

Vers des preuves de théorèmes de coloration de graphes automatiques

Encadrants: Nicolas Bousquet et Théo Pierron

4-6 mois – Printemps 2026

Combien de couleurs faut-il au minimum pour colorer les différentes régions d'une carte de façon à ce que deux régions qui partagent une frontière commune n'aient jamais la même couleur ? Cette question, ouverte pendant près de 100 ans a été résolue par Appel et Haken dans les années soixante: 4 couleurs suffisent. Plus que le résultat en lui-même, la preuve est remarquable pour deux raisons: 1. il s'agit de la première preuve assistée par ordinateur en mathématiques. Jusqu'à aujourd'hui, aucune preuve "vérifiable par un humain" n'a été proposée. 2. Elle démocratise une technique de preuve très générique et utilisée massivement aujourd'hui, appelée preuve par déchargement.

Depuis, la preuve du théorème des 4 couleurs a été revérifiée informatiquement de nombreuses fois et des tentatives d'automatisation ont été proposées. En particulier, un projet d'automatisation générale des preuves par déchargement peut être envisagé. Afin d'obtenir de tels résultats, plusieurs briques à combiner sont nécessaires. En particulier :

- Génération et représentation efficace d'une preuve par déchargement via un Programme Linéaire. On peut montrer qu'une partie d'une preuve par déchargement peut se "simuler" via un Programme Linéaire (a priori infini). De grandes questions se posent sur la modélisation et la réduction de ce PL pour le rendre résoluble en pratique.
- La création d'algorithmes et d'heuristiques efficaces pour la coloration par liste. Bien que de nombreux algorithmes existent pour la coloration de graphes, aucun algorithme générique n'a été proposé pour déterminer si un graphe est liste-colorable, un problème central dans les preuves par déchargement. Le but du stage serait de proposer et d'implémenter des premiers algorithmes et heuristiques pour ces problèmes en se concentrant principalement sur les instances qui apparaissent naturellement dans les preuves par déchargement.

Au choix du (ou de la) candidat.e et en fonction de la discussion avec les encadrants, l'un ou l'autre des points pourraient être étudiés dans le cadre du stage. L'étudiant.e devra à la fois montrer une capacité d'abstraction, une aisance dans la conception et la compréhension de preuves mathématiques et une aisance dans la conception de programmes informatiques complexes.