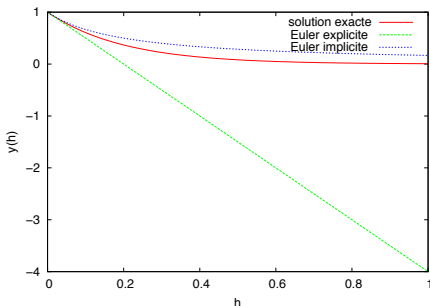
Applique le schéma d'Euler implicite pour $y'(t) = \lambda y(t)$

- $Y_1 = y(t_0 + h) = y(t_0) + h\lambda y(t_0 + h) = y(t_0)(1 - h\lambda)^{-1}$
- $Y_2 = y(t_0 + 2h) = y(t_0)(1 - h\lambda)^{-1} + h\lambda y(t_0 + 2h)$
 $\Rightarrow Y_2 = y(t_0)(1 - h\lambda)^{-2}$
- $n^{\text{ième}}$ point de chaque solution donné par $Y_n = (1 - h\lambda)^{-n} y_0$

Stabilité - Euler explicite et implicite

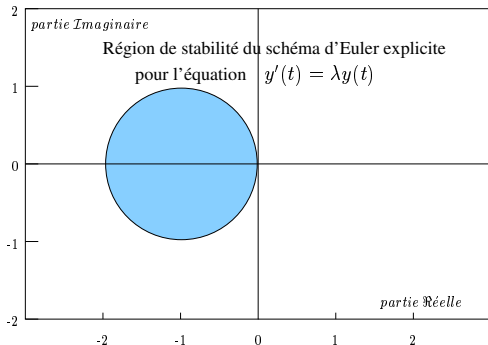
Euler explicite vs. Euler implicite sur 1 pas de temps

- Solution exacte : $e^{\lambda h}$ avec $\lambda = -5$, $y_0 = 1$
- Euler explicite : $(1 + \lambda h)$
- Euler implicite : $(1 - \lambda h)^{-1}$



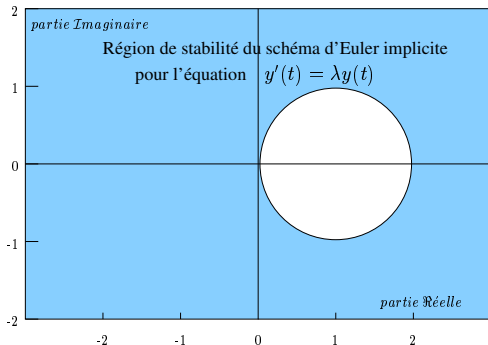
Méthode d'Euler explicite - Stabilité

- Solution numérique bornée et donc stable ssi $|1 + h\lambda| < 1$
→ pour $h\lambda$ compris dans le cercle unitaire de centre $(-1, 0)$



Méthode d'Euler implicite - Stabilité

- Solution numérique bornée et donc stable ssi $|(1 - h\lambda)^{-1}| < 1$
→ pour $h\lambda$ non compris dans le cercle unitaire de centre $(1, 0)$



Méthode de RK4 - Stabilité

Applique le schéma RK4 pour $y'(t) = \lambda y(t)$

- $k_1 = h \lambda y_i$
- $k_2 = h \lambda (1 + h \lambda/2) y_i$
- $k_3 = h \lambda (1 + (h \lambda/2)(1 + h \lambda/2)) y_i$
- $k_4 = h \lambda (1 + h \lambda (1 + (h \lambda/2)(1 + h \lambda/2))) y_i$

$$\Rightarrow y_{i+1} = \left(1 + (h \lambda) + \frac{1}{2}(h \lambda)^2 + \frac{1}{6}(h \lambda)^3 + \frac{1}{24}(h \lambda)^4 \right) y_i = q(h \lambda) y_i$$

Schéma est stable ssi : $|q(h \lambda)| \leq 1$

