

Jeux combinatoires sur les graphes

Thèse présentée par Eric DUCHENE

effectuée au laboratoire Leibniz-IMAG
sous la direction de Sylvain Gravier

2006

Table des matières

Introduction	iv
Définitions et terminologie	vii
I Les jeux à deux joueurs	1
1 Historique, premiers résultats	2
1.1 Qu'est-ce qu'un jeu?	2
1.2 Pour quelles raisons s'intéresser aux jeux combinatoires? . . .	4
1.3 Un historique des jeux combinatoires	6
1.3.1 Le jeu pionnier	6
1.3.2 Le Wythoff's game	7
1.3.3 La fonction de Grundy, la somme et le graphe de jeu . . .	7
1.3.4 Les jeux partisans	12
1.3.5 La complexité des jeux combinatoires impartiaux . . .	12
1.3.6 Les jeux combinatoires aujourd'hui	13
1.4 Des résultats généraux sur une nouvelle famille de jeux	14
1.4.1 Présentation d'une nouvelle famille de jeux	14
1.4.2 Propriétés du jeu de domination	17
1.4.3 Jeu de domination sur les puissances de cycles	20
1.5 Jeux et codes correcteurs d'erreur	21
1.5.1 Définitions	21
1.5.2 Linéarité des codes gloutons	23
1.5.3 Intérêt des codes gloutons	25
2 Autour du Wythoff's game	27
2.1 Présentation du Wythoff's game	27
2.2 De la reine vers le roi	29
2.2.1 A la recherche d'une conjecture	30
2.2.2 Démonstration du résultat	31
2.2.3 Extension du résultat	35
2.3 Une deuxième généralisation du Wythoff's game: le jeu aux n vecteurs	36

2.3.1	Un cas particulier du jeu aux n vecteurs	37
2.3.2	Le jeu aux 3 vecteurs: instances de la forme $[\alpha, \beta, 1]$. .	39
2.3.3	Le jeu aux 3 vecteurs: instances de la forme $[\alpha, \beta, \gamma]$, avec $\gamma > 1$	47
3	Le jeu du "Pic'arête"	52
3.1	Présentation du jeu et état de l'art	52
3.2	Approche	55
3.3	Résolution du problème	57
3.3.1	Une classification des graphes connexes	57
3.3.2	Une classification des configurations	58
3.3.3	Une approximation de w	58
3.4	Conclusions	65
II	Un exemple de jeu à un seul joueur	68
1	Préambule: le jeu du solitaire	69
1.1	Le jeu du solitaire	69
2	Solitaire Clobber 2: Présentation	74
2.1	Le jeu du Solitaire Clobber 2: présentation	74
2.1.1	Définitions	75
2.1.2	Etat de l'art	76
2.2	Solitaire Clobber 2 sur des chaînes et des cycles	77
2.2.1	Sur des chaînes alternées périodiques	78
2.2.2	Cas général	88
3	Aspects algorithmiques	91
3.1	Approche	91
3.2	Les résultats	93
4	Valeurs de réductibilité	109
4.1	Solitaire Clobber 2 sur des cliques et des produits de cliques .	109
4.1.1	Approche et définitions	109
4.1.2	Les résultats	110
4.2	Solitaire Clobber 2 sur des hypercubes	113
4.2.1	Approche et définitions	113
4.2.2	Les résultats	115
4.3	Solitaire Clobber 2 sur les graphes de Hamming généralisés .	129
4.3.1	Introduction et notations	129
4.3.2	Les résultats	129
4.4	Conclusions et perspectives	135
	Conclusion	136

Introduction

Chacun d'entre nous possède un sens ludique plus ou moins développé. Pour beaucoup, l'enfance est une période très propice pour le mettre en pratique. Il s'estompe souvent avec l'âge, par la faute de ce que certains aiment appeler "la maturité". En ce qui me concerne, il faut croire que j'ai été mature à ma naissance. Et j'ai dû commencer mon enfance il y a environ quatre ans, pendant mon stage de master. En effet, c'est presque simultanément que jeux entre amis et jeux combinatoires se sont présentés à moi. Lorsque j'ai compris combien ces derniers pouvaient être aussi riches et complexes, traversant des domaines aussi vastes que la théorie des nombres, les mathématiques discrètes, la logique, les codes correcteurs d'erreur, ou encore l'algorithmique, j'ai rapidement su quel serait mon activité pour les trois années qui allaient suivre. Trouver comment gagner à un jeu en faisant des maths procure un double plaisir dont il serait dommage de ne pas profiter...

Les premiers jeux combinatoires à deux joueurs mathématiquement résolus datent du début des années 1900. On doit le premier résultat à un anglais, C.L.Bouton, qui donna la stratégie pour gagner au jeu de Nim, un jeu avec des tas d'allumettes que les joueurs retirent à tour de rôle. La recherche d'une stratégie gagnante est un des enjeux principaux de l'étude d'un jeu. En un siècle, la théorie s'est construite et étoffée, si bien qu'aujourd'hui, le cadre d'étude est bien défini. Cependant, même si l'on sait où classer un jeu combinatoire donné, cela ne suffit bien souvent pas pour lui trouver une stratégie gagnante. En effet, la plupart des jeux sont des problèmes difficiles, les plus illustres représentant en étant le go, le reversi, ou les échecs...

La première partie de ce document est consacrée aux jeux à deux joueurs. Dans le chapitre 1, nous donnerons la définition d'un jeu combinatoire à deux joueurs telle qu'elle a été retenue par la communauté. Nous expliquerons aussi plus en détail les raisons qui peuvent pousser les mathématiciens à s'intéresser à ce domaine, ainsi que les principaux éléments de la théorie sous forme d'un historique du début du 20^{ème} siècle à nos jours. Ce chapitre fera aussi apparaître nos premiers résultats sur des aspects généraux des jeux combinatoires: on verra une première famille de jeux pour lesquels on a

trouvé un invariant qui permet de construire d'autres jeux dont la résolution est identique. On présentera aussi les jeux combinatoires comme étant au service d'un autre domaine: les codes correcteurs d'erreur. Les *codes gloutons* sont obtenus facilement à l'aide d'un algorithme glouton appliqué sur l'ensemble des mots d'un alphabet donné. Ils constituent un large ensemble de codes correcteurs d'erreur, comprenant notamment les codes de Hamming ou de Golay. A tout code glouton on peut associer un jeu combinatoire, dit jeu glouton. En utilisant le travail de certains auteurs, nous prouverons la linéarité des codes gloutons à l'aide de leurs jeux associés.

Dans le chapitre 2, nous étudions plusieurs variantes du *Wythoff's game*. Il s'agit d'un jeu combinatoire créé par un mathématicien du même nom en 1907. A partir de deux tas d'allumettes de tailles quelconques, deux joueurs retirent alternativement soit un nombre quelconque d'allumettes dans un seul tas, soit le même nombre d'allumettes dans les deux tas. Le vainqueur est celui qui prend la dernière allumette. Wythoff s'est intéressé aux positions pour lesquelles le second joueur a une stratégie gagnante, et a montré qu'elles apparaissent lorsque les deux tas sont de tailles $[n\tau]$ et $[n\tau^2]$, où τ est le nombre d'or, et ceci pour toute valeur de n . Au cours du vingtième siècle, des études approfondies et des variantes de ce jeu foisonnent, sous l'impulsion de Fraenkel notamment.

On peut jouer au Wythoff's game de façon équivalente en plaçant une reine sur un échiquier, que deux joueurs déplacent alternativement en direction du coin nord-ouest. Cette vision du jeu nous a amené à considérer une variante de ce jeu avec une pièce exotique, une sorte de reine dont la portée des déplacements est bornée par une constante. Nous verrons que pour ce jeu, les positions favorables au second joueur se déduisent très facilement de celles du Wythoff's game originel. Dans la suite du chapitre, on considèrera une version géométrique du jeu, où les déplacements d'une pièce sont vus comme la donnée d'un ensemble de vecteurs directions. Pour ce type très général de pièce, on appellera le jeu associé *jeu aux n vecteurs*, et on s'intéressera encore à la recherche des positions favorables au second joueur.

Dans le chapitre 3, on considère une variante du jeu *Dots and Boxes*, auquel Berlekamp y consacra notamment un livre entier. Sur une grille quadrillée rectangulaire, deux joueurs noircissent alternativement une arête. Un joueur marque un point pour chaque carré qu'il "ferme". Le jeu s'arrête lorsque toutes les arêtes ont été noircies, le vainqueur étant le joueur avec le plus de points. Dans la règle initiale, un joueur qui marque un point rejoue immédiatement; ce ne sera pas le cas dans notre variante que nous avons nommée *Pic'arête*, et déjà introduite par Meyniel et Roudneff en 1988. A proprement parler, ce jeu n'appartient pas aux jeux combinatoires, puisque la victoire se décide par un nombre de points marqué au cours de la partie.

Il est alors intéressant de voir comment aborder la notion de stratégie gagnante dans ce cas. Nous donnerons également une estimation du nombre de points que peut espérer obtenir chaque joueur.

Lorsque l'on modifie la contrainte du nombre de joueurs, on s'éloigne considérablement de la théorie classique des jeux à deux joueurs. Les jeux à plus de deux joueurs font souvent intervenir des négociations et coalitions entre joueurs. Ils s'étudient très souvent dans le cadre de la théorie des jeux dite *économique*, où l'information n'est pas totale. La notion de stratégie optimale y diffère, comme l'a montré Nash dans les années 50. N'étant pas spécialiste de cette théorie, on a choisi de regarder ce qui se passe lorsque l'on restreint le nombre de joueurs, autrement dit de s'intéresser au monde des casse-têtes, à travers un exemple précis: le jeu du *Solitaire Clobber*. Le chapitre 1 sert de préambule et livre un résultat sur le jeu du Solitaire joué sur un rectangle à n lignes et trois colonnes. On y verra que la recherche d'invariants est très utile dans la résolution de ce type de jeu.

En 2002, Albert, Grosmann, Nowakowski et Wolfe ont proposé un nouveau jeu combinatoire à deux joueurs: le jeu du *Clobber*. Deux ans plus tard, Demaine, et Fleischer le transforment en un casse-tête qu'ils nomment fort logiquement *Solitaire Clobber*. Les règles en sont les suivantes: sur un graphe quelconque, on place une pierre (noire ou blanche) sur chaque sommet. En se déplaçant le long d'une arête, une pierre peut supprimer une autre pierre de couleur opposée. L'objectif est de laisser le moins de pierres possible à la fin, en alternant suppressions blanches et noires. Demaine et al. ont montré que le calcul du nombre de pierres minimum, dit aussi *valeur de réductibilité*, est un problème difficile sur les morceaux de grilles. Ils l'ont en revanche résolu sur des grilles où la disposition initiale des pierres est en échiquier. Notre variante, que nous appellerons *Solitaire Clobber 2*, **ne nous oblige pas à capturer alternativement** une pierre blanche puis une noire, mais reste difficile sur les morceaux de grilles. Nous verrons cependant que pour cette variante, le calcul de la valeur de réductibilité est polynomial pour les chaînes et les cycles (cf. 2). Il est en de même pour le jeu sur les arbres, qui sera détaillé dans le chapitre 3, où les aspects algorithmiques seront soulignés, à travers un algorithme de résolution s'exécutant en temps quadratique. Enfin, dans le chapitre 4, on s'intéressera aux graphes aux faibles valeurs de réductibilité, et ceci indépendamment de la disposition initiale des pierres.

Définitions et terminologie

Ce premier chapitre est consacré aux définitions auxquelles nous nous rapporterons tout au long de ce mémoire. La plupart d'entre elles proviennent de la théorie des graphes. Les autres sont issues d'autres domaines des mathématiques, comme les codes correcteurs d'erreur ou la théorie des nombres.

Les graphes

Définitions générales

Un **graphe** est la donnée d'un couple (V,E) , où V est l'ensemble des **sommets**, et E un ensemble de paires de sommets (où chaque paire sera appelée **arête**). On les représente très souvent à l'aide d'un dessin, où les sommets sont des points, et où une arête est un segment entre deux points.

Un graphe est dit **orienté** si l'ordre des sommets dans la donnée d'une arête est important. On appelle de telles arêtes des **arcs**, et on les représente graphiquement par un segment avec une flèche. Le schéma 1 est un exemple de graphe, et 2 est un exemple de graphe orienté.

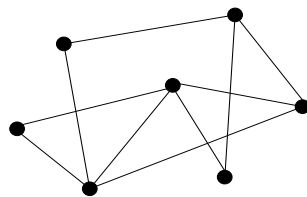


FIG. 1 - Un exemple de graphe

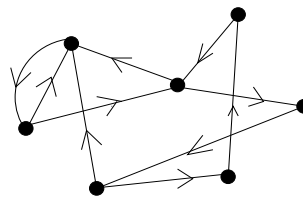


FIG. 2 - Un exemple de graphe orienté

Si u et v sont deux sommets d'un graphe, une arête entre u et v sera notée (u,v) . Un arc de u vers v sera noté de la même façon. Un arc de v vers u sera quant à lui noté (v,u) . Le premier sommet d'un arc est appelé **tête**, et le second est la **queue**. Les sommets u et v sont appelés les **extrémités** de l'arête (ou arc) (u,v) .

Deux sommets u et v seront dits **adjacents** s'il existe une arête les reliant. Dans ce cas, on dit également que u est **voisin** de v , ou vice-versa.

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. Le **voisinage** d'un sommet $v \in G$ désigne l'ensemble des voisins de v et se note $N_G(v)$. Si G est orienté, alors $N_G(v) = \{u \in V / (v, u) \in E\}$. Dans tous les cas, le **voisinage fermé** d'un sommet $v \in G$ est l'ensemble $N_G(v) \cup \{v\}$, et se note $N_G[v]$.

Soient un graphe $G = (V, E)$, et $K \subseteq V$. Le **sous-graphe de G induit par K** est le graphe dont l'ensemble des sommets est K , et dont les arêtes sont celles de E qui ont leurs deux extrémités dans K .

Une arête dont les deux extrémités sont identiques s'appelle une **boucle**. S'il existe p arêtes ayant les mêmes extrémités u et v , on dit qu'elles sont **parallèles**. Un graphe est dit **simple** s'il ne possède ni boucle, ni arêtes parallèles.

Soit $G = (V, E)$ un graphe quelconque. Un ensemble $K \subseteq V$ est dit **stable** s'il n'existe aucune arête de E ayant ses deux extrémités dans K . Si G est non-orienté, un ensemble $K' \subseteq V$ est dit **dominant** si tout sommet de $V \setminus K'$ est adjacent à un sommet de K' . Si G est orienté, un ensemble $K' \subseteq V$ est dit **absorbant** si pour tout sommet u de $V \setminus K'$, il existe un arc de u vers un sommet de K' .

Un ensemble stable et absorbant (ou dominant) d'un graphe s'appelle un **noyau**.

Soient $G = (V, E)$ un graphe non-orienté et v un sommet quelconque de V . Le **degré** de v est le nombre d'arêtes dont v est une extrémité. On le note $deg_G(v)$. Si G est un graphe orienté, on définira deux types de degré:

- le **degré sortant**, noté $deg_G^+(v)$, et égal au nombre d'arcs de G dont v est la tête.
- le **degré entrant**, noté $deg_G^-(v)$, et égal au nombre d'arcs de G dont v est la queue.

Un sommet d'un graphe G est dit *isolé* s'il est de degré nul. Il est dit *pendant* s'il est de degré 1. Une arête est dite *isolée* si ses deux extrémités sont des sommets de degré 1.

Une **chaîne** de G de longueur k est une suite alternée de sommets et d'arêtes $v_0 e_1 v_1 \dots e_{k-1} v_{k-1}$, où pour tout $i = 0 \dots (k-2)$, (v_i, v_{i+1}) correspond à l'arête (ou à l'arc) e_i . Les sommets v_0 et v_{k-1} sont les extrémités de la chaîne. Lorsque v_0 et v_{k-1} sont confondus, on dit que la chaîne est *fermée*. Une chaîne qui ne rencontre pas deux fois le même sommet (resp. la même arête) est dite *élémentaire* (resp. *simple*). Si G est non-orienté, une chaîne simple fermée de G s'appelle un **cycle**. Si G est orienté, on l'appelle

un **circuit**.

Etant donnés deux sommets x et y d'un graphe G , la *distance* qui sépare x de y est le nombre d'arêtes de la plus petite chaîne qui relie x et y .

Un graphe non-orienté (resp. orienté) est dit **acyclique** (resp. **acircuitique**) s'il ne contient pas de cycle (resp. circuit).

On dit qu'un graphe G est **Hamiltonien** s'il admet un cycle qui passe une et une seule fois par chaque sommet de G . On appellera un tel cycle un *cycle Hamiltonien*. Par analogie, une *chaîne Hamiltonienne* est une chaîne qui passe une et une seule fois par chaque sommet de G .

Un graphe non-orienté est dit **connexe** si pour toute paire de sommets $\{u, v\}$, il existe une chaîne entre u et v .

Si G est un graphe connexe, une arête e de G est dite *déconnectante* si sa suppression rend le graphe non-connexe. On appelle aussi une telle arête un *isthme*.

Soient $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ deux graphes quelconques. Le **produit cartésien** $G_1 \square G_2$ est le graphe $G = (V, E)$, où l'ensemble des sommets V est le produit cartésien $V_1 \times V_2$, et où une arête $(u_1 u_2, v_1 v_2)$ appartient à E si et seulement si $u_1 = v_1$ et $(u_2, v_2) \in E_2$, ou alors $u_2 = v_2$ et $(u_1, v_1) \in E_1$.

Le **produit complet** de G_1 par G_2 , noté $G_1 \otimes G_2$, est le graphe $G' = (V', E')$, où V' est le produit cartésien $V_1 \times V_2$, et où une arête $(u_1 u_2, v_1 v_2)$ appartient à E' si et seulement si les deux conditions suivantes sont réunies:

- $(u_1, v_1) \in E_1$ ou $u_1 = v_1$
- $(u_2, v_2) \in E_2$ ou $u_2 = v_2$

avec $(u_1, u_2) \neq (v_1, v_2)$.

Quelques types de graphes

Un graphe G est une **chaîne de longueur n** , et sera notée P_n , si l'ensemble de ses sommets induit une chaîne simple élémentaire de longueur n . On définit de la même façon un **cycle de longueur n** , que l'on notera C_n (cf. figure 3).

Une **puissance k^{eme} d'un cycle de longueur n** sera notée $C(n, k)$. Il s'agit d'un cycle C_n auquel on ajoute une arête entre toutes les paires de sommets dont la distance est comprise entre 2 et k (cf. figure 3). On définit de manière analogue une *puissance de chaîne*.

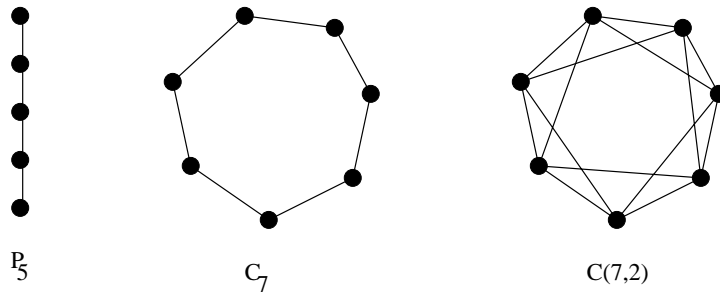


FIG. 3 – Exemples de chaîne, cycle, et puissance de cycles

Un graphe G simple est dit **complet** si pour toute paire de sommets distincts u et v , il existe une arête de G reliant u et v . Un graphe complet à n sommets s'appelle aussi une **clique**, et se note K_n .

Un **arbre** est un graphe simple connexe sans cycle. Tout arbre vérifie notamment la propriété suivante: son nombre d'arêtes est égal à son nombre de sommets moins 1.

Un **arbre enraciné** est un arbre dont on a particularisé un des sommets, qu'on appelle la *racine*, et dont on a orienté les arêtes récursivement à partir d'elle. C'est une façon de représenter tout arbre comme un arbre généalogique. La figure 4 donne l'exemple d'un arbre (à gauche), ainsi que ce même arbre enraciné sur le sommet v .

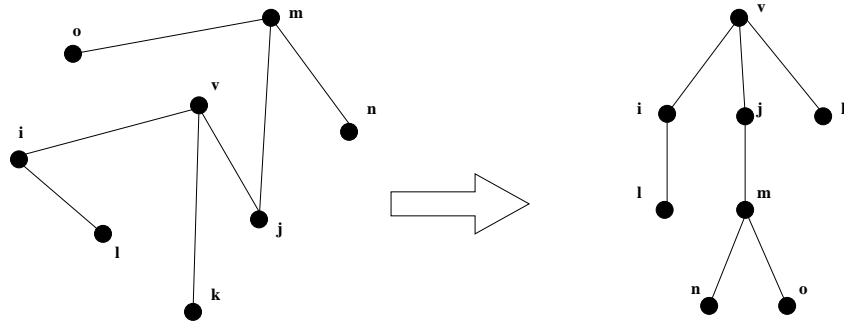


FIG. 4 – Arbre et sa version enracinée

A partir de la représentation enracinée d'un arbre, on dit qu'un sommet a est *parent* de b , ou que b est *enfant* de a , si a et b sont adjacents, et si a se trouve au-dessus de b dans la représentation. Un sommet sans enfant s'appelle une *feuille* de l'arbre enraciné. Dans l'exemple ci-dessus, v est la racine, n et k sont des feuilles, j est parent de m .

On dira qu'un graphe G connexe possède un *arbre pendant* T si T est à la fois un arbre maximal et un sous-graphe induit de G , tel que $G \setminus T$ reste

connexe.

Le graphe **étoile** à n sommets est un arbre avec un sommet de degré $(n - 1)$. Tous les autres sommets sont donc de degré un (cf. fig. 5).

Une **grille** de taille $p \times q$ est le produit cartésien d'une chaîne de longueur p avec une autre de longueur q .

Un **grille-graphe** est un graphe plongé dans le plan Euclidien, tel que les sommets ont des coordonnées entières, et que deux sommets sont adjacents si leur distance euclidienne est égale à un. On peut considérer un grille-graphe comme un sous-graphe induit d'une grille.

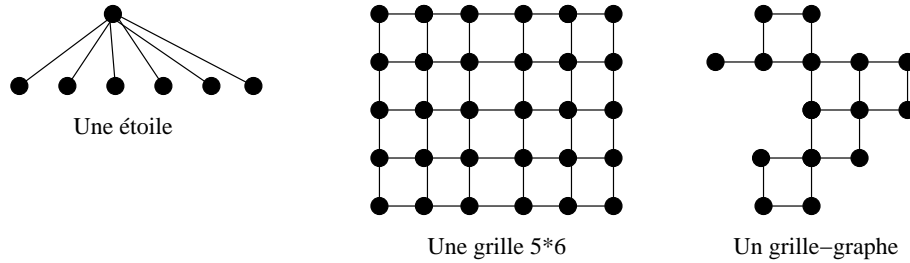


FIG. 5 – Exemples d'étoile, de grille et de grille-graphe

Soit I un ensemble d'intervalles sur les réels. En associant à chaque intervalle un sommet, et en ajoutant une arête entre deux sommets u et v si l'intersection des intervalles correspondants n'est pas vide, on définit le **graphe d'intervalles** associé à I .

Un graphe d'intervalles où les intervalles sont choisis sur un ensemble de nombre cyclique s'appelle un *graphe arc-circulaire*.

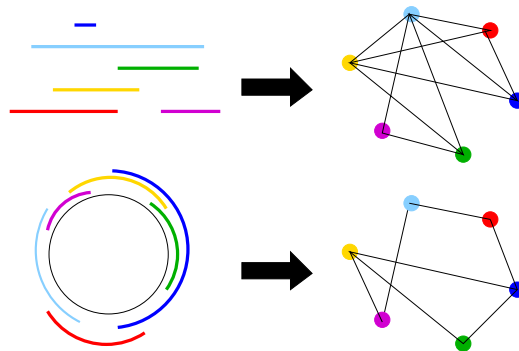


FIG. 6 – Exemples de graphe d'intervalles (en haut) et arc-circulaire (en bas)

Un **ordre total** à n sommets est le graphe $G = (V, E)$, où $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, et $(v_i, v_j) \in E$ si et seulement si $i > j$.

L'**hypercube** de dimension n est le graphe dont les sommets sont les n -uplets binaires, et où deux sommets sont adjacents si et seulement si ils diffèrent en une coordonnée exactement. On le notera Q_n . L'hypercube de taille 2 est le carré, celui de taille 3 est le cube.

On le définit souvent comme le produit cartésien de K_2 et de l'hypercube de taille inférieure, autrement écrit:

$$Q_n = Q_{n-1} \square K_2 = \square^n K_2$$

Graphiquement, on peut voir le graphe Q_n comme deux copies identiques du graphe Q_{n-1} dont les sommets "copies" sont reliés entre eux. Le schéma 7 montre les trois premiers hypercubes, les arêtes bleues reliant à chaque fois les deux copies entre elles.

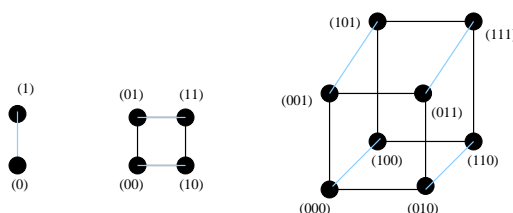


FIG. 7 – Les hypercubes Q_1 , Q_2 et Q_3

On remarquera que l'hypercube Q_n possède 2^n sommets, et que tous ont un degré égal à n . Un résultat bien connu et facile à démontrer est le fait que les hypercubes sont des graphes Hamiltoniens.

Un **graphe de Hamming** est un produit cartésien de graphes complets qui ont tous la même taille. L'hypercube en est un cas particulier, où les graphes complets du produit sont de taille 2. Un *graphe de Hamming généralisé* est aussi un produit cartésien de graphes complets, mais qui n'ont pas nécessairement la même taille.

Notions (très) élémentaires d'algèbre linéaire

Un **espace vectoriel** E sur un corps K est un ensemble muni de deux lois: une loi interne, notée $+$, et une autre externe, notée \times , qui vérifient les propriétés suivantes:

- $(E, +)$ est un groupe associatif, c'est-à-dire que la loi $+$ est associative, elle possède un élément neutre 0 , et tout élément admet un opposé.

- La loi externe \times est une application de $K \times E$ dans E , et vérifie: l'élément unité 1 du corps K est neutre pour \times , la loi \times est distributive par rapport à $+$.

Les éléments de E sont appelés les *vecteurs*, ceux du corps K les *scalaires*. Un exemple d'espace vectoriel est \mathbb{R}^n : l'ensemble des n -uplets sur \mathbb{R} , muni de $+$ et \times tels que:

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

et $\lambda \times (y_1, \dots, y_n) = (\lambda \times y_1, \dots, \lambda \times y_n)$.

Soit E un espace vectoriel sur K , et $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E . Une *combinaison linéaire* des vecteurs (x_i) est un vecteur $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i$, où les $(\lambda_i)_{i \in I}$ forment une famille de scalaires de K . Notons que toute combinaison linéaire d'éléments de E est un élément de E .

Un **sous-espace vectoriel** d'un espace vectoriel $(E, +, \times)$ sur K est un ensemble F inclus dans E qui, muni des mêmes lois $+$ et \times constitue un espace vectoriel sur le même corps K .

Soient $(E, +_E, \times_E)$ et $(F, +_F, \times_F)$ deux espaces vectoriels sur un corps K . Une **application linéaire** f de E dans F satisfait les deux points suivants:

- $\forall (x, y) \in E^2, f(x +_E y) = f(x) +_F f(y)$
- $\forall \lambda \in K, \forall x \in E, f(\lambda \times_E x) = \lambda \times_F f(x)$

Un **automorphisme** est une application linéaire bijective où $E = F$.

Si f est une application linéaire de E dans F , on définit le **noyau** de f noté $ker(f)$ comme l'ensemble

$$ker(f) = \{x \in E : f(x) = 0\}$$

Arithmétique des entiers

Plusieurs entiers sont dits **premiers entre eux** si leur plus grand diviseur commun est 1.

Un ensemble d'éléments E muni d'un opérateur \bullet est dit **clos** pour cet opérateur si pour tous éléments x et y de E , $x \bullet y$ est aussi un élément de E .

Etant donné un ensemble d'entiers positifs U , on notera $Mex(U)$ le plus petit entier positif n'appartenant pas à U . Précisons que $Mex(\emptyset) = 0$. Le nom de cet opérateur vient de "valeur minimale exclue".

Sur l'ensemble des entiers positifs, on définit l'opérateur binaire **ou exclusif**, noté \oplus , de la façon suivante: on code chacun des deux entiers

concernés en binaire, et on effectue l'addition bit à bit sans retenue. On peut aussi construire la table de cet opérateur de façon récursive, en utilisant la valeur minimale exclue:

$$a \oplus b = \text{Mex}(a' \oplus b')_{0 \leq a' < a, 0 \leq b' < b}$$

Les codes correcteurs d'erreur

Cette section a pour objectif de présenter en quelques lignes les notions élémentaires qui nous seront utiles pour notre travail sur les codes gloutons (chapitre 1). On trouvera des informations beaucoup plus détaillées dans des livres de théorie des codes tels que [MS77, Rom92].

Les informations numériques que nous transférons sont des mots sur un certain alphabet. Il s'agit la plupart du temps d'un alphabet binaire, mais on peut généraliser au corps fini à q éléments $GF(q)$. Si on transmet des mots de longueur n sur $GF(q)$, on dira alors qu'un **code** de taille n sur $GF(q)$ est un ensemble de mots de $GF(q)^n$.

Le *poinds de Hamming* d'un mot de $GF(q)^n$ est le nombre de bits non nuls de ce mot. On appelle *distance de Hamming* entre deux mots le poids de leur différence. On dira qu'un code a une distance d si la distance de Hamming entre toute paire de mots du code est d'au moins d .

Lorsque l'on transmet de l'information, à savoir les mots d'un code, on s'intéresse à la détection et à la correction d'éventuelles erreurs (une erreur correspond à un bit erroné) qui se seraient introduites lors de la transmission. L'intérêt d'un code réside notamment dans sa capacité à détecter et corriger de telles erreurs. Si les mots d'un code sont suffisamment éloignés les uns des autres, et sous l'hypothèse que peu d'erreurs se produisent, on saura alors facilement déduire du mot reçu (erroné) le mot initial que l'on voulait transmettre. Les codes de distance d peuvent détecter jusqu'à $(d-1)$ erreurs, et en corriger $\lfloor (d-1)/2 \rfloor$.

Les trois éléments les plus importants d'un code sont la longueur des mots n , sa distance d , et sa cardinalité. Un des problèmes récurrents consiste à maximiser la cardinalité d'un code ayant n et d comme paramètres fixés.

L'alphabet $GF(q)$ (avec q puissance de nombre premier) étant un corps, on peut imposer à un code une structure d'espace vectoriel. De tels codes sont appelés **codes linéaires**. Ils sont donc clos par addition et par multiplication par un scalaire. Les codes linéaires sont les plus utilisés aujourd'hui car ils facilitent l'accès au décodage de l'information et à la détection d'erreurs.

On les caractérise souvent par leur dimension en tant qu'espace vectoriel.

Les *codes de Hamming* sont les codes linéaires les plus connus. Ils possèdent les paramètres suivants: leur longueur n vaut $2^r - 1$, et leur dimension vaut $2^r - r - 1$. Leur distance est égale à 3, ce qui signifie qu'il ne corrigent qu'une seule erreur.

Complexité d'algorithmes

Un **problème de décision** est un énoncé auquel on doit répondre par oui ou non. Cette réponse est fournie par un algorithme dont le temps d'exécution traduit la complexité du problème.

La classe **P** est l'ensemble des problèmes de décision solubles en temps polynomial, c.à.d. pour lesquels il existe un algorithme qui s'exécute en un nombre d'opérations élémentaires proportionnel à un polynôme en la taille de l'instance.

La classe **NP** désigne l'ensemble des problèmes de décision pour lesquels il existe un certificat permettant de prouver en temps polynomial que la réponse, pour une instance donnée, est bien "oui".

Dans le cadre des problèmes de décision, une réduction permet de ramener la décidabilité d'un problème à celle d'un autre problème. Etant donnés deux problèmes de décision A et B , une **réduction polynomiale** de A à B est une fonction qui à une instance I_A de A associe une instance I_B de B en temps polynomial, et telle que I_A et I_B ont des réponses équivalentes.

La classe **NP-difficile** est l'ensemble des problèmes de décision auxquels n'importe quel problème de NP peut se réduire polynomialement. Ces problèmes n'admettent à priori pas d'algorithme rapide pour les résoudre.

La classe **NP-complet** est l'ensemble des problèmes NP-difficiles appartenant à la classe NP . Ce sont donc les problèmes de NP les plus difficiles à résoudre.

Première partie
Les jeux à deux joueurs

Chapitre 1

Les jeux combinatoires: définitions, historique, premiers résultats

1.1 Qu'est-ce qu'un jeu ?

Dans leur livre (cf. [BCG01]), Berlekamp, Conway et Guy donnent une définition précise d'un jeu combinatoire à deux joueurs. C'est cette définition qui a été retenue par la communauté des mathématiciens du domaine. Elle consiste en huit points:

1. Il y a exactement deux joueurs.
2. Le nombre de **configurations** (ou de **positions** de jeu) possibles est fini. On a aussi besoin de connaître une configuration de départ.
3. Les déplacements qui permettent de passer d'une configuration à une autre sont définis par **un ensemble de règles**. Ces règles peuvent être spécifiques à chacun des deux joueurs. On appelle **options** l'ensemble des positions accessibles en un coup par un joueur, à partir de la configuration courante.
4. Les deux joueurs jouent alternativement, et il est interdit de passer son tour.
5. L'information est **totale**, c.à.d. chaque joueur connaît la configuration courante et sait ce qui peut se passer ensuite.
6. Le hasard n'intervient pas dans les déplacements (que ce soit sous forme de dés, de cartes, ...).
7. Dans un jeu dont la convention est dite *normale*, le **perdant** est le joueur qui ne peut plus se déplacer.
8. Les règles doivent être construites de telle sorte que le jeu ait une **fin** (autrement dit qu'un joueur n'ait plus la possibilité de bouger). Chaque coup doit rapprocher les deux joueurs de la fin du jeu.

Forts de cette définition, on peut alors s'interroger sur les jeux (plus ou moins) bien connus du grand public:

Les **échecs** ne satisfont pas le point 7 par exemple. L'existence de positions sans vainqueur (pat) font que d'après cette définition, on ne le classe pas dans la catégorie des jeux combinatoires. De même, le jeu du **morpion** n'est pas considéré comme tel, car la condition de victoire n'est pas celle du point numéro 7: le premier joueur qui est bloqué ne perd pas forcément la partie. Cependant, certains auteurs considèrent les parties nulles comme une convention de fin de jeu autorisée. Pour ceux-là, ces jeux font donc partie de l'ensemble des jeux combinatoires.

Le jeu des **dominos** contient une part de hasard (dans le tirage des pièces), et on ne peut pas dire que l'information soit totale. Chaque joueur ne connaît pas les dominos que possède son adversaire.

La plupart des jeux de cartes comme le **poker** ou la **belote** comportent une part de chance. L'intérêt de ces jeux réside aussi souvent dans le fait que les informations que possède chaque joueur sont partielles. Par ailleurs, ce type de jeu se joue souvent à plus de deux joueurs et favorise ainsi les alliances entre joueurs. La psychologie des joueurs est également un facteur prépondérant. Pour toutes ces raisons, ces jeux ne rentrent ainsi pas dans notre cadre. Ils sont le plus souvent étudiés selon la théorie de jeux dite "économique", et dont les stratégies sont régulièrement associées aux équilibres de Nash.

Les jeux à décisions simultanées comme le **Chi-Fou-Mi**, aussi appelé **Marteau-Ciseaux-Papier**, ne font pas partie de la liste des jeux combinatoires. A proprement parler, on ne peut pas dire que le hasard soit présent, mais l'information n'est pas totale. Par ailleurs, les deux joueurs ne jouent pas simultanément.

Dans le chapitre 3, on étudiera une variante du jeu **Dots and Boxes**. Il s'agit d'un jeu très apprécié des étudiants, et qui consiste à fermer des carrés sur une grille quadrillée. Le vainqueur est le joueur qui ferme le plus de carrés. Pour cette raison, on ne peut pas dire qu'il soit de convention *normale*. Cela dit, les études de Berlekamp dans [Ber00] ont montré qu'on pouvait le considérer comme tel.

Les jeux de type **Nim**, que nous détaillerons par la suite, font partie de la catégorie des jeux combinatoires. Ils ont été les premiers à être résolus. A partir de plusieurs tas d'allumettes, les deux joueurs retirent un certain nombre d'allumettes selon des contraintes précisées dans la règle. Le premier joueur à ne plus pouvoir retirer d'allumettes est déclaré perdant.

Certains jeux possèdent une condition de fin différente de la convention normale: on l'appelle la convention *misère* (cf. [BD92]). Dans ce type de jeu, le premier joueur bloqué gagne la partie. C'est par exemple le cas du jeu de **Mariénbad**, qui est un jeu de Nim dont on a changé la condition de fin. Ce jeu est apparu pour la première fois en 1961 dans le film d'Alain Resnais "L'année dernière à Mariénbad". Le héros y enchaîne les parties victorieuses,

en prononçant le fort connu *Je puis perdre, mais je gagne toujours...*

De nombreux jeux combinatoires ont dérivé du jeu de Nim, à commencer par le **Wythoff's game** (cf. [Wyt07]) en 1907. Le chapitre 2 lui est consacré. Depuis une trentaine d'années sont apparus un grand nombre de jeux combinatoires, comme les jeux de soustraction, les jeux octaux, le jeu d'Hackenbush...Le livre [BCG01] écrit par Berlekamp, Conway et Guy, recense et explique les principaux jeux étudiés depuis les débuts des jeux combinatoires.

Dans l'ensemble des jeux combinatoires, on distingue également deux grandes familles: les jeux *impartiaux* et les jeux *partisans*. Pour les premiers, quelle que soit la configuration de jeu, les deux joueurs ont les mêmes options. C'est le cas du jeu de Nim par exemple. Dans le cas d'un jeu partisan, chaque joueur possède des coups spécifiques. Prenons l'exemple du *jeu des dominos* sur une grille. Deux joueurs Alice et Barnabé placent à tour de rôle un domino sur une grille rectangulaire, Alice plaçant les siens horizontalement, et Barnabé verticalement. Le premier joueur bloqué perd la partie. On voit clairement que selon les tailles de la grille, le vainqueur du jeu n'est plus nécessairement déterminé par le fait de jouer en premier ou en second. Certaines tailles peuvent clairement favoriser Alice ou Barnabé.

Dans ce chapitre, on présentera tout d'abord l'intérêt et le genre d'étude que l'on peut faire autour d'un jeu combinatoire. Des résultats généraux autour des jeux impartiaux seront décrits. Une section relative à l'histoire des jeux combinatoires y sera également développée. Dans le chapitre 2, on étudiera plusieurs variantes du Wythoff's game, et on s'intéressera à la stratégie gagnante sur ces variantes. Comme énoncé précédemment, le chapitre 3 traitera d'une variante du *Dots and Boxes*, que nous avons nommée **Pic'arête**. Comme le point 7 n'est pas satisfait, on verra comment appréhender la notion de stratégie gagnante pour ce type de jeu. Enfin, le dernier chapitre évoquera un jeu combinatoire récent, le *Clobber*, qui a récemment donné naissance à une version à un seul joueur (cf. [DDF04]). On s'est alors longuement intéressé à ce jeu en solitaire, et aux variantes qu'il pouvait offrir.

1.2 Pour quelles raisons s'intéresser aux jeux combinatoires ?

Fraenkel, dans son article [Fra], voit l'ensemble des jeux combinatoires comme deux grandes familles:

- Les jeux auxquels les gens aiment jouer, qu'il appelle *PlayGames*. Ces jeux sont stimulants au point que les gens les achètent. Il s'agit par exemple des échecs, du go, du reversi, de hex, de ayo (cf. [AL85])...

- Les jeux auxquels jouent les mathématiciens, qu’il appelle *MathGames*. Ces jeux interpellent les mathématiciens et les scientifiques, mais n’intéressent pas forcément l’individu lambda. L’attrait ludique y est absent. C’est le cas des jeux de Nim, du jeu de Wythoff, des jeux de soustraction...

Dans la plupart des cas, un jeu combinatoire n’est pas un problème facile. Les jeux de type *PlayGame* sont bien souvent des problèmes NP-difficiles, mais cela ne suffit pas à les caractériser. La différence principale entre un *PlayGame* et un *MathGame* est ce que Fraenkel appelle la *sensation de contrôle*. En arrivant en plein milieu d’une partie d’échecs ou de go, et même si la stratégie à adopter est inconnue, un amateur saura dire lequel des deux joueurs est en position favorable. Dans le cas d’un jeu de type *MathGame*, comme le jeu de Nim, il est difficile de savoir quel joueur est en position favorable au vu d’une configuration quelconque. On se sent donc beaucoup moins maître de la situation dans le cas d’un *PlayGame*, même si dans la réalité, il est plus facile de gagner à ce type de jeu. Ce qui pousse les gens à jouer provient surtout du plaisir qu’ils en retirent: jouer à un *MathGame* dont la stratégie est connue n’intéresse pas grand monde (si ce n’est le héros d’Alain Resnais...), pas plus qu’un jeu dont la stratégie est inconnue mais dont on n’arrive pas à appréhender la valeur d’une position donnée. L’intérêt d’un *MathGame* réside donc plus dans le plaisir de la recherche d’une stratégie optimale, ce qui relève du travail du mathématicien, que dans le plaisir du jeu en soi-même.

Par ailleurs, on constate que la plupart des jeux qui intéressent le grand public sont obtenus en relaxant certaines des huit contraintes décrites dans la section précédente. Beaucoup de jeux dits "commerciaux" se jouent à plus de deux, et autorisent les joueurs à passer leur tour. Dans de nombreux cas, la dernière personne à jouer n’est pas le vainqueur. Tout ceci fait que les jeux ainsi considérés n’appartiennent souvent plus à la famille des jeux combinatoires. De ce fait, fabriquer un *PlayGame* qui reste dans la catégorie des jeux combinatoires n’est pas chose aisée. Leur nombre est donc très limité, et hormis ceux donnés précédemment, il n’est pas évident d’en citer d’autres. En revanche, il est très facile de construire un *MathGame*, comme on le verra dans les variantes du Wythoff’s game que nous présenterons dans le chapitre 2.

Le lecteur l’aura compris, les jeux que nous étudierons seront de type *MathGame*. Dans la plupart des jeux considérés, notre motivation première sera la recherche mathématique d’une stratégie optimale. Cette motivation est notamment justifiée par la complexité des problèmes rencontrés: même si quelques stratégies (dont celles des jeux de Nim et de Wythoff) sont polynomiales, la majeure partie appartient aux problèmes difficiles. Pour illustrer

cette difficulté, on peut remarquer que la recherche d'une stratégie optimale est une réponse à la question suivante: "Existe-t-il un coup tel que pour tout coup de mon adversaire il existe un coup tel que pour tout coup de mon adversaire...qui me permette de gagner à la fin". Cela dit, c'est cette complexité qui fait tout l'attrait de ce domaine de recherche.

L'intérêt des jeux combinatoires réside également dans la transversalité des domaines où ils interviennent. Les problèmes de logique et de complexité ont été clairement énoncés ci-dessus. On verra par la suite que l'étude d'un jeu se ramène aisément à un problème sur un graphe qu'on appellera le *graphe de jeu*. A partir de ce graphe, on contruit aussi certains codes correcteurs d'erreur. Ce lien sera illustré dans ce chapitre au travers des codes gloutons. Il apparaît aussi dans les articles [CN99a, CN99b]. Par ailleurs, en attribuant une valeur numérique à chaque position de jeu, Berlekamp, Conway et Guy ont clairement entrelacé jeux combinatoires et théorie des nombres.

1.3 Un historique des jeux combinatoires

Dans cette section, nous allons faire un résumé des principales étapes du développement des jeux combinatoires, du point de vue des *Math Games*. On fera apparaître les principaux noms du domaine, et on explicitera les points essentiels de la théorie.

1.3.1 Le jeu pionnier

Le premier jeu combinatoire mathématiquement résolu est le **jeu de Nim**. C'est un anglais, C.L.Bouton, qui fit paraître en 1905 ses résultats dans [Bou05]. Les règles du jeu sont les suivantes: on considère un nombre N de tas d'allumettes, et on notera (n_1, \dots, n_N) les tailles respectives de chacun des tas. A tour de rôle, deux joueurs retirent un nombre quelconque d'allumettes **dans un seul tas**. Le joueur qui retire la dernière allumette est le gagnant.

On s'aperçoit vite que ces règles répondent aux critères des jeux combinatoires. A la recherche d'une stratégie gagnante, Bouton a compris que chaque position de jeu (décrite par un N -uplet) possède deux statuts: favorable ou défavorable au joueur qui commence. Un joueur qui est dans une position dite favorable possède toujours un coup qui lui permet de gagner, quelle que soit la stratégie de son adversaire. Un joueur dans une position défavorable peut jouer n'importe quel coup: son adversaire se retrouvera nécessairement dans une position favorable. L'objectif de Bouton a donc été de cerner les positions favorables (et par déduction, défavorables) au joueur qui commence. Dans son article, il a choisi d'appeler les positions défavorables des positions

sécurisées. En effet, la stratégie gagnante consiste à jouer vers les positions sécurisées à chaque tour.

Les résultats de Bouton sont les suivants: pour savoir si une position donnée (n_1, \dots, n_N) est sécurisée, il suffit de coder chaque taille de tas n_i en binaire, et d'ajouter le tout bit à bit. Cette opération correspond au *ou exclusif*, qu'on appellera plus tardivement dans la littérature des jeux combinatoires la **Nim-somme**. Si cette somme est nulle, alors la position est sécurisée, c.à.d. défavorable au joueur dont c'est le tour de jouer. Dans le cas contraire, elle est favorable au joueur qui commence. Celui-ci peut toujours trouver une position à somme nulle vers laquelle jouer pour gagner.

Ceci assure que dans le cas d'un jeu de Nim à deux tas, les seules positions défavorables (sécurisées) au premier joueur sont celles où les deux tas ont la même taille. Dans le cas d'un jeu de Nim à trois tas, les positions $(1,2,3)$ et $(2,5,7)$ par exemple sont sécurisées.

1.3.2 Le Wythoff's game

Deux ans après les résultats de Bouton, W.Wythoff publie (cf. [Wyt07]) ses résultats au sujet d'un nouveau jeu combinatoire, qu'il considère lui-même comme "une modification du jeu de Nim". Il a fort logiquement donné son nom à ce jeu que l'on appelle maintenant le **Wythoff's game**. Il s'agit d'un jeu de Nim à deux tas, dans lequel les joueurs peuvent aussi retirer le même nombre d'allumettes dans chacun des tas. En reprenant les notions introduites par Bouton, Wythoff a cherché à décrire les positions sécurisées de son jeu.

Puisque le Wythoff's game se joue avec deux tas, une position sera notée (a,b) , où a et b indiquent la taille de chacun des tas. Les positions sécurisées seront notées selon la liste de couples $\{(a_0, b_0), (a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n), \dots\}$. Dans son papier, Wythoff a su caractériser cette liste:

$$(a_n, b_n) = (\lfloor n\tau \rfloor, \lfloor n\tau^2 \rfloor)$$

où τ est le nombre d'or $(1 + \sqrt{5})/2$.

Dans l'introduction du chapitre 2, on trouvera les résultats détaillés des travaux de Wythoff, ainsi que l'algorithme qui l'a conduit à cette formule.

1.3.3 La fonction de Grundy, la somme et le graphe de jeu

On ne peut pas décrire l'histoire des jeux combinatoires sans mentionner les années 30. C'est en 1936 et en 1939 que Sprague et Grundy découvrent séparément le même résultat au sujet des jeux combinatoires impartiaux acycliques. Dans un **jeu acyclique**, chaque position est visitée au plus une fois. Cela force le jeu à s'arrêter et empêche ainsi les matches nuls. Le jeu de Nim et Le Wythoff's game sont des exemples de jeux impartiaux acycliques.

Les positions sécurisées s'appelleront dorénavant positions **perdantes** ou **P-positions**, car défavorables au joueur qui commence. Par opposition, les autres positions s'appelleront positions **gagnantes** ou **N-positions**. Jusqu'alors, Bouton et Wythoff n'avaient considéré que deux statuts à propos d'une position de jeu: gagnante ou perdante. Sprague et Grundy affirment maintenant que les positions gagnantes ne sont pas toutes équivalentes. D'après leur théorie, chaque position d'un jeu impartial se voit attribuer une valeur entière. Ces valeurs seront appelées **nimbers**. Les positions perdantes possèdent toutes le nimber 0, alors que les positions gagnantes ont des valeurs strictement positives.

Dans leur théorie, le jeu de Nim à un seul tas joue le rôle de jeu référence: une configuration de ce jeu avec un tas de n allumettes porte le nimber n . En effet, un tas vide correspond à une position perdante, d'où sa valeur nulle. Pour $n > 0$, tous les tas sont gagnants, mais ils ne portent pas la même valeur. Cela signifie que toute position d'un jeu impartial quelconque de nimber n peut se ramener à un tas de Nim avec n allumettes.

Pourquoi Grundy et Spragues ont-ils décidé d'attribuer des différentes valeurs aux positions gagnantes? En cherchant à cerner la notion de positions équivalentes, ils sont arrivés à la définition suivante: on dira que deux positions de jeux sont équivalentes si en jouant sur la "somme" des deux (cf. phrase suivante), la nouvelle position ainsi constituée est perdante. Ils introduisent ainsi ce qu'on appelle **la somme de jeux**: étant donnés deux jeux G_1 et G_2 , le jeu somme $G_1 + G_2$ consiste à jouer soit sur G_1 , soit sur G_2 jusqu'à ce qu'un joueur ne puisse plus jouer (il sera le perdant). Par exemple, un jeu de Nim à deux tas peut être considéré comme la somme de deux jeux de Nim à un seul tas. **La somme de deux positions de jeux sera alors perdante si et seulement si toutes deux ont la même valeur.** Dans le cas d'un jeu de Nim à deux tas, une position est perdante si et seulement si les deux tas ont la même taille: cela explique pourquoi tous les tas de Nim de tailles distinctes ont des nimbers distincts.

Cette fonction qui attribue à chaque position un nimber s'appelle la **fonction de Grundy**. Même si Grundy et Sprague ne l'ont pas formulé ainsi, ils ont su calculer cette fonction grâce au résultat suivant: le nimber d'une position P est obtenu en prenant le plus petit entier qui n'apparaît pas dans les valeurs des options de P . Par exemple, si à partir d'une position P , on peut jouer vers Q_1 , Q_2 ou Q_3 , dont les nimbers respectifs sont 0, 1 et 5, alors P aura pour valeur 2. Cette règle de calcul s'appelle la règle **Mex**: étant donné un ensemble d'entiers positifs U , $Mex(U)$ est le plus petit entier positif qui ne figure pas dans U .

Le calcul de la fonction de Grundy résout complètement un jeu combinatoire. Il nécessite cependant de trouver un bon ordre de parcours des positions, de sorte que les options de chaque position visitée aient une valeur déjà connue.

Afin d'illustrer l'ensemble de ces résultats, nous allons présenter un nouveau jeu impartial acyclique, appartenant à la famille des jeux de soustraction. Etant donné un tas d'allumettes de taille n et un ensemble fini d'entiers S , chaque joueur retire alternativement un nombre d'allumettes appartenant à S . Le premier joueur qui ne peut plus en retirer est le perdant. Prenons par exemple le jeu de soustraction avec $S = \{1,2,4\}$. En parcourant la liste des positions de ce jeu par tailles croissantes, on obtient facilement la liste des nimbers:

taille du tas	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
nimber	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	...

Par exemple, à partir d'un tas de taille 7, on peut jouer vers des tas de tailles 3, 5 et 6. Ce qui donne un nimber égal à $Mex(0,2,0) = 1$. Dans ce cas précis, on s'aperçoit rapidement que la fonction de Grundy est périodique de longueur 3. Ce jeu est donc totalement résolu, et ses positions perdantes sont les tas dont la taille est un multiple de trois.

Imaginons maintenant que l'on souhaite jouer à ce jeu sur plusieurs tas. Prenons par exemple trois tas de tailles respectives 4, 8, et 5. D'après les résultats de Sprague et Grundy, on considère là une somme de trois positions, de valeurs respectives 1, 2 et 2. Cette position (4,8,5) du jeu de soustraction est alors équivalente à une position (1,2,2) d'un jeu de Nim à trois tas. La connaissance des P-positions du jeu de Nim suffit maintenant pour conclure: la Nim-somme $1 \oplus 2 \oplus 2$ vaut 1, ce qui signifie que la position est gagnante.

A tout jeu combinatoire Γ (impartial ou pas, acyclique ou pas), on peut associer un graphe orienté $G = (V,E)$ que l'on appelle **graphe de jeu**, où V est l'ensemble des positions de Γ , et (u,v) est un arc de G si et seulement si il existe un coup qui permette de passer de la position u vers la position v . La figure 1.1 illustre ce graphe dans notre exemple du jeu de soustraction:

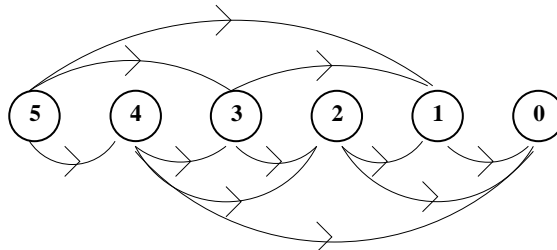


FIG. 1.1 – Graphe du jeu de soustraction $S = \{1,2,4\}$ pour un tas de taille 5

L'ensemble des options d'un sommet u est défini sur le graphe par $O(u) = \{v \in V : (u,v) \in E\}$. Par ailleurs, on peut jouer au jeu Γ sur le graphe directement: si I est la position initiale de Γ , il suffit de placer un objet sur le sommet I du graphe, que les deux joueurs vont déplacer à tour de rôle en suivant les arcs de G . Dès qu'un joueur déplace l'objet sur un sommet de degré sortant nul, il gagne la partie. On remarquera aussi fort logiquement qu'un jeu acyclique possède un graphe acyclique.

La fonction de Grundy $g : V \rightarrow \mathbb{N}$ d'un graphe de jeu est définie par la relation suivante:

$$g(u) = \text{Mex}(g(O(u)))$$

où $g(O(u)) = \{g(w) : w \in O(u)\}$.

Pour les jeux dont le graphe est acircuitique, cette fonction existe et est unique. On l'obtient en appliquant l'algorithme suivant:

1. On étiquette tous les sommets dont le degré sortant est nul avec la valeur 0.
2. Si u est un sommet non étiqueté pour lequel les sommets de $O(u)$ sont tous étiquetés, on attribue la valeur $\text{Mex}(g(O(u)))$ à u . On répète cette opération jusqu'à ce que tous les sommets soient étiquetés.

Dans le cas où G est acircuitique, on peut toujours trouver un sommet u non étiqueté dont tous les successeurs le sont déjà. Ceci garantit la finalité de cet algorithme.

Les résultats précédents assurent que l'ensemble des P-positions (pour rappel: les positions de valeur nulle) forme un ensemble stable et absorbant de G : absorbant car à partir de toute position gagnante, on peut jouer vers une position perdante, et stable car à partir d'une position perdante, il n'existe aucune option dont la valeur est nulle. Un tel ensemble est appelé **noyau** du graphe. Dans les chapitres suivants, nous utiliserons régulièrement cette propriété afin de prouver qu'un ensemble de positions est perdant.

Dans le cas d'un graphe acyclique, le noyau existe et est unique. On l'obtient effectivement par un algorithme identique à celui de la fonction de Grundy, où seuls deux types d'étiquettes sont considérés: nulles et strictement positives. On pourra remarquer qu'une exécution répétée de l'algorithme de recherche d'un noyau dans un graphe orienté acyclique calcule la fonction de Grundy du jeu associé:

Données: un graphe de jeu G dont on souhaite déterminer les nimbers.

Variables: des listes $\text{nimbers}(i)$ qui stockent les positions de nimber i . Elles sont initialement vides. i est un entier initialisé à 0.

Algorithme :

```

Tant que  $G$  contient encore des sommets
Faire
  nombres(i)=noyau(G);
   $G=G \setminus \text{nombres}(i)$ ;
   $i=i+1$ ;
Fin Faire

```

Ceci illustre la fonction de Grundy comme une partition du graphe de jeu en noyaux imbriqués.

En 1966, Smith a présenté dans [Smi66] les premiers travaux au sujet des jeux impartiaux dont le graphe possède un cycle. On trouvera des résultats relatifs à ce type de jeu dans [BCG01, FY86, FT75]. Ce type de jeu introduit une nouvelle difficulté, à savoir qu'une position de jeu peut avoir un troisième statut: celui de position "égalité", ou "match nul". On qualifie ainsi les positions pour lesquelles aucune option n'est perdante, et où il existe une option qui ne soit pas gagnante. La figure 1.2 illustre un tel jeu: les positions marquées P sont perdantes, celles marquées N sont gagnantes, celles marquées E sont des égalités.

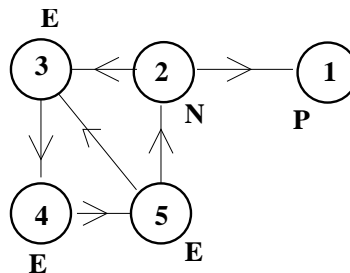


FIG. 1.2 – Exemple de graphe de jeu cyclique

L'existence d'une fonction de Grundy ou encore d'un noyau sur un graphe orienté cyclique sont des problèmes NP-complets. On comprend aisément pourquoi ce type de jeu est plus difficile à étudier que ceux de type Nim ou Wythoff. Pour sortir de la NP-complétude et introduire les positions "égalité" dans la fonction de Grundy, une **fonction de Grundy généralisée** a été introduite. Les positions pourront prendre une nouvelle valeur, l'infini ∞ . Dans [Fra00], on pourra trouver les explications relatives à cette nouvelle fonction, et les détails de son calcul. On y verra notamment que l'introduction d'une nouvelle valeur impose de définir une *Nim-somme généralisée*.

1.3.4 Les jeux partisans

La théorie des jeux partisans a été introduite par John Conway à la fin des années 70. L'ensemble de ses travaux sur les jeux combinatoires font d'ailleurs de lui l'un des plus grands noms du domaine. En compagnie de Berlekamp et Guy, il a rédigé ce qui fait aujourd'hui office d'ouvrage référence, à savoir les livres "Winning ways for your mathematical plays" (cf. [BCG01]), où figure l'essentiel des théories relatives au jeux combinatoires.

Dans cet ouvrage, on trouve une large section relative aux jeux partisans. Pour ce type de jeu, chaque joueur possède sa propre liste d'options. Etre le premier ou le second joueur ne suffit plus pour décider du sort d'une partie. Comme l'illustre le jeu partisan décrit dans la section précédente (le jeu des dominos), il se peut qu'un des deux joueurs soit avantage au début de partie, et ceci peu importe qu'il joue en premier ou pas. La valeur d'une position d'un jeu partisan sera alors définie en terme de "nombre de coups d'avance du joueur A sur le joueur B". Cette théorie est en étroite corrélation avec la théorie des nombres, et a conduit les auteurs à redéfinir les nombres déjà connus à l'aide de jeux, et à en définir de nouveaux (les surréels par exemple, cf. [Knu74, Con94]).

1.3.5 La complexité des jeux combinatoires impartiaux

Je profite de cette section pour évoquer l'un des auteurs les plus prolifiques du domaine au cours des trente dernières années, à savoir Aviezri S. Fraenkel. Un grand nombre de ses travaux porte sur des jeux impartiaux qu'il a créés lui-même. Plusieurs de ses écrits sont des rapports généraux sur les jeux combinatoires. Dans l'article [Fra02], il évoque notamment les questions de complexité qui leur sont inhérentes.

La notion de complexité définie autour d'un jeu combinatoire est quelque peu différente de celle associée aux problèmes de décision. Le problème apparaît dès que l'on regarde l'un des jeux à priori les plus faciles, à savoir le jeu de Nim. En considérant un jeu à N tas, la taille du codage d'une position (n_1, \dots, n_N) est donc $\sum_{i=1}^N \log n_i$. D'après les résultats de Bouton, la stratégie gagnante s'obtient en temps linéaire par rapport à la taille du codage. Ce n'est cependant plus le cas quand on s'intéresse à la durée du jeu: en retirant une seule allumette à chaque tour, le perdant peut forcer un nombre de coups en $O(\sum n_i)$. Cela implique une durée de jeu exponentielle par rapport à la donnée. Ce résultat est assez gênant pour un jeu considéré comme l'un des plus faciles. Cette propriété est d'ailleurs vraie pour de nombreux autres jeux dont la taille de la donnée est logarithmique. Pour sortir de cette impasse, on a décidé qu'une durée de jeu exponentielle ne serait pas un facteur pris en compte dans la complexité d'un jeu. Voici les définitions qui ont été retenues:

Un jeu impartial dit **polynomial** doit satisfaire les quatre propriétés suivantes:

1. Le statut (P, N ou E) d'une position de jeu peut se calculer en temps polynomial.
2. Le prochain coup optimal (d'une position N vers une position P, ou d'une position E vers une position E) peut se calculer en temps polynomial.
3. Le gagnant peut appliquer sa stratégie gagnante en un nombre exponentiel de coups au plus.
4. L'ensemble des jeux polynomiaux est clos pour la somme de jeux.

Un jeu impartial dit **facile** satisfait seulement les points (1) et (3). Cela distingue les jeux combinatoires des problèmes d'optimisation et de décision, où facilité et complexité polynomiale sont souvent synonymes. Quand on regarde la caractérisation des P-positions du Wythoff's game, on peut dire qu'il s'agit d'un jeu facile. Cependant, la recherche du prochain coup gagnant n'est pas connue pour être polynomiale.

Une fois les définitions précisées, qu'en est-il généralement de la complexité des jeux combinatoires impartiaux? La plupart des jeux sont difficiles. Les raisons sont notamment celles expliquées dans la partie 1.2, à savoir la multiplicité des quantifieurs dans le problème de décision à résoudre.

Cependant, on a vu que la résolution d'un jeu impartial s'effectue par le calcul de la fonction de Grundy (ou fonction de Grundy généralisée dans le cas d'un jeu cyclique). Or, les algorithmes de calcul de ces fonctions s'exécutent en temps polynomial par rapport à la taille du graphe: en $O(|V| + |E|)$ opérations dans le cas d'un jeu acyclique, et $O((|V| + |E|)|V|)$ opérations dans le cas d'un jeu cyclique. Ces complexités sont très satisfaisantes, mais les problèmes apparaissent très souvent lorsque l'on compare les tailles du graphe et de la donnée. Prenons par exemple le jeu de Nim à un seul tas: le graphe comporte n sommets alors que la donnée est de taille logarithmique. Il en est de même pour de nombreux autres jeux, tels que les jeux de soustraction ou le Wythoff's game. Cela signifie que l'utilisation du graphe de jeu pour calculer les valeurs des positions n'est souvent pas envisageable. Dans les cas des jeux de Nim ou de Wythoff, on voit que seule l'obtention d'une formule pour les P-positions rend les problèmes faciles. Nous verrons dans le chapitre 2 que pour certains jeux que nous proposons, une telle caractérisation polynomiale est difficile à obtenir.

1.3.6 Les jeux combinatoires aujourd'hui

Aujourd'hui, les jeux combinatoires continuent d'intéresser la communauté des théoriciens des nombres et des combinatoriciens. Certains journaux ont ouverts des sections qui leur sont réservées: ce fut le cas de *Theo-*

retical Computer Science dans les années 90, et c'est aujourd'hui dans *Integers*, *Electronic J. of Combinatorial Number Theory* que les auteurs peuvent exposer leur travaux. D'autres journaux comme *Discrete Mathematics*, *Discrete Applied Mathematics*, le *Monthly* ou encore *International Journal on Game Theory* réservent très souvent certaines pages aux jeux. Par ailleurs, on se référera volontiers à certains livres majeurs du domaine, comme la série des *Winning ways* (cf. [BCG01]), le *On number and games* de Conway (cf. [Con76]), ou les *Games of no chance* de R.J.Nowakowski (cf. [R.J96]).

Actuellement, beaucoup de papiers décrivent des variantes de jeux bien connus. Il est en effet très facile de construire un nouveau jeu, en modifiant une ou deux règles du jeu initial, ou en relaxant certaines contraintes de la définition des jeux combinatoires. L'étude et la complexité du jeu ainsi créé peuvent devenir alors complètement différentes. A titre d'exemple, le nombre de variantes déclinées à partir du jeu de Nim est assez incroyable...Cependant, il arrive que des nouveaux jeux apparaissent, en se différenciant considérablement de leurs illustres prédécesseurs. C'est par exemple le cas du jeu *Clobber*, inventé par Albert, Grossman, Nowakowski, et Wolfe (cf. [AGNW05]). On étudiera en détail une de ses variantes dans la partie II.

1.4 Des résultats généraux sur une nouvelle famille de jeux

Nos premiers résultats sont des propriétés générales sur une certaine famille de jeux impartiaux acycliques. Ils sont le fruit d'une collaboration menée avec M. Mhalla (CNRS, Laboratoire Leibniz), et vont être publiés dans *Ars Combinatoria* (cf. [ES05b]).

1.4.1 Présentation d'une nouvelle famille de jeux

Après avoir défini une nouvelle famille de jeux combinatoires, on va chercher à l'agrandir en lui ajoutant de nouveaux jeux obtenus par une opération qui préserve la fonction de Grundy.

Présentons tout d'abord un nouveau jeu impartial acyclique, qu'on appelle **jeu de domination**.

Etant donné un graphe $G = (V, E)$ (éventuellement orienté), le *jeu de domination* sur G est le jeu où deux joueurs retirent alternativement le voisinage fermé d'un sommet qu'ils choisissent. Celui qui enlève le dernier sommet gagne la partie.

Considérons maintenant la famille \mathbb{I} des jeux impartiaux acycliques dont l'ensemble des coups possibles est fini, et décroît strictement après chaque

tour de jeu. Tous les coups sont disponibles au départ, et aucun nouveau coup n'apparaît au cours de la partie.

A chaque jeu de \mathbb{I} on associe un **graphe de coups** $G_m = (V_m, E_m)$, où V_m est l'ensemble de tous les coups possibles du jeu. On mettra une arête de v_i vers v_j si l'exécution du coup v_i interdit par la suite d'exécuter le coup v_j .

De ces définitions, on en déduit rapidement que jouer à un jeu de la famille \mathbb{I} est équivalent à jouer à un jeu de domination sur son graphe de coups.

On donne maintenant plusieurs exemples de cette équivalence: étant donné un ensemble partiellement ordonné P (un "poset"), on définit un *poset game* comme un jeu où deux joueurs retirent alternativement un élément x de P , ainsi que tous les éléments supérieurs ou égaux à x . Le joueur qui retire le dernier élément de P est la vainqueur. Par définition des poset games, ceux-ci sont tous équivalents à des jeux de domination sur leur graphe de coups.

L'ensemble des poset games inclut de nombreux jeux, comme le jeu de Nim, le jeu d'Hackenbush, le superset game (cf. [GN82]), ou Chomp (cf. [Gal74, Byr03]). Ce dernier se joue avec une tablette de chocolat rectangulaire, sur laquelle deux joueurs sélectionnent alternativement un carré, le mangent, ainsi que tous les carrés qui se trouvent dans sa région sud-est. Le joueur qui mange le carré du coin nord-ouest (supposé empoisonné) perd la partie. Sur la figure 1.3, on donne le graphe de coups de Chomp joué sur une tablette 2×4 . Ce graphe est orienté, et chaque sommet correspond à la sélection d'un carré.

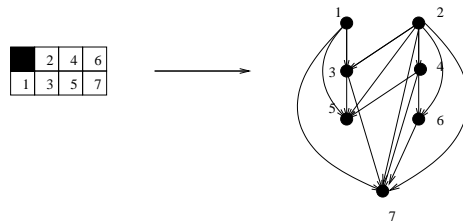


FIG. 1.3 – Graphe de coups de Chomp sur une tablette 2×4

La plupart des jeux où on retire des éléments d'un ensemble appartiennent à la famille \mathbb{I} . C'est notamment le cas du Wythoff's game. Une position (a, b) de ce jeu offre un graphe de coups avec $(a + b + \min(a, b))$ sommets, comme illustré sur le schéma 1.4:

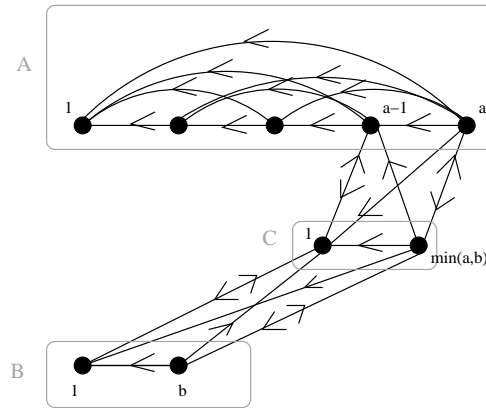


FIG. 1.4 – Graphe de coups du Wythoff's game à partir de la position $(5,2)$

Sur ce graphe, les sous-ensembles de sommets A et B désignent les coups internes à un seul tas, et les sous graphes induits associés sont des ordres totaux. Choisir un sommet étiqueté $(a-i)$ (ou $(b-i)$) sur le jeu de domination revient alors à laisser i allumettes dans le premier (respectivement second) tas. L'ensemble C stocke les coups correspondant au retrait du même nombre d'allumettes dans les deux tas. Sa taille est donc égale à $\min(a,b)$, et le graphe induit est également un ordre total.

Pour les arcs orientés de A/B vers C : seuls les coups internes à A/B et qui laissent moins de $\min(a,b)$ allumettes ont un arc vers C . Parmi eux, celui qui laisse $(\min(a,b) - i)$ allumettes dans un tas possède exactement i arcs orientés vers les i plus petits (au sens de leur étiquette) sommets de C .

Pour les arcs orientés de C vers A/B : les coups retirant i allumettes dans les deux tas ont i arcs vers les plus grands (au sens de leur étiquette) sommets de A et i arcs vers les plus grands sommets de B .

Dans ces exemples, les graphes de coups sont orientés. Quand chaque arc est doublement orienté, on ne tient plus compte des orientations. C'est le cas quand on considère le jeu du domino: deux joueurs retirent alternativement deux carrés adjacents (un domino) sur une grille $n \times m$. Le graphe des coups de ce jeu sur une grille 2×5 est donné par la figure 1.5, où les sommets des première et dernière lignes correspondent aux dominos horizontaux, et ceux de la ligne intermédiaire aux dominos verticaux.

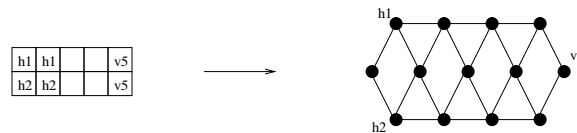


FIG. 1.5 – Graphe de coups du jeu du domino sur une grille 2×5

Une dernier exemple de jeux appartenant à \mathbb{I} est la famille des jeux octaux, définis par Guy et Smith. Un jeu octal est un jeu de suppression d'éléments (ici, des allumettes), dont la position de départ est un tas unique de taille n . La suite du jeu peut conduire à l'apparition de plusieurs tas. Les règles d'un jeu octal sont codées par un mot écrit en base 8, de la forme $.d_1d_2d_3\dots$, avec $d_i \in \{0\dots 7\}$. La valeur de chaque d_i indique s'il est possible de retirer i allumettes adjacentes dans un tas, et de quelle façon. Pour cela, on considère le codage binaire de chaque d_i : chaque puissance de deux 2^k contenue dans ce codage signifie qu'on peut retirer i allumettes adjacentes dans un tas, de sorte à le diviser en k tas non-vides.

Considérons par exemple le jeu octal $.137$. On a:

- $d_1 = 1$: on peut retirer une allumette dans un tas si et seulement si le tas n'est constitué que d'une allumette.
- $d_2 = 3 = 2 + 1$: on peut retirer deux allumettes adjacentes dans un tas, pourvu que celui-ci ne soit pas divisé en deux tas après cette opération (on prend les deux allumettes sur les bords du tas).
- $d_3 = 7 = 4 + 2 + 1$: on peut retirer trois allumettes adjacentes dans un tas.
- $d_4 = d_5 = \dots = 0$: par défaut. Il est interdit de prendre quatre allumettes ou plus.

On remarquera que le jeu du domino sur une seule ligne est précisément le jeu octal $.07$.

1.4.2 Propriétés du jeu de domination

Etant donné un graphe $G = (V, E)$, un *automorphisme* f de G est une bijection de V vers V telle que $(u, v) \in E$ si et seulement si $(f(u), f(v)) \in E$. f est dit *symétrique* si $f = f^{-1}$.

Proposition 1. *Si un graphe G admet un automorphisme symétrique s tel que pour tout sommet u , $s(u) \notin N_G[u]$, alors le jeu de domination sur G est gagnant pour le second joueur.*

Preuve. Etant donné n'importe quel sommet u de V , on notera $G' = G \setminus (N_G[u] \cup N_G[s(u)])$. Comme $s^{-1} = s$, s reste un automorphisme de G' tel que pour tout sommet u , $s(u) \notin N_{G'}[u]$. Si le premier joueur choisit le sommet u dans le jeu de domination, alors une stratégie gagnante pour le second joueur consiste à choisir à chaque fois le sommet $s(u)$. \square

Ce théorème s'applique notamment au jeu du domino:

Corollaire 1. *Une position du jeu du domino est perdante si la longueur et la largeur de la grille sont toutes les deux paires. Elle est gagnante si elles ont une parité différente.*

Preuve. On considère le graphe de coups associé au jeu du domino sur une grille $w \times l$. On étiquette les sommets de ce graphe avec $h_{i,j}$ (resp. $v_{i,j}$) pour le coup qui ôte le domino horizontal (resp. vertical) dont l'extrémité nord-ouest est située sur la case d'indices (i,j) (cf. figure 1.6).

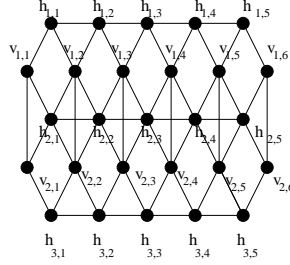


FIG. 1.6 – Graphe de coups du jeu du domino sur une grille 3×6

L'automorphisme symétrique s qui associe $h_{i,j}$ à $h_{w-i+1,l-j}$, et $v_{i,j}$ à $v_{w-i,l-j+1}$ satisfait la propriété de la proposition 1: sur le graphe G si w et l sont tous les deux pairs, sur $G \setminus N_G[h_{(w+1)/2,l/2}]$ si w est impair et l pair, et sur $G \setminus N_G[v_{w/2,(l+1)/2}]$ si w est pair et l impair. \square

On s'intéresse maintenant au jeu de domination sur un produit complet de deux autres graphes.

Lemme 1. *Si G_1 ou G_2 est une position perdante du jeu de domination, alors le graphe produit $G = G_1 \otimes G_2$ est perdant pour ce même jeu.*

Preuve. Sans restreindre la généralité, supposons G_1 perdant. Alors toutes ses copies dans G sont perdantes également. Quand le premier joueur joue selon un sommet d'une certaine copie de G_1 , l'autre joueur n'a qu'à appliquer sa stratégie gagnante sur la même copie de G_1 . \square

On introduit maintenant deux opérations sur les graphes qui vont préserver la valeur de Grundy d'une position du jeu de domination. Deux sommets u et v sont dits sommets *jumeaux* si et seulement si $u \in N(v)$ et $N(u) \setminus \{v\} = N(v) \setminus \{u\}$.

Lemme 2. *Dans un jeu de domination, la valeur de Grundy d'une position G est invariante par addition d'un sommet jumeau v'_0 à n'importe quel sommet v_0 .*

Preuve. Par induction, ce résultat est vrai pour un sommet isolé (le graphe vide est la seule option possible). On suppose maintenant qu'il est vrai pour les graphes ayant moins de n sommets. Soient $G = (V,E)$ une position du jeu de domination à n sommets, et v_0 un sommet quelconque de V . On considère le graphe $G_2 = \text{twin}_{v_0}(G)$, qui correspond au graphe G auquel on a ajouté un sommet jumeau v'_0 à v_0 (v'_0 est donc tel que $N_{G_2}[v'_0] = N_G[v_0]$).

Pour tout sommet $u \in V \cup \{v'_0\}$, la suppression de $N_{G_2}[u]$ conduit à diverses positions résultantes:

- Si $u = v_0$ ou $u = v'_0$, et puisque v_0 et v'_0 sont adjacents, le graphe résultant $G_2 \setminus N_{G_2}[u]$ est identique à celui obtenu en retirant $N_G[v_0]$ du graphe G .
- Si u est un voisin de v_0 , le graphe résultant est le même que celui obtenu en retirant $N_G[u]$ du graphe G .
- Si u n'est pas dans le voisinage de v_0 , alors par hypothèse d'induction, la valeur de Grundy du graphe résultant est la même que celle du graphe obtenu en retirant $N_G[u]$ du graphe G .

□

Ce lemme prouve ainsi que l'addition d'un sommet jumeau conserve la valeur de Grundy d'une position du jeu de domination. On va voir qu'en combinant cette opération avec un couplage, cette valeur est toujours préservée.

On appelle *twin and match* l'opération qui consiste à ajouter un jumeau à deux sommets non adjacents v_i et v_j , et à ajouter des arêtes qui constituent un couplage entre les paires de jumeaux $\{v_i, v'_i\}$ et $\{v_j, v'_j\}$. L'exemple ci-dessous illustre plusieurs opérations de twin and match à partir d'une chaîne de longueur 4.

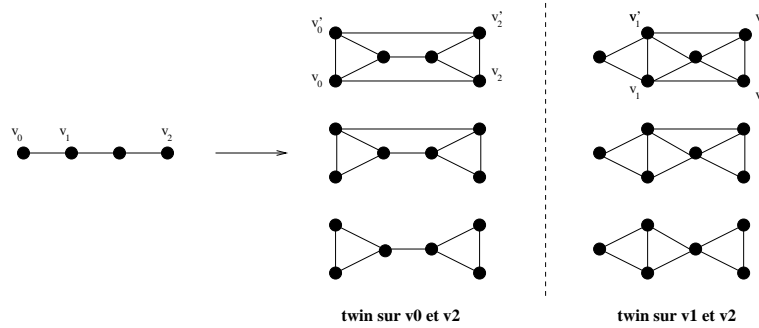


FIG. 1.7 – Exemples de twin and match à partir d'un P_4

Théorème 1. Dans un jeu de domination, la valeur de Grundy d'une position G est invariante par l'opération twin and match.

Preuve. Si le couplage ne contient aucune arête, alors le lemme 2 permet de conclure.

On peut vérifier le résultat pour les graphes à deux sommets, en utilisant le schéma 1.8.

En effet, le stable de taille 2 est une position perdante, et a pour valeur 0. En appliquant une opération twin and match, on voit que le graphe résultant est perdant lui aussi.

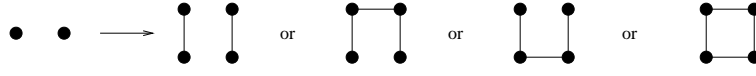


FIG. 1.8 – Opération twin and match à partir d'un stable de taille 2

On suppose maintenant que le théorème est vrai pour les graphes à moins de n sommets. Soit $G = (V, E)$ une position du jeu de domination à n sommets, et soient v_0 et v_1 deux sommets non-adjacents de G . On considère maintenant G_2 , obtenu à partir de G en appliquant une opération twin and match aux sommets v_0 et v_1 . Pour un sommet donné u de G_2 , on distingue plusieurs cas lorsqu'on retire $N_{G_2}[u]$ du graphe G_2 :

- $u = v_0$ ou $u = v'_0$, et u n'est ni voisin de v_1 , ni de v'_1 . Alors $G_2 \setminus N_{G_2}[u] = \text{twin}_{v_1}(G \setminus N_G[v_0])$. Le graphe résultant est le même que celui obtenu en retirant $N_G[v_0]$ de G .
- $u = v_0$ ou $u = v'_0$, et u est un voisin de v_1 ou v'_1 (en raison du couplage). Alors on a bien $G_2 \setminus N_{G_2}[u] = G \setminus N_G[v_0]$.
- u appartient aux voisinages de v_0 et v_1 sur G , c.à.d. $u \in N_G(v_0)$ et $u \in N_G(v_1)$. Alors $G_2 \setminus N_{G_2}[u] = G \setminus N_G[u]$.
- u n'appartient qu'à un des deux voisinages $N_G(v_0)$ ou $N_G(v_1)$. Sans restreindre la généralité, supposons que $u \in N_G(v_0)$ et $u \notin N_G(v_1)$. Alors on a $G_2 \setminus N[u] = \text{twin}_{v_1}(G \setminus N[u])$. En utilisant le lemme 2, on peut alors conclure.
- u n'est dans aucun des deux voisinages. Alors l'hypothèse d'induction permet de conclure immédiatement.

□

A partir du graphe de coups d'un jeu de la famille \mathbb{I} , l'opération twin and match permet donc de construire de nouveaux graphes (et ainsi de nouveaux jeux) équivalents pour le jeu de domination. Bien que nous n'ayons pas trouvé d'équivalents de jeux, nous pensons que cette opération présente un intérêt pertinent.

1.4.3 Jeu de domination sur les puissances de cycles

Dans cette courte partie, on s'intéresse au jeu de domination sur les puissances de cycle. On va montrer que la connaissance des positions perdantes des jeux octaux est utile dans l'obtention de la fonction de Grundy du jeu de domination sur les puissances de cycles.

On notera $.0 \dots 7_k$ le jeu octal où le seul coup autorisé consiste à retirer k éléments consécutifs d'un tas (quitte à former deux nouveaux tas). $g_{.0 \dots 7_k}(n)$ définit la valeur de Grundy d'une position de ce jeu constituée d'un tas unique de longueur n . $g(C(n, k))$ définit la valeur de Grundy d'une position

G du jeu de domination telle que $G = C(n, k)$. On obtient alors les résultats suivants:

Théorème 2. $g(C(n, k)) = 1$ si et seulement si $g_{.0\dots 7_k}(n - k - 1) = 0$
 $g(C(n, k)) = 0$ si et seulement si $g_{.0\dots 7_k}(n - k - 1) > 0$

Preuve. A partir d'un graphe $C(n, k)$, il n'existe qu'une seule option pour le jeu de domination, qui est la k^{eme} puissance d'une chaîne de taille $(n - 2k - 1)$ (qu'on notera $P(n - 2k - 1, k)$). La valeur de Grundy $g(C(n, k))$ vaudra donc 0 ou 1 selon si cette puissance de chaîne est gagnante ou perdante. On considère maintenant le jeu $.0\dots 7_k$ joué sur une ligne de longueur $(n - k - 1)$. Son graphe de coups associé est $P(n - 2k - 1, k)$, ce qui conclut la preuve. \square

Par exemple, jouer un coup à partir du $C(14, 2)$ donne un graphe résultant $P(9, 2)$, qui est le graphe de coups du jeu octal $.007$ sur un tas de longueur 11.

1.5 Jeux et codes correcteurs d'erreur

En 1986, Conway et Sloane rédigent un article (cf. [JS86]) dans lequel ils décrivent le lien étroit qui existe entre jeux combinatoires et codes correcteurs d'erreur. Ils affirment notamment que les positions perdantes de certains jeux constituent un code détecteur et correcteur d'erreur. Leurs résultats ont été étendus au début des années 90 par Conway lui-même (cf. [Con90]), Brualdi et Pless (cf. [BP93]), Fraenkel (cf. [Fra95]), ou Van Zanten (cf. [Zan97]). Les codes concernés par tous ces travaux étant obtenus par l'application d'un algorithme glouton sur l'ensemble des mots d'un langage, Brualdi et Pless ont choisi de les appeler *codes gloutons*. On conservera ce terme dans notre étude.

1.5.1 Définitions

Etant donné l'ensemble des mots de longueur n sur une base B et un critère de sélection S , on construit un **code glouton** en parcourant l'ensemble des mots dans un certain ordre et en choisissant à chaque fois le premier mot qui satisfait le critère S .

Les définitions qui suivent décrivent cette définition de manière plus précise:

Soient n et q deux entiers positifs, et N_q l'ensemble des entiers inférieurs ou égaux à q , c.à.d. $\{0, 1, \dots, q - 1\}$. Cet ensemble est muni de l'opérateur Nim-somme \oplus_q , défini de la façon suivante:

$$a \oplus_q b = Mex(a' \oplus_q b, a \oplus_q b')_{a' < a, b' < b}$$

On définit N_q^n comme l'ensemble des n -uplets sur N_q décrits dans l'ordre lexicographique (c.à.d. $(000) < (001) < (002) < (010) < \dots$ dans l'exemple

$q = 3, n = 3$).

Soit W un automorphisme de N_q^n (avec une valeur de q qui confère à N_q^n le statut d'espace vectoriel). On applique W à chaque n -uplet de l'ordre lexicographique. On obtient ainsi un nouvel ordre des vecteurs de N_q^n , que l'on notera comme la liste $\{A_0 = 0, A_1, \dots, A_{q^n-1}\}$.

Soit S un critère de sélection sur l'ensemble des vecteurs de N_q^n , c'est à dire une fonction booléenne sur cet ensemble.

Un (n, q, W, S) -code *glouton* est défini de la façon suivante: on choisit le premier vecteur de la liste $\{A_i\}$ (à savoir le vecteur nul A_0), puis on choisit récursivement le prochain vecteur A_k de la liste tel que $(A_k \oplus A'_k)$ satisfait S pour tout mot A'_k déjà choisi. L'ensemble des mots choisis constitue le code glouton.

En 1960, Levenšteïn fut le premier à prouver la linéarité des codes gloutons (cf. [V.I60]). Lorsque W est l'automorphisme identité, l'ensemble des vecteurs est parcouru dans l'ordre lexicographique. Les codes gloutons qui en découlent sont appelés *lexicodes*. Dans [JS86], Conway et Sloane ont prouvé la linéarité des lexicodes pour $N_q = GF(2^{2^n})$, en utilisant une preuve fondée sur un jeu combinatoire, le *jeu glouton*. Dans [BP93], Brualdi et Pless prouvent la linéarité des codes gloutons sur $GF(2)$. Plus récemment (cf. [Zan97]), Van Zanten unifie ces résultats en prouvant la linéarité des codes gloutons sur $GF(2^{2^n})$, et en généralisant la définition des codes gloutons avec l'apparition du critère de sélection. Jusqu'alors, les critères de sélection utilisés étaient en effet beaucoup plus explicites: le plus courant était l'utilisation de la distance de Hamming. On choisissait un mot s'il était suffisamment "éloigné" des autres mots déjà choisis. Cela a tout son sens dans la définition d'un code censé détecter et corriger des erreurs. Conway et Sloane avaient quant à eux introduit la notion de "turning sets", pour définir ce critère de sélection. Dans son travail, Van Zanten a montré que la linéarité des codes gloutons est assurée quel que soit le critère (à une petite condition cependant), et donc a pu s'affranchir des distances de Hamming et autres turning sets.

Dans notre étude, nous proposons une preuve alternative du résultat de Van Zanten utilisant les jeux combinatoires. On va tout d'abord introduire la notion de *jeu glouton* qui sera utile à notre preuve.

Soit L un (n, q, W, S) -code glouton. On définit un *graphe glouton* $G = (V, E)$ de la façon suivante: l'ensemble des sommets V est l'ensemble des mots $\{A_0, \dots, A_{q^n-1}\}$, et un arc $(A_i, A_j) \in E$ si et seulement si $j < i$ et $(A_i \oplus A_j)$ ne satisfait pas S .

Pour jouer à un **jeu glouton** sur G , on commence par poser un jeton sur un des sommets. Deux joueurs déplacent ensuite ce jeton d'un sommet à un autre le long d'un arc. Le premier joueur bloqué perd la partie. On

remarque aisément qu'un jeu glouton est impartial acyclique, on peut donc lui appliquer la théorie de Grundy et Sprague, et lui associer une fonction de Grundy $g : V \rightarrow GF(2)^\infty$. Comme l'a remarqué Fraenkel dans [Fra95], les mots du code forment un ensemble stable et absorbant de G . Cela signifie qu'on peut assimiler les P-positions d'un jeu glouton avec les mots du code glouton associé (cela dit, les jeux gloutons ont été définis de telle sorte que cette propriété soit vraie).

1.5.2 Linéarité des codes gloutons

On va commencer par prouver la cloture d'un code glouton sur $N_{(2^a)}$ pour la Nim-somme. La seconde partie de la linéarité fait intervenir la multiplication par un scalaire: on introduira alors la Nim-multiplication définie par Conway.

Théorème 3. *Soit $G = (V, E)$ un graphe glouton issu d'un (n, q, W, S) -code glouton, où $q = 2^a$ pour un entier positif a quelconque. Alors on a $g(A_u \oplus_q A_v) = g(A_u) \oplus_2 g(A_v)$, pour tout $A_u, A_v \in V$.*

Preuve. D'après la définition d'un code glouton, on a $A_u = WU$ et $A_v = WV$, où U et V sont les mots binaires des indices u et v . On s'intéresse maintenant à la somme σ de trois jeux gloutons: le premier est le jeu sur G avec le jeton placé en A_u , les deuxième et troisième jeux ont lieu sur le même graphe, avec respectivement un jeton en A_v , et un autre en $A_u \oplus_q A_v$. Il suffit maintenant de montrer que σ est une position perdante pour prouver le théorème.

En regardant la Nim-somme comme un "ou exclusif", on sait que N_{2^a} est clos pour cet opérateur. Il existe donc un unique $i \in \{0..q^n - 1\}$ tel que $A_i = A_u \oplus A_v$ (en écrivant $A_i = WI$, on déduit que $i = u \oplus v$ par linéarité de W).

On définit maintenant un ordre partiel \prec sur les triplets de la forme (A_k, A_l, A_m) , et vérifiant :

$(A_k, A_l, A_m) \prec (A_{k'}, A_{l'}, A_{m'})$ si et seulement si $k \leq k'$, $l \leq l'$ et $m \leq m'$.

En utilisant un raisonnement par l'absurde, supposons que $\sigma = \{A_i, A_u, A_v\}$ soit une position gagnante. On la choisit comme minimale pour l'ordre \prec . Puisque σ est gagnante, on considère le premier coup du premier joueur qui applique sa stratégie gagnante. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que sa stratégie le conduise à déplacer un jeton de A_i vers A'_i (puisque $A_u = A_i \oplus A_v$ et $A_v = A_i \oplus A_u$). Soit $\sigma' = \{A_{i'}, A_u, A_v\}$ la P-position résultante après ce coup. On a $i' < i$ (*) et $(A_i \oplus A'_i)$ qui ne satisfait pas S par construction du jeu glouton. On définit maintenant $v' = i' \oplus u$ et $u' = i' \oplus v$. Vérifions alors que l'on a soit $u' < u$, soit $v' < v$:

Des égalités sont impossibles: $u = u'$ ou $v = v'$ impliqueraient $i' = u \oplus v$,

contredisant (*). On suppose alors $u' > u$ et $v' > v$. On peut écrire (*) comme suit : $u' \oplus v = u \oplus v' < u \oplus v$. Jetons alors un coup d'oeil à la table d'addition suivante :

\oplus		v		v'	
		B			
u	A	$u \oplus v$		$u \oplus v'$	
u'		$u' \oplus v$			

D'après la définition de la Nim-somme avec la règle Mex, $u' \oplus v$ apparaît dans le tableau soit dans l'ensemble A , soit dans B . Puisqu'une colonne (ou une ligne) ne peut contenir plusieurs fois la même valeur, $u' \oplus v \in A$. Mais la ligne de u contient maintenant deux fois la même valeur $u' \oplus v$.

On peut donc trouver u' ou v' inférieur à u ou v . Sans restreindre la généralité, supposons qu'il existe $u' < u$. Comme $u' = i' \oplus v$, et par linéarité de W , on a $A_{i'} = A_{u'} \oplus A_v$. On en déduit alors : $(A_u \oplus A_{u'}) = (A_i \oplus A_v \oplus A_{i'} \oplus A_v) = (A_i \oplus A_{i'})$. Cela signifie que $A_u \oplus A_{u'}$ ne satisfait pas le critère S . Alors on a $(A_u, A_{u'}) \in E$, et le second joueur peut déplacer le jeton situé en A_u vers $A_{u'}$. Le premier joueur se retrouve alors dans une position σ'' où les trois jetons sont situés en $A_{i'}$, $A_{u'}$, et A_v , tels que $A_{i'} = A_{u'} \oplus A_v$. Comme $\sigma'' \prec \sigma$ et par minimalité de σ , σ'' est bien une P-position, ce qui engendre la contradiction. \square

Ce théorème nous permet maintenant d'affirmer qu'un code glouton sur N_{2^a} est clos pour la Nim-somme. En effet, si A_u et A_v sont deux mots du code, alors $g(A_u)$ et $g(A_v)$ sont nuls sur le graphe glouton associé. Le théorème conclut que $g(A_u \oplus A_v)$ est lui aussi nul, ce qui signifie que $A_u \oplus A_v$ est bien un mot du code.

La linéarité du code passe maintenant par sa cloture lorsque l'on multiplie un mot par un scalaire. Ceci impose de munir notre ensemble N_q d'un opérateur de multiplication. On pourrait choisir l'opérateur habituel des corps finis $GF(q)$, mais sa définition à l'aide de polynômes n'est pas facile à utiliser dans le cadre du jeu glouton. On lui préférera l'opérateur de *Nim-multiplication* défini par Conway dans [Con76]:

$$a \otimes_q b = Mex(a' \otimes_q b \oplus_q a \otimes_q b' \oplus_q a' \otimes_q b')$$

L'ensemble N_q est clos pour l'opérateur de Nim-multiplication lorsque $q = 2^{2^a}$. Conway a par ailleurs montré dans [Con76] que N_q avec $q = 2^{2^a}$,

et muni des opérateurs Nim-somme et Nim-multiplication est isomorphe au corps $GF(2^{2^a})$.

Par ailleurs, un critère de sélection S est dit *multiplicateur* si $S(A_i)$ implique $S(\alpha A_i)$ pour tout vecteur A_i de N_q^n , et tout scalaire α non nul de N_q . Pour ce type de critère, on obtient le résultat de linéarité suivant sur les codes gloutons:

Théorème 4. *Les codes gloutons sur $GF(2^{2^a})$ dont le critère de sélection est multiplicateur sont linéaires.*

Preuve. Soit t le plus petit entier tel que $g(u) \leq 2^t - 1 \forall u \in V$. On peut donc affirmer que g est une application linéaire de $V = (GF(2^{2^a}))^n$ vers $GF(2)^t$. En effet, la seconde partie de la preuve de la linéarité de g doit vérifier que $g(\lambda \otimes_q u) = \lambda \otimes_q g(u) \forall \lambda \in GF(2^{2^a}), \forall u \in V$. En utilisant la même preuve que celle de Conway et Sloane (cf. [JS86], théorème 5), à laquelle on rajoute l'automorphisme W (qui ne change presque rien car lui-même linéaire), et le critère de sélection multiplicateur (qui lui aussi ne modifie presque rien), on vérifie que ce résultat est vrai. Ensuite, il suffit de dire que $Ker(g)$ est l'ensemble des P-positions du jeu glouton, et donc le code glouton lui-même. Puisque $Ker(g)$ est un sous-espace vectoriel de V , il est lui-même stable par la multiplication par un scalaire. \square

1.5.3 Intérêt des codes gloutons

L'efficacité d'un code se traduit généralement par le nombre de mots qu'il contient, ainsi que par la dimension de l'espace formé. Etant donné n , q , et un critère S fixé (bien souvent une distance d minimum pour séparer les mots du code), de nombreuses études consistent alors à **trouver de bons ordres de parcours** W qui optimisent ces valeurs.

Dans [JS86] on trouve les tailles des lexicodes pour plusieurs valeurs de n , q , et d . On s'aperçoit qu'on retrouve dans certains cas les meilleurs codes connus. Par exemple, lorsque $q = 2$, $d = 3$, et $n = 2^m - 1$, les lexicodes coïncident avec les codes de Hamming. Le code de Golay [24,12,8] (défini dans [Gol79]) est le lexicode binaire défini par $n = 24$ et $d = 8$.

Dans [BP93, AVM], on s'intéresse aux codes gloutons dont l'ordre n'est pas lexicographique. Il s'agit par exemple des codes gloutons de Gray (voir [BP93]), dont la dimension est parfois meilleure que celle des lexicodes. On trouvera des tableaux comparatifs dans [AVM].

D'un point de vue pratique, l'intérêt des codes gloutons consiste à obtenir des performances proches de celles des codes parfaits à l'aide d'algorithmes faciles à implémenter. D'un point de vue théorique (et disons personnel, par rapport au sujet de cette thèse), leur corrélation avec la théorie des jeux

combinatoires est dans un premier temps surprenante, et devient rapidement excitante. Dans l'article [Fra95], Fraenkel a cherché à construire de nouveaux types de codes à partir d'un certain type de jeu cyclique, qu'on appelle *jeux d'annihilation*. De son étude sont nés les *anncodes*, qui sont en réalité une généralisation des codes gloutons.

Chapitre 2

Autour du Wythoff's game

2.1 Présentation du Wythoff's game

Comme on l'a expliqué dans le chapitre 1, le Wythoff's game est le deuxième jeu combinatoire mathématiquement résolu. Il a été considéré par Wythoff au début du 20^{ème} siècle, et sa résolution apparaît dans [Wyt07]. L'auteur le définit comme une extension du jeu de Nim, étudié par Bouton quelques années auparavant (cf. [Bou05]).

Les règles en sont les suivantes: étant donnés deux tas d'allumettes de tailles respectives a et b , deux joueurs retirent alternativement

- soit un nombre d'allumettes quelconque dans un seul tas.
- soit le même nombre d'allumettes dans les deux tas.

Le joueur qui ne peut plus jouer est le perdant. Cela signifie que celui qui retire la dernière allumette gagne la partie. Par la suite, on dira qu'une *position* du Wythoff's game est la donnée d'un couple (a,b) , où a et b correspondent aux tailles respectives des deux tas.

Wythoff a résolu ce jeu en s'intéressant aux positions perdantes et gagnantes. A son époque, la théorie de Grundy et Spragues n'existe pas encore, mais ces notions ont été pressenties et introduites par Bouton lors de la résolution du jeu de Nim. La détermination des positions perdantes permet de décider lequel des deux joueurs a une stratégie gagnante. La première P-position du Wythoff's game est la position finale, c.à.d. celle où les deux tas sont vides. On la notera $(a_0, b_0) = (0,0)$. Les P-positions suivantes seront décrites par la suite de couples $(a_i, b_i)_{i \geq 1}$. En supposant les n premières P-positions connues, Wythoff a montré que la $(n+1)$ ^{ème} P-position (a_n, b_n) peut s'exprimer de la façon suivante:

$$a_n = Mex(a_0, \dots, a_{n-1}, b_0, \dots, b_{n-1})$$

$$b_n = a_n + n$$

D'après ce résultat, on en déduit les premières positions perdantes du jeu:

$$(0,0), (1,2), (3,5), (4,7), (6,10), (8,13), (9,15), \dots$$

On peut remarquer aisément que tout entier positif non nul apparaît exactement une fois dans cette liste (en raison de l'appel à la règle *Mex* pour définir a_n , et du fait que les deux suites sont croissantes). Par ailleurs, on s'aperçoit aussi que la suite des différences entre b_n et a_n correspond exactement à la suite des entiers positifs.

Au vu de la symétrie du jeu, pour toute P-position (a_i, b_i) , on remarquera que son symétrique (b_i, a_i) est une position perdante également. Wythoff a prouvé qu'il n'en existe pas d'autres.

Cependant, cet algorithme de calcul des P-positions du Wythoff's game n'est pas suffisant pour une résolution polynomiale. Etant donnée une position de jeu (a, b) , son codage informatique est de taille $(\log a + \log b)$. Déterminer si (a, b) est une P-position nécessite auparavant de calculer les $|b - a|$ premières P-positions. Ce calcul est clairement exponentiel par rapport à la taille de la donnée de départ.

Afin d'améliorer son résultat, Wythoff a ensuite proposé une caractérisation plus élégante des P-positions de son jeu. Celles-ci peuvent en effet s'exprimer de la façon suivante:

$$(a_n, b_n) = (\lfloor n\tau \rfloor, \lfloor n\tau^2 \rfloor)$$

où τ est le nombre d'or $(1 + \sqrt{5})/2$. Grâce à cette caractérisation, décider du type d'une position (gagnante ou perdante) n'est plus un problème difficile. La preuve de ce résultat figure dans le papier rédigé par Wythoff (cf. [Wyt07]).

Dans la théorie de Grundy et Sprague, Wythoff ne s'est intéressé qu'aux positions de valeur nulle (perdantes). En 1990, Blass et Fraenkel se sont attachés au calcul de la fonction de Grundy du jeu (cf. [BF90]). Les variantes et les études de ce jeu sont assez nombreuses, on pourra par exemple citer [Con59a, Fra82, FB73, FO98a].

Une autre façon de présenter le Wythoff's game a été introduite par Berlekamp, Conway et Guy dans leur livre référence *Winning ways for your mathematical plays* (cf. [BCG01]). Ils considèrent un échiquier sur lequel on place une reine. Le coin nord-ouest de l'échiquier est numéroté $(0,0)$, et l'échiquier est infini dans la direction sud-est.

A tour de rôle, chaque joueur déplace la reine selon les mouvements autorisés aux échecs. On impose un déplacement dans la direction nord-ouest pour que le jeu ait une fin. Le joueur qui ne peut plus déplacer la reine

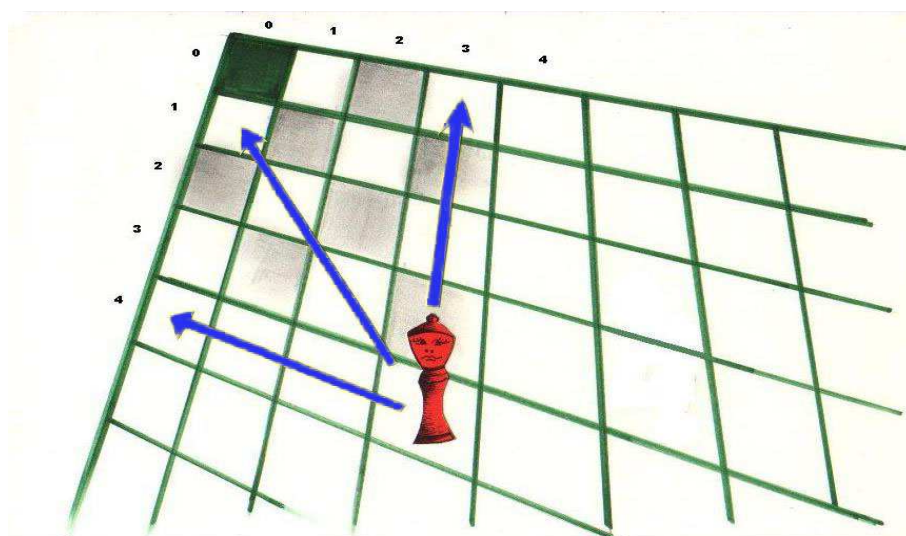


FIG. 2.1 – Wythoff's game sur un échiquier

est le perdant. Autrement dit: celui qui place la reine sur la case $(0,0)$ gagne la partie.

Cette vision du Wythoff's game est équivalente à celle avec les deux tas d'allumettes. Chaque tas correspond à une des coordonnées de l'échiquier. Déplacer la reine horizontalement ou verticalement revient à enlever des allumettes dans un seul des deux tas. La déplacer diagonalement, c'est comme bouger horizontalement et verticalement du même nombre de cases, ce qui correspond à retirer le même nombre d'allumettes dans les deux tas.

2.2 De la reine vers le roi

Puisque le Wythoff's game peut être joué sur un échiquier en déplaçant une reine, pourquoi ne pas essayer avec d'autres pièces d'échecs? Déplacer une tour revient à jouer au jeu de Nim sur deux tas. En effet, le déplacement diagonal n'étant pas autorisé pour cette pièce, cela signifie qu'on ne peut pas enlever d'allumettes sur les deux tas simultanément. Le déplacement d'un cheval a été étudié dans [BCG01], où les valeurs des positions ont été calculées. Notons que la spécificité des mouvements du cheval impose plusieurs positions finales, à savoir les cases $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ et $(1,1)$. Dans cette partie, nous nous intéresserons au déplacement d'un roi. On regardera ensuite un ensemble de pièces qui n'existent pas aux échecs, à mi-chemin entre le roi et la reine. On les appellera les *puissances du roi*.

Etant donné un entier positif R , une *puissance* R^{me} du roi est une pièce qui peut se déplacer dans les mêmes directions que la reine, mais d'un

nombre de cases borné par R . La première puissance du roi est le roi lui-même. On peut ainsi considérer que la reine est une puissance infinie du roi. Ci-dessous voici les déplacements autorisés pour le "cube" du roi:

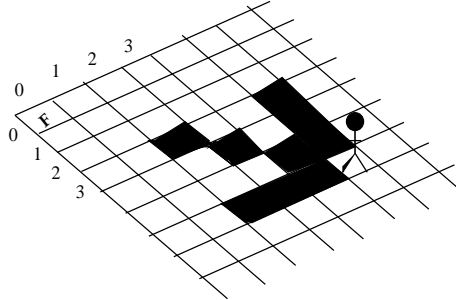


FIG. 2.2 – Déplacements autorisés pour le cube du roi

Notre objectif consiste maintenant à déterminer les P-positions des puissances R^{eme} du roi à partir de celles de la reine.

2.2.1 A la recherche d'une conjecture

La première étape consiste à chercher les zéros de la fonction de Grundy pour chacune des puissances du roi. Pour cela, un programme informatique a été construit, et nous a conduit à la conjecture (puis au théorème) suivant:

Théorème 5. Les P-positions de la puissance R^{eme} du roi sont de la forme

$$(a + (R + 1)k, b + (R + 1)l) \quad \forall k, l \geq 0$$

et pour tout couple (a, b) P-position du Wythoff's game original tel que $R \geq a$ et $R \geq b$.

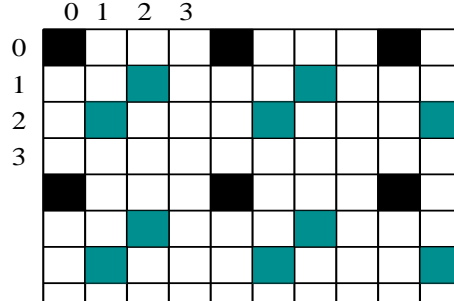
On notera que ce théorème fait de ce jeu un jeu facile, au sens donné par Franekel dans [Fra00].

Exemple d'application:

Dans le cas où $R = 2$, les P-positions (a, b) du Wythoff's game vérifiant $R \geq a$ et $R \geq b$ sont $(0, 0)$, $(1, 2)$ et son symétrique $(2, 1)$. A partir de ces trois positions, on en déduit celles du "carré" du roi, de la forme $(3k, 3l)$, $(1 + 3k, 2 + 3l)$ et $(2 + 3k, 1 + 3l)$:

$$\begin{array}{cccccc} (0, 0) & (1, 2) & (2, 1) & (3, 0) & (4, 2) & (5, 1) & \dots \\ (0, 3) & (1, 5) & (2, 4) & (3, 3) & (4, 5) & (5, 4) & \dots \\ (0, 6) & (1, 8) & (2, 7) & (3, 6) & (4, 8) & (5, 7) & \dots \\ & & & \dots & & & \end{array}$$

Sur l'échiquier, dans le cas $R = 3$, on obtient les P-positions suivantes :



En noir figurent les P-positions issues de $(0,0)$ et en bleu celles issues de $(1,2)$ et $(2,1)$.

2.2.2 Démonstration du résultat

La preuve du théorème nécessite le lemme suivant au sujet des P-positions de la reine :

Lemme 3. *Si (a_n, b_n) , $a_n \leq b_n$ est une P-position du Wythoff's game, alors $b \leq 2a_n$.*

Preuve. Comme on l'a dit précédemment, Wythoff a prouvé dans [Wyt07] que les P-positions (a_n, b_n) peuvent s'écrire $(\lfloor n\tau \rfloor, \lfloor n\tau \rfloor + n)$. Pour prouver que $b_n \leq 2a_n$, il suffit de montrer que $\lfloor n\tau \rfloor + n \leq 2 \lfloor n\tau \rfloor$, c.à.d. $n \leq \lfloor n\tau \rfloor$.

Puisque $\tau \geq 1$, on a $\lfloor n \rfloor \leq \lfloor n\tau \rfloor$, et comme n est entier, cela permet de conclure. \square

La preuve du théorème 5 consiste à vérifier que l'ensemble des positions décrites constituent le noyau du graphe des jeu, c'est-à-dire un **ensemble stable et absorbant**. En effet, le graphe de jeu est clairement sans cycle (la figurine ne revenant jamais en arrière), donc son noyau est unique.

Preuve. Etant donnée une position de jeu (a, b) et $n \in \mathbb{Z}$, on notera $D_n(a, b)$ l'ensemble des positions $(a + (R + 1)k, b + (R + 1)l)$ telles que $k + l = n$. k et l sont des valeurs entières. Sur l'échiquier, $D_n(a, b)$ représente une anti-diagonale de positions.

L'ensemble est stable.

Etant données deux positions issues de la description du théorème, on cherche à montrer qu'il n'existe aucun coup qui conduit de l'une à l'autre.

Soit P et P' deux telles positions. Il existe alors quatre entiers positifs k, l, k', l' tels que :

$$P = (a + (R + 1)k, b + (R + 1)l), \quad a, b \leq R$$

$$P' = (a' + (R + 1)k', b' + (R + 1)l'), \quad a', b' \leq R$$

où (a, b) et (a', b') sont P-positions du Wythoff's game.

(a,b) et (a',b') sont nécessairement deux couples distincts. En effet, si $(a,b) = (a',b')$, alors P et P' appartiendraient à deux ensembles $D_n(a,b)$ and $D_{n'}(a,b)$. Si $n = n'$, alors P et P' appartiendraient à la même anti-diagonale, et il serait clairement impossible de passer de l'une à l'autre en un coup. Si $n \neq n'$, alors P et P' appartiendraient à deux anti-diagonales parallèles séparées par $(R + 1)$ cases. La conclusion est identique.

Sans restreindre la généralité, on peut translater P et P' : horizontalement de $[(R + 1) \min(l, l')]$ cases, et verticalement de $[(R + 1) \min(k, k')]$ cases. Ce qui nous laisse quatre cas au sujet de P et P' (en fonction des signes de $(k - k')$ et $(l - l')$):

- $P = (a,b)$ et $P' = ((a' + (R + 1)(k' - k), b' + (R + 1)(l' - l))$
- $P = (a', b')$ et $P' = (a + (R + 1)(k - k'), b + (R + 1)(l - l'))$
- $P = (a, b + (R + 1)(l - l'))$ et $P' = (a' + (R + 1)(k' - k), b')$
- $P = (a + (R + 1)(k - k'), b)$ et $P' = (a', b' + (R + 1)(l' - l))$

Sans restreindre la généralité, on choisit $a < a'$ et on considère tout d'abord le cas $\boxed{b < b'}$.

Pour chaque cas on va tester les trois types de déplacements possibles qui permettraient de passer d'une case à l'autre et on montre que l'on aboutit à une absurdité.

cas 1 : $P = (a,b)$ et $P' = (a' + (R + 1)g, b' + (R + 1)h)$, g et h étant des entiers positifs.

Puisque $a' + (R + 1)g \geq a$ et $b' + (R + 1)h \geq b$, un coup passant d'une case à l'autre aurait lieu de P' vers P .

Pour passer de P' vers P selon un déplacement horizontal ou vertical, cela impose que soit les abscisses, soit les ordonnées sont identiques. D'où les égalités ci-dessous :

$$\begin{aligned} a &= a' + (R + 1)g \\ \text{ou} \\ b &= b' + (R + 1)h \end{aligned}$$

Ces deux cas sont impossibles vu que $a' > a$ et $b' > b$.

Il reste le déplacement diagonal de longueur i , $1 \leq i \leq R$, qui livre les égalités suivantes :

$$\begin{cases} a &= a' + (R + 1)g - i \\ b &= b' + (R + 1)h - i \end{cases}$$

soit en soustrayant :

$$a' - a + b - b' = (R + 1)(g - h)$$

Or on a $0 < a' - a \leq R$ et $0 < b' - b \leq R$. Donc $-R \leq a' - a + b - b' \leq R$, ce qui implique $g - h = 0$. On en déduit alors $a - b = a' - b'$. Mais ceci est impossible car toutes les P-positions (a, b) du Wythoff's game ont leurs écarts $a - b$ différents deux à deux.

cas 2: $P = (a', b')$ et $P' = (a + (R + 1)g, b + (R + 1)h)$

Des déplacements horizontaux ou verticaux imposeraient le même genre d'égalité que précédemment, à savoir :

$$\begin{aligned} a' &= a + (R + 1)g \\ \text{ou} \\ b' &= b + (R + 1)h \end{aligned}$$

Or $a' \leq R$ et $b' \leq R$, ce qui impose $g = 0$ et $h = 0$. Alors $a' = a$ et $b' = b$, ce qui n'est pas possible. Dans le cas d'un déplacement diagonal, on retrouve l'égalité du cas précédent, et donc la même contradiction.

cas 3: $P = (a, b + (R + 1)h)$ et $P' = (a' + (R + 1)g, b')$

Les égalités découlant des déplacements horizontaux et verticaux sont identiques à celles du premier cas, on conclut donc immédiatement. Pour le déplacement diagonal, on obtient les équations suivantes :

$$\begin{aligned} a &= a' + (R + 1)g - i \\ b' - i &= b + (R + 1)h \end{aligned}$$

Soit en ajoutant membre à membre :

$$a' - a + b - b' = (R + 1)(g - h)$$

Ceci est absurde pour les mêmes raisons que précédemment.

cas 4: $P = (a + (R + 1)g, b)$ et $P' = (a', b' + (R + 1)h)$

Il s'agit d'une situation symétrique à celle du cas 3.

On va maintenant se placer dans le cas $\boxed{b' < b}$.

Précisons tout d'abord que l'on a $a' > b'$. En effet, si $a' < b'$ et vu que $a < a'$, alors $b < b'$ car les couples de la reine forment une suite croissante. De la même façon, on a $a < b$.

On étudie tout d'abord le cas où $P = (a, b)$ et $P' = (a' + (R + 1)k, b' + (R + 1)l)$. Pour les déplacements horizontaux et verticaux, la contradiction est assurée de la même façon que précédemment. Pour le déplacement diagonal, on aboutit à l'égalité ci-dessous :

$$a' - a + b - b' = (R + 1)(g - h)$$

Sachant que $0 < a' - a \leq R$ et $0 < b - b' \leq R$, on obtient $0 < (R + 1)(l - k) \leq 2R$. Donc $g - h = 1$, et ainsi :

$$a - b + R + 1 = a' - b'$$

On va une nouvelle fois considérer deux sous-cas :

- $b' \leq a$. On sait que $-b + R + 1 > 0$, et donc $a - b + R + 1 > a$ (*). Puisque (b', a') est une P-position du Wythoff's game telle que $b' < a'$, alors on a $a' \leq 2b'$ d'après le lemme 3. Soit $a' - b' \leq b' \leq a$, ce qui contredit (*).
- $b' > a$. On sait que $a - b + R + 1 > a - b + a'$ (**). Or dans ce cas, on sait que $a' - b' < a' - a \leq a' + a - b$ (puisque $b \leq 2a$ d'après le lemme 3), ce qui contredit (**).

En ce qui concerne les trois autres cas, on se ramène toujours à un des cas traités précédemment, il est inutile d'alourdir la preuve pour cette raison.

L'ensemble de positions est un absorbant du graphe de jeu.

Chaque position de l'ensemble étudié sera marqué par un *S*. Les positions absorbées par cet ensemble seront marquées par des étoiles. On cherche à montrer que chaque position de la grille est marquée.

Une case marquée *S* engendre le marquage d'autres positions en amont du graphe, comme indiquée sur le schéma 2.3.

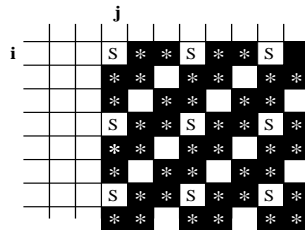


FIG. 2.3 – Marquage à partir de la position (i,j) lorsque $R=2$

Supposons maintenant qu'il existe une position $C = (i,j)$ non marquée. S'il en existe plusieurs, on choisit C comme la "plus petite", c.à.d. qu'il n'existe pas d'autre position $C' = (i',j')$ non marquée telle que $i' \leq i$ et $j' \leq j$.

Les cases sur la même ligne à gauche de C , sur la même colonne au-dessus, et au-dessus sur la même diagonale nord-ouest sont toutes marquées avec des étoiles. En effet, si l'une d'entre elles était marquée *S*, alors C serait marquée elle aussi (d'après le schéma de marquage 2.3).

Si $C = (i,j)$ est la "plus petite" case non marquée, alors on a nécessairement $i \leq R$ et $j \leq R$. Supposons en effet que $j > R$ et considérons la position

$C' = (i, j - (R + 1))$. D'après la remarque précédente, C' est marquée avec une étoile. Or les cases sur la même ligne à gauche de C' , sur la colonne au-dessus, et au-dessus sur la même diagonale nord-ouest sont marquées avec des étoiles également. En effet, si l'une de ces cases était marquée S , alors l'une des cases située à gauche de C , au-dessus ou sur la diagonale nord-ouest serait également marquée S . Et ce n'est pas le cas d'après la remarque précédente. Cela signifie donc que tous les coups jouables à partir de C' conduisent à des cases marquées avec des étoiles, ce qui contredit le fait que C soit elle-même marquée avec une étoile.

Une preuve similaire assure que $i \leq R$.

On se place donc dans le cas d'une case non marquée $C = (i, j)$ sur une grille de taille $R * R$. Sur cette grille, le jeu avec une puissance R^{eme} du roi est équivalent au Wythoff's game original. Les positions marquées S sur cette grille correspondent donc aux P-positions (a, b) du Wythoff's game telles que $a \leq R$ et $b \leq R$. Puisque ces paires absorbent toutes les cases de la grille $R * R$, ceci contredit l'existence de C . \square

2.2.3 Extension du résultat

Ce théorème nous permet de conclure quant à la convergence des P-positions de ce jeu vers les P-positions du Wythoff's game:

Corollaire 2. *Les P-positions du jeu avec une puissance R^{eme} du roi convergent vers les P-positions du Wythoff's game lorsque R tend vers l'infini.*

Preuve. On notera $P_n = (a_n, b_n)_{n=0,1,\dots}$ les P-positions du Wythoff's game décrites dans l'introduction. On notera aussi $P_n|_k = (a_n, b_n)_{n=0,\dots,k-1}$ la restriction de P_n aux k premières P-positions.

Soit $P_n^r = (a_n^r, b_n^r)_{n=0,1,\dots}$ l'ensemble des P-positions du jeu à la puissance r^{eme} du roi, telles que $a_n^r \leq b_n^r$, et ordonnées telles que $a_n^r + b_n^r \leq a_{n+1}^r + b_{n+1}^r$, avec $a_n^r < a_{n+1}^r$ si $a_n^r + b_n^r = a_{n+1}^r + b_{n+1}^r$ (il s'agit d'une description diagonale par diagonale). $P_n^r|_k = (a_n^r, b_n^r)_{n=0,\dots,k-1}$ définit la restriction de P_n^r aux k premières P-positions du jeu.

La convergence consiste à vérifier que:

$$\forall k > 0, \exists r > 0 / P_n^r|_k = P_n|_k$$

Pour tout $k > 0$, on choisit r comme un entier satisfaisant $\lfloor (k-1)\tau \rfloor + k - 1 \leq r$. D'après la caractérisation des P-positions du Wythoff's game, chaque P-position (a_i, b_i) de $P_n|_k$ satisfait alors $a_i \leq r$ et $b_i \leq r$. Avec cet ordre pour P_n^r , le théorème précédent assure que les k premières P-positions du jeu à la puissance r sont identiques aux k premières du Wythoff's game. \square

A la suite de cette étude, il est légitime de se demander si une telle convergence peut s'étendre aux autres valeurs de la fonction de Grundy. Le calcul de cette fonction pour les premières puissances du roi montre que ce n'est malheureusement pas le cas. La convergence du roi vers la reine n'a

donc lieu que pour les zéros de la fonction.

Dans la partie qui va suivre, on va s'intéresser à l'aspect géométrique du Wythoff's game, en regardant les déplacements autorisés comme la donnée d'un ensemble de vecteurs. Chaque donnée d'un ensemble de vecteurs définira alors un nouveau jeu que nous allons étudier.

2.3 Une deuxième généralisation du Wythoff's game: le jeu aux n vecteurs

Dans la première partie, on a construit une première variante du Wythoff's game d'après les mouvements de certaines pièces aux échecs. Dans cette seconde, on choisit de jouer avec une pièce imaginaire, dont les déplacements autorisés seraient dictés par un ensemble de vecteurs.

Pour commencer, on a considéré le Wythoff's game de la façon suivante: l'échiquier est vu comme une grille induite par deux vecteurs unitaires $v_1 = (1,0)$ et $v_2 = (0,1)$. On place une reine sur une case (a,b) de l'échiquier. La position de la reine sur la grille est donnée par le vecteur position $Pos = av_1 + bv_2$. Lorsqu'on déplace la reine de k cases horizontalement, cela revient à ajouter kv_1 au vecteur position. Lorsqu'on joue verticalement, cela revient à ajouter kv_2 au vecteur position. Enfin, quand on joue diagonalement, cela revient à ajouter $kv_1 + kv_2$ au vecteur position. Le gagnant est celui qui joue vers le vecteur nul. Dans nos considérations, on dira que le Wythoff's game est défini par les vecteurs v_1, v_2 et $v_3 = v_1 + v_2$.

On a alors décidé de généraliser ce jeu en prenant n vecteurs quelconques dans un espace de dimension p . On définit alors un nouveau jeu, qu'on appellera le *jeu aux n vecteurs*, et défini par ce qui va suivre.

Soient n et p deux entiers positifs. Soient v_1, \dots, v_n n vecteurs de \mathbb{R}^p à coordonnées positives. Une position de jeu est définie par un n -uplet (a_1, \dots, a_n) , où les a_i sont des entiers positifs ou nuls. Ce n -uplet correspond au vecteur $-(a_1v_1 + \dots + a_nv_n)$. Deux joueurs vont alternativement modifier ce vecteur selon une des n directions, en réduisant sa norme. Cela signifie que chaque joueur ajoute à son tour un vecteur kv_i , où k est un entier positif. Le jeu s'arrête lorsqu'un joueur tombe sur le vecteur nul $(0, \dots, 0)$, il sera déclaré vainqueur.

Cette définition pose un problème: deux notations distinctes peuvent représenter le même vecteur position. Par exemple, si l'on choisit $n = 3$ et $p = 2$, et si les vecteurs de jeu sont $v_1 = (1,0)$, $v_2 = (0,1)$ et $v_3 = (1,2)$, les positions $(2,2,0)$ et $(1,0,2)$ sont identiques puisque $2v_1 + 2v_2 = v_1 + 2v_3$. Dans le cas du Wythoff's game, et d'après la définition qui précède, on aurait dû

définir une position de jeu selon un triplet. Mais l'existence de "notations multiples" nous ont forcé à décrire le vecteur position selon les deux directions v_1 et v_2 uniquement. Il apparaît que les raisons relèvent du fait que les vecteurs soient liés ou indépendants. Pour mieux cerner le problème, on va introduire deux définitions:

v_1, \dots, v_n sont des vecteurs \mathbb{Z} -indépendants si

$$\nexists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Z}, \text{ non tous nuls} / \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$$

Deux vecteurs v_1 et v_2 sont dits \mathbb{Z} -colinéaires s'il existe deux entiers α et β tels que $\alpha v_1 = \beta v_2$.

Certaines instances du jeu aux n vecteurs sont des jeux déjà connus. C'est par exemple le cas lorsque les vecteurs sont \mathbb{Z} -indépendants:

Proposition 2. *Le jeu aux n vecteurs est équivalent à un jeu de Nim à n tas lorsque les vecteurs sont \mathbb{Z} -indépendants.*

Preuve. Si les n vecteurs sont \mathbb{Z} -indépendants, alors il existe une notation unique pour chaque position de jeu. En effet, supposons que deux notations (a_1, \dots, a_n) et (a'_1, \dots, a'_n) correspondent au même vecteur position. On aurait alors $(a_1 - a'_1)v_1 + \dots + (a_n - a'_n)v_n = 0$, avec pour tout i , $(a_i - a'_i) \in \mathbb{Z}$.

Le jeu consiste alors à diminuer à tour de rôle une des n valeurs a_1, \dots, a_n par un entier positif k , jusqu'à atteindre la position finale $(0, \dots, 0)$. C'est exactement la description du jeu de Nim. \square

Par la suite, nous allons considérer des instances du jeu aux n vecteurs, où les vecteurs ne sont pas \mathbb{Z} -indépendants. On va tout d'abord s'intéresser à des instances particulières du jeu avec n vecteurs, puis on étudiera plus précisément le jeu aux trois vecteurs. Dans chacun des cas, la recherche des P-positions sera notre motivation première.

2.3.1 Un cas particulier du jeu aux n vecteurs

On considère des instances de ce jeu avec $(2n + 2)$ vecteurs tels que v_1, \dots, v_{2n+1} soient \mathbb{Z} -indépendants, et le dernier vecteur v_{2n+2} est tel que $v_{2n+2} = \sum_{i=1}^{2n+1} v_i$. On souhaite que chaque position aie une notation unique. On choisit alors de les écrire selon les $(2n + 1)$ premiers vecteurs, c'est-à-dire sous la forme (a_1, \dots, a_{2n+1}) . On peut jouer selon un des $(2n + 1)$ premiers vecteurs en diminuant une des composantes d'un entier k quelconque, ou selon v_{2n+2} , en diminuant de la même valeur chaque composante du $(2n + 1)$ -uplet.

On peut décrire ce jeu en utilisant $(2n + 1)$ tas d'allumettes. Un coup consiste à retirer un nombre quelconque d'allumettes d'un seul tas (règle de Nim), ou de retirer simultanément le même nombre d'allumettes de chacun

des tas, à condition que chacun d'entre eux soit non vide (règle additionnelle, dite règle de Wythoff).

Théorème 6. *Les P-positions de ce jeu sont identiques à celles d'un jeu de Nim avec $(2n + 1)$ tas.*

Preuve. Il suffit de montrer qu'à partir d'une P-position du jeu de Nim à $(2n + 1)$ tas, si on joue selon la règle additionnelle, la position résultante sera toujours de type N.

Soit $(a_1, a_2, \dots, a_{2n+1})$ une P-position du jeu de Nim. Elle satisfait donc $a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_{2n+1} = 0$. On suppose qu'on enlève x ($x \leq \min(a_i)$) allumettes dans chaque tas. Soit $x = x_r \dots x_1$ ($x_r = 1$) le codage binaire de x . Soit x_k le plus petit bit non nul de x , c.à.d. $x_k = 1$ et $\forall 1 \leq x_i < k, x_i = 0$.

La figure 2.4 présente l'addition bit à bit des composantes de la P-position avant le coup.

$$\begin{array}{rcccc|c|cccc}
 a_1 & & x & x & 0 & x & x & x \\
 a_2 & & & & x & 1 & x & x & x \\
 a_3 & & x & x & x & 0 & x & x & x \\
 \vdots & & & & & \vdots & x & x & x \\
 a_{2n+1} & & & & x & x & 1 & x & x & x \\
 \oplus a_i & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

FIG. 2.4 – Etat de la somme avant le coup

$$\begin{array}{rcccc|c|cccc}
 a_1 & & x & x & 1 & x & x & x \\
 a_2 & & & & x & 0 & x & x & x \\
 a_3 & & x & x & x & 1 & x & x & x \\
 \vdots & & & & & \vdots & x & x & x \\
 a_{2n+1} & & & & x & x & 0 & x & x & x \\
 \oplus_{(a_i-x)} & & x & x & x & 1 & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

FIG. 2.5 – Etat de la somme après le coup

Cette somme est égale à 0 pour chaque bit. Cela signifie qu'il y a un nombre pair de 1 et un nombre impair de 0 dans chaque colonne. Cette propriété est vraie en particulier pour la colonne correspondant au k^{eme} bit.

Chaque composante a_i est réduite de x après le coup. Par définition de x_k , a_i et $(a_i - x)$ ont les $(k - 1)$ premiers bits de leur codage binaire identiques. Puisque $x_k = 1$, le k^{eme} bit de chaque a_i va être modifié après la soustraction de x (cf. figure 2.5). La somme bit-à-bit après avoir soustrait x contient alors un nombre impair de 1 dans la k^{eme} colonne, ce qui signifie que cette somme est non nulle. \square

Notons que ce résultat ne prétend pas que cette instance du jeu aux n vecteurs et le jeu de Nim à $(2n + 1)$ tas sont équivalents. Il faudrait comparer la valeur de chacune des positions de jeu pour pouvoir conclure.

On s'est tout naturellement intéressé au même type d'instance avec un nombre impair de vecteurs. Le jeu avec trois vecteurs ($v_1, v_2, v_3 = v_1 + v_2$) correspond au Wythoff's game. Quand le nombre de vecteurs passe à cinq ou plus, nous n'avons pas trouvé de caractérisation aussi élégante des positions perdantes.

2.3.2 Le jeu aux 3 vecteurs: instances de la forme $[\alpha, \beta, 1]$

On considère maintenant des instances du jeu aux n vecteurs, où n vaut 3, et où les vecteurs ne sont pas \mathbb{Z} -indépendants. Soient v_1, v_2 et v_3 trois vecteurs non \mathbb{Z} -colinéaires de \mathbb{R}^p tels que

$$\exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}^* / \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$$

Puisque v_1, v_2 et v_3 ont des coordonnées positives, α, β et γ ne peuvent pas être de même signe. Sans restreindre la généralité, on suppose que l'on peut écrire

$$\gamma v_3 = \alpha v_1 + \beta v_2,$$

où α, β , et γ sont trois entiers positifs. Une instance du jeu aux 3 vecteurs sera désormais désignée par le triplet $[\alpha, \beta, \gamma]$.

Soit (a, b, i) une position du jeu aux 3 vecteurs associé au triplet $[\alpha, \beta, \gamma]$. Sans aucune restriction sur les valeurs a, b et i , une même position peut être décrite par deux notations distinctes. En effet, les positions (a, b, i) et $(a - \alpha, b - \beta, i + \gamma)$ sont identiques, puisque $av_1 + bv_2 + iv_3 = (a - \alpha)v_1 + (b - \beta)v_2 + (i + \gamma)v_3$.

Dans cette partie, on ne considèrera que les instances où $\gamma = 1$. Ce qui signifie: $v_3 = \alpha v_1 + \beta v_2$.

Les positions de jeu seront décrites comme des paires d'entiers (a, b) associées aux vecteurs v_1 et v_2 . Jouer selon v_1 revient à diminuer a d'une valeur k quelconque. Idem pour v_2 en diminuant b . Jouer selon v_3 revient à réduire respectivement les valeurs a et b de $k\alpha$ et $k\beta$ pour k entier positif quelconque. On évite ainsi les positions aux multiples notations.

Tout comme le Wythoff's game, ce jeu peut être décrit sur un échiquier. On place une figurine sur n'importe quelle case. Chaque joueur déplace alternativement cette figurine selon trois directions au choix: verticalement (selon v_1), horizontalement (selon v_2), ou sur des cases correspondant aux multiples de v_3 . La figure 2.6 illustre ces déplacements autorisés pour le jeu $[3, 1, 1]$.

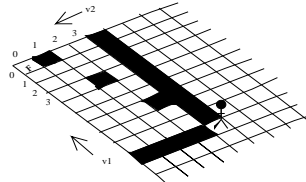


FIG. 2.6 – Coups autorisés lorsque $v_3 = 3v_1 + v_2$ (instance $[3, 1, 1]$)

L'étude des instances vérifiant $\gamma = 1$ nous a conduit à distinguer deux cas:

Les P-positions des jeux $[\alpha, \beta, 1]$, où $\alpha \neq \beta$.

C'est certainement le cas le plus facile, puisqu'on retrouve les positions perdantes d'un jeu de Nim à deux tas. Sur la représentation échiquier, cela correspond à la diagonale principale (cf. fig2.7).

Théorème 7. *Les P-positions des instances $[\alpha, \beta, 1]$ avec $\alpha \neq \beta$ sont de la forme (a, a) pour tout entier positif a .*

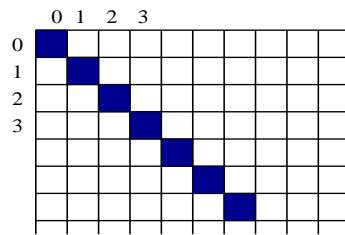


FIG. 2.7 - P-positions du jeu $[\alpha, \beta, 1]$ lorsque $\alpha \neq \beta$

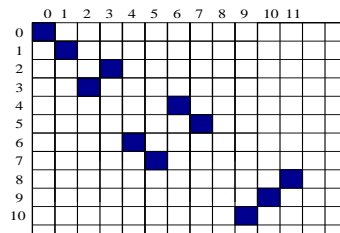


FIG. 2.8 - P-positions du jeu $[2, 2, 1]$

Preuve. Il suffit de montrer que l'ensemble des positions de type (a, a) est stable et absorbant pour le graphe du jeu. Ce graphe correspond à l'échiquier (une case étant un sommet), où une arête relie deux cases s'il existe un déplacement permettant de passer de l'une à l'autre.

Chaque position (a, b) avec $a \neq b$ est clairement absorbée par une case de la diagonale: si $a < b$, (a, b) est absorbée par la case (a, a) . Dans le cas contraire, elle est absorbée par la case (b, b) .

Par ailleurs, depuis une position (a, a) , il n'est pas possible d'atteindre une autre position de la forme (k, k) , puisqu'aucun des trois vecteurs n'est orienté dans la direction diagonale ($\alpha \neq \beta$).

On en conclut donc que cet ensemble est le noyau du graphe de jeu. \square

Les P-positions des jeux $[\alpha, \alpha, 1]$.

Le cas $\alpha = \beta = 1$ définit le Wythoff's game original. Le travail de Wythoff a montré qu'il existe une seule P-position par diagonale (chaque différence $(b - a)$ n'apparaissant qu'une seule fois dans la suite). Lorsque $\alpha = 1$, et puisque les déplacements selon v_3 se font diagonalement par sauts de α cases, il y aura exactement α P-positions sur chaque diagonale. On donne maintenant un algorithme général qui calcule les P-positions (a, b) de

ces instances de jeu, avec $a \leq b$. Par symétrie du jeu, si (a, b) est perdante, la position (b, a) l'est aussi. Comme pour le Wythoff's game, on notera (a_n, b_n) la $(n + 1)^{eme}$ P-position.

Algorithme de calcul des P-positions du jeu $[\alpha, \alpha, 1]$

- $(a_0, b_0) = (0, 0)$
- On suppose la suite des n premières P-positions calculée.
 Alors $a_n = Mex(a_0, \dots, a_{n-1}, b_0, \dots, b_{n-1})$.
 On choisit b_n comme le plus petit entier n'appartenant pas à l'ensemble $\{a_0, \dots, a_{n-1}, b_0, \dots, b_{n-1}\}$, et tel qu'il n'existe aucune paire $(a_i, b_i)_{i < n}$ pour laquelle les conditions $b_i - a_i = b_n - a_n$ et $a_i \bmod \alpha = a_n \bmod \alpha$ soient satisfaites.

La figure 2.8 illustre le résultat de cet algorithme dans le cas du jeu $[2, 2, 1]$.

Cet algorithme signifie que pour une différence d donnée, toutes les P-positions $\{(a_{i1}, b_{i1}), \dots, (a_{i\alpha}, b_{i\alpha})\}$ telles que $b_{ik} - a_{ik} = d$ pour $1 \leq k \leq \alpha$ (c.à.d. les α P-positions appartenant à la d^{eme} diagonale) satisfont $\{a_{i1} \bmod \alpha, \dots, a_{i\alpha} \bmod \alpha\} = \{0, \dots, \alpha - 1\}$.

Théorème 8. *L'algorithme ci-dessus construit l'ensemble des P-positions du jeu $[\alpha, \alpha, 1]$.*

Preuve. On notera S l'ensemble des positions construites par cet algorithme. On va chercher à montrer que S est un ensemble stable et absorbant du graphe de jeu.

S est un ensemble stable du graphe de jeu

Soit (a, b) une position de l'ensemble S .

Par construction même de S , on sait qu'il existe exactement une position de S sur chaque ligne et chaque colonne de l'échiquier (ou du graphe de jeu, puisqu'une case de l'échiquier est un sommet du graphe). Un coup selon v_1 ou v_2 depuis (a, b) vers $(a', b') \in S$ impliquerait $a' = a$ ou $b' = b$, ce qui contredit la remarque précédente.

Jouer selon v_3 conduit à une position de la forme $(a - q\alpha, b - q\alpha)$ avec $q > 0$. Les écarts $(b - a)$ and $(b - q\alpha - a + q\alpha)$ sont alors identiques, et $a \bmod \alpha = (a - q\alpha) \bmod \alpha$. L'algorithme interdit alors aux positions (a, b) et $(a - q\alpha, b - q\alpha)$ d'être toutes deux dans S .

S est un ensemble absorbant du graphe de jeu

Sur le graphe de jeu, les cases de l'ensemble S seront marquées avec un S . Les cases absorbées par S seront marquées avec une étoile. Notre objectif

est de montrer que toutes les cases sont marquées.

D'après les règles du jeu, si P est une position marquée S , elle absorbe des cases dans les trois directions (ce sont les cases à partir desquelles il existe un coup menant à P). La figure 2.9 montre un exemple de cases absorbées dans le cas où $\alpha = 2$.

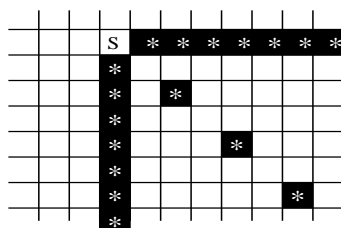


FIG. 2.9 – Positions absorbées par une position S quand $\alpha = 2$

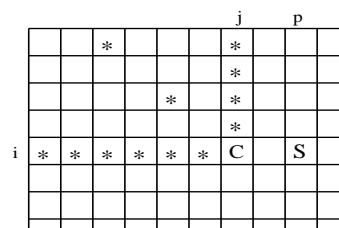


FIG. 2.10 – Schéma de preuve de l'absorption lorsque $\alpha = 2$

On suppose maintenant qu'il existe une position $C = (i, j)$ non absorbée par une position marquée S . On choisit C comme contre-exemple minimal, c'est-à-dire qu'il n'existe aucune autre position $C' = (i', j')$ non absorbée et telle que $i' \leq i$ et $j' \leq j$. Par symétrie et sans restreindre la généralité, on suppose que $i \leq j$. Comme indiqué sur la figure 2.10, on sait que les cases situées à gauche de C sur la même ligne, au dessus sur la même colonne, et sur la diagonale nord-ouest par sauts de α sont nécessairement marquées avec des étoiles.

Puisqu'il y a exactement une seule position marquée S par ligne, il en existe une sur la $i^{\text{ème}}$ ligne. Et d'après le schéma 2.10, cette position a pour coordonnées (i, p) avec $p > j$. On peut alors se demander pourquoi C n'a pas été choisie par l'algorithme au lieu de (i, p) . Il peut y avoir deux raisons:

- j a déjà été choisi auparavant. Il devrait donc y avoir une position marquée S dans la colonne au-dessus de C . Ce n'est pas le cas.
- Il existe une position (k, l) marquée S avec $k < i$, $l < j$, $(l - k) = (j - i)$, et $k \bmod \alpha = i \bmod \alpha$. La position (k, l) est alors sur la même diagonale que C , et accessible par des sauts de α . D'après la figure 2.9, (k, l) est marquée avec une étoile.

C aurait bien dû être marquée S sur la ligne i , au lieu de (i, p) . D'où la contradiction. \square

Cet algorithme permet de calculer l'ensemble des P-positions de telles instances du jeu, mais sa complexité reste exponentielle. On a donc cherché

à l'améliorer. Pour cela, on s'est intéressé au jeu où $\alpha = \beta = 2$.

Le cas particulier du jeu [2,2,1]

Pour cette instance du jeu, nous avons obtenu un algorithme qui améliore la complexité du précédent. Nous allons le présenter ici. Mais auparavant, on va s'attarder sur l'étude d'une suite d'entiers. On verra par la suite que cette suite est très proche de celle des P-positions du jeu [2,2,1].

On définit (A_n, B_n) comme la séquence d'entiers suivante:

$A_n = Mex(A_0, \dots, A_{n-1}, B_0, \dots, B_{n-1})$, et $B_n = A_n + 2\lfloor n/4 \rfloor$. Cette suite est initialisée par $(A_0, B_0) = (0, 0)$. Ainsi, A_n et B_n sont deux suites pour lesquelles chaque différence paire $(B_n - A_n)$ apparaît exactement quatre fois et de façon croissante.

Etant donné deux entiers positifs θ et μ , on peut définir un ensemble de séquences d'entiers $(A_n^{\theta, \mu}, B_n^{\theta, \mu})$, où $A_n^{\theta, \mu}$ est défini par la règle Mex, et où la $(n+1)^{ème}$ différence $(B_n^{\theta, \mu} - A_n^{\theta, \mu})$ vaut $\theta \lfloor n/\mu \rfloor$. Cela signifie que n'apparaissent que les différences qui sont des multiples de θ , μ fois, et dans un ordre croissant. Lorsque $\theta = \mu = 1$, on retrouve la séquence des P-positions du Wythoff's game.

En utilisant un théorème de Fraenkel et Boshernitzan (cf. [BF81]), trouver une caractérisation de A_n et B_n sous une forme similaire à celle de Wythoff (c.à.d. de la forme $\lfloor n\alpha + \beta \rfloor$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$), est impossible. Par ailleurs, C. Kimberling a récemment ajouté une de ces séquences (avec $\theta = 1$ et $\mu = 2$) sur l'encyclopédie des suites entières créée par Sloane¹. D'après lui, il n'existe aucune caractérisation connue de la suite (A_n, B_n) .

Suite à une discussion avec T. Stolz de l'université de Vienne (Autriche), il semble toutefois que la séquence A_n suive la même progression que $\lfloor n(3 + \sqrt{17})/4 \rfloor$. Le graphe ci-dessous montre les courbes de la droite d'équation $y = \lfloor n(3 + \sqrt{17})/4 \rfloor$ (en rouge), et celle de A_n (en vert), pour des valeurs de n comprises entre 0 et 75.

1. <http://www.research.att.com/~njas/sequences/index.html>, référence A102528

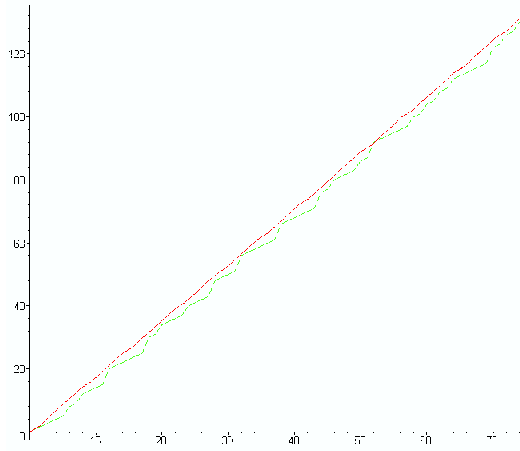


FIG. 2.11 – A_n suit la progression de $y = \lfloor n(3 + \sqrt{17})/4 \rfloor$

J'ai également effectué les tracés pour n allant jusqu'à 200, et le phénomène est identique. Il semble que l'on puisse écrire A_n comme la somme de $\lfloor n(3 + \sqrt{17})/4 \rfloor$ et d'un petit entier $\epsilon(n)$. Cependant, nous n'avons pas réussi à déterminer la valeur de cette fonction $\epsilon(n)$, puisque, comme on peut le voir sur le graphique, l'écart entre les deux courbes est une fonction très irrégulière. Il semble donc qu'on soit très proche du but, mais la caractérisation reste malheureusement incomplète pour le moment.

Comme on l'a dit précédemment, la suite (A_n, B_n) est très proche de la suite des P-positions du jeu $[2,2,1]$. C'est ce que nous allons voir maintenant:

On considère la suite d'entiers (a_n, b_n) telle que $a_n = A_n$, $b_n = B_n$ si $n \bmod 4 = 0$ ou 1, $b_n = B_{n+1}$ si $n \bmod 4 = 2$, et $b_n = B_{n-1}$ si $n \bmod 4 = 3$.

Le tableau ci-dessous décrit les premières valeurs des deux séquences (A_n, B_n) et (a_n, b_n) . Pour obtenir b_n depuis B_n , il suffit donc d'échanger les valeurs B_{4k+2} et B_{4k+3} pour chaque entier positif k . L'obtention de (a_n, b_n) depuis (A_n, B_n) a donc lieu en temps constant.

$B_n - A_n$	A_n	B_n	a_n	b_n	$b_n - a_n$
0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0
0	2	2	2	3	1
0	3	3	3	2	-1
2	4	6	4	6	2
2	5	7	5	7	2
2	8	10	8	11	3
2	9	11	9	10	1
4	12	16	12	16	4
4	13	17	13	17	4
4	14	18	14	19	5
4	15	19	15	18	3
6	20	26	20	26	6
6	21	27	21	27	6

On donne maintenant un lemme relatif à la suite (a_n, b_n) :

Lemme 4. *Pour tout entier positif k , il existe deux entiers i et j tels que chaque sous-ensemble de paires $(a_{4k+p}, b_{4k+p})_{p=0\dots 3}$ s'écrit sous la forme*

$$\begin{aligned}
 (a_{4k}, b_{4k}) &= (2i, 2i + 2k) \\
 (a_{4k+1}, b_{4k+1}) &= (2i + 1, 2i + 1 + 2k) \\
 (a_{4k+2}, b_{4k+2}) &= (2j, 2j + 2k + 1) \\
 (a_{4k+3}, b_{4k+3}) &= (2j + 1, 2j + 2k)
 \end{aligned}$$

Preuve. Par construction de (a_n, b_n) depuis (A_n, B_n) , chacune des différences $(b_{4k+p} - a_{4k+p})_{p=0\dots 3}$ est exacte. Il ne suffit plus qu'à prouver que les valeurs a_{4k+p} peuvent s'écrire de la sorte.

D'après le tableau ci-dessus, le lemme est vrai pour $k = 0$. Il suffit de prendre $i = 0$ et $j = 1$. On suppose que ce résultat est vrai jusqu'à un certain rang k , et on considère le rang suivant. Puisque a_n est une suite strictement croissante, on a $a_{4k+4} > a_{4k+3} = 2j + 1$. Par définition de a_n d'après la règle Mex, la seule raison pour laquelle a_{4k+4} ne peut pas être égal à $(2j + 2)$ est que cet entier est déjà apparu précédemment au sein de la séquence b_n . Par hypothèse d'induction et puisque $(2j + 2)$ est pair, cette valeur n'a pu apparaître qu'en tant que $b_{4k'}$ ou $b_{4k'+3}$, avec $k' \leq k$. Si c'est le cas, l'entier consécutif $(2j + 3)$ est apparu lui aussi, en tant que $b_{4k'+1}$ ou $b_{4k'+2}$. On en conclut donc que si un entier pair est déjà apparu auparavant, l'entier impair consécutif est apparu également. Il existe donc l tel que $a_{4k+4} = 2l$. Et ainsi on a $a_{4k+5} = 2l + 1$: si ce n'était pas le cas, alors $(2l + 1)$ serait apparu auparavant dans la séquence b_n , et son prédécesseur $2l$ également.

Enfin, puisque $a_{4k+6} > 2l + 1$, et de la même façon que précédemment, on prouve que a_{4k+6} est un entier pair, et que a_{4k+7} est l'entier impair consécutif. \square

Proposition 3. *La séquence (a_n, b_n) décrit l'ensemble des P-positions du jeu $[2, 2, 1]$.*

Preuve. On note (w_n, y_n) la suite des P-positions du jeu $[2, 2, 1]$. Cette suite est obtenue en appliquant l'algorithme du théorème 8. Dans cette séquence, on insère la paire $(w_3, y_3) = (3, 2)$, qui est symétrique de (w_2, y_2) . Cela ne change en rien la suite de la séquence (si ce n'est un décalage d'indice), puisque les deux entiers w_3 et y_3 sont déjà apparus auparavant, et puisque leur différence est négative. La séquence des différences $(y_n - w_n)$ sera notée d_n . On cherche maintenant à montrer que $(a_n, b_n) = (w_n, y_n)$.

On laissera le lecteur vérifier cette égalité pour les premiers indices (au moins pour les quatre premières paires).

On suppose qu'on a: $(w_{4k+i}, y_{4k+i}) = (a_{4k+i}, b_{4k+i})_{i=0..3}$, pour tout $k < n$. Cette hypothèse assure que $w_{4n} = a_{4n}$ puisque ces deux valeurs sont calculées par la règle Mex. Par construction de la suite (w_n, y_n) , on a $d_{4n} > 2n - 1$, puisque toutes les différences inférieures sont déjà apparues deux fois. La différence $(2n - 1) = d_{4n-2}$ n'est apparue qu'une seule fois, mais puisque w_{4n-2} et w_{4n} ont la même parité, l'algorithme n'autorise pas $d_{4n} = 2n - 1$. La différence suivante $2n$ n'a pas encore été utilisée dans la séquence. C'est donc celle qu'on choisit pour définir d_{4n} , et ainsi $y_{4n} = w_{4n} + 2n = b_n$ d'après le lemme 4.

Comme précédemment, on a $w_{4n+1} = a_{4n+1}$ puisque la règle Mex est appliquée sur le même ensemble d'entiers. Donc $w_{4n+1} = w_{4n} + 1$ d'après le lemme 4, et ainsi $w_{4n+1} + 2n - 1 = y_{4n}$. Cela implique que d_{4n+1} ne peut pas valoir $2n - 1$, puisqu'un entier positif ne peut pas apparaître plusieurs fois dans la séquence. Puisque w_{4n+1} et w_{4n} ont des parités différentes, on a donc $d_{4n+1} = 2n$, ce qui permet de conclure.

Comme précédemment (bis), on a toujours $w_{4n+2} = a_{4n+2}$. Le lemme 4 assure ensuite que w_{4n+2} est pair. C'est aussi le cas de w_{4n-2} . La différence $2n - 1$ ne peut donc toujours pas être sélectionnée. L'algorithme choisit donc $d_{4n+2} = 2n + 1$, ce qui conduit bien à l'égalité $y_{4n+2} = b_{4n+2}$.

Comme précédemment (ter), on a $w_{4n+3} = a_{4n+3}$. Cela signifie que w_{4n+3} est impair. On considère maintenant l'entier $w_{4n+3} + 2n - 1$. D'après le lemme 4, cet entier vaut $y_{4n+2} - 1$ et est strictement supérieur à y_k pour $k < 4n + 2$. Puisque w_{4n+3} et w_{4n-2} ont des parités différentes, l'algorithme choisit la valeur $2n - 1$ pour l'écart d_{4n+3} . Et ainsi $y_{4n+3} = b_{4n+3}$. \square

Dans le cas général, la complexité de notre algorithme du théorème 8 est exponentielle par rapport à la taille de l'instance. Dans le cas particulier du jeu $[2,2,1]$, le second algorithme améliore légèrement la complexité, mais elle n'est toujours pas polynomiale à cause de l'utilisation de la règle Mex. Cela dit, ce résultat ouvre une porte vers une caractérisation numérique (une somme de parties entières?) qui permettrait d'accéder à une telle complexité. Par ailleurs, une rapide observation des autres jeux de type $[\alpha, \alpha, 1]$ nous laisse suggérer que les P-positions associées peuvent être directement déduites des suites de type $(A_n^{\theta, \mu}, B_n^{\theta, \mu})$. D'où l'intérêt porté à ces séquences...

2.3.3 Le jeu aux 3 vecteurs: instances de la forme $[\alpha, \beta, \gamma]$, avec $\gamma > 1$

On considère ici des instances du jeu aux trois vecteurs, où α , β et γ sont tous les trois premiers entre eux. En effet et à titre d'exemple, les jeux $[3,6,15]$ et $[1,2,5]$ sont fondamentalement similaires. On va donc se restreindre aux "plus petites instances" en choisissant trois nombres premiers entre eux.

Les positions de jeu seront notées (a, b, i) avec $0 \leq i < \gamma$, afin d'éviter des positions ayant plusieurs notations. Supposons en effet que (a, b, i) et (a', b', i') (avec $0 \leq i, i' < \gamma$) soient deux positions identiques. Elles satisfont alors l'égalité suivante:

$$(a - a')v_1 + (b - b')v_2 + (i - i')v_3 = 0$$

Et puisque $\gamma v_3 = \alpha v_1 + \beta v_2$, cela donne:

$$v_1[(a - a') + \frac{\alpha}{\gamma}(i - i')] + v_2[(b - b') + \frac{\beta}{\gamma}(i - i')] = 0$$

Les vecteurs v_1 et v_2 n'étant pas \mathbb{Z} -colinéaires, on a ensuite:

$$\begin{cases} (a - a') + \frac{\alpha}{\gamma}(i - i') = 0 \\ (b - b') + \frac{\beta}{\gamma}(i - i') = 0 \end{cases}$$

Par ailleurs, puisque α , β et γ sont premiers entre eux, on sait que $\gcd(\alpha, \gamma)$ est premier avec $\gcd(\beta, \gamma)$. On peut donc écrire γ comme le produit $\gcd(\alpha, \gamma) \cdot \gcd(\beta, \gamma) \cdot \gamma_r$, où γ_r est un entier positif.

On notera respectivement α' et γ' les quotients de α et γ par $\gcd(\alpha, \gamma)$. De même, β' et γ'' sont respectivement les quotients de β et γ par $\gcd(\beta, \gamma)$. On peut alors écrire:

$$i - i' = (a' - a) \frac{\gamma'}{\alpha'} = (b' - b) \frac{\gamma''}{\beta'}$$

Puisque $\frac{\gamma'}{\alpha'}$ et $\frac{\gamma''}{\beta'}$ sont des fractions irréductibles, et que $(i - i')$ est un entier, les valeurs $(a' - a)$ et $(b' - b)$ sont respectivement des multiples de

α' et β' (leur valeur pourrait être nulle, mais dans ce cas, les positions ont la même notation). On en déduit que $(i - i')$ est un multiple commun de γ' et γ'' . Puisque $|i - i'| < \gamma$, on doit avoir $lcm(\gamma', \gamma'') < \gamma$. Les inégalités suivantes en découlent:

$$\frac{\gamma' \cdot \gamma''}{gcd(\gamma', \gamma'')} = lcm(\gamma', \gamma'') < \gamma \quad \text{puis} \quad \frac{\gamma^2}{gcd(\alpha, \gamma) \cdot gcd(\beta, \gamma) \cdot gcd(\gamma', \gamma'')} < \gamma \quad (*)$$

Par ailleurs, on a:

$$gcd(\gamma', \gamma'') = gcd\left(\frac{\gamma}{gcd(\gamma, \alpha)}, \frac{\gamma}{gcd(\gamma, \beta)}\right) = gcd(\gamma_r \cdot gcd(\gamma, \beta), \gamma_r \cdot gcd(\gamma, \alpha)) = \gamma_r$$

On obtient finalement une contradiction en remplaçant $gcd(\alpha, \gamma) \cdot gcd(\beta, \gamma)$ par $\frac{\gamma}{\gamma_r}$ dans (*).

Avec cette notation, les coups autorisés depuis une position (a, b, i) sont donc les suivants:

- $(a - k, b, i)$, où $0 < k \leq a$ (coup selon kv_1)
- $(a, b - k, i)$, où $0 < k \leq b$ (coup selon kv_2)
- $(a, b, i - k)$, où $0 < k \leq i$ (coup selon kv_3)
- $(a - k\alpha, b - k\beta, i')$, où $0 < k\alpha \leq a$, $0 < k\beta \leq b$, et $0 \leq i' < \gamma$ (coup selon $(i - i' + k\gamma)v_3$)

On peut aussi décrire ce jeu sur une grille multidimensionnelle, en considérant une extension du cas $\gamma = 1$ sur γ grilles parallèles reliées entre elles. Le troisième paramètre i indique le numéro de la grille sur laquelle se trouve la figurine. On peut déplacer celle-ci sur la i^{eme} grille comme dans le cas précédant, ou en changeant de grille selon α et β . La figure suivante illustre les déplacements autorisés:

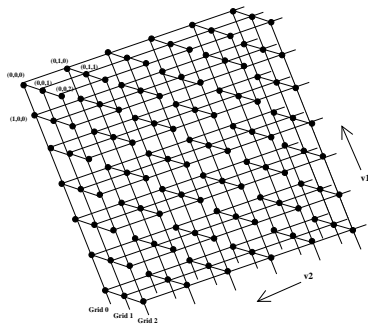


FIG. 2.12 – Grille de jeu dans le cas $\gamma = 3$

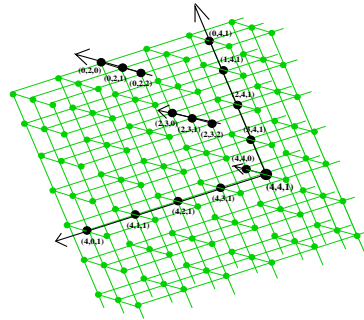


FIG. 2.13 – Coup autorisés à partir de la position $(4,4,1)$ avec $[\alpha, \beta, \gamma] = [2, 1, 3]$

On note P l'ensemble des P-positions du jeu $[\alpha, \beta, \gamma]$. On note P_i l'ensemble des P-positions appartenant à la i^{eme} grille (c.à.d. les P-positions de la forme (a, b, i)). $\{P_i\}_{i=0, \dots, \gamma-1}$ définit donc l'ensemble des P-positions.

Pour tout i , on notera $(a_0^i, b_0^i, i), (a_1^i, b_1^i, i), \dots, (a_{n-1}^i, b_{n-1}^i, i)$ les n premières positions de P_i . Etant donné un entier A , on notera $P|_A$ l'ensemble des P-positions (a, b, i) telles que $a \leq A$. On étendra cette notation à chaque sous-ensemble P_i (que l'on écrira $P_i|_A$).

On définit maintenant un tableau rectangulaire $B(a, j)$ qui associe à chaque couple (a, j) la valeur $B(a, j)$ telle que $(a, B(a, j), j)$ soit une P-position. Ce tableau contient exactement γ colonnes (indexées de 0 à $\gamma - 1$), chacune d'entre elles contenant les P-positions appartenant à la i^{eme} grille.

Théorème 9. *Soit $[\alpha, \beta, \gamma]$ une instance du jeu aux trois vecteurs, telle que $\gamma > 0$, $\alpha > 0$ et $\beta > \alpha(2\gamma - 1)$. Etant donné un entier positif A , l'algorithme suivant construit l'ensemble $P|_A$ en remplissant le tableau B :*

```
Initialiser le tableau B avec la valeur -1
B(0,0) ← 0;
pour a de 0 à A
  pour j de 0 à  $\gamma$ 
    si B(a,j) = -1
      B(a,j) ← Mex(B(k,l))k < a, l < j
      B(B(a,j), j) ← a;
    fin si
  fin pour
fin pour
```

A chaque étape de l'algorithme, $B(a, j)$ est calculé comme la plus petite valeur n'étant pas encore apparue dans P_j , et telle qu'il n'existe pas d'autre $(a, B(a, j), j')$ dans P_j avec $j' < j$. La seconde affectation implique que (a, b, j) et son symétrique (b, a, j) appartiennent tous deux à P_j . Cet algorithme implique alors naturellement le corollaire qui suit:

Corollaire 3. *Les P-positions du jeu $[\alpha, \beta, \gamma]$, où $\gamma > 0$, $\alpha > 0$, et $\beta > \alpha(2\gamma - 1)$, sont identiques à celles d'un jeu de Nim à trois tas.*

Preuve. La preuve est directement déduite du théorème, puisque la Nim-addition est définie par l'algorithme décrit ci-dessus. \square

Avant d'expliciter la preuve du théorème, on donne un lemme sur les P-positions du jeu.

Lemme 5. *Si (a_n^i, b_n^i, i) est une position obtenue par l'algorithme ci-dessus,*

alors $a_n^i - i \leq b_n^i \leq a_n^i + i$.

Preuve. Si (a_n^i, b_n^i, i) est une position obtenue par l'algorithme, alors elle vérifie l'égalité $b_n^i = a_n^i \oplus i$. Puisque la Nim-addition définit également l'addition binaire sans retenue, il est clair que $b_n^i = a_n^i \oplus i \leq a_n^i + i$.

La deuxième inégalité est déduite de la première, en utilisant le fait que si (a_n^i, b_n^i, i) est fournie par l'algorithme, son symétrique (b_n^i, a_n^i, i) l'est aussi. \square

Preuve. On donne ici la preuve du théorème 9, en vérifiant que l'ensemble des positions obtenues forme un ensemble stable et absorbant du graphe de jeu. On note S l'ensemble de ces positions.

S est un ensemble stable.

Supposons qu'il existe un coup de $C = (a, b, i)$ vers $C' = (a', b', i')$, C et C' étant deux positions appartenant à S . Ces positions vérifient $0 \leq a' \leq a$, $0 \leq b' \leq b$, $0 \leq i < \gamma$, et $0 \leq i' < \gamma$. Si le coup est joué selon le vecteur v_1 , alors cela implique $b = b'$ et $i = i'$. Et alors C et C' appartiendraient à la même grille (celle d'indice i). Mais d'après l'algorithme, il n'est alors pas possible d'avoir $b = b'$. Si le coup est joué selon v_2 , alors on a une contradiction similaire au sujet de a et a' .

On considère maintenant que le coup de C vers C' a lieu selon le vecteur v_3 . Si $a = a'$, alors les seuls coups possibles impliquent $b = b'$ et $i' < i$, contredisant le fait que (a, b, i) et (a, b, i') ne peuvent pas tous deux appartenir à S . On suppose maintenant que $a' < a$, et par conséquent que $b' < b$. Alors C et C' vérifient:

$$\exists k \geq 1 / \begin{cases} a &= a' + k\alpha \\ b &= b' + k\beta \end{cases}$$

De ces égalités on obtient facilement:

$$(a - a')\beta = (b - b')\alpha$$

On utilise maintenant le lemme précédent sur C et C' :

$$b - b' \leq a - a' + i + i' - 2 \leq a - a' + 2\gamma - 2$$

Et en remplaçant :

$$(a - a')\left(\frac{\beta}{\alpha} - 1\right) \leq 2\gamma - 2$$

Enfin, en utilisant l'inégalité $a' < a$, on obtient la contradiction suivante:

$$\beta \leq \alpha(2\gamma - 1)$$

S est un ensemble absorbant.

Sur le graphe de jeu, les positions de notre ensemble sont marquées S . Celles absorbées par les positions S sont marquées par des étoiles.

On suppose qu'il existe une position $C = (a, b, i)$ non absorbée. On choisit C comme la plus petite possible, c.à.d. qu'il n'existe pas d'autre position $C' = (a', b', i')$ non absorbée telle que $a' \leq a$, $b' \leq b$ et $i' \leq i$. On note que pour chaque grille, il y a exactement une position de S par ligne et par colonne. En particulier, cette propriété est vraie pour la a^{eme} ligne de la i^{eme} grille. Par minimalité de C , les positions de la forme (a, b', i) avec $b' < b$ sont marquées avec des étoiles. Il existe alors $p > b$ tel que (a, p, i) soit marqué S . Puisque b est plus petit que p , il peut y avoir deux raisons pour lesquelles C n'a pas été choisie par l'algorithme:

- b a déjà été choisi auparavant. Il devrait donc y avoir une position marquée S dans la colonne au-dessus de C , ce qui n'est pas possible (ces positions étant marquées avec des étoiles).
- $\exists j / (a, b, j) \in P_j$. Ce n'est pas possible, puisque C aurait dû être marquée dans ce cas.

On en conclut donc que C aurait dû être marquée S au lieu de (a, p, i) . □

Ces résultats nous permettent d'en déduire un second corollaire, immédiat:

Corollaire 4. *Pour toutes valeurs α et γ , il existe β_α tel que:*

$\forall \beta \geq \beta_\alpha$, les jeux $[\alpha, \beta, \gamma]$ et $[1, 2\gamma - 1, \gamma]$ ont les mêmes P-positions.

On a essayé d'étendre ce résultat à la fonction de Grundy. Mais il existe de nombreux contre-exemples. Cela signifie ainsi que les jeux $[\alpha, \beta, \gamma]$ et $[1, 2\gamma - 1, \gamma]$ peuvent avoir les mêmes P-positions, mais qu'ils ne sont pas équivalents pour autant.

Par ailleurs, on a aussi cherché à jouer au jeu avec trois vecteurs, mais dans sa version "bornée". Les déplacements sont identiques, mais ils sont limités par un rayon R . On s'est alors demandé s'il n'existait pas un résultat de convergence similaire à celui des puissances du roi. Une nouvelle fois, de nombreux contre-exemples nous ont prouvé que ce n'est pas le cas.

Notons que l'ensemble des résultats sur ces variantes du Wythoff's game ont été soumis dans Discrete Mathematics (cf. [ES05a]).

Chapitre 3

Le jeu du "Pic'arête"

3.1 Présentation du jeu et état de l'art

Voici un jeu qui occupe de nombreux étudiants dans les amphithéâtres: on l'appelle le "dots and boxes" dans sa version originale. J'avoue ne jamais avoir entendu d'équivalent français pour le définir. Le matériel est simple: prenez une feuille de papier quadrillée sur laquelle vous dessinez un contour au feutre noir. Deux joueurs vont ensuite surligner alternativement un côté d'un des petits carrés situés à l'intérieur du contour. A chaque fois qu'un joueur surligne le quatrième côté d'un carré, on dit qu'il le "ferme". Il marque alors un point par carré fermé et a le droit de rejouer. Si un joueur surligne un côté sans fermer de carré, il passe la main à son adversaire. Lorsque tous les carrés à l'intérieur du contour sont fermés, le jeu s'arrête et le vainqueur est le joueur qui a fermé le plus de carrés.

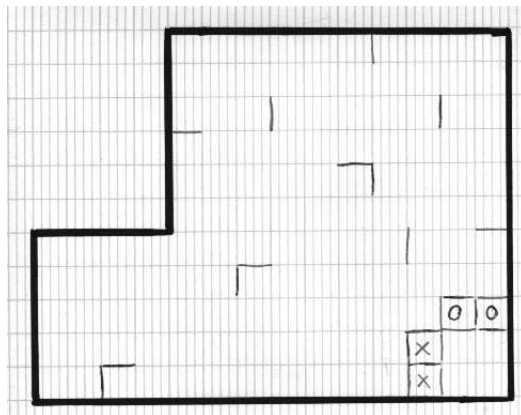


FIG. 3.1 – Une partie de "dots and boxes"

Selon l'endroit du monde où l'on joue à ce jeu, les côtés des carrés situés sur le contour initial sont ou ne sont pas considérés comme déjà surlignés.

En Suède ou en France par exemple, on suppose que les joueurs n'ont pas à jouer dessus. Cela implique qu'il suffit de surligner deux ou trois côtés pour fermer un carré situé le long du contour. Aux Etats-Unis, tout le contour est jouable. Autrement dit, il faut surligner les quatre côtés de chaque carré pour le fermer entièrement. Il existe aussi des variantes plus exotiques. C'est le cas par exemple de la version islandaise du jeu, où le contour de jeu est un rectangle dont exactement une longueur et une largeur sont considérées comme déjà surlignées.

Dans la classification de Fraenkel, on dira que ce jeu se situe à la frontière entre Math et Play games. Les photos ci-dessous illustrent une tentative de commercialisation sous le nom de "Galactic Takeover". Je suis toutefois assez sceptique quant aux bénéfices qu'à pu en retirer l'éditeur...



FIG. 3.2 – *Le jeu du Dots and Boxes commercialisé...*

La résolution de ce jeu est difficile. Quand on débute, on applique souvent une stratégie très basique: n'offrir aucun carré à son adversaire en début de partie, et lorsque l'on a plus le choix, lui offrir la succession de carrés la plus courte possible. Inutile de préciser qu'on est loin du compte en jouant de la sorte... Dans son livre consacré entièrement à l'étude de ce jeu (cf. [Ber00]), E. Berlekamp décrit certaines techniques et tactiques, et le résout sur de petites configurations.

Ce jeu présente une version duale que l'on appelle dans la littérature "strings and coins". Berlekamp y fait référence dans [Ber00]. On considère un grille-graphe dont les sommets sont des pièces de monnaie reliées entre elles par des ficelles correspondant aux arêtes. A tour de rôle, chaque joueur détache une ficelle. A chaque fois qu'un joueur détache la dernière ficelle d'une pièce, il empoche cette dernière et a le droit d'en détacher une nouvelle. Lorsque toutes les ficelles ont été détachées, le joueur vainqueur est celui qui a amassé le plus grand nombre de pièces de monnaie. On s'aperçoit rapidement que ce jeu est l'équivalent du "dots and boxes". Une pièce correspond à un petit carré de notre feuille de papier, et une ficelle entre deux pièces signifie que deux petits carrés ont un côté commun.

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à cette version duale du "dots and boxes" étendue à des graphes quelconques. Par ailleurs, nous allons en considérer une variante qui interdit de rejouer après avoir gagné une pièce. Cela signifie que vous ne pouvez gagner au plus que deux pièces par tour de jeu (celles qui sont aux extrémités de la ficelle que vous avez retirée).

La règle devient alors la suivante : étant donné un graphe G , deux joueurs retirent alternativement une arête de G . Un joueur marque un point pour chaque sommet laissé isolé par le retrait d'une arête. Le jeu se termine lorsque toutes les arêtes ont été retirées. Le joueur ayant marqué le plus de points à la fin est déclaré vainqueur. Vous comprendrez ainsi pourquoi nous avons choisi d'appeler ce jeu le "Pic'arête"...

On notera que ce jeu fait partie de la famille des jeux de "suppression" sur les graphes, auxquels Fraenkel et certains de ses coauteurs se sont notamment intéressés. C'est par exemple le cas du jeu *Geographie* (cf. [FSU93, FS93, NP96]), où chaque joueur retire une arête adjacente à celle qui a été retirée précédemment jusqu'à être bloqué. On trouve également dans la littérature un jeu de suppression de sommets et d'arêtes sur les hypergraphes (cf. [FS91]), ou encore un jeu de suppression de sommets étudié par Nowakowski et Ottaway (cf. [NO05]).

Nous allons nous intéresser ici à la résolution du "Pic'arête". Elle se traduit par des réponses aux questions suivantes: "Existe-t-il une stratégie me permettant de gagner à coup sûr?", "Comment marquer le plus de points possibles?", ou encore "Au vu de la configuration de départ, vaut-il mieux commencer ou laisser mon adversaire retirer la première arête?".

Pour information, on s'est aperçu quelques mois après notre étude que cette variante avait déjà été considérée par Meyniel et Roudneff dans [MR88]. Preuve que notre nom a été bien choisi: ils l'ont appelé "The vertex picking game"! Dans leur papier, ils décident dans quel cas le premier ou le second joueur a une stratégie gagnante. Cependant, ils ne savent pas y répondre lorsque le graphe a un sommet pendant. Par ailleurs, ils ne donnent aucune information sur le nombre de points que peut espérer obtenir chaque joueur. L'étude qui suit va bien entendu confirmer leurs résultats, et apporter des réponses sur le nombre de points marqués par les joueurs. Le cas difficile des graphes à sommets pendants sera également pris en compte. Ce résultat a été publié dans la section jeux combinatoires du journal *Integers* (cf. [LS06]).

3.2 Approche

Afin de répondre aux questions évoquées lors de la présentation du jeu, nous avons besoin de définir une variable qui puisse contenir les informations qui nous intéressent.

Etant donnée une configuration de jeu sur un graphe G à n sommets, on sait que la somme des scores des deux joueurs à la fin de la partie est égale à n . Par ailleurs, on va supposer dans toute notre étude que les deux joueurs sont intelligents, c'est-à-dire qu'il vont appliquer la stratégie qui rapporte le plus de points à chaque coup. On définira alors g_1 comme le score maximum que peut obtenir le premier joueur lorsque le second joueur applique sa meilleure stratégie. En définissant g_2 comme la valeur $n - g_1$, on peut alors dire que g_2 est le score maximum que peut obtenir le second joueur lorsque le premier joueur applique sa meilleure stratégie. La variable qui va nous préoccuper sera notée w et vaudra alors:

$$w(G) = g_1 - g_2$$

On l'appellera la *valeur de la configuration* G . La connaissance de w nous permet en effet de répondre aux questions que l'on se pose: si w est positif, cela signifie que quelle que soit la stratégie du second joueur, le premier joueur a une stratégie qui lui permet de marquer plus de points. Si w est négatif, alors le second joueur a une stratégie gagnante. Et enfin, si w est nul, chaque joueur a une stratégie qui lui permet de ne pas perdre. Par ailleurs, la valeur de w donne le nombre de points de plus gagnés par le premier joueur sur le second.

Ci-dessous, on donne l'exemple des valeurs d'un triangle et d'un carré. Ces graphes étant de taille très réduite, il suffit de considérer tous les coups possibles pour chacun des deux joueurs.

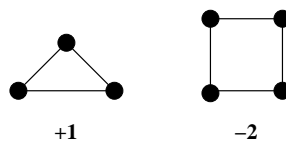


FIG. 3.3 – Valeurs du jeu sur un triangle et un carré

Le jeu sur un triangle rapporte un point de plus au premier joueur, alors qu'une configuration sur un carré est favorable au second joueur, qui marque deux points de plus.

L'objectif est maintenant de déterminer quels paramètres du graphe entrent en jeu dans la détermination de sa valeur. Une première difficulté

apparaît dès lors qu'on considère des graphes avec plusieurs composantes connexes. A priori, on pourrait espérer que la valeur du graphe est égale à la somme des valeurs de chacune de ses composantes. Ce n'est en l'occurrence pas le cas. Il suffit pour cela de considérer un graphe constitué de deux triangles: chaque triangle a une valeur de +1, mais la valeur du graphe n'est pas égale +2: en effet, il suffit au second joueur d'appliquer un coup symétrique à celui du premier joueur pour obtenir le même nombre de points. Cette non-linéarité de la valeur d'un graphe s'explique cependant par la parité du nombre d'arêtes des composantes connexes. En effet, il semble que cette propriété est vraie pour les composantes possédant un nombre d'arêtes pair.

En effet, une composante connexe qui a un nombre d'arêtes pair nous paraît être en défaveur de celui qui commence. Car l'autre joueur aura notamment l'avantage de retirer la dernière arête, et donc de marquer deux points. Lorsqu'on multiplie le nombre de telles composantes, le second joueur laissera toujours le soin au premier joueur de commencer à jouer sur chacune des composantes. Ce qui signifie que plus il y a de composantes, plus le second joueur va marquer de points. Pour que le premier joueur puisse s'en sortir, il faudrait qu'un nombre impair d'arêtes apparaisse à côté de ces composantes "paires". De la sorte il pourrait "forcer" le second joueur à commencer à jouer sur les composantes paires.

Notre première analyse du jeu nous suggère alors la propriété suivante: un graphe dont le nombre de composantes connexes ayant un nombre impair d'arêtes est impair semble avoir une valeur positive. Inversement, un graphe dont le nombre de composantes connexes ayant un nombre impair d'arêtes est pair semble avoir une valeur négative. Il semble là qu'on tienne un premier paramètre intervenant dans le calcul de la valeur d'une configuration.

Par la suite, étant données deux composantes avec la même parité du nombre d'arêtes, on va chercher à savoir ce qui les distingue dans le calcul de leur valeur. Il se trouve que les arbres pendants semblent jouer un rôle particulier. Il en est de même pour la parité du nombre de sommets. En effet, les arêtes pendantes sont celles qui rapportent des points immédiatement, d'où leur rôle évident. Par ailleurs, une composante connexe constituée d'une arête simple aura un statut particulier puisqu'il s'agit du seul type d'arête qui rapporte deux points lorsqu'elle est retirée.

En étudiant les cas de petite taille, on a alors cherché à estimer la valeur des composantes connexes en fonction de la parité du nombre de leurs arêtes, sommets, et longueurs de leurs arbres pendants. Les configurations de jeu seront ensuite classées en fonction de la parité du nombre d'arêtes, mais aussi en fonction de la parité de certains types de composantes ayant un nombre d'arêtes impair. A défaut d'une valeur exacte, l'étude qui suit va

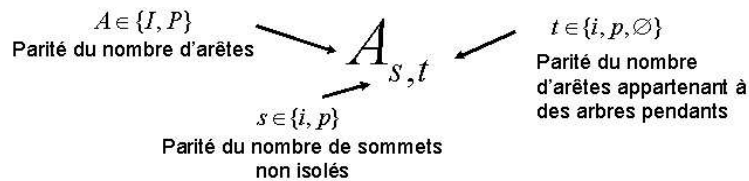
présenter une estimation de la valeur d'une configuration donnée. Celle-ci sera cependant suffisante pour répondre à certaines questions que nous nous posions en introduction.

3.3 Résolution du problème

On aborde maintenant la résolution du problème à proprement parler. Celle-ci commence par une classification des composantes connexes en fonction de la parité de leur nombre d'arêtes, sommets, et longueurs de leurs arbres pendants.

3.3.1 Une classification des graphes connexes

D'après ce qui a été expliqué dans la section précédente, nous allons partitionner l'ensemble des graphes connexes en treize types grâce à la notation qui va suivre. Un graphe connexe G_c sera noté



où l'indice A est la parité du nombre d'arêtes de G_c . Il peut prendre deux valeurs I ou P (impair ou pair). Il en est de même pour l'indice s de parité du nombre de sommets non isolés. L'indice t correspond à la parité du nombre d'arêtes appartenant à un arbre pendent. Celui-ci peut prendre une valeur supplémentaire notée \emptyset . Cet indice nous permet de savoir s'il existe un coup qui rapporte un point: si t vaut i ou p , un tel coup est possible, s'il vaut \emptyset (nul), ce n'est pas le cas. Pour cet indice uniquement, la valeur p correspond à un nombre pair non nul.

Les graphes connexes ci-dessous sont deux exemples. Celui gauche est de type $I_{i,i}$ (nombre impair d'arêtes et de sommets, trois arêtes appartenant à des arbres pendants), alors que celui de droite est un $P_{i,\emptyset}$ (nombre pair d'arêtes, nombre impair de sommets, pas d'arbre pendent).



Tout graphe connexe appartient à une de ces douze classes, la treizième étant un cas particulier de la classe $I_{p,i}$ (que l'on ne prend donc pas en

compte dans cette classe). Il s'agit de l'ensemble des arêtes isolées: c'est en effet la seule configuration pour laquelle on marque deux points en jouant un seul coup. On les notera $A.I.$.

3.3.2 Une classification des configurations

Cette classification des graphes connexes va nous être utile pour construire celle des configurations de jeu. Une configuration de jeu est considérée comme un ensemble de graphes connexes. On a choisi de les partitionner en huit classes selon un codage sur trois bits, lié à la parité du nombre de composantes connexes ayant un nombre impair d'arêtes.

Une configuration de jeu sera noté sous la forme (p_1, p_2, p_3) , où :

- p_1 est le bit de parité du nombre d'arêtes isolées
- p_2 est le bit de parité du nombre de composantes connexes de type $I_{i, \emptyset}$ ou $I_{i, p}$.
- p_3 est le bit de parité du nombre des autres composantes connexes impaires, c'est-à-dire de type $I_{i, i}, I_{p, \emptyset}, I_{p, p}, I_{p, i}$.

On trouvera ci-dessous l'exemple d'une configuration de type (101):



En effet, cette configuration contient un nombre impair d'arêtes isolées (d'où $p_1 = 1$), aucune composante de la forme $I_{i, \emptyset}$ ou $I_{i, p}$ (donc $p_2 = 0$), et une seule autre composante impaire (c'est un $I_{p, i}$, et ainsi $p_3 = 1$). Les composantes paires n'interviennent pas dans la détermination de la classe.

Dans notre approche, on a vu que les configurations ayant un nombre impair d'arêtes semblaient avoir un statut différent de celles qui en ont un nombre pair. On aimerait donc vérifier par la suite que les configurations vérifiant $p_1 \oplus p_2 \oplus p_3 = 1$ sont gagnantes, alors que celle dont la somme bit à bit est nulle sont plutôt favorables au second joueur.

3.3.3 Une approximation de w

Dans cette partie, on va chercher à borner la valeur d'une configuration donnée en fonction de sa classe. Dans la plupart des cas, ces bornes nous permettront de décider qui est le gagnant du jeu. Par ailleurs, elles nous permettront peut-être d'élaborer une bonne stratégie pour gagner (ou perdre avec les honneurs).

Par la suite, on notera $w(p_1, p_2, p_3)$ la valeur d'une configuration de type (p_1, p_2, p_3) .

Etant donné un graphe G , on notera $|A_{s,t}|$ le nombre de composantes connexes de type $A_{s,t}$ qui constituent G . Par ailleurs, on définira la valeur $f(G)$ comme:

$$f(G) = |I_{i,\emptyset}| + |I_{i,p}| + 2|I_{i,i}| + |I_{p,*}| + |P_{i,*}| + 2|P_{p,\emptyset}| + 2|P_{p,p}| + 2\lfloor \frac{|P_{p,i}|}{2} \rfloor$$

où le symbole $*$ représente n'importe quelle valeur de l'ensemble de définition concerné.

Comme il l'a été dit précédemment, on distinguera deux groupes de configurations: celles ayant un nombre impair d'arêtes (donc de la forme (001), (010), (100), ou (111)) et celles qui en ont un nombre pair (de la forme (000), (011), (110), (101)). On remarquera facilement que lorsque l'on enlève une arête à une configuration d'un certain groupe, la configuration résultante appartient à l'autre groupe.

Nos résultats consistent en l'obtention d'une borne inférieure pour les valeurs des graphes ayant un nombre impair d'arêtes. Si cette borne inférieure est positive, alors on aura prouvé que ces graphes sont gagnants pour le joueur qui commence. Pour les graphes qui ont un nombre pair d'arêtes, on a obtenu des bornes supérieures.

Avant d'énoncer le théorème principal, on donne un lemme qui nous sera utile par la suite.

Lemme 6. *Sur tout graphe connexe G_c ayant un nombre impair d'arêtes il existe une "chaîne intérieure maximale impaire", c'est-à-dire une chaîne induite maximale ayant un nombre impair d'arêtes, dont les sommets internes sont de degré 2, et les extrémités de degré différent de 2. Cette chaîne peut être un cycle.*

Preuve. On étiquette chaque arête de G_c avec la valeur 1. On applique ensuite l'algorithme suivant:

Pour chaque sommet de G_c de degré 2, on le supprime et on remplace ses deux arêtes adjacentes (étiquetées a et b par exemple) par une seule arête de valeur $a + b$, comme indiqué sur le schéma ci-dessous.



FIG. 3.4 – Algorithme de lissage pour le lemme 6

A la fin de cette opération on obtient un graphe étiqueté où chaque arête correspond à une chaîne induite maximale du graphe initial dont les sommets internes sont de degré 2. L'étiquette de chaque arête finale correspond à la longueur de chaque chaîne intérieure maximale. Puisque G_c a initialement un nombre d'arêtes impair et que la somme des étiquettes est un invariant du graphe au cours de l'algorithme, il existe au moins une arête avec une étiquette impaire dans le graphe final. \square

On passe maintenant au résultat principal:

Théorème 10. *Selon son type, une configuration G a une valeur qui admet les bornes suivantes:*

$$\left\{ \begin{array}{l} w(001) \geq f(G)+1 \\ w(010) \geq f(G) \quad \text{si } |P_{p,i}| \equiv 0(2) \\ \geq f(G)+2 \quad \text{si } |P_{p,i}| \equiv 1(2) \\ w(100) \geq f(G)+2 \\ w(111) \geq f(G)+1 \quad \text{si } |P_{p,i}| \equiv 0(2) \\ \geq f(G)+3 \quad \text{si } |P_{p,i}| \equiv 1(2) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} w(000) \leq -f(G) \\ w(011) \leq -f(G)+1 \quad \text{si } |P_{p,i}| \equiv 0(2) \\ \leq -f(G)-1 \quad \text{si } |P_{p,i}| \equiv 1(2) \\ w(101) \leq -f(G)+1 \\ w(110) \leq -f(G)+2 \quad \text{si } |P_{p,i}| \equiv 0(2) \\ \geq -f(G) \quad \text{si } |P_{p,i}| \equiv 1(2) \end{array} \right.$$

Preuve. On va utiliser une preuve par l'absurde, en supposant qu'il existe un graphe G pour lequel une de ces inégalités est fausse. On choisit G comme le "plus petit" contre-exemple en terme de nombre d'arêtes. Selon la parité de son nombre d'arêtes, on distingue deux cas:

G contient un nombre pair d'arêtes

En tant que contre-exemple, G satisfait une inégalité du genre $w(G) > -f(G) + \epsilon$, avec $\epsilon \in \{-1,0,1,2\}$ selon la classe de G . Cela signifie que si G a au moins une arête, il existe un coup de G vers une résultante G' , qui isole g sommets, et telle que $w(G') < f(G) - \epsilon + g$. On obtiendra une contradiction en prouvant que n'importe quel coup issu de G ne peut pas engendrer une telle inégalité. Pour chacun des treize types de composantes connexes, cela implique donc que l'on connaisse vers quelles types de résultantes aboutit le retrait d'une arête. Le tableau suivant contient tous les coups jouables (et leur résultat) à partir d'une composante connexe G_c :

Composante G_c	Composante(s) résultante(s) après le retrait d'une arête		
	Qui isole un (des) som- met(s)	Qui ne déconnecte pas G_c	Déconnectant G_c (2 composantes résultantes)
A.I.	\emptyset (2 pts)	-	-
$I_{i,\emptyset}$	-	$P_{i,*}$	$I_{i,*} + I_{p,*}, P_{i,*} + P_{p,*}$
$I_{i,p}$	$P_{p,i}$ (1 pt)	$P_{i,p/i}$	$I_{i,*} + I_{p,i/p}, I_{i,i/p} + I_{p,\emptyset}, I_{i,*} + I.P., P_{i,*} + P_{p,i/p}, P_{i,i/p} + P_{p,\emptyset}$
$I_{i,i}$	$P_{p,p/\emptyset}$ (1 pt)	$P_{i,p/i}$	$I_{i,*} + I_{p,i/p}, I_{i,i/p} + I_{p,\emptyset}, I_{i,*} + I.P., P_{i,*} + P_{p,i/p}, P_{i,i/p} + P_{p,\emptyset}$
$I_{p,\emptyset}$	-	$P_{p,*}$	$I_{i,*} + I_{i,*}, I_{p,*} + I_{p,*}, P_{i,*} + P_{i,*}, P_{p,*} + P_{p,*}$
$I_{p,p}$	$P_{i,i}$ (1 pt)	$P_{p,i/p}$	$I_{i,*} + I_{i,i/p}, I_{i,i/p} + I_{i,\emptyset}, I_{p,*} + I_{p,i/p}, I_{p,i/p} + I_{p,\emptyset}, I_{p,*} + A.I., P_{i,*} + P_{i,i/p}, P_{i,i/p} + P_{i,\emptyset}, P_{p,*} + P_{p,i/p}, P_{p,i/p} + P_{p,\emptyset}$
$I_{p,i}$	$P_{i,p/\emptyset}$ (1 pt)	$P_{p,i/p}$	$I_{i,*} + I_{i,i/p}, I_{i,i/p} + I_{i,\emptyset}, I_{p,*} + I_{p,i/p}, I_{p,i/p} + I_{p,\emptyset}, I_{p,*} + I.P., P_{i,*} + P_{i,i/p}, P_{i,i/p} + P_{i,\emptyset}, P_{p,*} + P_{p,i/p}, P_{p,i/p} + P_{p,\emptyset}$
$P_{i,\emptyset}$	-	$I_{i,*}$	$I_{i,*} + P_{p,*}, P_{i,*} + I_{p,*}$
$P_{i,p}$	$I.P., I_{p,i}$ (1 pt)	$I_{i,i/p}$	$I_{i,*} + P_{p,i/p}, I_{i,i/p} + P_{p,\emptyset}, P_{i,*} + I_{p,i/p}, P_{i,i/p} + I_{p,\emptyset}, P_{i,*} + A.I.$
$P_{i,i}$	$I_{p,p/\emptyset}$ (1 pt)	$I_{i,i/p}$	$I_{i,*} + P_{p,i/p}, I_{i,i/p} + P_{p,\emptyset}, P_{i,*} + I_{p,i/p}, P_{i,i/p} + I_{p,\emptyset}, P_{i,*} + A.I.$
$P_{p,\emptyset}$	-	$I.P., I_{p,*}$	$I_{i,*} + P_{i,*}, I_{p,*} + P_{p,*}$
$P_{p,p}$	$I_{i,i}$ (1 pt)	$I_{p,i/p}$	$I_{i,*} + P_{i,i/p}, I_{i,i/p} + P_{i,\emptyset}, I_{p,*} + P_{p,i/p}, I_{p,i/p} + P_{p,\emptyset}, P_{p,*} + A.I.$
$P_{p,i}$	$I_{i,p/\emptyset}$ (1 pt)	$I_{p,i/p}$	$I_{i,*} + P_{i,i/p}, I_{i,i/p} + P_{i,\emptyset}, I_{p,*} + P_{p,i/p}, I_{p,i/p} + P_{p,\emptyset}, P_{p,*} + A.I.$

Supposons que G soit de type (000) avec $|P_{p,1}| \equiv 0(2)$. G satisfait donc $w(G) > -f(G)$. S'il n'existe aucun coup jouable, alors G est un graphe sans arête, et donc $w(G) = f(G) = 0$, engendrant une contradiction. Dans le cas contraire, il existe un coup de G vers G' , isolant g sommets, et vérifiant

$$w(G') < f(G) + g \quad (3.1)$$

On va alors considérer tous les coups apparaissant dans le tableau ci-dessus et prouver que 3.1 ne peut jamais être satisfaite.

On suppose par exemple que G contient une composante $I_{i,p}$ et on regarde les configurations résultantes qu'on peut obtenir après un coup sur cette composante:

- On enlève une arête pendante avec un gain de un point, et on laisse

à l'adversaire une composante $P_{p,i}$. On a donc perdu une composante impaire qui correspondait au deuxième bit du codage, si bien que la résultante G' est de la forme (010) avec $|P_{p,i}| \equiv 1(2)$ puisque l'on a créé un nouveau $P_{p,i}$. Puisque G' possède moins d'arêtes que G et par minimalité de G , on a $w(G') \geq f(G') + 2$. Par ailleurs, on sait que $f(G') = f(G) - 1$, ce qui conduit à une contradiction avec 3.1.

- On joue vers un $P_{i,p}$ (sans gain de point). La configuration résultante est de type (010) avec $|P_{p,i}| \equiv 0(2)$. Par minimalité de G on a ensuite $w(G') \geq f(G') = f(G)$, ce qui assure la contradiction.
- On joue un coup déconnectant qui crée deux composantes: un $I_{i,\emptyset}$ et un $I_{p,p}$ par exemple. La configuration résultante est de type (001), et satisfait $w(G') \geq f(G') + 1 = f(G) + 2$. Cela assure la contradiction avec 3.1.
- Pour tous les autres coups joués à partir d'une composante $I_{i,p}$, mais aussi à partir des douze autres types de composantes, on montre que l'inégalité 3.1 est contredite (avec la confiance du lecteur).

Cela implique que G n'est pas du type (000) avec $|P_{p,1}| \equiv 0(2)$. On suppose ensuite que G est de chacun des autres types du groupe (i.e. (011), (101), (110) avec une parité variable de $|P_{p,1}|$). Comme précédemment, un examen complet (que nous ne décrivons pas ici) de tous les coups apparaissant dans le tableau prouve que toutes les inégalités du genre $w(G) > -f(G) + \epsilon$ sont contredites. Cela signifie alors que le contre-exemple minimal G possède nécessairement un nombre impair d'arêtes.

G contient un nombre impair d'arêtes

La seconde partie de la preuve fait apparaître plus concrètement la notion de stratégie lorsque le graphe possède un nombre impair d'arêtes. On sait ici que notre contre-exemple G satisfait une inégalité du genre $w(G) < f(G) + \epsilon$, avec $\epsilon \in \{0,1,2,3\}$. Cela signifie que pour tout coup de G vers G' isolant g sommets on a: $w(G') > -f(G) - \epsilon + g$. On obtiendra une contradiction en trouvant un coup pour lequel cette inégalité est fautive. On considère les différents cas envisageables pour le type de G :

- G est de type (100) et satisfait donc $w(G) < f(G) + 2$. Pour tout coup de G vers G' et isolant g sommets, on a donc $w(G') > -f(G) - 2 + g$. Puisque $p_1 = 1$ pour ce type de configuration, il existe une arête isolée qu'on choisit de supprimer. On gagne deux points au passage. La configuration résultante est alors de type (000) et satisfait $w(G') \leq -f(G') = -f(G)$ par minimalité de G . On obtient une contradiction avec l'inégalité précédente.
- G est de type (111). On choisit le même type de coup que pour le cas (100), puisqu'on sait qu'il existe une arête isolée.

Indépendamment de la parité de $|P_{p,i}|$, la contradiction est garantie.

- G est de type (010). On s'intéresse alors à la parité de $|P_{p,i}|$:
 - $|P_{p,i}| \equiv 1(2)$. G satisfait alors $w(G) < f(G) + 2$ et pour tout coup de G vers G' isolant g sommets, on a $w(G') > -f(G) - 2 + g$. On choisit de considérer un coup qui supprime une arête pendante appartenant à une composante $P_{p,i}$ de G . Ce coup crée une composante $I_{i,\emptyset/p}$. La configuration résultante de ce coup est de type (000) et satisfait alors $w(G') \leq -f(G') = -f(G) - 1$, soulevant une contradiction.
 - $|P_{p,i}| \equiv 0(2)$. On a $w(G) < f(G)$, impliquant que pour tout coup de G vers G' isolant g sommets: $w(G') > -f(G) + g$. Dans une configuration (010), il existe une composante $I_{i,\emptyset}$ ou $I_{i,p}$. S'il existe une composante $I_{i,p}$, alors on joue comme dans le cas précédent, en retirant une arête pendante de cette composante. S'il n'en existe pas, on choisit de retirer une arête non déconnectante d'une composante $I_{i,\emptyset}$. Une telle arête existe: en effet, si toutes les arêtes d'un $I_{i,\emptyset}$ étaient déconnectantes, alors cette composante serait un arbre, contredisant le fait qu'elle n'admet aucun arbre pendant. Un tel coup transforme la composante en un $P_{i,*}$, et engendre une configuration résultante G' de type (000). Celle-ci satisfait $w(G') \leq -f(G') = -f(G)$, ce qui assure la contradiction.
- G est de type (001). Si $|P_{p,i}| \equiv 1(2)$, on choisit le même coup que précédemment (c.à.d. la suppression d'une arête pendante) pour obtenir une contradiction. Dans le cas où $|P_{p,i}| \equiv 0(2)$, on sait juste que G admet une composante de la forme $I_{i,i}$, $I_{p,p}$, $I_{p,i}$ ou $I_{p,\emptyset}$. Par ailleurs, on sait que G vérifie l'inégalité $w(G) < f(G) + 1$. Cela signifie que pour tout coup de G vers G' isolant g sommets, on a $w(G') > -f(G) - 1 + g$. On considère maintenant deux cas:
 - Il existe une composante avec au moins une arête pendante (c.à.d. de type $I_{i,i}$, $I_{p,p}$, ou $I_{p,i}$). La suppression d'une telle arête sur une de ces composantes garantit la contradiction.
 - G ne possède pas de telle composante. On supprime alors une arête appartenant à une composante $I_{p,\emptyset}$. En utilisant le tableau des coups, on remarque que presque tous les coups joués à partir d'une telle composante engendrent une inégalité de la forme $w(G') \leq -f(G) - 1$,

ce qui soulève une contradiction. Le seul cas qui n'engendre pas de contradiction est le coup qui transforme une composante $I_{p,\emptyset}$ en un $P_{p,i}$. On va alors montrer qu'il est toujours possible de trouver un coup différent de celui-là.

On utilise tout d'abord le lemme 6, qui affirme qu'il existe une chaîne maximale intérieure impaire sur une composante $I_{p,\emptyset}$. On note i et j les deux extrémités d'une telle chaîne (peut-être $i = j$ si la chaîne est un cycle). Le schéma ci-dessous présente les différents cas possible pour cette chaîne:

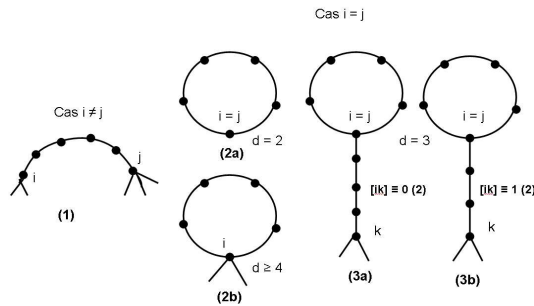


FIG. 3.5 – Comment jouer sur un $I_{p,\emptyset}$

- * Dans le cas (1), on a $i \neq j$. Comme une composante $I_{p,\emptyset}$ ne contient pas de sommet de degré 1 et que la chaîne est maximale, i et j sont des sommets de degré au moins 3. Comme chaque sommet interne est de degré 2, si on retire une arête de cette chaîne, on fait apparaître un ou deux arbres pendants dont la somme du nombre d'arêtes est pair. On ne crée ainsi donc pas de composante $P_{p,i}$.
- * On considère maintenant les cas où cette chaîne est un cycle ($i = j$). Les figures (2a) et (2b) sont les cas où i est de degré respectivement 2 et au moins 4. Dans ces deux cas, on peut enlever une arête du cycle, engendrant ainsi une résultante dont les arbres pendants ont un nombre total d'arêtes pair. Dans le cas où i est de degré 3, on considère la chaîne qui s'étend de i à k (où k est le premier sommet de cette chaîne de degré supérieur à 2). Soit l la longueur de la chaîne $[ik]$. Si l est paire (cas (3a)),

on peut retirer une arête du cycle, puisque la composante résultante aura un arbre pendant avec un nombre pair d'arêtes. Si l est impaire, on retire une arête appartenant à la chaîne $[ik]$: le graphe est ainsi déconnecté, de telle sorte que la composante résultante n'est pas une simple $P_{p,i}$.

□

Ce résultat nous permet de conclure quant à certaines configurations gagnantes et perdantes du jeu:

Corollaire 5. *Les configurations ayant un nombre impair d'arêtes sont gagnantes pour le premier joueur. Celles de type (000) et (101) ne sont pas gagnantes. Les configurations de type (011) et (110) avec $|P_{p,i}| \equiv 1(2)$ sont perdantes.*

Preuve. Puisque $f(G) \geq 0$ pour tout graphe G , on voit facilement que les configurations ayant un nombre impair d'arêtes ont une valeur strictement positive. Un graphe G de type (101) satisfait $f(G) \geq 1$, si bien que $w(000)$ et $w(101)$ ne seront jamais positives. Pour les autres types de configurations on a $f(011) \geq 2$ et $f(110) \geq 1$, ce qui nous permet de conclure. □

On notera que les configurations de type (110) avec un nombre pair de composantes $P_{p,i}$ sont les seuls graphes ayant un nombre pair de sommets qui peuvent être gagnants. Par ailleurs, on retrouve bien les résultats obtenus par Meyniel et Roudneff dans [MR88]. Ils n'avaient pas pu conclure dans le cas où le graphe possédait une ou plusieurs arêtes pendantes. Nos résultats nous permettent d'en dire un peu plus.

3.4 Conclusions

Avec ce choix de paramètres, les bornes obtenues sont les meilleures que l'on puisse espérer. Pour chaque type de configuration, nous avons trouvé une instance dont la valeur est égale à la borne. Ce résultat apparaît sur la figure 3.6. Pour les configurations de type $(1p_2p_3)$, il suffit de considérer le graphe correspondant de type $(0p_2p_3)$ ci-dessous, auquel on ajoute une arête isolée.

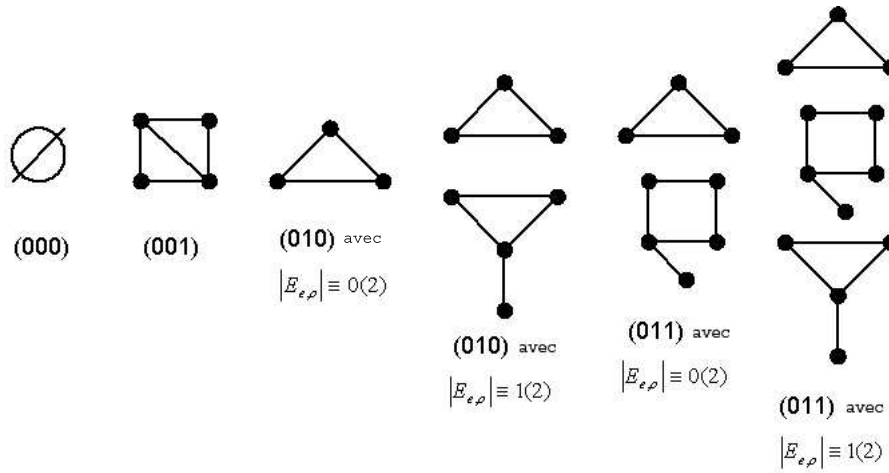


FIG. 3.6 – Des graphes qui atteignent les bornes...

Pour chaque configuration ayant un nombre impair d'arêtes, on ne connaît toujours pas la meilleure stratégie, mais notre preuve fournit une façon de jouer qui permet d'atteindre la borne annoncée. C'est suffisant pour gagner la partie. Pour les graphes possédant un nombre pair d'arêtes, on n'a en revanche aucune stratégie de jeu pour le joueur qui commence. Dans la plupart des cas, il s'agirait de trouver une façon de perdre la tête la plus haute possible...On pourrait par exemple penser que supprimer une arête isolée est un bon coup à jouer lorsque la configuration est de type (101) ou (110). Qu'en est-il pour celles de type (000) ou (011)?

Bien entendu, on a cherché des réponses à ces questions. Cela passait notamment par l'obtention de bornes dans le sens opposé. Cependant, notre codage sur trois bits ne semble pas suffisant pour obtenir de telles bornes.

On a décrit le problème de la recherche de bornes comme un système linéaire. On aimerait en effet borner chaque valeur d'un graphe G par deux fonctions $\Gamma(G)$ et $\Gamma'(G)$ telles que

$$-\Gamma'(G) + c'_1 \leq w(000) \leq -\Gamma(G) + c_1$$

$$\Gamma(G) + c_2 \leq w(001) \leq \Gamma'(G) + c'_2 \dots$$

où les c_i et c'_i seraient des constantes entières, et où les fonctions Γ et Γ' seraient décrites sous la forme:

$$\Gamma(G) = a_0|A.I| + a_1|I_{i,\emptyset}| + a_2|I_{i,p}| + a_3|I_{i,i}| + a_4|I_{p,*}| + \dots + a_8|P_{p,i}|$$

$$\Gamma'(G) = a'_0|A.I| + a'_1|I_{i,\emptyset}| + a'_2|I_{i,p}| + a'_3|I_{i,i}| + a'_4|I_{p,*}| + \dots + a'_8|P_{p,i}|$$

avec les a_i et a'_i comme constantes entières. Notons qu'on distinguera des cas supplémentaires, selon la parité de $|P_{p,i}|$.

Nos résultats ont montré que Γ correspondait à notre fonction f , et les c_i ont été trouvés. Pouvons-nous maintenant trouver une fonction Γ' et les c'_i ?

Les contraintes apparaissent grâce à la propriété suivante: si un graphe G a une valeur majorée par une constante C , alors pour tout coup de G vers G' isolant g sommets, la valeur de G' est minorée par $g - C$. Donc par exemple à partir de l'inégalité $w(001) \leq \Gamma(G) + c'_2$, on a considéré tous les coups jouables à partir d'une configuration (001), ce qui nous a donné un large ensemble d'inégalités. On a fait de même pour les autres types de configurations ayant un nombre impair d'arêtes. Le système linéaire obtenu ayant une taille considérable, on a choisi de le faire résoudre par un solveur en ligne¹, en ayant au préalable construit un programme Java qui génère automatiquement la liste des contraintes à lui envoyer. Le résultat est sans appel: le système n'a pas de solution. Nous avions auparavant envoyé les contraintes liées à la recherche de la fonction Γ , et le serveur nous a bien sorti la fonction f .

Il n'est donc pas possible de trouver une fonction Γ' similaire à la fonction f pour encadrer les valeurs des configurations. Sans doute est-ce notre codage sur trois bits qui n'est pas suffisant...on a songé à affecter un bit de parité pour chaque type de composante, afin d'améliorer la précision (ce qui donnerait un codage sur treize bits). Peut-être est-ce la solution. Difficile dans ce cas d'obtenir une preuve légère d'un tel résultat...On peut aussi penser que nos trois paramètres (nombre d'arêtes, sommets et arêtes appartenant aux arbres pendants) ne sont pas suffisants. Une amélioration de notre résultat est donc possible, mais impose de nouveaux choix et de nouvelles considérations. Cela dit, si j'avais à retourner sur les bancs d'amphis aujourd'hui, je pense que j'aurais toute les chances de gagner avec le contenu des pages qui précèdent...

1. <http://www-neos.mcs.anl.gov/neos/>

Deuxième partie

Un exemple de jeu à un seul joueur

Chapitre 1

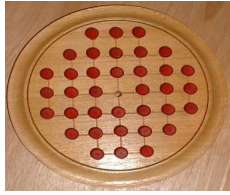
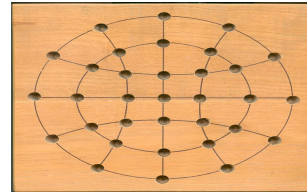
Préambule: le jeu du solitaire

Le premier point de la définition des jeux combinatoires est lié au nombre de joueurs: ils sont exactement deux. On a décidé de relaxer cette contrainte pour s'intéresser au monde des jeux à un seul joueur, ou "casse-tête". On peut citer comme exemples le problème des huit reines, les jeux de taquin, ou encore les tours de Hanoï (cf. [dP84, CN99a, CN99b]). En guise de préambule, on va s'intéresser à une variante d'un des plus célèbres représentants de cette classe: le jeu du solitaire.

1.1 Le jeu du solitaire

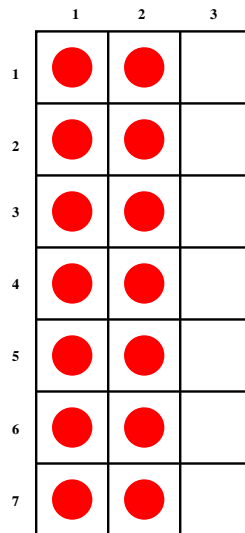
Le solitaire est l'un des jeux à un joueur les plus célèbres. Son origine est très incertaine: un texte d'Ovide laisserait penser qu'il a été inventé sous l'empire romain, alors que d'autres estiment qu'un prisonnier de la Bastille en serait l'auteur. Il connut beaucoup de succès en France à partir 18^{ème} siècle, et c'est Leibniz qui le premier rédigea un article à son sujet.

Les règles du solitaire sont les suivantes: la zone de jeu est un ensemble de trous, dit *tablier*, dont la forme est souvent propre à chaque pays. Chaque trou d'un tablier est soit vide, soit rempli d'une bille. L'objectif est d'éliminer les billes une à une. On supprime une bille en "sautant" par dessus avec une autre bille qui lui est adjacente. Ceci impose que le trou qui va contenir la bille qui "saute" soit vide avant le coup. On gagne le jeu si on ne laisse qu'une seule bille sur le tablier à la fin. Les figures ci-dessous illustrent les tabliers français et anglais:

FIG. 1.1 – *Un tablier européen*FIG. 1.2 – *Un tablier anglais*FIG. 1.3 – *Un tablier dont l'origine est inconnue...*

Le tablier anglais est une croix grecque, alors que le tablier français (ou européen) est en forme de cercle. Dans les deux cas, seul le trou du milieu est vide au début de la partie. Bien entendu, il existe des formes de tabliers plus exotiques, comme celle présentée sur la figure 1.3. On généralise facilement ce jeu à l'aide d'un graphe, dont les sommets sont les trous du tablier. On s'est intéressé ici au solitaire sur un rectangle de largeur 3. Cette petite étude fait en quelque sorte office d'introduction au jeu qui suivra, et illustre la recherche fréquente d'invariants dans le monde des jeux à un seul joueur.

Notre tablier a donc la forme suivante: un rectangle $n \times 3$, où les billes sont situées sur les deux premières colonnes (cf. fig 1.4).

FIG. 1.4 – *Un tablier rectangulaire $n \times 3$*

On cherche à savoir à quelles conditions il existe une façon de jouer qui ne laisse qu'une seule bille à la fin. Une configuration de départ qui peut se réduire à une seule bille sera dite *1-réductible*. Les cases du rectangle seront

indexées de 1 à n pour les lignes, et de 1 à 3 pour les colonnes. Une case sera repérée par un couple (i,j) , avec $1 \leq i \leq n$, et $1 \leq j \leq 3$.

L'étude des premières tailles de rectangles donne les résultats suivants: pour $n = 1,4,5,7,8,10,11$, les configurations sont 1-réductibles. Pour $n = 2,3,6,9,12$, on ne trouve pas de façon de jouer qui laisse une seule bille. On en a alors déduit puis prouvé la conjecture suivante:

Théorème 11. *Si $n \not\equiv 0(3)$ et $n \neq 2$, alors on peut trouver une façon de jouer qui laisse une seule bille à la fin. Dans le cas contraire, les configurations ne sont pas 1-réductibles.*

Preuve. Tout d'abord, on prouve le résultat par induction pour $n \equiv 1(3)$.

Lorsque $n = 1$, on conclut immédiatement en laissant une bille sur la case $(n,3)$. Lorsque $n = 4$, on joue de la façon suivante:

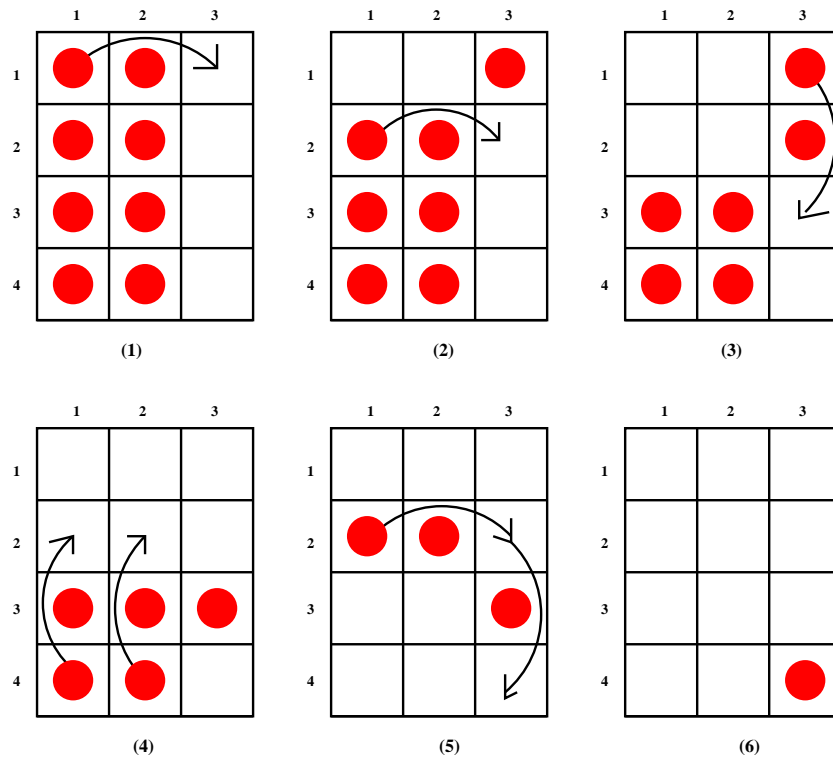


FIG. 1.5 – Comment jouer lorsque $n = 4$

Cette configuration est effectivement 1-réductible, et on s'aperçoit en outre qu'on peut laisser la dernière bille dans le coin en bas à droite (case $(n,3)$).

Soit $n > 4$ tel que $n \equiv 1(3)$. Supposons que pour tout $n' < n$ tel que $n' \equiv 1(3)$, le rectangle de longueur n' soit 1-réductible avec la dernière pierre en $(n',3)$. On considère maintenant le sous-rectangle constitué des $(n-3)$ premières lignes du rectangle de longueur n . Il vérifie l'hypothèse induction. On peut donc le réduire à une seule pierre située en $(n-3,3)$. Les billes qui restent maintenant sur le tablier sont disposées comme sur le schéma (2) de la figure 1.5. On sait alors finir la réduction pour laisser la dernière bille en $(n,3)$.

On considère maintenant $n \equiv 2(3)$ strictement supérieur à 2. D'après ce qui précède, le sous-rectangle constitué des $(n-1)$ premières lignes est 1-réductible avec la dernière bille en $(n-1,3)$. Après cette réduction, il ne reste donc plus que trois billes. On élimine les deux dernières comme indiqué sur la figure 1.6:

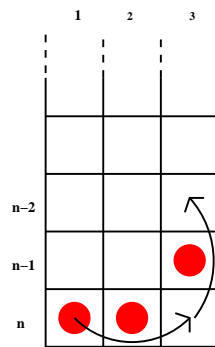


FIG. 1.6 - Comment jouer pour $n \equiv 2(3)$, avec $n > 2$

1	2	3
3	1	2
2	3	1
1	2	3
3	1	2
2	3	1
1	2	3
3	1	2
2	3	1

FIG. 1.7 - Tricoloration du tablier pour $n \equiv 0(3)$

Pour le rectangle de longueur 2, les coups sont imposés et on voit clairement qu'il n'est pas 1-réductible. On considère maintenant les rectangles de longueur $n \equiv 0(3)$, que l'on colorie en trois couleurs (qu'on notera $\{1,2,3\}$), de telle sorte que trois cases adjacentes alignées portent une couleur différente. Le schéma 1.7 illustre une telle tricoloration.

On notera C_1 (respectivement C_2 et C_3) le nombre de billes situées sur des cases de couleur 1 (respectivement 2 et 3). On définit ensuite $\delta = (C_1 \bmod 2, C_2 \bmod 2, C_3 \bmod 2)$. Soit (x,y,z) la valeur de δ au début de la partie, avec $x,y,z \in \{0,1\}$. En remarquant qu'un coup concerne trois cases

de couleurs différentes, on en déduit que la parité de chaque C_i change après chaque coup. Au cours d'une partie de solitaire, δ ne peut donc prendre que deux valeurs: (x,y,z) et $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$.

Dans le cas où $n \equiv 0(3)$, δ vaut $(0,0,0)$ au début de la partie. La remarque précédente assure donc que δ ne peut prendre que deux valeurs au cours de la partie: $(0,0,0)$ et $(1,1,1)$. Or, s'il reste une seule bille à la fin de la partie, c'est que δ est un triplet contenant exactement un bit de valeur 1. Les rectangles dont la longueur est un multiple de 3 ne sont donc pas 1-réductibles. \square

Bien entendu, les variantes de ce jeu sont infinies: en conservant ce tablier, on pourrait par exemple regarder ce qu'il se passe pour une autre disposition initiale des pierres. Qu'en est-il également si on augmente la largeur du rectangle? Le cas du tablier circulaire semble également être pertinent.

Chapitre 2

”Solitaire Clobber 2”: présentation et premiers résultats

2.1 Le jeu du Solitaire Clobber 2: présentation

Clobber est un jeu combinatoire partisan, introduit par Albert, Grossman, Nowakowski, et Wolfe en 2002 dans [AGNW05]. Il se joue à l’aide d’une grille rectangulaire sur laquelle sont disposées alternativement des pierres noires et blanches (cf. schéma 2.1). Chaque joueur possède sa propre couleur de pierres. A tour de rôle, les joueurs vont choisir une pierre de leur couleur et la déplacer sur une case adjacente (horizontalement ou verticalement) contenant une pierre adverse. Cette dernière est détruite. Le premier joueur qui ne peut plus se déplacer perd la partie.

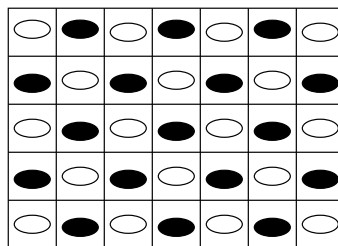


FIG. 2.1 – Une grille de jeu du Clobber

L’étude de ce jeu est très difficile et intéresse de près la communauté des chercheurs du domaine. Un premier tournoi de Clobber a même été organisé en 2002 à Dagstuhl en Allemagne. Pour en savoir plus, on pourra lire l’article d’Ivars Peterson dans Science News (cf. [Pet02]).

R. Fleischer, E. et M. Demaine ont ensuite considéré une variante solitaire de ce jeu (cf. [DDF04]). En alternant des captures blanches et noires, le joueur cherche à minimiser le nombre de pierres restantes sur la grille à la fin du jeu. A partir de ce jeu en solitaire, nous en avons considéré une variante, *Solitaire Clobber 2*, dans laquelle le joueur n'est plus obligé d'alterner les captures blanches et noires. Par ailleurs, nous avons choisi d'étendre la zone de jeu aux graphes autres que la grille. La description de ce nouveau jeu est donnée par les lignes qui suivent:

On considère un graphe $G = (V, E)$, où une pierre de couleur blanche ou noire est disposée sur chaque sommet. La disposition des pierres sur les sommets est arbitraire. Un joueur choisit alors une pierre qui va capturer une pierre adjacente de couleur différente. La pierre capturée est retirée du jeu. Cette opération est répétée tant que cela est possible. L'objectif est de minimiser le nombre de pierres restantes à la fin du jeu.

Notons qu'une disposition de pierres blanches et noires sur les sommets d'un graphe $G = (V, E)$ peut être assimilée à une fonction d'étiquetage $\ell : V \rightarrow \{0, 1\}$.

2.1.1 Définitions

Une *configuration* du jeu *Solitaire Clobber 2* est la donnée d'un graphe $G = (V, E)$ et d'une disposition des pierres sur ses sommets.

Etant donné un entier $k > 0$, une configuration de jeu C est dite *k-réductible* s'il existe une suite de coups qui laisse au plus k pierres à la fin du jeu. Si une configuration de jeu est *k-réductible*, alors une suite de coups qui laisse k pierres sur le graphe s'appelle une *k-réduction*.

Le plus petit entier k tel que C soit *k-réductible* est appelé *valeur de réductibilité* de C .

Pour des raisons de commodité, nous utiliserons à l'avenir les abus de langage suivants: on dira que "le sommet v_1 capture v_2 " lorsque la pierre située en v_1 capture celle située en v_2 . Par ailleurs, un sommet sera dit *blanc* s'il porte une pierre de couleur blanche, et *noir* dans le cas d'une pierre noire. Enfin, étant donnée une configuration C sur un graphe G , on parlera régulièrement de la "réduction de G ", plutôt que de celle de C .

Au jeu du *Solitaire Clobber 2*, on associe le problème d'optimisation suivant:

SOLITAIRE CLOBBER 2

Instance: Une configuration $C = (G, \ell)$, où $G = (V, E)$ est un graphe quelconque, et $\ell : V \rightarrow \{0, 1\}$ un étiquetage des sommets de G .

Question: Quelle est la valeur de réductibilité de C ?

2.1.2 Etat de l'art

Comme précisé précédemment, ce jeu est une variante du *Solitaire Clobber* défini par Demaine et al. dans [DDF04]. Dans cette version initiale, le joueur est forcé d'alterner la capture d'une blanche puis d'une noire. En réduisant leur problème à celui de la recherche d'une chaîne Hamiltonienne, ils ont prouvé que décider si une configuration de Solitaire Clobber sur un grille-graphe est 1-réductible (ou k -réductible, plus généralement) est NP-complet. Il en résulte que le problème d'optimisation associé est NP-difficile sur ce type de graphe.

En se basant sur une preuve similaire à celle de Demaine et al., nous montrons que notre version de Solitaire Clobber est également NP-difficile sur certains types de graphes, dont les grille-graphes.

Proposition 4. *Le problème d'optimisation SOLITAIRE CLOBBER 2 est NP-difficile sur les grilles-graphes et les graphes à degré maximum égal à 3.*

Preuve. On s'intéresse au problème de décision associé: étant donné une configuration de jeu C sur un graphe G et un entier $k > 0$, C est-il k -réductible? Comme l'ont fait Demaine et al. pour leur jeu ([DDF04]), on considère le cas $k = 1$ et on réduit ce problème à celui de la recherche d'une chaîne hamiltonienne. A partir d'un graphe $\Gamma = (V, E)$ donné, on construit la configuration C de Clobber suivante: $G = \Gamma$ et des pierres noires sont placées sur tout les sommets de G , sauf sur un certain sommet x qui porte une couleur blanche.

Décider si Γ admet une chaîne hamiltonienne revient alors à décider s'il existe un sommet x tel que C soit 1-réductible. D'après [ACJ82], le problème HAMILTONIAN PATH est NP-complet pour les grille-graphes et les graphes à degré maximum égal à 3, ce qui permet de conclure. \square

Par ailleurs, Demaine et al. ont étudié le jeu du Solitaire Clobber sur des grilles rectangulaires, où les pierres sont disposées initialement comme sur un damier. Ce type de disposition particulière leur a permis de conclure quant à la valeur de réductibilité de telles configurations. Selon la taille de la grille, ils ont en effet montré qu'on peut les réduire à une ou deux pierres. En revanche, la complexité du problème reste ouverte pour des grilles dont la disposition initiale des pierres est quelconque.

En plus d'étendre la règle du jeu initiale, nous avons décidé d'étoffer la classe des graphes sur lesquels on "sait" jouer. Dans les parties suivantes,

le problème SOLITAIRE CLOBBER 2 sera étudié sur des chaînes, des cycles et des arbres. Nous verrons qu'il existe des algorithmes polynomiaux qui calculent les valeurs de réductibilité dans chacun de ces cas. Sur les produits de cliques, les hypercubes, ou plus généralement sur les graphes de Hamming généralisés, on montrera qu'on peut borner la valeur de réductibilité par une constante, en l'occurrence 1 ou 2.

2.2 Solitaire Clobber 2 sur des chaînes et des cycles

Les configurations sur une chaîne ou un cycle seront considérées comme des mots sur l'alphabet $\{X, O\}$, où X représente une pierre noire, et O une blanche. Par exemple, la configuration $\bullet\bullet\bullet\circ\circ\circ\bullet$ correspond au mot $XXXOOXOOX$. La i^{eme} pierre d'une configuration (c.à.d. la i^{eme} lettre du mot associé) sera notée p_i . Pour désigner des ensembles de configurations, on utilisera l'exposant $+$ pour une lettre apparaissant consécutivement une fois ou plus dans un mot. L'exposant \star est identique au $+$, à la différence que la lettre peut ne pas apparaître du tout. Par exemple, XO^+X désigne toutes les configurations qui commencent par X , puis continuent par une succession de O (au moins un), et se terminent par X . Ce contexte permet de décrire l'ensemble des chaînes 1-réductibles:

Lemme 7. *Les chaînes 1-réductibles sont soit des mots de longueur 1, soit de la forme XO^*X^*O , ou bien son symétrique OX^*O^*X .*

Preuve. On remarque facilement que de telles configurations de jeu sont 1-réductibles. Il reste à prouver que les configurations 1-réductibles sont nécessairement des mots de cette forme.

Remarquons tout d'abord que sur une chaîne 1-réductible, chaque coup de la 1-réduction doit être joué depuis une extrémité. Tout autre coup conduirait à scinder la chaîne en deux sous-chaînes.

On effectue une preuve par induction sur le nombre de sommets. Si la chaîne est de longueur 2, alors les deux seules configurations 1-réductibles sont OX et XO . Celles-ci valident le lemme. Soit $k > 2$. On suppose que le lemme est vrai pour toutes les chaînes de longueur $(k - 1)$, et on considère une configuration C de longueur k et 1-réductible. D'après la remarque précédente, on sait que le premier coup de la 1-réduction de C provient d'une extrémité. La configuration obtenue après ce premier coup est donc une chaîne 1-réductible de longueur $(k - 1)$, sur laquelle on peut appliquer l'hypothèse d'induction. Si le premier coup est la capture d'un X par un O , alors C est un mot de la forme OXX^*O^*X ou XO^*X^*XO . Dans le cas contraire, C est de la forme XOO^*X^*O ou OX^*O^*OX . \square

2.2.1 Sur des chaînes alternées périodiques

Une chaîne alternée périodique de longueur n et de période T correspond au mot suivant:

$$\underbrace{\underbrace{XX \dots XX}_{T} \underbrace{OO \dots OO}_{T} \dots \underbrace{OO \dots OO}_{T} \underbrace{XX \dots XX}_{T} \underbrace{OOO}_{n \bmod T}}_n$$

où $n \bmod T$ désigne le reste de la division euclidienne de n par T .

On s'intéresse à la valeur de réductibilité de telles configurations, ainsi qu'à la façon de jouer pour l'atteindre. Demaine et al. ont prouvé (cf. [DDF04]) que dans le cas où $T = 1$, cette valeur est égale à $\lceil n/4 \rceil + 1$ si $n \bmod 4 = 3$ et à $\lceil n/4 \rceil$ sinon. Ils ont montré que ce résultat reste vrai lorsque l'on considère notre variante du jeu. La façon de jouer est alors la suivante: on découpe la chaîne 1-périodique en blocs consécutifs de longueur 4. Notons que le dernier bloc peut être de taille réduite, de longueur $n \bmod 4$. Le schéma ci-dessous illustre cette découpe:

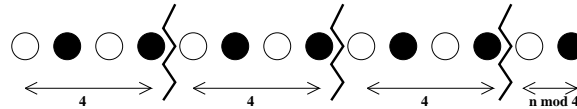


FIG. 2.2 – Comment jouer sur une chaîne 1-périodique

Après cette opération, on réduit chaque bloc de taille 4 à une seule pierre. Si $n \bmod 4 \neq 3$, on peut faire de même pour le dernier bloc. Dans le cas contraire, on réduit le dernier bloc à deux pierres.

Qu'en est-il des chaînes alternées où $T > 1$? Dans la suite de ce chapitre, on notera $v_T(n)$ la valeur de réductibilité d'une chaîne alternée de longueur n et de période T .

Sur les chaînes alternées 2-périodiques

Pour commencer, voici un résultat préliminaire sur les chaînes alternées 2-périodiques:

Lemme 8. *Etant donnée une chaîne alternée 2-périodique, la longueur maximale d'une sous-chaîne 1-réductible vaut 6. Il n'existe pas de sous-chaîne 1-réductible de longueur 4 ou 5.*

Preuve. La preuve découle directement du lemme 7, les chaînes 1-réductibles étant de la forme XO^*X^*O , ou OX^*O^*X . \square

Notons qu'une sous-chaîne 1-réductible de longueur 6 est nécessairement de la forme $XOOXXO$ (ou son symétrique). Par conséquent, une sous-chaîne 1-réductible dont l'une des extrémités est de la forme XX ou OO est nécessairement de longueur 3.

Le résultat ci-dessous décrit une façon de jouer optimale sur les chaînes alternées 2-périodiques, et donne la valeur de réductibilité associée à de telles configurations.

Théorème 12.

$$v_2(n) = \begin{cases} \lceil n/6 \rceil & \text{si } n \bmod 6 = 1 \text{ ou } n \bmod 6 = 3 \\ \lceil n/6 \rceil + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Preuve. – On montre tout d'abord qu'il existe une façon de jouer pour atteindre cette borne. Pour cela, on va partitionner la chaîne en sous-chaînes - ou "blocs" - consécutifs et 1-réductibles. En réduisant ensuite chaque bloc à une seule pierre, on atteindra la borne annoncée.

1. $n \bmod 6 = 0$. On décompose la chaîne alternée de la façon suivante:

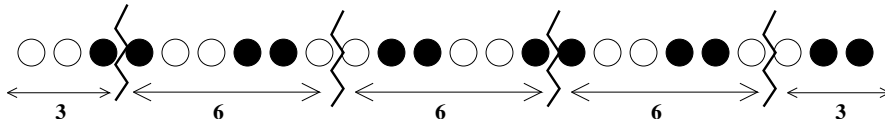


FIG. 2.3 – Cas $n \bmod 6 = 0$

On considère deux blocs de longueur 3 à partir des extrémités, et des blocs de longueur 6 à l'intérieur. Chaque bloc ainsi considéré correspond à une sous-chaîne 1-réductible. En réduisant chaque bloc à une seule pierre, on peut donc en déduire:

$$v_2(n) \leq 1 + \frac{n-6}{6} + 1 = \lceil \frac{n}{6} \rceil + 1$$

2. $n \bmod 6 = 1$. La décomposition en blocs 1-réductibles est la suivante:

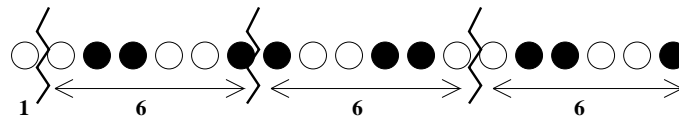


FIG. 2.4 – Cas $n \bmod 6 = 1$

La première pierre est isolée, et on constitue ensuite des blocs consécutifs de taille 6. On obtient la majoration suivante pour

$v_2(n)$:

$$v_2(n) \leq 1 + \frac{n-1}{6} = 1 + \lceil \frac{n}{6} \rceil - 1 = \lceil \frac{n}{6} \rceil$$

3. $n \bmod 6 = 2$. On partitionne de la façon suivante:

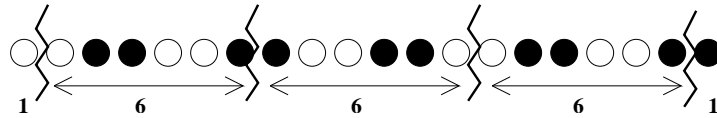


FIG. 2.5 - Cas $n \bmod 6 = 2$

Ce qui donne:

$$v_2(n) \leq 1 + \frac{n-2}{6} + 1 = \lceil \frac{n}{6} \rceil + 1$$

4. $n \bmod 6 \geq 3$. De la même façon, on considère les schémas de décomposition suivants:

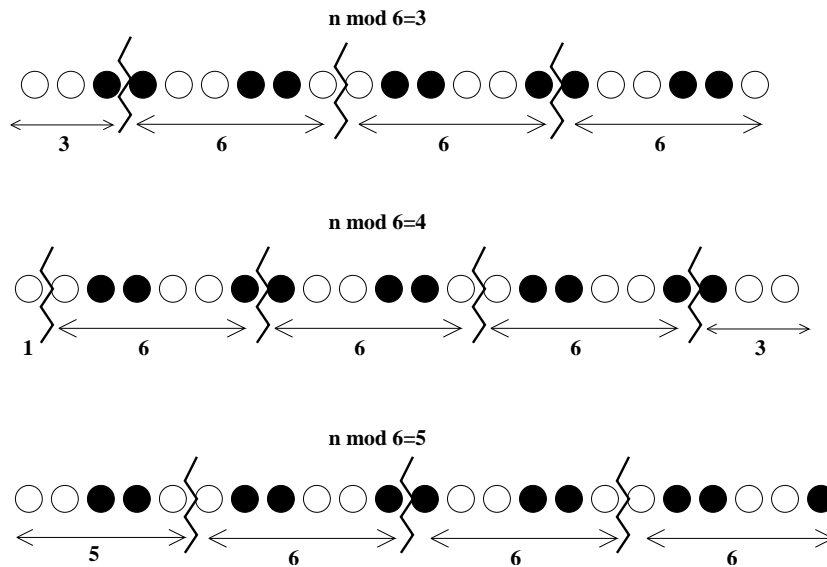


FIG. 2.6 - Cas $n \bmod 6 \geq 3$

Le lecteur pourra vérifier que la borne est bien atteinte dans chacun de ces cas.

– Montrons maintenant que la borne annoncée est bien la meilleure qui soit. Soient q et r respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de n par 6 (on a donc $n \bmod 6 = r$).

1. On considère les cas où $r = 1$ ou $r = 3$.

Montrons que $v_2(n) \geq \lceil \frac{n}{6} \rceil = q + 1$. Supposons que ce ne soit pas le cas, c'est-à-dire $v_2(n) \leq q$. Alors les $v_2(n)$ pierres restantes sont issues de la réduction de $v_2(n)$ blocs de taille 6 au plus (d'après le lemme 8). L'inégalité suivante doit alors être vérifiée:

$$\begin{aligned} \text{nombre total de pierres} &\leq \text{nombre de pierres restantes} * \text{taille maximum des blocs dont elles sont issues} \\ 6q + r &\leq v_2(n) * 6 \leq 6q \end{aligned}$$

L'inégalité ci-dessus engendre la contradiction.

2. On considère le cas $r = 0$. Montrons que $v_2(n) \geq q + 1$. De la même façon que précédemment, supposons le contraire, c'est-à-dire $v_2(n) \leq q$. On doit partitionner les $n = 6q$ pierres en $v_2(n)$ blocs consécutifs 1-réductibles, sachant que la taille maximale d'un bloc 1-réductible vaut 6. Il existe une seule répartition possible: chaque bloc doit être de taille 6 exactement. Or le premier bloc a son extrémité de la forme XX ou OO : d'après le lemme 8, ce bloc ne peut pas être à la fois 1-réductible et de longueur 6.
3. Etudions le cas $r = 2$. Montrons que $v_2(n) \geq \lceil \frac{n}{6} \rceil + 1 = q + 2$. En raisonnant par l'absurde et de manière similaire au cas $r = 1$, on prouve rapidement que $v_2(n) > q$. Supposons maintenant que $v_2(n) = q + 1$. On doit répartir les $n = 6q + 2$ pierres en $(q + 1)$ blocs 1-réductibles, sachant que la taille maximale d'un bloc 1-réductible est de 6. Voici la liste des répartitions possibles:

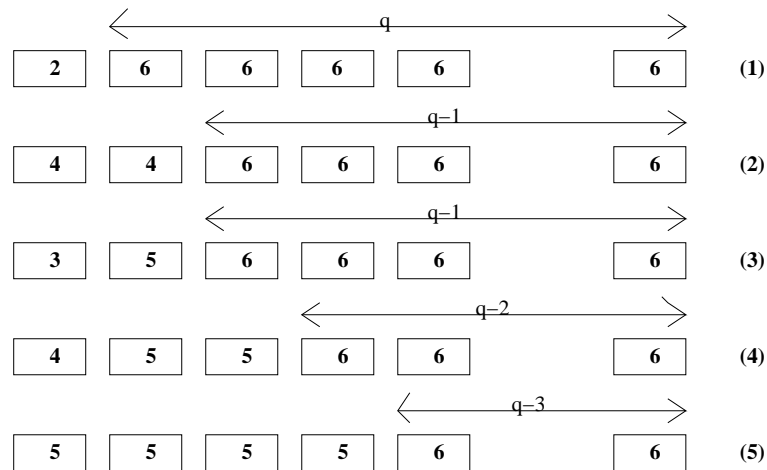


FIG. 2.7 – Répartitions en blocs lorsque $r = 2$

D'après le lemme 8, il n'existe pas de sous-chaînes 1-réductibles de longueur 4 ou 5. Seule la répartition (1) est donc envisageable. Mais cette répartition impose qu'un bloc de taille 6 soit situé

à l'une des deux extrémités de la chaîne. Ce bloc a donc lui-même une extrémité de la forme XX ou OO , contredisant sa 1-réductibilité.

4. Pour les cas $r = 4$ et $r = 5$, le raisonnement est similaire à celui du cas $r = 2$. On voit rapidement que $v_2(n) > q$, et l'on suppose donc que $v_2(n) = q + 1$. Pour chacun des deux cas, voici les répartitions possibles des n pierres en $(q + 1)$ blocs:

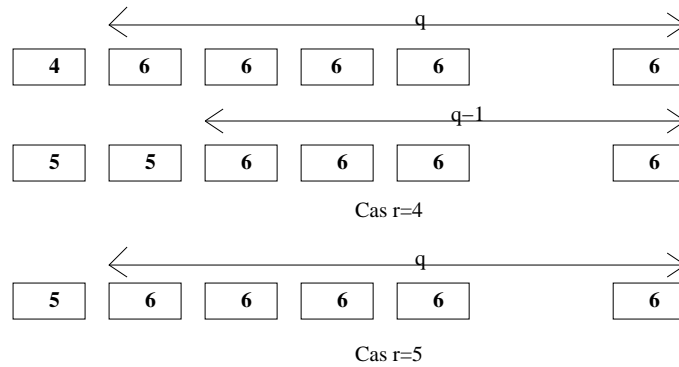


FIG. 2.8 – Répartitions en blocs pour $r = 4$ et $r = 5$

La contradiction apparaît immédiatement puisque des sous-chaînes 1-réductibles de taille 4 ou 5 n'existent pas.

□

Sur les chaînes alternées 3-périodiques

Sur les chaînes alternées 3-périodiques, l'étude des premiers cas nous a conduit au résultat suivant:

Théorème 13. Soit $n \geq 4$:

$$v_3(n) = \begin{cases} \lceil \frac{n}{3} \rceil - \lfloor \frac{n}{9} \rfloor + 1 & \text{si } n \bmod 3 = 0 \\ \lceil \frac{n-1}{3} \rceil - \lfloor \frac{n+5}{9} \rfloor + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

et $v_3(1) = 1, v_3(2) = 2, v_3(3) = 3$.

Preuve. On s'intéresse tout d'abord aux premiers cas. Le tableau ci-dessous donne les valeurs de réductibilité de chacune des huit premières configurations, ainsi que les façons de jouer pour les atteindre:

Le nombre de coups possibles n'étant pas très élevé, on vérifie assez rapidement que les bornes annoncées dans ce tableau sont optimales. Le lecteur pourra s'assurer que les valeurs de réductibilité figurant dans ce tableau correspondent bien à la formule de l'énoncé du théorème.

	n	$v_3(n)$
x	1	1
xx	2	2
xxx	3	3
<hr/>		
xxxo ←	4	1
xxxoo ←	5	2
xxxooo ←	6	3
xxxooox ←	7	2
xxxooox ←	8	3

FIG. 2.9 – Les 8 premières chaînes alternées 3-périodiques

La suite de la preuve est une induction sur la taille de la chaîne. Soit $n > 8$, et on suppose le théorème vrai pour tout $k < n$. On distingue trois cas selon la valeur de n :

1. $n \bmod 3 = 0$.

On étudie ici des configurations de la forme $\bullet\bullet\bullet\circ\circ\circ\bullet\bullet\bullet\circ\circ\circ\bullet\bullet\bullet$.

Considérons la dernière pierre p_n . Les pierres p_{n-1} et p_{n-2} ont la même couleur que p_n . On considère maintenant la suite de coups optimale (celle qui atteint $v_3(n)$). Dans cette suite, on regarde l'(éventuel) premier coup impliquant p_n . Trois cas sont possibles: soit p_n n'est impliquée dans aucun coup, soit p_n est capturée (et dans ce cas, elle l'est forcément par la pierre p_{n-3} qui aura auparavant capturé p_{n-2} et p_{n-1}), soit p_n capture la pierre à sa gauche (et dans ce cas, elle capture forcément la pierre p_{n-3} qui aura auparavant capturé p_{n-2} et p_{n-1}). Si l'on se trouve dans un des deux derniers cas, alors on peut supposer que les captures impliquant p_n ont lieu au début de la suite de coups optimale (puisqu'elles n'interfèrent pas avec le reste de la chaîne). On en déduit l'égalité suivante:

$$v_3(n) = \min(1 + v_3(n - 1), 1 + v_3(n - 4), 1 + v_3(n - 4))$$

Or on a par hypothèse d'induction:

$$v_3(n - 1) = \lceil \frac{n - 2}{3} \rceil - \lfloor \frac{n + 4}{9} \rfloor + 1 = \lceil \frac{n}{3} \rceil - \lfloor \frac{n + 4}{9} \rfloor + 1$$

et

$$v_3(n - 4) = \lceil \frac{n - 5}{3} \rceil - \lfloor \frac{n + 1}{9} \rfloor + 1 = \lceil \frac{n}{3} \rceil - 1 - \lfloor \frac{n + 1}{9} \rfloor + 1$$

puisque $n \equiv 0(3)$.

Il en résulte que $v_3(n-4) \leq v_3(n-1)$. Enfin, puisque $\lfloor (n+1)/9 \rfloor = \lfloor n/9 \rfloor$ d'après la congruence de n modulo 3, on en déduit que

$$v_3(n) = 1 + v_3(n-4) = \lceil n/3 \rceil - \lfloor n/9 \rfloor + 1$$

La façon optimale de jouer est donc de capturer p_n avec p_{n-3} .

2. $n \bmod 3 = 2$.

Il s'agit des configurations de la forme $\bullet\bullet\bullet\circ\circ\circ\bullet\bullet\bullet\circ\circ\circ\bullet\bullet$.

On raisonne une nouvelle fois sur le comportement de la pierre p_n dans la suite de coups optimale. Soit p_n n'est impliquée dans aucun coup, soit elle est capturée (nécessairement par p_{n-2}), soit elle capture la pierre à gauche (nécessairement p_{n-2} qui aura capturé p_{n-1} auparavant). D'où l'égalité suivante:

$$v_3(n) = \min(1 + v_3(n-1), 1 + v_3(n-3), 1 + v_3(n-3))$$

Or on a:

$$v_3(n-1) = \lceil \frac{n-2}{3} \rceil - \lfloor \frac{n+4}{9} \rfloor + 1$$

et

$$v_3(n-3) = \lceil \frac{n-4}{3} \rceil - \lfloor \frac{n+2}{9} \rfloor + 1$$

Puisque $\lceil (n-2)/3 \rceil = \lceil (n-4)/3 \rceil$, et d'après la congruence modulo 3 de n , on en déduit que $v_3(n-1) \leq v_3(n-3)$, et ainsi:

$$v_3(n) = 1 + v_3(n-1) = \lceil \frac{n-2}{3} \rceil - \lfloor \frac{n+4}{9} \rfloor + 2 = \lceil \frac{n-1}{3} \rceil - \lfloor \frac{n+4}{9} \rfloor + 1$$

On conclut finalement grâce à l'égalité $\lfloor (n+4)/9 \rfloor = \lfloor (n+5)/9 \rfloor$.

Supposons en effet que $\lfloor (n+4)/9 \rfloor < \lfloor (n+5)/9 \rfloor$. Cela signifie alors que $(n+4) \equiv 8(9)$. Mais puisque n peut s'écrire $3q+2$, alors on aurait $(3q+6) \equiv 8(9)$, soit $3q \equiv 2(9)$, ce qui est absurde.

3. $n \bmod 3 = 1$.

Il s'agit des configurations de la forme $\bullet\bullet\bullet\circ\circ\circ\bullet\bullet\bullet\circ\circ\circ\bullet$.

Cette fois-ci, on s'intéresse au comportement de la pierre p_{n-3} dans la suite de coups optimale. Il y a cinq possibilités: soit p_{n-3} n'est impliquée dans aucune capture, soit elle capture la pierre de gauche p_{n-4} , soit elle capture la pierre de droite (nécessairement p_n , qui aura auparavant capturé p_{n-1} et p_{n-2}), soit elle est capturée par p_{n-4} , soit elle est capturée par la pierre de droite (nécessairement p_n). On obtient $v_3(n)$ de la façon suivante:

$$v_3(n) = \min(v_3(n-4)+1+1, v_3(n-3)+1, v_3(n-4)+1, v_3(n-5)+2, v'_3(n-3))$$

où $v'_3(n-3)$ est la valeur de réductibilité d'une configuration alternée 3-périodique de longueur $(n-4)$ à laquelle on a rajouté à la fin une pierre p_{n-3} identique à p_{n-4} . Par exemple: $\bullet\bullet\bullet\circ\circ\circ\bullet\bullet\bullet$.

Or $v'_3(n-3) = v_3(n-4)$. En effet, grâce à l'hypothèse d'induction, on connaît la façon optimale de jouer sur une chaîne de longueur $(n-4)$, où $n \bmod 3 = 1$: un des coups consiste à ce que la pierre p_{n-7} capture toutes celles qui sont à sa droite. Si on rajoute une pierre p_{n-3} de couleur identique à p_{n-4} à la fin de la chaîne, alors en appliquant la même stratégie que sur la chaîne de longueur $(n-4)$, il reste le même nombre de pierres à la fin. On en déduit donc que $v'_3(n-3) \leq v_3(n-4)$. Par ailleurs, dans une stratégie optimale qui laisse v'_{n-3} pierres sur la chaîne alternée avec une pierre rajoutée, cette dernière n'apporte rien de plus puisqu'elle ne sert pas à capturer. Autrement dit: toute stratégie optimale sur une telle configuration peut être appliquée sur la chaîne alternée sans pierre rajoutée. Soit: $v'_3(n-3) \geq v_3(n-4)$.

Cela donne alors les égalités suivantes:

$$\begin{aligned} v_3(n-4) &= \lceil \frac{n-4}{3} \rceil - \lfloor \frac{n-4}{9} \rfloor + 1 = \lceil \frac{n-1}{3} \rceil - \lfloor \frac{n+5}{9} \rfloor + 1 \\ v_3(n-3) &= \lceil \frac{n-4}{3} \rceil - \lfloor \frac{n+2}{9} \rfloor + 1 = \lceil \frac{n-1}{3} \rceil - \lfloor \frac{n+2}{9} \rfloor + 1 \\ v_3(n-5) &= \lceil \frac{n-6}{3} \rceil - \lfloor \frac{n}{9} \rfloor + 1 = \lceil \frac{n-1}{3} \rceil - \lfloor \frac{n}{9} \rfloor \end{aligned}$$

Le minimum est donc réalisé lorsque p_{n-3} est capturée par la pierre p_n . On en déduit finalement que:

$$v_3(n) = v'_3(n-3) = v_3(n-4) = \lceil \frac{n-1}{3} \rceil - \lfloor \frac{n+5}{9} \rfloor + 1$$

□

Sur les chaînes alternées T -périodiques, où $T > 3$

Dans le cas des chaînes alternées T -périodiques où $T > 3$, on a obtenu une formule générale pour la valeur de réductibilité. Celle-ci dépend de la congruence de n modulo T . Dans toute cette section, on considèrera des chaînes alternées de période T , où T est un entier fixé strictement supérieur à 3.

Théorème 14. *Soit $n > 2T$:*

$$v_T(n) = \begin{cases} \lceil n/T \rceil + T - 3 & \text{si } n \bmod T = 0 \\ \lceil n/T \rceil + n \bmod T - 2 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} v_T(n) &= n \quad \forall 1 \leq n \leq T \\ v_T(n) &= n \bmod T \quad \forall T < n < 2T \\ v_T(2T) &= T \end{aligned}$$

Preuve. Le schéma de preuve est identique à celui du cas $T = 3$.

Aucun problème lorsque $1 \leq n \leq T$, puisqu'il n'y a qu'une seule couleur de pierre.

Pour $T < n \leq 2T$, il y a deux possibilités pour le premier coup: p_T capture p_{T+1} ou bien l'inverse. Il est clair que la solution la moins coûteuse est la seconde. p_{T+1} capture ensuite toutes les pierres à sa gauche.

Nous avons vérifié que le théorème est vrai pour n compris entre $(2T+1)$ et $(3T+1)$. Le tableau ci-dessous regroupe les résultats et les façons de jouer pour ces tailles:

	n	$V_T(n)$
X..X	$n < T+1$	n
X...XO..O	$T < n < 2T$	$n \bmod T$
X...XO...O	$2T$	T
.....		
X...XO ..OX 	$2T+1$	2
X...XO...OX .X 	$2T+1 < n < 3T$	$1+n \bmod T$
X...XO...OX...X 	$3T$	T
X...XO...OX .XO 	$3T+1$	3

FIG. 2.10 – Les premières chaînes alternées T -périodiques, où $T > 3$

On considère maintenant une preuve par induction sur la taille de la chaîne. Soit $n > 3T + 1$, et on suppose le théorème vrai pour tout $k < n$. On distingue trois cas selon la congruence de n modulo T :

1. $n \bmod T = 0$.

On s'intéresse au comportement de la pierre p_n lors de la suite de coups optimale. Au sujet du premier coup qui implique p_n , trois cas sont possibles: soit p_n n'est impliquée dans aucun coup, soit p_n est capturée (et dans ce cas, elle l'est forcément par la pierre p_{n-T} qui aura auparavant capturé les $(T - 1)$ pierres les séparant), soit p_n capture la pierre à sa gauche (et dans ce cas, il s'agit de la pierre p_{n-T} qui aura auparavant capturé ces mêmes $(T - 1)$ pierres les séparant). Si l'on se trouve dans l'un des deux derniers cas, alors on peut supposer que les captures impliquant p_n ont lieu au début de la suite de coups optimale (puisque'elles n'interfèrent pas avec le reste de la chaîne). On en déduit l'égalité suivante:

$$v_T(n) = \min(1 + v_T(n - 1), 1 + v_T(n - T - 1), 1 + v_T(n - T - 1))$$

Le lecteur pourra s'assurer que le minimum est réalisé pour les deuxième

et troisième façons de jouer. On a alors:

$$v_T(n) = 1 + v_T(n - T - 1) = 1 + \lceil \frac{n - T - 1}{T} \rceil + (T - 1) - 2 = \lceil \frac{n}{T} \rceil + T - 3$$

La façon de jouer dans ce cas est alors similaire à celle où $T = 3$: p_{n-T} capture toutes les pierres qui sont à sa droite.

2. $n \bmod T > 1$.

Le raisonnement est identique au cas $n \bmod T = 0$ (on regarde le premier coup impliquant la pierre p_n). Ce qui donne:

$$v_T(n) = \min(1 + v_T(n - 1), 1 + v_T(n - n \bmod T - 1), 1 + v_T(n - n \bmod T - 1))$$

Or on a:

$$v_T(n - 1) = \lceil \frac{n - 1}{T} \rceil + (n - 1) \bmod T - 2 = \lceil \frac{n}{T} \rceil + n \bmod T - 3$$

et

$$v_T(n - n \bmod T - 1) = \lceil \frac{n - n \bmod T - 1}{T} \rceil + (T - 1) - 2 = \lceil \frac{n}{T} \rceil + T - 4$$

On en conclut donc que

$$v_T(n) = 1 + v_T(n - 1) = \lceil \frac{n}{T} \rceil + n \bmod T - 2$$

3. $n \bmod T = 1$.

De manière similaire au cas $T = 3$, on considère le premier coup impliquant la pierre p_{n-T} . Les cinq mêmes possibilités apparaissent et se traduisent par l'égalité suivante:

$$v_T(n) = \min(2 + v_T(n - T - 1), 2 + v_T(n - T - 2), v'_T(n - T), \\ 1 + v_T(n - T - 1), 1 + v_T(n - T))$$

où $v'_T(n - T)$ est la valeur de réductibilité d'une configuration alternée T -périodique de longueur $(n - T - 1)$ à laquelle on a rajouté à la fin une pierre p_{n-T} de même couleur que p_{n-T-1} .

Par une preuve en tous points identique à celle du cas $T = 3$, on montre que $v'_T(n - T) = v_T(n - T - 1)$.

On ne détaille pas ici le calcul de la valeur minimum, mais seulement le résultat: le minimum est réalisé lorsque la pierre p_{n-T} capture celle qui se trouve à sa gauche, c'est-à-dire:

$$v_T(n) = 1 + v_T(n - T) = \lceil \frac{n}{T} \rceil - 1$$

□

Bilan sur les chaînes alternées périodiques

On obtient une formule générale à partir de $T = 4$. Pour les périodes inférieures, les différents résultats se traduisent par une façon de jouer spécifique. Pour les chaînes à faible période, laisser un ensemble de T pierres isolées n'est pas nécessairement catastrophique. C'est en revanche le cas pour des périodes plus élevées, et l'on va alors chercher à capturer des pierres sur toutes les périodes.

Sur le schéma ci-dessous sont regroupées les différentes façons de jouer en fonction de la période. Les résultats sont donnés pour des valeurs de n assez grand (supérieur à $2T + 1$). Lorsque n est plus petit, les façons de jouer peuvent être différentes; celles-ci sont décrites dans les preuves des théorèmes.

T	$n\%T=0$	$n\%T=1$	$n\%T>1$
1	●○○○ ●○○○ ●○○○ ●○○○ ●○○○ ●○○○ ●○○○ ●○○○ ●○○○ ●○○○		
2	●●○○●●○○●●○○● ● cas particulier: congruences modulo (cf. preuve)		
3	●●●○○○●● ●○○○	●●●○○○●● ●○○○	●●●○○○●●●○○○
>3	●●●○○○ ●○○○	●●●○○○ ●○○○	●●●○○○●●●○○○

FIG. 2.11 – Comment jouer sur les chaînes alternées périodiques

On remarque qu'il n'y a qu'une seule différence qui sépare le cas $T = 3$ des périodes supérieures. Celle-ci apparaît lorsque $n \equiv 1(T)$. Elle est justifiée par ce qui a été dit auparavant: lorsque $T > 3$, on utilise la dernière pierre pour capturer les $(T - 1)$ pierres de la période qui la précède, la T^{eme} étant utilisée pour réitérer le processus. De la sorte, on capture des pierres sur toutes les périodes. Ce n'est en revanche pas le cas lorsque $T = 3$, où laisser une période quasi-pleine n'est pas trop coûteux.

2.2.2 Cas général

On considère maintenant le problème du SOLITAIRE CLOBBER 2 sur des chaînes et des cycles où la disposition des pierres est quelconque. D'après le lemme 7, décider si une configuration sur une chaîne est 1-réductible se calcule en temps linéaire. Fort de ce résultat, le théorème suivant affirme que la valeur de réductibilité des chaînes et des cycles peut se calculer en temps quadratique.

Théorème 15. *Le problème SOLITAIRE CLOBBER 2 sur des chaîne et des*

cycles se résout en temps quadratique.

Preuve. La remarque qui suit permet de comprendre et de modéliser le problème. Etant donné un entier $k > 0$ et une configuration de jeu C sur un graphe G quelconque, décider si C est k -réductible revient à rechercher une partition des sommets de G en k sous-graphes induits, tels que chacun d'entre eux soit 1-réductible. Sur l'exemple d'une chaîne, le schéma ci-dessous (Fig. 2.12) illustre cette partition en sous-chaînes 1-réductibles.

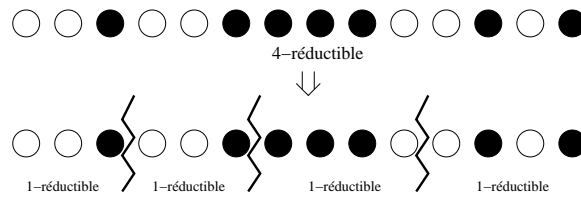


FIG. 2.12 – *Un exemple de partition d'une chaîne 4-réductible*

Soient C_n et D_n deux configurations de jeu quelconques, respectivement sur une chaîne et un cycle de longueur n . D'après ce qui précède, on cherche une partition minimum des sommets de C_n et D_n en sous-chaînes 1-réductibles. L'algorithme suivant répond à ce problème:

- On calcule toutes les sous-chaînes 1-réductibles de C_n (ou D_n). Grâce à la caractérisation fournie par le lemme 7, cela consiste à trouver tous les sous-mots de la forme X , O , XO^*X^*O , ou OX^*O^*X . Pour chaque lettre l de C_n ou D_n , on parcourt le mot de l vers la droite (de façon circulaire dans le cas de D_n) et on accepte les mots qui ont la forme souhaitée. Ceci s'effectue en un temps $O(n^2)$.
- On construit le graphe Γ dont chaque sommet est une sous-chaîne 1-réductible de C_n (ou D_n). Deux sommets de Γ sont adjacents si les sous-chaînes correspondantes ont au moins un sommet en commun dans C_n (ou D_n). Par définition, Γ est donc un graphe d'intervalles de C_n (ou un graphe arc-circulaire de D_n).
- Rechercher une partition minimum de C_n ou D_n en sous-chaînes 1-réductibles revient alors à rechercher un sous-ensemble de sommets de Γ de cardinalité minimum, et qui constitue un stable maximal. En effet, dans une partition, chaque sommet de C_n ou D_n apparaît une et une seule fois. Puisqu'il existe un sommet de Γ pour chaque pierre isolée de C_n (ou D_n), chaque ensemble stable maximal de Γ recouvre bien tous les sommets de C_n (ou D_n).
- Il reste donc à calculer le stable maximal de cardinalité minimum d'un graphe d'intervalles (dans le cas de C_n) ou d'un graphe

arc-circulaire (cas de D_n). Ce problème est plus souvent connu sous le nom de "stable dominant de cardinalité minimum" (les deux problèmes sont identiques). Il a été résolu en temps linéaire sur les graphes d'intervalles et arc-circulaires par Klostermeyer et al. dans [KE00]. Notons que ce problème est NP-complet dans le cas général.

Le graphe Γ ayant un nombre de sommet en $O(n^2)$, la complexité de SOLITAIRE CLOBBER 2 est bien quadratique. \square

Chapitre 3

Aspects algorithmiques du jeu sur les arbres

Comme l'ont montré les résultats de Demaine et al., le jeu du Solitaire Clobber aborde des notions classiques d'optimisation combinatoire. La recherche de la valeur de réductibilité en est un exemple parlant. La réduction à partir de HAMILTONIAN CIRCUIT (cf. [DDF04]), ou de HAMILTONIAN PATH dans notre cas, assure que le problème est NP-complet dans le cas général. Dans ce chapitre, on s'intéresse au jeu sur des arbres, et à la recherche d'un algorithme de calcul de la valeur de réductibilité.

3.1 Approche

On décide maintenant de jouer à *Solitaire Clobber 2* sur des arbres. Dans un premier temps, on pourrait se dire que le calcul de la valeur de réductibilité s'effectue de la même façon que pour les chaînes et les cycles. En effet, déterminer si une configuration "arbre" est 1-réductible se résout en temps linéaire. Une fois le graphe d'intersection des sous-arbres 1-réductibles construit, il s'agirait d'appliquer l'algorithme de recherche d'un stable dominant minimum. Celui-ci reste polynomial sur un graphe d'intersection de sous-arbres.

Cependant, le nombre de sous-arbres 1-réductibles peut être exponentiel dans certains cas. On peut donc oublier un tel algorithme de résolution ; la complexité du problème reste ouverte. Sans a priori tranché, nous sommes alors partis dans les deux directions opposées: trouver une réduction vers un autre problème difficile, ou construire un algorithme polynomial. La seconde direction s'est avérée la bonne. Afin de mieux appréhender l'algorithme qui suivra, nous allons décrire ici notre façon d'aborder le problème.

On a tout d'abord choisi d'enraciner notre arbre de jeu sur un sommet quelconque. L'idée est ensuite de parcourir cet arbre des feuilles vers la

racine, en calculant à chaque fois la valeur de réductibilité de chaque sous-arbre induit par les sommets déjà parcourus. Imaginons par exemple que je cherche à calculer la valeur de réductibilité du sous-arbre ci-dessous (figure 3.1) enraciné en s :

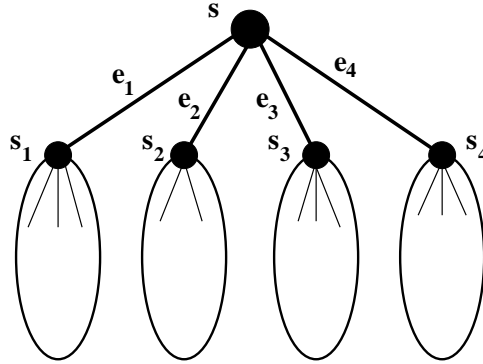


FIG. 3.1 – Réductibilité des arbres: approche de résolution

Connaître la valeur de réductibilité de chacun des sous-arbres dont s_i est la racine ne me permet pas de conclure. Car j'ai aussi besoin de connaître les couleurs finales des sommets s_i , afin de jouer des coups entre s et ses enfants. Peut-être que dans certains cas il est plus intéressant de laisser une pierre sur un sommet s_i , même si la valeur de réductibilité du sous-arbre incite à ne pas en laisser. Cela nous conduit alors à définir trois types de valeur de réductibilité sur un sous-arbre: on cherche toujours à minimiser le nombre de pierres finales, mais on impose l'état de la racine à la fin. On veut finir avec la racine noire, blanche, ou sans pierre.

Dans le cas où la solution optimale est telle que s porte toujours une pierre à la fin, la connaissance de ces trois valeurs sera suffisante. En effet, si s n'est pas vide à la fin de la partie, cela signifie que les coups impliquant ce sommet ne sont joués que depuis les enfants s_i vers s . Autrement dit, seules trois façons de jouer m'intéressent sur chaque sous-arbre enraciné en s_i : celle qui laisse une pierre noire, celle qui laisse une pierre blanche, et celle qui ne laisse pas de pierre. Après, il ne restera plus qu'à choisir la bonne sur chaque sous-arbre.

Dans le cas où la solution optimale est telle que s est vide à la fin, cela signifie qu'il existe un coup de s vers un certain enfant s_e . Sur le sous-arbre enraciné en s_e , on ne peut donc pas se contenter des trois valeurs de réductibilité présentées auparavant. Quand on regarde la suite de coups optimale sur ce sous-arbre, ce coup de s vers s_e peut-être joué à n'importe quel moment, et correspond à un changement de couleur de la pierre située en s_e . On fait alors apparaître la notion de joker. Un joker permet de changer la couleur d'une pierre située à la racine à n'importe quel moment du jeu.

On dira qu'un sommet de couleur/d'étiquette 0 porte une pierre blanche

et qu'un sommet de couleur/d'étiquette 1 porte une pierre noire. Un sommet sans pierre sera dit *non étiqueté*.

3.2 Les résultats

Théorème 16. *La valeur de réductibilité d'une configuration de jeu sur un arbre $G = (V, E)$ se calcule en temps quadratique $O(|V|^2)$.*

La preuve que nous allons décrire ici contient l'algorithme de calcul. Par avance, je tiens à prévenir le lecteur qu'il s'agit d'un algorithme assez complexe utilisant de nombreuses variables. Pour en faciliter la compréhension, un exemple d'application sera présenté à la suite de la démonstration.

Preuve. Soit C une configuration de jeu sur un arbre $G = (V, E)$. Soit v un sommet quelconque de V . Par la suite, nous considérerons toujours notre arbre G comme enraciné en v . Pour chaque sommet s de l'arbre, on notera $G(s)$ le sous-arbre induit par s et tous ses enfants. Par définition, $G(v)$ définit l'arbre G lui-même.

Pour chaque sommet s de V , on définit neuf variables, dites *k-valeurs*, qui seront calculées depuis les sommets feuilles vers la racine v .

- $k_0(s)$ est la valeur de réductibilité du sous-arbre $G(s)$, à condition que le sommet s soit étiqueté 0 à la fin.
- $k_1(s)$ est la valeur de réductibilité du sous-arbre $G(s)$ à condition que le sommet s soit étiqueté 1 à la fin.
- $k_2(s)$ est la valeur de réductibilité du sous-arbre $G(s)$ à condition que le sommet s ne soit pas étiqueté à la fin.
- $k_0^{0 \rightarrow 1}(s)$ est la valeur de réductibilité du sous-arbre $G(s)$ à condition que le sommet s soit étiqueté 0 à la fin et que le joker $0 \rightarrow 1$ soit joué. Le joker $0 \rightarrow 1$ consiste à faire passer la couleur de s de 0 à 1 à n'importe quel moment de la partie. Il ne peut être utilisé qu'une seule fois.
- $k_1^{0 \rightarrow 1}(s)$ est la valeur de réductibilité du sous-arbre $G(s)$ à condition que le sommet s soit étiqueté 1 à la fin et que le joker $0 \rightarrow 1$ soit joué.
- $k_2^{0 \rightarrow 1}(s)$ est la valeur de réductibilité du sous-arbre $G(s)$ à condition que le sommet s ne soit pas étiqueté à la fin et que le joker $0 \rightarrow 1$ soit joué.
- $k_0^{1 \rightarrow 0}(s)$ est la valeur de réductibilité du sous-arbre $G(s)$ à condition que le sommet s soit étiqueté 0 à la fin et que le joker $1 \rightarrow 0$ soit joué. Le joker $1 \rightarrow 0$ consiste à faire passer la couleur de s de 1 à 0 à n'importe quel moment de la partie. Il ne peut être utilisé qu'une seule fois.

- $k_1^{1 \rightarrow 0}(s)$ est la valeur de réductibilité du sous-arbre $G(s)$ à condition que le sommet s soit étiqueté 1 à la fin et que le joker $1 \rightarrow 0$ soit joué.
- $k_2^{1 \rightarrow 0}(s)$ est la valeur de réductibilité du sous-arbre $G(s)$ à condition que le sommet s ne soit pas étiqueté à la fin et que le joker $1 \rightarrow 0$ soit joué.

Lors du calcul d'une k -valeur, il se peut qu'aucune suite de coups ne permette d'obtenir la couleur demandée pour s à la fin. Il est également possible que le joker ne soit pas utilisable. Dans de telles circonstances, la k -valeur sera égale à ∞ .

Afin de rendre ces variables plus concrètes, illustrons-les sur un arbre à trois sommets:

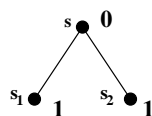


FIG. 3.2 – Les k -valeurs sur un petit exemple

Le nombre de coups possibles étant très limité, le calcul des k -valeurs se fait de façon quasi-immédiate. Le meilleur coup est souvent le seul coup possible. Les k -valeurs du sommet s sont les suivantes:

$k_0(s)$	$k_1(s)$	$k_2(s)$	$k_0^{0 \rightarrow 1}(s)$	$k_1^{0 \rightarrow 1}(s)$	$k_2^{0 \rightarrow 1}(s)$	$k_0^{1 \rightarrow 0}(s)$	$k_1^{1 \rightarrow 0}(s)$	$k_2^{1 \rightarrow 0}(s)$
3	2	2	∞	3	∞	2	1	1

Explication des résultats: le calcul de $k_0(s)$ est immédiat: on a besoin de laisser une pierre de couleur 0 en s à la fin, ce qui impose le statu-quo. Pour $k_1(s)$, on doit laisser s de couleur 1 à la fin, ce qui impose de jouer un coup de s_1 ou s_2 vers s . Pour $k_2(s)$, le sommet s doit être libre à la fin, il faut donc jouer de s vers un de ses enfants. En ce qui concerne le calcul de $k_0^{0 \rightarrow 1}(s)$, on sait qu'on doit jouer le joker $0 \rightarrow 1$ à un moment donné, donc autant le faire immédiatement. Mais dans ce cas, tous les sommets sont étiquetés 1 et il n'est pas possible de finir avec une pierre de couleur 0 en s à la fin. La k -valeur est alors égale à ∞ . Pour $k_1^{0 \rightarrow 1}(s)$ et $k_2^{0 \rightarrow 1}(s)$, le joker peut encore s'appliquer immédiatement et cette fois-ci, il est possible d'étiqueter s avec un 1, ou bien de le laisser vide. Enfin, pour les k -valeurs $k_0^{1 \rightarrow 0}(s)$, $k_1^{1 \rightarrow 0}(s)$, et $k_2^{1 \rightarrow 0}(s)$, le joker $1 \rightarrow 0$ ne peut pas s'appliquer tout de suite. Il faut auparavant que s soit étiqueté 1. Cette opération se fait en jouant de s_1 ou s_2 vers s . La suite consiste à choisir le coup qui laisse la bonne étiquette à s .

Le calcul des k -valeurs semble donc aisé pour les arbres de petite taille. Il risque cependant de se complexifier au fur et à mesure que le nombre de ramifications augmente. Le nombre de façons de jouer pour satisfaire la requête - à savoir l'étiquette finale de s et l'utilisation ou non d'un joker - est souvent très grand. Choisir la meilleure (celle qui minimise le nombre de pierres restantes) ne sera pas chose facile.

L'algorithme de calcul de la valeur de réductibilité de notre arbre utilise les k -valeurs de la façon suivante: en partant des feuilles et en remontant vers la racine, on calcule les neuf k -valeurs associées à chaque sommet de G . Une fois que les k -valeurs de la racine ont été calculées, la valeur de réductibilité est logiquement égale au $\min(k_0(v), k_1(v), k_2(v))$.

On note que le calcul des k -valeurs d'un sommet s peut dépendre de la couleur initiale de s .

La première étape est celle de l'initialisation, qui donne les k -valeurs des feuilles de l'arbre.

Les k -valeurs des feuilles: On considère une feuille l de notre arbre. On suppose que sa couleur est 0. Alors on a $k_0(l) = k_1^{0 \rightarrow 1}(l) = 1$, et les autres k -valeurs sont égales à ∞ .

Dans le cas où l est initialement étiquetée 1, alors on a $k_1(l) = k_0^{1 \rightarrow 0}(l) = 1$, et les autres k -valeurs sont égales à ∞ .

On considère maintenant un sommet quelconque s de l'arbre. Soit $\{s_1, \dots, s_r\}$ l'ensemble de ses enfants. On suppose aussi que pour chaque enfant de s , les neuf k -valeurs sont connues.

Pour chaque enfant s_i , on notera $\min_k(s_i)$ la valeur $\min(k_0(s_i), k_1(s_i), k_2(s_i))$.

Un $k_0(s_i)$ -coup est défini comme une succession de coups sur $G(s_i)$ qui laisse $k_0(s_i)$ pierres, dont une de couleur 0 en s_i . On définit de manière analogue les $k_1(s_i)$ et $k_2(s_i)$ -coups, où s_i est respectivement étiqueté 1 et sans étiquette à la fin. Il en va de même pour les six autres k -valeurs utilisant un joker. Par exemple, un $k_0^{1 \rightarrow 0}(s_i)$ -coup est un $k_0(s_i)$ -coup où le joker $1 \rightarrow 0$ a été utilisé. Enfin, un $\min_k(s_i)$ -coup est une succession de coups qui laisse $\min_k(s_i)$ pierres sur $G(s_i)$.

Dans un premier temps, on supposera que **s est initialement étiqueté 0**. On verra par la suite quelles sont les modifications à apporter au calcul des k -valeurs lorsque s est de l'autre couleur. On détaille à présent le calcul des neuf k -valeurs.

Calcul de $k_0(s)$: Puisque s doit être étiqueté 0 à la fin, cela impose que tous les coups impliquant ce sommet doivent être joués depuis ses enfants vers lui-même. Par ailleurs, ces coups sont une alternance de coups noirs et

blancs, dont l'ordre n'a pas d'importance.

Un algorithme naïf pour calculer $k_0(s)$ serait le suivant: dans un premier temps, on laisse le moins de pierres possible sur chaque sous-arbre enfant (cela revient à ne jouer que des $\min_k(s_i)$ -coups sur chaque sous-arbre $G(s_i)$). Ensuite, s'il reste des enfants s_i qui portent des pierres, on joue depuis ces enfants vers s en alternant coups noirs et blancs jusqu'à épuisement d'une des deux couleurs, et en prenant soin de laisser s de couleur 0 à la fin.

Cependant, une stratégie "moins optimale" a tout intérêt à être appliquée sur certains sous-arbres $G(s_i)$, de sorte à augmenter le nombre de captures des enfants vers s . L'objectif est donc de déterminer sur quels sous-arbres $G(s_i)$ il faut appliquer la stratégie optimale (c.à.d. celle qui laisse $\min_k(s_i)$ pierres), et sur quels autres il est préférable de laisser plus de pierres, qui serviront plus tard à capturer la pierre située en s . Pour répondre à cette question, nous allons construire une partition de l'ensemble des enfants s_i . Neuf groupes sont créés, en fonction des k-valeurs de chacun des s_i .

- Groupe 1: $\{s_i : k_2(s_i) + 1 < k_0(s_i) \text{ et } k_2(s_i) + 1 < k_1(s_i)\}$
- Groupe 2: $\{s_i : k_0(s_i) = k_1(s_i) = k_2(s_i) + 1\}$
- Groupe 3: $\{s_i : k_0(s_i) + 1 \leq k_1(s_i) \text{ et } k_0(s_i) = k_2(s_i) + 1\}$
- Groupe 4: $\{s_i : k_1(s_i) + 1 \leq k_0(s_i) \text{ et } k_1(s_i) = k_2(s_i) + 1\}$
- Groupe 5: $\{s_i : k_0(s_i) = k_1(s_i) \leq k_2(s_i)\}$
- Groupe 6: $\{s_i : k_0(s_i) + 1 < k_1(s_i) \text{ et } k_0(s_i) \leq k_2(s_i)\}$
- Groupe 7: $\{s_i : k_0(s_i) + 1 = k_1(s_i) \text{ et } k_0(s_i) \leq k_2(s_i)\}$
- Groupe 8: $\{s_i : k_1(s_i) + 1 < k_0(s_i) \text{ et } k_1(s_i) \leq k_2(s_i)\}$
- Groupe 9: $\{s_i : k_1(s_i) + 1 = k_0(s_i) \text{ et } k_1(s_i) \leq k_2(s_i)\}$

On décrit maintenant les caractéristiques de chaque groupe, ainsi que les raisons qui expliquent une telle partition.

- Groupe 1: la distance entre $k_2(s_i)$ et les deux autres k-valeurs est supérieure ou égale à 2. Sur les sous-arbres $G(s_i)$ associés, on ne jouera que des $k_2(s_i)$ -coups. Les deux autres types de coups ne sont pas suffisamment intéressants, même s'ils permettraient de laisser le sommet s_i étiqueté. Montrons-le:
Supposons qu'un $k_0(s_i)$ -coup soit préférable à un $k_2(s_i)$ -coup. Puisque $k_2(s_i) < k_0(s_i)$, une condition nécessaire pour qu'un tel coup laisse moins de pierres à la fin est que la pierre en s_i capture s . Puisque l'ordre des coups allant des sommets enfants vers s importe peu, on suppose que le coup de s_i vers s est le dernier. Notons que l'avant dernier coup est celui d'un certain enfant s_j étiqueté 1 vers s . Avant de jouer les deux derniers coups, on considère le nombre k' de pierres restantes sur le sous-arbre

$G(s) \setminus (G(s_i) \cup \{s, s_j\})$. Le nombre de pierres restantes sur l'ensemble du graphe vaut alors $k' + k_0(s_i)$. Supposons maintenant qu'on joue un $k_2(s_i)$ -coup sur $G(s_i)$, et qu'on joue de la même façon que précédemment sur $G(s) \setminus (G(s_i) \cup \{s, s_j\})$. Le coup de s_j vers s n'est pas joué. Le nombre de pierres restantes vaut alors $k' + k_2(s_i) + 2$.

Puisque $k_2(s_i) + 1 < k_0(s_i)$, on vient donc de montrer qu'un $k_0(s_i)$ -coup laisse au moins le même nombre de pierres qu'un $k_2(s_i)$ -coup. Par une preuve similaire, on obtient le même résultat pour un $k_1(s_i)$ -coup (il suffit d'inverser l'ordre des deux derniers coups vers s).

Plus généralement, on prouve le résultat suivant de la même façon: quand la différence entre deux k -valeurs d'un sommet enfant s_i est supérieure ou égale à deux, la plus grande des deux k -valeurs ne sera pas jouée comme un k -coup sur $G(s_i)$ dans la suite de coups optimale. Quand l'écart entre deux k -valeurs est égal à 1, alors les deux types de k -coups peuvent être joués, avec toutefois une préférence pour celui associé à la k -valeur minimale. Ce résultat explique comment la partition a été construite, et justifie ce qui va être dit sur les huit prochains groupes.

- Groupe 2: $\min_k(s_i) = k_2(s_i)$, mais des $k_0(s_i)$ - et $k_1(s_i)$ -coups laissent seulement une pierre de plus qu'un $k_2(s_i)$ -coup. Ces types de coups peuvent être considérés si besoin est.
- Groupe 3: $\min_k(s_i) = k_2(s_i)$, mais des $k_0(s_i)$ -coups peuvent être joués si besoin est. Les $k_1(s_i)$ -coups sont trop coûteux (écart avec $k_2(s_i)$ supérieur ou égal à 2).
- Groupe 4: $\min_k(s_i) = k_2(s_i)$, mais des $k_1(s_i)$ -coups peuvent être joués si besoin est. Les $k_0(s_i)$ -coups sont trop coûteux.
- Groupe 5: $\min_k(s_i) = k_0(s_i) = k_1(s_i)$, et on choisit de jouer un $k_0(s_i)$ - ou un $k_1(s_i)$ -coup. Ces deux types de coups laissent en effet le même nombre de pierres sur $G(s_i)$. Le choix se fera en fonction des couleurs finales des autres enfants de s . Notons que pour ce groupe et les suivants, $k_2(s_i)$ peut éventuellement être égal aux deux autres k -valeurs, mais puisqu'on a le choix, il est préférable de laisser une pierre en s_i (qui pourra éventuellement être réutilisable pour capturer s).
- Groupe 6: $\min_k(s_i) = k_0(s_i)$ et on jouera des $k_0(s_i)$ -coups. Les autres types de coups sont trop coûteux pour être choisis.
- Groupe 7: $\min_k(s_i) = k_0(s_i)$. Même si on aura une préférence pour les $k_0(s_i)$ -coups, des $k_1(s_i)$ -coups pourront être utilisés si on a besoin d'une pierre de couleur 1 en s_i .
- Groupe 8: $\min_k(s_i) = k_1(s_i)$ et on jouera des $k_1(s_i)$ -coups. Les

autres types de coups sont trop coûteux pour être choisis.

- Groupe 9: $\min_k(s_i) = k_1(s_i)$. Même si on aura une préférence pour les $k_1(s_i)$ -coups, des $k_0(s_i)$ -coups pourront être utilisés si on a besoin d'une pierre de couleur 0 en s_i .

Pour les sommets appartenant aux groupes 1, 6 ou 8, on sait donc comment jouer sur les sous-arbres $G(s_i)$ associés. Pour les sommets des autres groupes, on doit maintenant décider dans quels cas un $\min_k(s_i)$ -coup reste le meilleur coup jouable. Et dans le cas contraire, par quel type de coup faut-il le substituer?

Puisque l'ordre des coups des enfants vers s n'importe pas, et qu'il s'agit d'une alternance de coups noirs et blancs, on peut les considérer comme un ensemble de paires de coups consécutifs. On choisit une telle paire de coups: s_p vers s , puis s_q vers s . Sans restreindre la généralité, on suppose qu'on a appliqué un $k_1(s_p)$ -coup sur $G(s_p)$, et un $k_0(s_q)$ -coup sur $G(s_q)$. Nous allons voir quelles sont les conditions sur s_p et s_q pour que cette paire de coups soit intéressante.

Comme on l'a expliqué lors de la description du Groupe 1, il n'est pas intéressant de jouer un k -coup où $k > \min_k(s_i) + 1$. Ceci réduit le nombre de cas à étudier:

- Si $k_1(s_p) = \min_k(s_p)$ et $k_0(s_q) = \min_k(s_q)$, alors cette paire de coups est bien évidemment la moins coûteuse sur le sous-arbre $s \cup G(s_p) \cup G(s_q)$.
- Si $k_1(s_p) = \min_k(s_p) + 1$ et $k_0(s_q) = \min_k(s_q)$, alors il reste à la fin $(k_1(s_p) + k_0(s_q) - 1) = \min_k(s_p) + \min_k(s_q)$ pierres sur le sous-arbre $s \cup G(s_p) \cup G(s_q)$. Si on avait joué un $\min_k(s_p)$ -coup sur $G(s_p)$, alors s n'aurait pas été capturé, et on aurait laissé $\min_k(s_p) + \min_k(s_q) + 1$ sur le même sous-arbre. Jouer un $k_1(s_p)$ -coup est donc ce qu'il y a de mieux à faire dans ce cas-ci.
- Si $k_1(s_p) = \min_k(s_p)$ et $k_0(s_q) = \min_k(s_q) + 1$, alors on capture une pierre de plus en jouant un $k_0(s_q)$ -coup plutôt qu'un $\min_k(s_q)$ -coup (ce cas est le symétrique du précédent).
- Si $k_1(s_p) = \min_k(s_p) + 1$ et $k_0(s_q) = \min_k(s_q) + 1$, alors on laisse $\min_k(s_p) + \min_k(s_q) + 1$ pierres sur le sous-arbre $s \cup G(s_p) \cup G(s_q)$. Il s'agit du même nombre que si l'on avait joué des $\min_k(s_p)$ - et $\min_k(s_q)$ -coups. Les deux façons de jouer sont donc équivalentes, il n'y a pas de préférence.

Notre algorithme consiste maintenant à décider quels enfants vont être destinés à capturer s , en tant que 0- ou 1-coup. On va pour cela construire deux tas de sommets enfants: le premier s'appelle h_0 et contient les enfants s_i qui vont capturer s lorsque s est étiqueté 1. Le second s'appelle h_1 et

contient les enfants qui vont capturer s lorsque s est étiqueté 0. Cela signifie que les sommets s_i de h_0 sont tels que des $k_0(s_i)$ -coups auront été joués sur chaque sous-arbre $G(s_i)$ associé. De même, on aura joué des $k_1(s_i)$ -coups sur les sous-arbres des sommets de h_1 . Les enfants s_i qui n'appartiendront à aucun des deux tas ne captureront pas s , et on aura donc joué des $\min_k(s_i)$ -coups sur les sous-arbres $G(s_i)$ correspondants.

Puisque s est initialement étiqueté 0 et qu'il doit avoir la même étiquette à la fin (je rappelle que nous calculons $k_0(s)$!), cela impose que h_0 et h_1 doivent avoir la même taille. On notera a_0 et a_1 respectivement les tailles de h_0 et h_1 .

Au début, on sait juste que les sommets du groupe 1 n'appartiennent à aucun tas. Pour faciliter l'affectation (ou pas) de chaque sommet s_i à un tas, on leur attribue deux valeurs:

$$\begin{aligned} w(s_i,0) &= \min_k(s_i) - k_0(s_i) + 1 \\ w(s_i,1) &= \min_k(s_i) - k_1(s_i) + 1 \end{aligned}$$

$w(s_i,0)$ est définie comme la différence entre le nombre de pierres restantes sur $s \cup G(s_i)$ quand on joue un $\min_k(s_i)$ -coup seul, et le nombre de pierres restantes quand on joue un $k_0(s_i)$ -coup suivi de la capture de s par s_i (on suppose que s est de couleur 1 à ce moment). $w(s_i,1)$ est définie de manière analogue quand on considère un $k_1(s_i)$ -coup suivi d'une capture de s (étiqueté 0 à ce moment).

On appelle $\mathcal{S}(s_i)$ la stratégie qui consiste à jouer un $\min_k(s_i)$ -coup sur $G(s_i)$, et où s_i ne capture pas s après. $w(s_i,0)$ définit alors le nombre supplémentaire de pierres capturées quand on joue un $k_0(s_i)$ -coup suivi d'une capture de s au lieu de la $\mathcal{S}(s_i)$ stratégie. Idem pour $w(s_i,1)$.

Si $w(s_i,0) < 0$ (resp. $w(s_i,1) < 0$), alors s_i n'appartiendra pas au tas h_0 (resp. h_1). En effet, l'écart entre $\min_k(s_i)$ et $k_0(s_i)$ (resp. $k_1(s_i)$) est supérieur ou égal à 2 dans ce cas. Quand la valeur $w(s_i,0)$ est égale à 0 ou 1, il peut être intéressant de jouer un $k_0(s_i)$ -coup (si celui-ci est combiné avec un $k_1(s_j)$ -coup tel que $w(s_j,1) \geq 0$, d'après la description des paires de coups ci-dessus).

Notre algorithme revient donc à construire les deux tas h_0 et h_1 de même taille, et tels que la somme des valeurs des enfants appartenant aux tas soit maximum. Une fois cette opération effectuée, alors on aura une formule pour $k_0(s)$:

$$k_0(s) = \underbrace{1 + \sum_{i=1}^r \min_k(s_i)}_{\text{pierres restantes quand } \mathcal{S} \text{ est utilisée}} - \underbrace{\left(\sum_{s_i \in h_0} w(s_i,0) + \sum_{s_i \in h_1} w(s_i,1) \right)}_{\text{pierres supplémentaires capturées=W}}$$

Dans la suite de la preuve, on dira que la valeur de s_i est $w(s_i,0)$ si s_i

appartient à h_0 , et $w(s_i,1)$ si s_i appartient à h_1 . On notera W la valeur $\sum_{s_i \in h_0} w(s_i,0) + \sum_{s_i \in h_1} w(s_i,1)$.

Voici les valeurs des sommets enfants en fonction du groupe auquel ils appartiennent:

groupe de s_i	$min_k(s_i)$	$w(s_i,0)$	$w(s_i,1)$
1	$k_2(s_i)$	< 0	< 0
2	$k_2(s_i)$	0	0
3	$k_2(s_i)$	0	< 0
4	$k_2(s_i)$	< 0	0
5	$k_0(s_i), k_1(s_i)$	1	1
6	$k_0(s_i)$	1	< 0
7	$k_0(s_i)$	1	0
8	$k_1(s_i)$	< 0	1
9	$k_1(s_i)$	0	1

L'algorithme de construction des tas a lieu en quatre étapes, décrites ci-dessous:

Première étape:

- On met les sommets des groupes 3, 6 et 7 dans h_0 , et ceux des groupes 4, 8 et 9 dans h_1 .
- On répartit les sommets du groupe 5 dans les deux tas, de telle sorte que la différence de taille $|a_0 - a_1|$ soit minimale après cette opération. Si le groupe 2 est vide et que les tas sont de même taille avant de placer le dernier sommet du groupe 5, on le met dans un tas qui contient déjà un sommet de valeur nulle. Si les deux tas contiennent uniquement des sommets de valeur 1, on le place n'importe où.
- On répartit les sommets du groupe 2 dans les deux tas, de sorte à minimiser la différence de taille entre les deux tas.

La première étape consiste à placer chaque sommet dans le tas pour lequel sa valeur est la plus élevée. Les sommets des groupes 2 et 5 ont la même valeur dans chacun des tas et peuvent ainsi être placés où l'on veut. On choisit donc une répartition qui minimise la différence de taille des tas. Si les deux tas ont la même taille après la première étape, alors on a un algorithme optimal, puisque W a la plus grande valeur atteignable. Si les tas n'ont pas la même taille, alors la seule façon de réduire la différence $|a_0 - a_1|$ sans diminuer W consiste à retirer des sommets de valeur nulle du tas le plus grand. Il s'agit de l'objet de la deuxième étape, et cela explique la condition qui est apparue quand on a réparti les sommets du groupe 5.

Deuxième étape (si $a_0 \neq a_1$): On diminue la taille du plus grand tas en lui ôtant indifféremment des sommets des groupes 2, 3 et 4, jusqu'à atteindre la taille du plus petit tas.

Puisque les sommets des groupes 2, 3 et 4 ont une valeur nulle, on ne change pas W en les retirant des tas. W reste encore la plus grande valeur atteignable après cette opération. Si les tas ont la même taille après cette étape, alors l'algorithme est clairement optimal. Si les tailles des tas sont encore différentes, cela signifie que le plus grand tas ne contient que des sommets de valeur 1. Il existe alors deux façons de réduire l'écart entre a_0 et a_1 : soit on continue d'enlever des sommets appartenant au plus grand tas, soit on déplace des sommets du plus grand tas pour les mettre dans le plus petit. La seconde opération est la plus économique mais ne peut cependant concerner que des sommets des groupes 7 et 9. En effet, quand on décide d'enlever un sommet du plus grand tas, W diminue de 1 et il en est de même pour l'écart entre les deux tas. En revanche, quand on déplace un sommet du groupe 7 de h_0 vers h_1 , ou un sommet du groupe 9 de h_1 vers h_0 , W diminue de 1 et l'écart entre les deux tas diminue de 2. La troisième étape de l'algorithme prend donc en compte cette considération.

Troisième étape (si $a_0 \neq a_1$): On suppose que $a_0 > a_1$.

- Tant que $|a_0 - a_1| > 1$ et qu'il reste des sommets du groupe 7 dans h_0 , on déplace un tel sommet vers h_1 (dans le cas où $a_1 > a_0$, on déplace des sommets du groupe 9 de h_1 vers h_0).
- Si $|a_0 - a_1| = 1$, alors on enlève n'importe quel sommet du plus grand tas.

Si la différence entre les deux tas est nulle après les déplacements des sommets des groupes 7 ou 9, alors l'algorithme est optimal après cette opération (il n'existait que deux façons d'avoir des tas de même taille, et on a choisi la meilleure). Si la différence est égale à 1, alors un déplacement de sommet n'est plus envisageable pour des questions de parité. On opte donc pour la seconde solution, qui consiste à retirer un sommet du plus grand tas.

Si la différence de taille $|a_0 - a_1|$ est supérieure à 1 après cette opération, cela signifie que tous les sommets des groupes 7 ou 9 ont été déplacés. Dans ce cas, on n'a pas d'autre choix que d'enlever des sommets du plus grand tas:

Quatrième étape (si $a_0 \neq a_1$): On enlève des sommets du plus grand tas jusqu'à ce que celui-ci atteigne la taille du plus petit.

Après cette dernière étape, on est sûr que W est maximum avec la contrainte que les deux tas ont la même taille. Notons qu'il est possible que les deux tas soient vides à la fin de cet algorithme.

Calcul de $k_1(s)$:

On cherche la valeur de réductibilité de $G(s)$ quand s doit être étiqueté 1 à la fin. Si pour chaque enfant s_i , on a $k_1(s_i) = \infty$, alors il n'est clairement pas possible de finir avec la bonne étiquette en s (n'oublions pas que s est de couleur 0 au départ). Alors on a $k_1(s) = \infty$. Dans le cas contraire, on peut appliquer l'algorithme de calcul de $k_0(s)$ en lui apportant quelques modifications: les tas h_0 et h_1 doivent vérifier l'écart de taille $a_1 - a_0 = 1$. s doit en effet être capturé une fois de plus par un 1 que par un 0. Voici donc le nouvel algorithme de construction des tas:

Première étape:

- On met les sommets des groupes 3, 6 et 7 dans h_0 , et ceux des groupes 4, 8 et 9 dans h_1 .
- On répartit les sommets du groupe 5 dans les deux tas, de telle sorte que la différence de taille $|a_1 - a_0 - 1|$ soit minimale après cette opération. Si le groupe 2 est vide et que la différence $|a_1 - a_0 - 1|$ est nulle avant de placer le dernier sommet, on le met dans un tas qui contient déjà un sommet de valeur nulle. Si les deux tas contiennent uniquement des sommets de valeur 1, on le place n'importe où.
- On répartit les sommets du groupe 2 dans les deux tas, de sorte à minimiser la différence de taille $|a_1 - a_0 - 1|$.

Deuxième étape (si $a_0 \neq a_1 - 1$): On diminue la taille du plus grand tas en lui ôtant indifféremment des sommets des groupes 2, 3 et 4, jusqu'à atteindre une différence $(a_1 - a_0)$ égale à 1. Dans le cas où h_0 et h_1 ont la même taille, on enlève un sommet appartenant au groupe 2, 3 ou 4 du tas h_0 .

Troisième étape (si $a_0 \neq a_1 - 1$): On suppose que $a_0 > a_1 - 1$.

- Tant que $|a_1 - a_0 - 1| > 1$ et qu'il reste des sommets du groupe 7 dans h_0 , on déplace un tel sommet vers h_1 (dans le cas où $a_1 - 1 > a_0$, on déplace des sommets du groupe 9 de h_1 vers h_0).
- Si $|a_1 - a_0 - 1| = 1$, alors on enlève n'importe quel sommet du plus grand tas (ou de h_0 si les deux tas ont la même taille).

Quatrième étape (si $a_0 \neq a_1 - 1$): On enlève des sommets du plus grand tas jusqu'à atteindre une différence $(a_1 - a_0)$ égale à 1. Si les tas ont la même taille, on enlève n'importe quel sommet de h_0 .

Après ces quatre étapes, il se peut quand même que les deux tas soient vides. Cela signifie que pour chaque enfant s_i , le $k_1(s_i)$ -coup associé est trop coûteux. Cependant, s doit être étiqueté 1 à la fin. Autrement dit: il faut jouer un $k_1(s_i)$ -coup sur un des sous-arbres $G(s_i)$, même si la valeur $w(s_i, 1)$

est négative. Afin de minimiser le nombre de pierres restantes, il suffit de choisir un enfant s_m qui minimise $w(s_i,1)$ pour tout i . s_m est alors ajouté au tas h_1 .

L'algorithme est maintenant achevé et donne une formule pour le calcul de $k_1(s)$:

$$k_1(s) = 1 + \sum_{i=1}^r \min_k(s_i) - \sum_{v \in h_0} w(s_i,0) - \sum_{v \in h_1} w(s_i,1)$$

Calcul de $k_0^{0 \rightarrow 1}(s)$: Le joker $0 \rightarrow 1$ peut être considéré comme un nouvel enfant de s , qu'on appellera s_j , de couleur 1. Il est toutefois différent des autres enfants, puisque la capture de s par s_j doit nécessairement avoir lieu.

Puisque l'ordre de coups des enfants vers s n'a pas d'importance, et puisque s est étiqueté 0 initialement, on peut alors choisir de jouer immédiatement de s_j vers s . Et le calcul de $k_0^{0 \rightarrow 1}(s)$ revient à celui de $k_0(s)$ lorsque s est initialement étiqueté 1.

Calcul de $k_0^{1 \rightarrow 0}(s)$: Le joker $1 \rightarrow 0$ est considéré comme un nouvel enfant s_j , qui doit nécessairement capturer s . Son groupe d'appartenance est le groupe 6 (puisque'il vérifie $k_0(s_j) = 1$, et $k_1(s_j) = k_2(s_j) = \infty$). On applique maintenant l'algorithme de calcul de $k_0(s)$ sur le graphe $G(s) \cup s_j$, en gardant le sommet s_j dans le tas h_0 tant que c'est possible. Si s_j appartient au tas h_0 à la fin de l'algorithme, alors cela signifie que le joker est bien utilisé. Dans ce cas, $k_0^{1 \rightarrow 0}(s)$ est égal à $k_0(s)$ sur le graphe $G(s) \cup s_j$.

En revanche, si s_j a été retiré de h_0 pendant l'algorithme des tas, cela signifie que les deux tas sont vides à la fin (les sommets du groupe 6 sont retirés dans la quatrième étape de l'algorithme). Puisque le joker doit absolument être joué, on replace s_j dans h_0 et on choisit d'ajouter à h_1 un enfant s_m qui minimise $w(s_i,1)$ pour tout i . Si tous les sommets enfants s_i vérifient $k_1(s_i) = \infty$, alors $k_0^{1 \rightarrow 0}(s) = \infty$. Sinon on a:

$$k_0^{1 \rightarrow 0}(s) = 1 + \sum_{i=1}^r \min_k(s_i) - w(s_m,1)$$

Calcul de $k_1^{0 \rightarrow 1}(s)$: Similaire au calcul de $k_0^{0 \rightarrow 1}(s)$. Cette valeur est égale à $k_1(s)$ quand s est initialement étiqueté 1.

Calcul de $k_1^{1 \rightarrow 0}(s)$: Similaire au calcul de $k_0^{1 \rightarrow 0}(s)$. A une petite différence près: si le sommet "joker" s_j a été supprimé du tas h_0 à la fin de l'algorithme, cela signifie que le tas h_1 est de taille 0 ou 1. S'il est de taille 1, alors on procède de manière analogue au calcul de $k_0^{1 \rightarrow 0}(s)$. S'il est de taille 0, il faut rajouter deux sommets s_m et s_n au tas h_1 . Ceux-ci sont choisis de sorte à minimiser la valeur $w(s_i,1)$ pour tout i . S'il n'existe pas deux sommets s_m et s_n qui satisfont $k_1(s_m) \neq \infty$ et $k_1(s_n) \neq \infty$, alors $k_1^{1 \rightarrow 0}(s) = \infty$.

Calcul de $k_2(s)$: $k_2(s)$ est la valeur de réductibilité de $G(s)$ quand s n'est pas étiqueté à la fin. Comme s est de couleur 0 au départ, $k_2(s) = \infty$ s'il n'existe aucun enfant s_i tel que $k_1(s_i) \neq \infty$. Sinon, les coups impliquant s sont joués depuis les enfants vers s , à l'exception du dernier, qui est joué depuis s vers un certain sommet s_e . On suppose que ce sommet s_e est fixé. La stratégie consiste alors à jouer optimalement sur $G(s) \setminus G(s_e)$, en n'oubliant pas de laisser une pierre en s à la fin. Puis on finit par jouer optimalement sur $G(s_e)$, en sachant qu'à tout moment, s peut (et doit) capturer s_e .

Tout d'abord, le jeu optimal sur $G(s) \setminus G(s_e)$ consiste à déterminer les valeurs $k_0(s)$ et $k_1(s)$ sur le graphe $G(s) \setminus G(s_e)$. On notera ces valeurs $k_0(s, V(s) \setminus V(s_e))$ et $k_1(s, V(s) \setminus V(s_e))$. Le jeu optimal sur $G(s_e)$ où s_e est capturé par s à un moment donné revient à chercher le jeu optimal lorsqu'un joker est utilisé en s_e . Le nombre minimum de pierres restantes sur $G(s)$ vaudra alors:

$$\begin{aligned} & \min(k_0(s, V(s) \setminus V(s_e)) + \min_{i=0,1,2}(k_i^{1 \rightarrow 0}(s_e)), \\ & k_1(s, V(s) \setminus V(s_e)) + \min_{i=0,1,2}(k_i^{0 \rightarrow 1}(s_e))) - 1 \end{aligned}$$

On considère maintenant chaque enfant comme un possible sommet s_e , et on prend la valeur minimum pour obtenir $k_2(s)$:

$$\begin{aligned} k_2(s) &= \min_{s_i}(\min(k_0(s, V(s) \setminus V(s_i)) + \min_{i=0,1,2}(k_i^{1 \rightarrow 0}(s_i)), \\ & k_1(s, V(s) \setminus V(s_i)) + \min_{i=0,1,2}(k_i^{0 \rightarrow 1}(s_i)))) - 1 \end{aligned}$$

Calcul de $k_2^{0 \rightarrow 1}(s)$: Comme s est étiqueté 0 au départ, on joue le joker immédiatement. Par conséquent, $k_2^{0 \rightarrow 1}(s)$ est égal à $k_2(s)$ lorsque s est initialement de couleur 1.

Calcul de $k_2^{1 \rightarrow 0}(s)$: Cette valeur est égale à ∞ si le joker ne peut pas être utilisé, ou s'il n'est pas possible de trouver un enfant s_e vers qui jouer. Cela signifie que $k_2^{1 \rightarrow 0}(s) = \infty$ s'il n'existe pas deux sommets distincts s_i et s_j tels que $k_1(s_i) \neq \infty$ et $k_1(s_j) \neq \infty$. Dans les autres cas, on utilise l'algorithme qui calcule $k_2(s)$. Puisque le joker doit être utilisé avant que s ne capture s_e , il ne peut apparaître que lors de la suite de coups optimale sur $G(s) \setminus G(s_e)$. Au lieu de calculer $k_0(s, V(s) \setminus V(s_e))$ et $k_1(s, V(s) \setminus V(s_e))$, on calcule plutôt $k_0^{1 \rightarrow 0}(s, V(s) \setminus V(s_e))$ et $k_1^{1 \rightarrow 0}(s, V(s) \setminus V(s_e))$. Et alors:

$$\begin{aligned} k_2^{1 \rightarrow 0}(s) &= \min_{s_i}(\min(k_0^{1 \rightarrow 0}(s, V(s) \setminus V(s_i)) + \min_{i=0,1,2}(k_i^{1 \rightarrow 0}(s_i)), \\ & k_1^{1 \rightarrow 0}(s, V(s) \setminus V(s_i)) + \min_{i=0,1,2}(k_i^{0 \rightarrow 1}(s_i)))) - 1 \end{aligned}$$

On suppose maintenant que s est initialement de couleur 1. Le calcul de $k_0(s)$ est alors similaire à celui de $k_1(s)$ lorsque s est étiqueté 0 au départ (l'algorithme des tas doit juste satisfaire $(a_0 - a_1) = 1$). De la même façon, $k_1(s)$ se calcule comme $k_0(s)$ lorsque s est de couleur 0 au départ. De la même manière, les k -valeurs avec un joker se calculent comme les k -valeurs qui ont le joker et l'étiquette finale opposés, lorsque s est de couleur 0 au départ. (exemple: $k_1^{0 \rightarrow 1}(s)$ quand s est de couleur 1 se calcule comme $k_0^{1 \rightarrow 0}(s)$ quand s est de couleur 0). Le calcul de $k_2(s)$ ne dépend pas de la couleur initiale de s .

Cet algorithme calcule la valeur de réductibilité de l'arbre en temps quadratique. Pour chaque sommet s , on ne parcourt que la liste de ses enfants. Les k -valeurs $k_0(s)$, $k_1(s)$, $k_0^{1 \rightarrow 0}(s)$, $k_0^{0 \rightarrow 1}(s)$, $k_1^{1 \rightarrow 0}(s)$, $k_1^{0 \rightarrow 1}(s)$ sont calculées en temps linéaire $O(|E|)$. La partition en groupes et l'algorithme des tas sont en effet linéaires. Le calcul des trois autres k -valeurs demande de répéter l'algorithme général pour chaque sommet s_e , d'où le résultat.

□

Comme annoncé en préambule de la preuve ci-dessus, nous détaillons ici l'exécution de l'algorithme sur une configuration de taille "raisonnable" (cf. Figure 3.3).

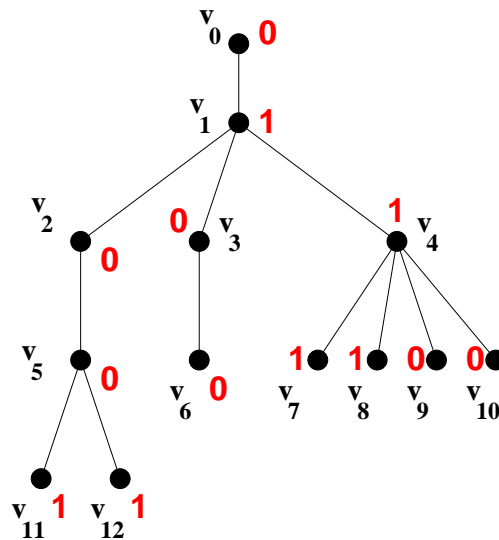


FIG. 3.3 – Un exemple d'arbre de jeu

Pour chacun des treize sommets de cet arbre, on calcule les neuf k -valeurs définies par l'algorithme. Les résultats sont présentés dans le tableau

ci-dessous:

	k_0	k_1	k_2	$k_0^{0 \rightarrow 1}$	$k_0^{1 \rightarrow 0}$	$k_1^{0 \rightarrow 1}$	$k_1^{1 \rightarrow 0}$	$k_2^{0 \rightarrow 1}$	$k_2^{1 \rightarrow 0}$
v_{12}	∞	1	∞	∞	1	∞	∞	∞	∞
v_{11}	∞	1	∞	∞	1	∞	∞	∞	∞
v_{10}	1	∞	∞	∞	∞	1	∞	∞	∞
v_9	1	∞	∞	∞	∞	1	∞	∞	∞
v_8	∞	1	∞	∞	1	∞	∞	∞	∞
v_7	∞	1	∞	∞	1	∞	∞	∞	∞
v_6	1	∞	∞	∞	∞	1	∞	∞	∞
v_5	3	2	2	∞	2	3	1	∞	1
v_4	2	1	1	3	1	2	2	2	1
v_3	2	∞	∞	1	∞	2	∞	1	∞
v_2	3	2	1	3	2	3	∞	3	∞
v_1	4	3	3	4	3	4	3	3	2
v_0	3	3	2						

Les sommets v_6 à v_{12} sont des feuilles. Le calcul de leurs k -valeurs est immédiat. En ce qui concerne les autres sommets, on ne va pas détailler ici tous les calculs, mais seulement ceux du sommet v_1 , qui semble être le cas le plus pertinent.

- $k_0(v_1)$. Les enfants du sommet v_1 sont v_2 , v_3 et v_4 . Puisque les k -valeurs sont connues pour chacun de ces trois sommets enfants, on peut affirmer que v_2 appartient au groupe 4, v_3 au groupe 6, et v_4 au groupe 9. Les autres groupes sont vides. Les valeurs de chacun de ces sommets sont les suivantes: $w(v_2,0) = -1$, $w(v_2,1) = 0$, $w(v_3,0) = 1$, $w(v_3,1) = \infty$, $w(v_4,0) = 0$ et $w(v_4,1) = 1$. La première étape de l'algorithme des tas nous amène à placer v_3 dans le tas h_0 , tandis que v_2 et v_4 sont mis dans h_1 . Comme v_1 est étiqueté 1 au départ, la différence de taille ($a_0 - a_1$) doit être égale à 1, ce qui n'est pas encore le cas. La deuxième étape supprime des sommets des groupes 2, 3 ou 4 pour atteindre la bonne différence de taille. Dans notre cas, seul le sommet v_2 est retiré de h_1 . Les deux tas ont maintenant la même taille, et d'après la troisième étape, on enlève n'importe quel sommet de h_1 pour conclure. Il nous reste donc le tas h_0 qui contient v_3 , alors que h_1 est vide. La formule de calcul donne finalement:

$$k_0(v_1) = 1 + \min_k(v_2) + \min_k(v_3) + \min_k(v_4) - w(v_3,0) = 4$$

- $k_1(v_1)$. L'algorithme est identique au précédent, mis à part que les tailles des tas doivent être identiques. L'algorithme des tas s'exécute de la même façon que précédemment, et s'arrête après la deuxième étape avec v_3 dans h_0 et v_4 dans h_1 . Et finalement:

$$k_1(v_1) = 1 + \min_k(v_2) + \min_k(v_3) + \min_k(v_4) - w(v_3,0) - w(v_4,1)$$

$$= 3$$

- $k_0^{1 \rightarrow 0}(v_1)$ et $k_1^{1 \rightarrow 0}(v_1)$. Calcul identique aux précédents, sauf que v_1 est initialement étiqueté 0 au lieu de 1. La différence ($a_0 - a_1$) doit être égale à 0 quand on calcule $k_0^{1 \rightarrow 0}(v_1)$, et à -1 quand on calcule $k_1^{1 \rightarrow 0}(v_1)$. Ce qui donne:

$$k_0^{1 \rightarrow 0}(v_1) = 1 + \min_k(v_2) + \min_k(v_3) + \min_k(v_4) - w(v_3, 0) - w(v_4, 1)$$

$$= 3$$

$$k_1^{1 \rightarrow 0}(v_1) = 1 + \min_k(v_2) + \min_k(v_3) + \min_k(v_4) - w(v_2, 1) - w(v_3, 0) - w(v_4, 1) = 3$$

- $k_0^{0 \rightarrow 1}(v_1)$. Le joker $0 \rightarrow 1$ est considéré comme un nouvel enfant v_j appartenant au groupe 8. Après la première étape de l'algorithme des tas, h_0 contient le sommet v_3 tandis que h_1 contient v_2, v_4 et v_j . On demande une différence $a_0 - a_1$ égale à 1. Puisqu'il appartient au groupe 4, v_2 est retiré après la deuxième étape. Dans la troisième étape, on déplace v_4 (qui appartient au groupe 9) de h_1 vers h_0 . Cette opération conduit à la bonne différence de taille et conclut l'algorithme. On obtient alors:

$$k_0^{0 \rightarrow 1}(v_1) = 1 + \min_k(v_2) + \min_k(v_3) + \min_k(v_4) - w(v_4, 0) - w(v_3, 0)$$

$$= 4.$$

- $k_1^{0 \rightarrow 1}(v_1)$. Similaire au cas précédent, sauf que les deux tas doivent être de même taille. L'algorithme des tas enlève v_2 et v_4 du tas h_1 , laisse v_3 dans h_0 et v_j dans h_1 . Ce qui donne:

$$k_1^{0 \rightarrow 1}(v_1) = 1 + \min_k(v_2) + \min_k(v_3) + \min_k(v_4) - w(v_3, 0) = 4.$$

- $k_2(v_1)$. On doit jouer un coup de s vers un de ses enfants s_e . On fixe tout d'abord $s_e = v_4$. On doit ensuite calculer $k_0(v_1, V(v_1) \setminus V(v_4))$ et $k_1(v_1, V(v_1) \setminus V(v_4))$ grâce à l'algorithme des tas. On ne détaille pas ce calcul ici. Les résultats sont les suivants:

$$k_0(v_1, V(v_1) \setminus V(v_4)) = k_1(v_1, V(v_1) \setminus V(v_4)) = 3. \text{ La formule (page) donne le nombre minimum de pierres restantes si } v_e = v_4:$$

$$\min(3 + \min_{i=0,1,2} (k_i^{1 \rightarrow 0}(v_4)), 3 + \min_{i=0,1,2} (k_i^{0 \rightarrow 1}(v_4))) - 1 = 3$$

Le même calcul doit être effectué pour $s_e = v_2$ et $s_e = v_3$. On ne décrit pas le détail des opérations. La valeur minimum est atteinte pour $s_e = v_4$, et ainsi $k_2(v_1) = 3$.

- $k_2^{1 \rightarrow 0}(v_1)$. Calcul similaire au précédent, sauf que v_1 est initialement étiqueté 0 au lieu de 1 (le joker étant joué immédiatement).
- $k_2^{0 \rightarrow 1}(v_1)$. Là encore, similaire au cas précédent, sauf que l'on calcule $k_0^{0 \rightarrow 1}(v_1, V(v_1) \setminus V(s_e))$ et $k_1^{0 \rightarrow 1}(v_1, V(v_1) \setminus V(s_e))$ au lieu de $k_0(v_1, V(v_1) \setminus V(s_e))$ et $k_1(v_1, V(v_1) \setminus V(s_e))$.

Puisque l'arbre est enraciné en v_0 , il suffit de calculer $k_0(v_0)$, $k_1(v_0)$ et $k_2(v_0)$ pour conclure. La valeur de réductibilité de la configuration est le minimum de ces trois k -valeurs, en l'occurrence 2.

Chapitre 4

Caractérisation de la valeur de réductibilité sur certains graphes

4.1 Solitaire Clobber 2 sur des cliques et des produits de cliques

4.1.1 Approche et définitions

Les graphes que nous avons étudiés jusqu'à présent (chaînes, cycles, arbres) ont peu d'arêtes. Quand on choisit une pierre, le nombre de possibilités pour une capture est ainsi très limité. Ceci induit régulièrement des blocages dans le jeu, et les valeurs de réductibilité des configurations associées sont alors élevées. On s'intéresse maintenant à des graphes dont la valeur de réductibilité serait une constante de faible valeur, et notamment égale à 1. On se dit alors que des graphes avec un ratio $|E|/|V|$ plus élevé devrait nous faciliter la tâche. Notre première idée sera donc de considérer le jeu sur des cliques. On peut voir facilement que toute configuration sur une clique (du moment qu'il existe au moins une pierre de chaque couleur) est 1-réductible. On s'est alors posé la question des produits de cliques.

On se figure souvent un produit de cliques $K_p \square K_q$ par une succession de p copies horizontales de K_q , et de q copies verticales de K_p . De ce fait, on représentera le produit $K_p \square K_q$ par le schéma suivant:

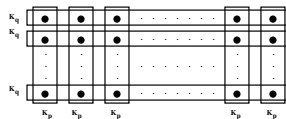


FIG. 4.1 – Le produit $K_p \square K_q$

En jouant sommairement, il nous alors semblé que toute configuration (exceptée celle avec une seule couleur de pierre) sur le produit $K_p \square K_q$ est 1-réductible. Une preuve naturelle de ce résultat serait une induction sur une des deux tailles, disons p par exemple. En supposant que le résultat est vrai sur un produit $K_{p-1} \square K_q$, il suffirait alors d'enlever toutes les pierres d'une copie quelconque de K_q . Puisque les cliques sont 1-réductibles, on pourrait réduire une certaine clique K_q à une seule pierre, et celle-ci n'aurait plus qu'à capturer une pierre d'une autre copie de K_q . Mais tant qu'on ne connaît pas la couleur de cette pierre restante, ainsi que le sommet sur lequel elle se trouve, on ne sait pas s'il est possible de jouer vers une autre copie de K_q . On sent alors qu'on a besoin de faire intervenir une autre notion: la *réductibilité forte*. On dira qu'un graphe est fortement 1-réductible si on peut laisser la dernière pierre de la couleur qu'on veut, et sur n'importe quel sommet, quelle que soit la disposition initiales des pierres (sous certaines conditions cependant). Puisque les cliques sont clairement 1-réductibles, on s'est alors attaché à montrer qu'elles le sont fortement. Ceci pour nous aider à répondre au problème des produits de cliques.

Les définitions suivantes nous seront utiles dans notre étude:

Etant donné une configuration de jeu C sur un graphe G , on dit qu'une couleur $c \in \{0,1\}$ est *rare* sur un sous-graphe S de G s'il existe un unique sommet $v \in S$ tel que v porte la couleur c . Au contraire, c est dite *commune* s'il existe au moins deux sommets de S de couleur c . Une configuration est dite *monochrome* si tous les sommets ont la même couleur. Si v est un sommet de G , on notera $c(v)$ la couleur de ce sommet. Si c est une couleur, on notera \bar{c} la couleur opposée.

On dit qu'un graphe G est *fortement 1-réductible* si: pour tout sommet v , pour toute disposition des pierres sur G telle que $G \setminus v$ n'est pas monochrome, pour toute couleur $c \in \{0,1\}$, il existe une façon de jouer qui laisse une seule pierre de couleur c sur le sommet v .

Soient une configuration C sur un graphe G fortement 1-réductible, c une couleur quelconque, et v un sommet de G tel que $G \setminus v$ n'est pas monochrome. On appellera alors $(1,v,c)$ -*réduction* une suite de coups qui laisse une seule pierre de couleur c sur le sommet v .

4.1.2 Les résultats

Proposition 5. *Pour tout $n \geq 3$, la clique K_n est fortement 1-réductible.*

Notons que pour $n < 3$, les cliques sont clairement 1-réductibles.

Preuve. Soit C une configuration de jeu non monochrome sur K_n ($n \geq 3$). Soit v le sommet sur lequel on souhaite terminer, et c sa couleur finale. On

suppose tout d'abord qu'il n'existe aucune couleur rare (donc $K_n \setminus v$ n'est pas monochrome). On distingue deux cas:

- * $c = c(v)$. Par hypothèse, il existe un sommet w de couleur $\overline{c(v)}$. Puisque $c(v)$ et $c(w)$ ne sont pas rares, il existe deux autres sommets v' et w' tels que $c(v') = c(v)$ et $c(w') = c(w)$. La succession de pierres qui conduit à la $(1, v, c)$ -réduction est la suivante: w capture v , w' capture tous les sommets de couleur $c(v)$ excepté v' , et enfin v' capture toutes les sommets de couleur $\overline{c(v)}$ en terminant par v .
- * $c = \overline{c(v)}$. Comme précédemment, il existe w de couleur $\overline{c(v)}$ et v' de couleur $c(v)$. v' capture tous les sommets de couleur $\overline{c(v)}$ excepté w . Puis w capture tous les sommets étiquetés $c(v)$ en terminant par v .

On suppose maintenant qu'il existe un sommet v_r tel que $c(v_r)$ soit rare. Alors nécessairement $v \neq v_r$ pour respecter les conditions de réductibilité. Si $c = c(v_r)$, il suffit que v_r capture tous les sommets en finissant par v . Si $c = \overline{c(v_r)}$, alors v_r capture tous les sommets sauf un (appelons-le $v' \neq v$) en terminant par v . Enfin v' capture v pour conclure. \square

Maintenant que le cas des cliques est réglé, nous nous intéressons au produit cartésien de deux cliques $K_p \square K_q$. Nous montrons que si la configuration n'est pas monochrome, alors elle est 1-réductible.

Théorème 17. *Soient $p > 2$ et $q \geq 2$. Toute configuration non monochrome sur un graphe $K_p \square K_q$ est 1-réductible.*

D'après ce théorème, le cas du carré $K_2 \square K_2$ semble différent. En effet, il y existe une configuration 2-réductible, à savoir: $\bullet \circ$. Il s'agit de l'unique configuration non monochrome sur un produit de cliques qui n'est pas 1-réductible.

Preuve. On ne considèrera dans cette preuve que des configurations non monochromes. Soient $p > 2$ et $q \geq 2$. D'après la proposition 5, le produit $K_p \square K_1$ est 1-réductible. On suppose alors que $K_p \square K_i$ est 1-réductible pour tout $i \in \{2 \dots q - 1\}$.

On considère trois types d'étiquetage des sommets de $K_p \square K_q$ (pour rappel du graphe, voir la figure 4.1):

- Il existe une copie K_p^1 de K_p où les deux couleurs sont communes. D'après la proposition 5, cette copie est 1-réductible sur n'importe quel sommet avec n'importe quelle couleur. On considère maintenant n'importe quelle autre copie K_p^2 de K_p . Puisque $p \geq 3$, il existe un sommet $v_2 \in K_p^2$ qui porte une couleur commune. On appelle v_1 le sommet copie de v_2 dans K_p^1 (c.à.d. v_1 et v_2 appartiennent à la même copie de K_q). On choisit alors d'appliquer une $(1, v_1, \overline{c(v_2)})$ -réduction sur K_p^1 . Alors v_1

peut ensuite capturer v_2 , de telle sorte que la configuration restante soit un produit $K_p \square K_{q-1}$ non monochrome.

- Il existe une copie K_p^1 de K_p avec une couleur rare. Soit v_1^r le sommet de K_p^1 portant la couleur rare. D'après la proposition 5, K_p^1 est 1-réductible sur tout sommet excepté v_1^r , et avec n'importe quelle couleur. On considère ensuite n'importe quelle autre copie K_p^2 de K_p . Celle-ci possède une couleur commune, ce qui signifie qu'au moins deux sommets de K_p^2 ont cette couleur. Soit v_2 un tel sommet qui ne soit pas dans la même copie de K_q que v_r . Soit v_1 le sommet copie de v_2 dans K_p^1 (c.à.d. v_1 et v_2 appartiennent à la même copie de K_q). On peut maintenant jouer de la même façon que dans le cas précédent.
- Toutes les copies de K_p sont monochromes. Puisque la configuration sur $K_p \square K_q$ n'est pas monochrome, il existe une copie K_p^1 de K_p où tous les sommets sont de couleur 0, et une autre K_p^2 où tous les sommets sont de couleur 1. En jouant le long des copies de K_q (cf. fig 4.2), les sommets de K_p^1 capturent toutes les copies de K_p de couleur 1 excepté K_p^2 , et les sommets de K_p^2 capturent toutes les copies de K_p de couleur 0 excepté K_p^1 .

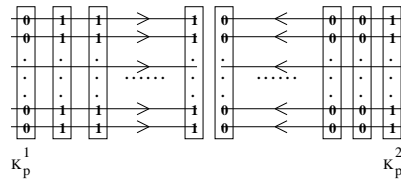


FIG. 4.2 – *Jouer sur un produit de cliques quand chaque copie est monochrome*

Après cette opération, il va rester deux copies monochromes de K_p , une de chaque couleur. On joue alors comme indiqué sur la figure 4.3.

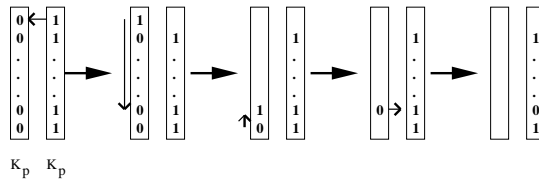


FIG. 4.3 – *Jouer sur un produit de cliques quand chaque copie est monochrome (2)*

A la fin de cette opération, il reste une configuration de jeu non monochrome sur un K_{p-1} . Puisque $p > 2$, on peut conclure d'après la proposition

5.

□

4.2 Solitaire Clobber 2 sur des hypercubes

4.2.1 Approche et définitions

On poursuit notre étude, à la recherche de graphes dont les valeurs de réductibilité sont très faibles. On s'intéresse maintenant à l'hypercube Q_n , défini comme une puissance de la clique K_2 . L'hypercube $Q_n = \square^n K_2$ ayant tous ses sommets de degré n , on peut espérer y laisser très peu de pierres à la fin. Par ailleurs, on sait aussi que les hypercubes admettent un cycle Hamiltonien, ce qui peut nous faciliter la tâche.

Tout d'abord, le contre-exemple du carré $\bullet\bullet$ donné dans la partie précédente nous laisse penser que les hypercubes ne sont sans doute pas tous 1-réductibles. D'autres contre-exemples sur des tailles supérieures du Q_n semblent nous donner raison. Cependant, nous croyons que sur des configurations non monochromes, il est toujours possible de laisser au plus deux pierres sur l'hypercube à la fin du jeu.

Dans la suite de cette section, l'hypercube Q_n , construit comme le produit $Q_{n-1} \square K_2$, sera vu comme deux copies adjacentes Q et Q' de l'hypercube de taille inférieure Q_{n-1} . Le schéma 4.4 illustre cette construction.

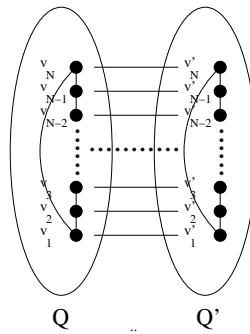


FIG. 4.4 – L'hypercube Q_n

On souhaite montrer que les hypercubes sont 2-réductibles. Une preuve par induction nous vient tout naturellement à l'esprit, en se servant de la construction présentée ci-dessus. En supposant que ce résultat est vrai sur Q et Q' , on laisserait ainsi deux pierres sur Q et deux autres sur Q' , mais difficile de progresser ensuite si ces pierres ne sont pas face à face... Comme dans le cas des produits de cliques, il faudrait connaître la couleur des pierres restantes, ainsi que leur localisation. C'est ce qui va nous pousser à définir la *2-réductibilité forte*. Il nous semble en effet que l'on peut choisir la couleur

et la localisation d'une des deux pierres restantes, ainsi que la couleur de la seconde. Cela dit, un tel résultat ne serait pas suffisant: si l'on ne choisit pas la localisation de la seconde pierre restante, il n'est pas possible de la "rabattre" vers l'autre copie. On laisserait ainsi trois pierres au final.

On pense alors à une conjecture plus originale, qui était apparue lors de l'étude des arbres. Et si on avait le droit d'utiliser un joker pour changer la couleur d'un des sommets? Et si un tel joker nous permettait de réduire à une seule pierre toutes les configurations sur les hypercubes?

Dans ce cas, on pourrait réduire Q à une seule pierre en utilisant un joker sur un certain sommet v_j . Et en réduisant Q' à deux pierres, dont une située en v'_j (qui est le sommet copie de v_j dans Q') et de couleur adéquate, on pourrait ensuite jouer de v'_j vers v_j pour simuler l'utilisation du joker. Ceci laisserait bien deux pierres à la fin.

On va alors définir un nouveau type de réductibilité: la *1-réductibilité joker*. En étudiant les configurations sur les hypercubes de petite taille, cela fonctionne bien. Bien entendu, ces deux nouveaux types de réductibilité sont soumis à certaines conditions que l'on va expliciter. Lorsque ces conditions ne seront pas réunies, il faudra alors décrire des suites de coups exhaustives...

On commence tout d'abord par introduire les nouvelles notions de réductibilité:

Un graphe G est dit *fortement 2-réductible* si: pour tout sommet v , pour toute disposition des pierres sur G telle que $G \setminus v$ ne soit pas monochrome, pour toutes couleurs c et c' telles qu'il existe deux sommets distincts u et u' avec $c(u) = c$ and $c(u') = c'$, il existe une façon de jouer qui laisse une pierre de couleur c sur v , et éventuellement une seconde de couleur c' sur un autre sommet.

Un graphe G est dit *fortement 1-réductible joker* si: pour tout sommet v , pour toute couleur c , pour toute disposition des pierres sur G telle que $c(v) = c$ ou que $c(v)$ ne soit pas rare, il existe une façon de jouer qui laisse une pierre de couleur c sur v , avec l'utilisation possible d'un joker. Le joker consiste à changer la couleur de n'importe quelle pierre à n'importe quel moment du jeu. Il ne peut être utilisé qu'une seule fois.

De la même façon que pour la 1-réduction forte, si on considère deux sommets v et v' , et deux couleurs c et c' , une $(1,v,c)$ -réduction *joker* est une suite de coups qui laisse une seule pierre de couleur c sur v , avec l'utilisation éventuelle d'un joker. Une $(2,v,c,v',c')$ -réduction est une suite de coups qui laisse une pierre de couleur c sur v , et éventuellement une seconde pierre de couleur c' sur v' . Si v' ou c' ne sont pas connus, on pourra omettre leur présence dans cette notation (ce sera d'ailleurs souvent le cas de v' , d'après la définition de la 2-réductibilité forte).

On passe maintenant à quelques notations générales sur l'hypercube Q_n :

On notera N la valeur 2^{n-1} . Chaque copie de Q_{n-1} contient alors N sommets, que l'on notera $\{v_1, \dots, v_N\}$ pour Q , ordonnés de sorte à former un cycle Hamiltonien qu'on appellera \mathbb{H} . On notera $\{v'_1, \dots, v'_N\}$ l'ensemble des sommets de Q' , tel que v_i est adjacent à v'_i pour tout i . On remarquera trivialement que (v'_1, \dots, v'_N) constitue un cycle Hamiltonien de Q' qu'on appellera \mathbb{H}' .

Enfin, puisque les sommets de Q et Q' sont numérotés selon un cycle, parler du sommet v_{N+1} reviendra à parler du sommet v_1 . Idem dans l'autre sens (parler de v_{-1} reviendra à parler de v_{N-1}).

4.2.2 Les résultats

On commence par trois résultats décrivant une façon de jouer pour réduire une configuration donnée. Ces transformations nous seront utiles plusieurs fois par la suite, d'où leur description dans les lemmes qui suivent.

Lemme 9. *Soit une configuration de jeu C sur un graphe G à n sommets et Hamiltonien ($n > 2$). Soit (v_1, v_2, \dots, v_n) la liste des n sommets de G dans l'ordre d'un cycle Hamiltonien. Si un sommet v_i porte une couleur rare c , alors C est à la fois $(1, v_{i\pm 1}, c)$ -réductible et $(1, v_{i\pm 2}, \bar{c})$ -réductible.*

Preuve. Dans le premier cas, le sommet v_i capture toutes les pierres dans l'ordre du cycle Hamiltonien. Selon le sens de parcours, on termine en v_{i+1} ou en v_{i-1} . Dans le second cas, v_i parcourt le cycle et capture toutes les pierres sauf la dernière. v_i s'arrête donc en v_{i+2} ou v_{i-2} . Elle est ensuite capturée par v_{i+1} ou v_{i-1} . \square

Lemme 10. *Soit C une configuration de jeu sur Q_n avec $n > 3$. S'il existe une couleur rare sur Q' et si Q n'est pas monochrome, alors il existe une façon de jouer qui laisse N pierres sur Q et enlève toutes les pierres de Q' , les deux couleurs étant communes sur Q . Si $n = 3$, il se peut qu'il y ait une couleur rare sur Q , mais au moins deux sommets distincts de Q peuvent la porter.*

Preuve. Soit c la couleur rare de Q' et v'_i le sommet de Q' tel que $c(v'_i) = c$. Selon la configuration des pierres sur Q , on considère trois cas:

- \bar{c} est rare sur Q . En utilisant son cycle Hamiltonien, et d'après le lemme 9, on sait que Q' est $(1, v'_{i\pm 2}, \bar{c})$ -réductible. Si $n > 3$, v'_{i+2} et v'_{i-2} sont des sommets distincts. Puisque \bar{c} est rare sur Q , cela signifie que soit v_{i+2} , soit v_{i-2} porte la couleur c . Sans restreindre la généralité, on suppose que v_{i+2} est étiqueté c . On applique alors la $(1, v_{i+2}, \bar{c})$ -réduction sur Q' . Alors v'_{i+2} peut capturer v_{i+2} , de telle sorte que Q possède au moins deux pierres de chaque couleur.

Cette preuve n'est plus valide lorsque $n = 3$ et $c(v_{i+2}) = \bar{c}$. Dans ce cas, il existe alors deux façons de jouer, chacune d'entre elle laissant la couleur rare soit en v_{i+1} (diagramme 1), soit en v_{i-1} (diagramme 2).

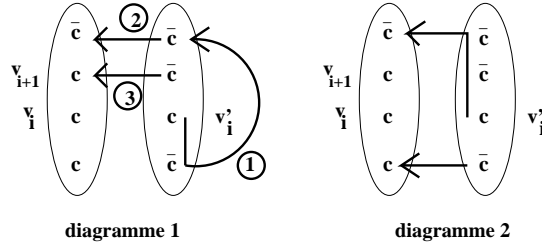
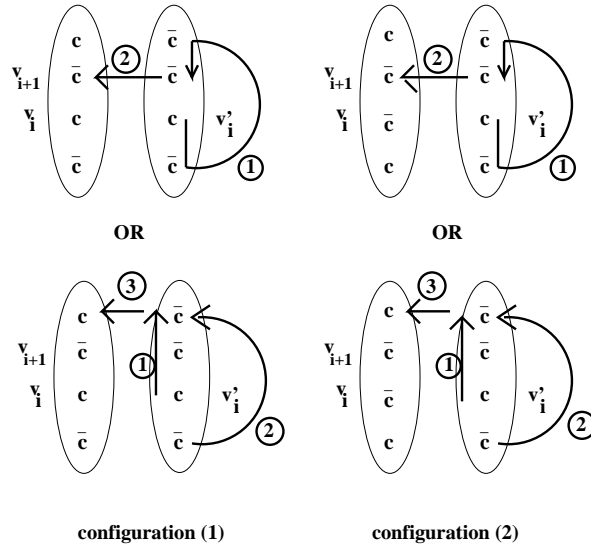


FIG. 4.5 – Cas particulier lorsque $n = 3$

- c est rare sur Q . On sait que Q' est $(1, v'_{i\pm 1}, c)$ -réductible. On sait aussi que un des deux sommets v_{i+1} ou v_{i-1} porte la couleur \bar{c} . Sans restreindre la généralité, on suppose qu'il s'agit de v_{i+1} . On applique alors la $(1, v'_{i+1}, c)$ -réduction sur Q' , et on joue ensuite de v'_{i+1} vers v_{i+1} .
 - Les deux couleurs sont communes sur Q . On considère alors quatre cas au sujet des sommets v_{i+1} et v_{i+2} :
 - $c(v_{i+1}) = c$ et $c(v_{i+2}) = \bar{c}$. En utilisant le cycle Hamiltonien \mathbb{H}' de Q' , v'_i capture toutes les pierres de Q' sauf v'_{i+1} . Cette opération laisse deux pierres sur Q' : une en v'_{i+1} de couleur \bar{c} , et l'autre en v'_{i+2} de couleur c . On joue maintenant de v'_{i+1} vers v_{i+1} , et de v'_{i+2} vers v_{i+2} .
 - $c(v_{i+1}) = \bar{c}$ et $c(v_{i+2}) = c$. Si $n > 3$, au moins une des deux couleurs apparaît trois fois sur Q . S'il s'agit de \bar{c} , on applique la $(1, v'_{i+1}, c)$ -réduction sur Q' et on joue ensuite de v'_{i+1} vers v_{i+1} . S'il s'agit de c , on applique la $(1, v'_{i+2}, \bar{c})$ -réduction sur Q' et on joue ensuite de v'_{i+2} vers v_{i+2} .
- Si $n = 3$, il existe deux types de configurations sur Q . Pour chacune d'entre elles, on trouve une façon de jouer qui laisse une couleur rare sur Q deux endroits possibles:


 FIG. 4.6 – Cas particulier lorsque $n = 3$

- $c(v_{i+1}) = c$ et $c(v_{i+2}) = c$. Si c apparaît au moins trois fois sur Q , on applique la $(1, v'_{i+2}, \bar{c})$ -réduction sur Q' , puis on joue de v'_{i+2} vers v_{i+2} . Si c n'apparaît que deux fois sur Q et $n > 3$, cela signifie que \bar{c} apparaît plus que deux fois sur Q , et en particulier sur v_{i-1} . On applique alors la $(1, v'_{i-1}, c)$ -réduction sur Q , puis on joue de v'_{i-1} vers v_{i-1} . Si $n = 3$, cela implique que $c(v_i) = c(v_{i-1}) = \bar{c}$. Il suffit alors d'inverser l'ordre des sommets (v_{i+1} devient v_{i-1} ...) pour se ramener au cas précédent.
- $c(v_{i+1}) = \bar{c}$ et $c(v_{i+2}) = \bar{c}$. Ce cas est similaire au précédent.

□

Lemme 11. Soit C une configuration de jeu sur Q_n avec $n > 2$. S'il existe une couleur rare sur Q' et si Q est monochrome, alors il existe une façon de jouer qui laisse N pierres sur Q et enlève toutes les pierres de Q' , Q n'étant plus monochrome. Par ailleurs, si cela engendre une couleur rare sur Q , il existe au moins deux sommets distincts de Q qui peuvent la porter.

Preuve. Soit c la couleur rare de Q' et v'_i le sommet tel que $c(v'_i) = c$. On considère deux cas:

- Q est monochrome de couleur c . En utilisant le cycle Hamiltonien \mathbb{H}' de Q' , v'_i capture toutes les autres sommets sauf v'_{i+1} et v'_{i+2} . Il termine donc en v'_{i+3} . v'_{i+2} capture ensuite le sommet v'_{i+3} . Cette opération laisse donc deux sommets de couleur \bar{c} en

v'_{i+1} et v'_{i+3} . On joue ensuite de v'_{i+1} vers v_{i+1} , et de v'_{i+3} vers v_{i+3} . Q' est maintenant vide et les deux couleurs sont communes sur Q .

- Q est monochrome de couleur \bar{c} . D'après le lemme 9, on peut appliquer la $(1, v'_{i\pm 1}, c)$ -réduction sur Q' . On joue ensuite de $v'_{i\pm 1}$ vers $v_{i\pm 1}$. Q' a été vidé, la couleur c est rare sur Q et appartient au sommet v_{i+1} ou v_{i-1} .

□

Théorème 18. *Les hypercubes sont fortement 1-réductibles joker et fortement 2-réductibles.*

Preuve. On prouve ce théorème par induction sur la dimension de l'hypercube.

Le lecteur pourra s'assurer que ce résultat est vrai pour l'hypercube Q_2 . Il suffit de le vérifier pour les quatre configurations suivantes:



On suppose maintenant que le théorème est vrai pour l'hypercube Q_{n-1} , et on considère l'hypercube Q_n .

On prouve tout d'abord que Q_n est fortement 1-réductible joker. Sans restreindre la généralité, on suppose que l'on souhaite laisser la dernière pierre sur le sommet v_1 . Soit $c \in \{0,1\}$. On considère n'importe quelle disposition des pierres sur Q_n telle que $c(v_1)$ n'est pas rare, ou alors $c(v_1) = c$. Notre objectif est de montrer qu'il existe une suite de coups qui laisse une seule pierre en v_1 , et de couleur c . Pour ce faire, l'utilisation d'un joker est possible.

On considère cinq cas:

1. Q est supposé $(1, v_1, c)$ -réductible joker, avec utilisation du joker pour changer la couleur d'un certain sommet v_j de $d \in \{0,1\}$ en \bar{d} . Par ailleurs, Q' est supposé $(1, v'_j, \bar{d})$ -réductible joker.

Dans ces conditions, on applique tout d'abord la $(1, v'_j, \bar{d})$ -réduction joker sur Q' . Il se peut que l'on ait utilisé un joker. On applique ensuite la $(1, v_1, c)$ -réduction sur Q avec une légère modification: on substitue l'utilisation du joker en v_j en jouant de v'_j vers v_j à la place. Ce coup est effectivement équivalent à l'utilisation du joker, puisque v'_j est de couleur \bar{d} à ce moment du jeu. Notons que dans toute cette succession de coups, le joker aura été utilisé au plus une fois.

2. Q est supposé $(1, v_1, c)$ -réductible joker, avec utilisation du joker pour changer la couleur d'un certain sommet v_j de $d \in \{0,1\}$ en \bar{d} . Q' n'est ici pas $(1, v'_j, \bar{d})$ -réductible joker. D'après les conditions de la réductibilité forte joker, cela signifie que $c(v'_j) = d$ et $c(v'_i) = \bar{d}$ pour tout $i \neq j$.

Puisque d est rare sur Q' , on peut appliquer les lemmes 10 et 11. Si cela laisse une couleur rare sur Q , on choisit celle-ci sur un sommet différent de v_1 . Cette opération a vidé Q' et fait en sorte que $c(v_1)$ ne soit pas rare sur Q . On peut alors appliquer la $(1, v_1, c)$ -réduction sur Q pour conclure.

3. Q est supposé $(1, v_1, c)$ -réductible joker, mais le joker n'est pas utilisé dans la suite de coups. On considère n'importe quelle disposition des pierres sur Q' .

On considère une suite de coups issue d'une $(1, v_1, c)$ -réduction sur Q sans joker. Dans cette suite, il existe un sommet v_i qui capture au moins deux autres sommets avant d'être (éventuellement) capturé. En effet, si chaque sommet ne capturait au plus qu'une pierre avant d'être (ou pas) capturé, alors Q serait un graphe "étoile", ce qui n'est pas le cas. On note alors v_j et v_k les deux premiers sommets capturés par v_i . Quand on considère le coup de v_i vers v_j , puis v_k , on note y la couleur de v_i , et \bar{y} celles de v_j et v_k . On distingue maintenant quatre cas, selon les couleurs de v'_i et v'_j :

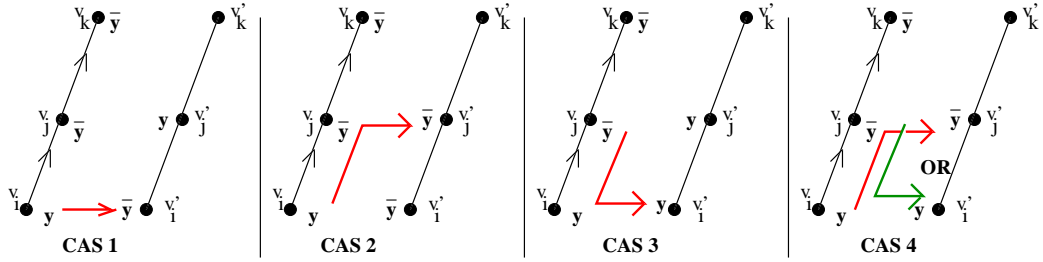


FIG. 4.7 – Forte réductibilité joker lorsque Q est $(1, v_1, c)$ -réductible sans joker

- CAS 1: $c(v'_i) = \bar{y}$ et $c(v'_j) = y$. On applique la $(1, v_1, c)$ -réduction sur Q , et lorsqu'il faut jouer de v_i vers v_j , on joue vers v'_i à la place. A ce moment, on est sûr que y n'est pas rare sur Q' et on applique la $(1, v'_j, y)$ -réduction joker sur Q' . On joue ensuite de v'_j vers v_j et on poursuit l'exécution de la $(1, v_1, c)$ -réduction sur Q .
- CAS 2: $c(v'_i) = c(v'_j) = \bar{y}$. On applique la $(1, v_1, c)$ -réduction sur Q jusqu'au coup de v_j vers v_k (non inclus). On joue de v_j vers v'_j à la place. Puisque $c(v'_k)$ ne peut pas être rare sur Q' à ce moment là, on applique la $(1, v'_k, y)$ -réduction joker sur Q' . On joue ensuite de v'_k vers v_k et on poursuit l'exécution de la $(1, v_1, c)$ -réduction sur Q .

- CAS 3: $c(v'_i) = c(v'_j) = y$. On applique la $(1, v_1, c)$ -réduction sur Q jusqu'au coup de v_i vers v_j (non inclus). C'est alors que v_j capture v_i puis v'_i , de sorte à ce que $c(v'_k)$ ne soit pas rare. Le reste de l'exécution est identique au cas 2.
- CAS 4: $c(v'_i) = y$ et $c(v'_j) = \bar{y}$. Si $c(v'_k) = y$, alors on joue comme dans le cas 2. Dans le cas contraire, on joue comme dans le cas 3.

4. Q n'est pas $(1, v_1, c)$ -réductible joker, et Q' est $(2, v'_1, c)$ -réductible.

Cette non-réductibilité de Q implique que $c(v_1) = \bar{c}$ et $c(v_i) = c$ pour tout $i > 1$. Si Q' est $(1, v'_1, c)$ -réductible, on réduit Q' et on joue ensuite de v'_1 vers v_1 . Q devient alors monochrome, et on peut y appliquer la $(1, v_1, c)$ -réduction joker. Si Q' est $(2, v'_1, c)$ -réductible sans être $(1, v'_1, c)$ -réductible, on applique alors cette réduction et on choisit la seconde pierre de couleur \bar{c} . Soit v'_j le sommet sur lequel cette seconde pierre se trouve. On joue ensuite de v'_1 vers v_1 , et de v'_j vers v_j . Q satisfait maintenant les bonnes conditions pour appliquer la $(1, v_1, c)$ -réduction joker.

5. Q n'est pas $(1, v_1, c)$ -réductible joker, et Q' n'est pas $(2, v'_1, c)$ -réductible.

Il existe quatre dispositions possibles sur Q_n qui vérifient ces conditions:

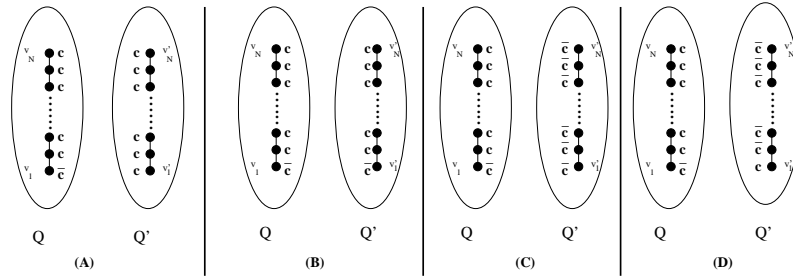


FIG. 4.8 – Forte réductibilité joker dans les cas pathologiques

- La disposition (A) ne doit pas être considérée. En effet, elle ne vérifie pas les conditions de 1-réductibilité joker, puisque $c(v_1)$ est rare sur Q_n et $c(v_1) \neq c$.
- Dans la disposition (B), v'_1 capture tout d'abord toutes les pierres de Q' en terminant par v'_N . Puis v'_N capture v_N et les conditions de la $(1, v_1, c)$ -réductibilité joker sont réunies sur Q .

- Dans la disposition (C), v_i capture v'_i pour tout $2 < i < N$. On applique alors la $(1, v'_1, \bar{c})$ -réduction joker sur Q' . Pour terminer, v_1 est capturé par v_2 , v'_1 et v_N dans cet ordre.
- Dans la disposition (D), on utilise le cycle Hamiltonien \mathbb{H}' pour appliquer la $(1, v'_{N-1}, \bar{c})$ -réduction de Q' (d'après le lemme 9). Puis v'_{N-1} capture v_{N-1} et on peut appliquer la $(1, v_1, c)$ -réduction joker sur Q .

On prouve maintenant que Q_n est fortement 2-réductible. Sans restreindre la généralité, on suppose que l'on souhaite laisser la dernière pierre sur le sommet v_1 . On considère n'importe quelle disposition des pierres sur Q_n telle que $Q_n \setminus v_1$ ne soit pas monochrome. Soient c et c' dans $\{0, 1\}$, tels qu'il existe deux sommets distincts de Q_n portant ces couleurs. On souhaite montrer qu'il existe une suite de coups qui laisse une pierre de couleur c en v_1 , et éventuellement une seconde pierre de couleur c' ailleurs.

On considère onze cas, en commençant par ceux où Q' est monochrome (cas numérotés 1 à 5):

1. Q' est monochrome de couleur $y \in \{0, 1\}$ et Q est $(1, v_1, c)$ -réductible.

On considère une suite de coups issue de la $(1, v_1, c)$ -réduction sur Q . On suppose tout d'abord que cette suite contient un coup d'un sommet v_i vers v_j tel que $c(v_i) = \bar{y}$ et $c(v_j) = y$ au moment de la capture. Dans ce cas, on applique cette 1-réduction et au lieu d'exécuter ce coup, on joue de v_i vers v'_i . Puisque v'_i et v'_j sont adjacents, il existe alors un cycle Hamiltonien sur Q' où v'_i et v'_j sont consécutifs. v'_i peut donc capturer tous les sommets de Q' et terminer en v'_j avec la couleur \bar{y} . v'_j capture ensuite v_j et on continue l'exécution de la $(1, v_1, c)$ -réduction sur Q .

On suppose maintenant que pendant la 1-réduction de Q , il n'existe aucun coup vers un sommet de couleur y . Cela impose immédiatement que $c = y$. Par ailleurs, cela implique aussi que tous les sommets de Q sont de couleur \bar{y} , sauf un seul de couleur y , que l'on appellera v_i . La $(1, v_1, c)$ -réduction sur Q consiste alors en la capture de tous les sommets par v_i en terminant par v_1 . Sans restreindre la généralité, on supposera que v_2 est l'avant-dernier sommet capturé dans la suite de coups. Le schéma suivant indique alors la façon de jouer pour conclure:

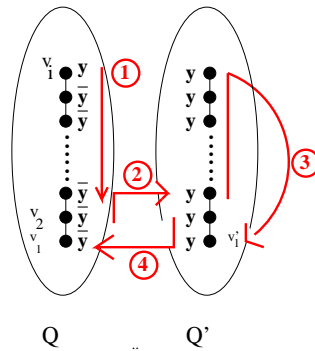


FIG. 4.9 – 2-réductibilité forte: instance particulière du cas 1

- Q' est monochrome de couleur $y \in \{0,1\}$ et Q est $(2, v_1, c, \bar{y})$ -réductible sans être $(1, v_1, c)$ -réductible. Soit v_i le sommet sur lequel se porte la seconde couleur.

On applique alors une $(2, v_1, c, v_i, \bar{y})$ -réduction sur Q . On joue ensuite de v_i vers v'_i , et on utilise le cycle Hamiltonien \mathbb{H}' de Q' (cf. lemme 9) pour laisser la seconde pierre de couleur c' en v'_{i+1} (si $c' = \bar{y}$) ou en v'_{i+2} (si $c' = y$).

- Q' est monochrome de couleur $y \in \{0,1\}$ et \bar{y} est rare sur Q , avec $c(v_1) \neq \bar{y}$. On suppose aussi que Q n'est pas $(2, v_1, c, \bar{y})$ -réductible. Cela implique que $c = \bar{y}$ et que $c' = y$ (puisque \bar{y} est rare sur Q_n). Soit v_i le sommet de Q tel que $c(v_i) = \bar{y}$. La figure 4.10 illustre une telle configuration:

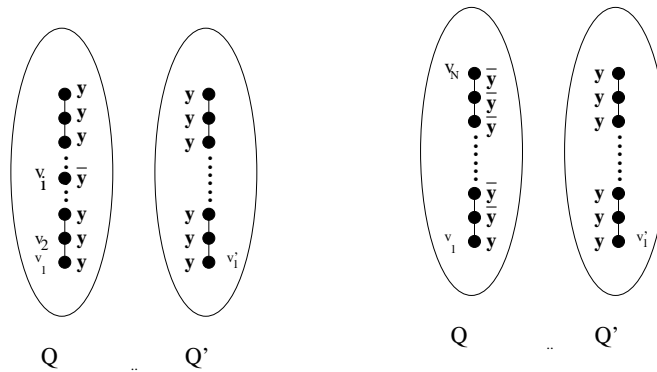


FIG. 4.10 – 2-réductibilité forte: cas 3

FIG. 4.11 – 2-réductibilité forte: cas 4

Puisque $c = \bar{y}$ et $c' = y$, on sait que Q est $(2, v_1, c, c')$ -réductible. On

considère le premier coup d'une telle réduction: parce que $c(v_i)$ est rare, il s'agit de la capture d'un certain sommet v_j par v_i . Au lieu d'effectuer ce coup, v_i capture plutôt v'_i et utilise le cycle Hamiltonien \mathbb{H}' de Q' pour effectuer une $(1, v'_j, \bar{y})$ -réduction. On joue ensuite de v'_j vers v_j puis on achève la $(2, v_1, c, c')$ -réduction de Q pour conclure.

4. Q' est monochrome de couleur $y \in \{0,1\}$ et $c(v_1) = y$ est rare sur Q (cf. fig 4.11).

Tout d'abord, on suppose $c = y$. Pour tout $2 \leq i \leq N$, v_i capture v'_i . On utilise ensuite le cycle Hamiltonien \mathbb{H}' de Q' pour laisser la seconde pierre de la bonne couleur (en v_N ou v_{N-1} selon c').

Si $c = \bar{y}$, alors v_N capture tout d'abord v_1 . Puis v_i capture v'_i pour tout $2 < i < N$. Les conditions sont maintenant réunies pour appliquer une $(2, v'_1, y, c')$ -réduction sur Q' . Les deux derniers coups seront v'_1 vers v_1 , puis v_2 vers v_1 .

5. Q' est monochrome de couleur $y \in \{0,1\}$ et Q est monochrome de couleur \bar{y} .

On suppose tout d'abord que $c = y$. On joue de v_N vers v'_N , puis de v'_{N-1} vers v_{N-1} . On utilise ensuite le cycle Hamiltonien \mathbb{H}' de Q' pour le réduire à une seule pierre de couleur c' . Le cycle Hamiltonien de Q permet enfin à v_{N-1} de capturer toutes les pierres en terminant par v_1 .

Si $c = \bar{y}$, on joue de v'_1 vers v_1 , puis de v_2 vers v_1 . Pour tout $2 < i \leq N$, chaque sommet v_i capture v'_i . On utilise enfin le cycle Hamiltonien \mathbb{H}' de Q' pour que v'_2 le réduise à une seule pierre de couleur c' .

Dans les cas suivants, on considèrera que Q' n'est pas monochrome.

6. On suppose que Q est $(1, v_1, c)$ -réductible et que Q' admet une couleur rare.

On applique alors la $(1, v_1, c)$ -réduction sur Q et on utilise le cycle Hamiltonien \mathbb{H}' de Q' pour laisser la seconde pierre de couleur c' en v'_{i+1} ou v'_{i+2} .

7. On suppose que Q est $(1, v_1, c)$ -réductible et que les deux couleurs sont communes sur Q' .

On considère une succession de coups issue de la $(1, v_1, c)$ -réduction de Q . Puisque Q est 1-réductible, il existe un sommet v_i qui capture au moins deux autres sommets avant d'être (éventuellement) capturé. Soient v_j et v_k les deux premiers sommets capturés par v_i . Quand on considère le coup de v_i vers v_j , puis v_k , on note y la couleur de v_i , et \bar{y} celles de v_j et v_k . On distingue maintenant quatre cas, selon les

couleurs de v'_i et v'_j :

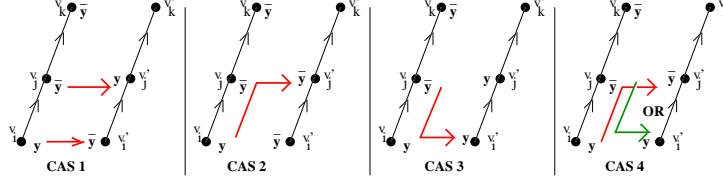


FIG. 4.12 – 2-réductibilité forte: cas 7

- CAS 1: $c(v'_i) = \bar{y}$ et $c(v'_j) = y$. On applique la $(1, v_1, c)$ -réduction sur Q jusqu'au coup de v_i vers v_j (non inclus). Ce coup est remplacé par les captures de v'_i par v_i , et v'_j par v_j . Après cette opération, les deux couleurs restent communes sur Q , et on peut donc appliquer la $(1, v'_k, y)$ - ou $(2, v'_k, y, c')$ -réduction sur Q' . On joue ensuite de v'_k vers v_k et on termine l'exécution de la $(1, v_1, c)$ -réduction sur Q .
 - CAS 2: $c(v'_i) = c(v'_j) = \bar{y}$. On applique la $(1, v_1, c)$ -réduction sur Q , et au moment de jouer de v_j vers v_k , on capture v'_j à la place. Puisque y n'est pas rare sur Q' après cette opération, on peut appliquer la $(1, v'_k, y)$ - ou $(2, v'_k, y, c')$ -réduction sur Q' . On joue ensuite de v'_k vers v_k et on termine l'exécution de la $(1, v_1, c)$ -réduction sur Q .
 - CAS 3: $c(v'_i) = c(v'_j) = y$. On applique la $(1, v_1, c)$ -réduction sur Q jusqu'au coup de v_i vers v_j (non inclus). Au lieu de ce coup, v_j capture v_i puis v'_i . Si y n'est pas rare sur Q' après cette opération, alors on conclut comme dans le cas 2. Dans le cas contraire, on utilise la chaîne Hamiltonienne de Q' qui commence en v'_j et se termine en v'_k pour réduire Q' à une seule pierre de couleur y en v'_k . On joue ensuite de v'_k vers v_k et on termine l'exécution de la $(1, v_1, c)$ -réduction sur Q .
 - CAS 4: $c(v'_i) = y$ et $c(v'_j) = \bar{y}$. Si la couleur \bar{y} apparaît au moins trois fois sur Q' ou si $c(v'_k) = y$, alors on joue comme dans le cas 2. Dans le cas contraire, cela signifie que $c(v'_j) = c(v'_k) = \bar{y}$, et que les autres sommets de Q' portent la couleur y . On joue alors comme dans le cas 3.
8. On suppose ici que $c(v_1)$ n'est pas rare sur Q (qui peut éventuellement être monochrome). Cela signifie que Q est $(1, v_1, c)$ -réductible joker. Si cette réduction n'utilise pas de joker, alors on se ramène aux cas 6 et 7. On considèrera ici que le joker est utilisé pour changer la couleur d'un certain sommet v_j de d en \bar{d} . On suppose aussi que Q' est $(2, v'_j, \bar{d}, c')$ -réductible (cela est vrai - entre autres - lorsque les deux couleurs sont communes sur Q').

On applique alors la $(2, v'_j, \bar{d}, c')$ -réduction sur Q' . Puis on joue sur Q selon la $(1, v_1, c)$ -réduction joker, en remplaçant l'utilisation du joker par un coup de v'_j vers v_j .

9. On suppose ici que $c(v_1)$ n'est pas rare sur Q et que Q n'est pas monochrome. Comme précédemment, Q est $(1, v_1, c)$ -réductible joker et on considère que le joker est utilisé pour changer la couleur d'un certain sommet v_j de d en \bar{d} . On suppose aussi que Q' n'est pas $(2, v'_j, \bar{d}, c')$ -réductible. Il existe trois raisons pour expliquer cette non-réductibilité de Q' :

- $c(v'_j) \neq \bar{d}$, \bar{d} est rare sur Q' et $c' = \bar{d}$. Si $n > 3$, on peut alors utiliser le lemme 10 pour vider Q' et laisser Q avec les deux couleurs communes. Il suffit ensuite d'appliquer une $(2, v_1, c, c')$ -réduction sur Q pour conclure. Dans le cas où $n = 3$, le lemme ne peut plus s'appliquer. On doit alors considérer au cas par cas toutes les configurations sur Q_3 qui vérifient ces conditions et montrer qu'il est possible de faire une 2-réduction. Les différentes configurations et la façon de jouer sont présentés sur le schéma 4.13.

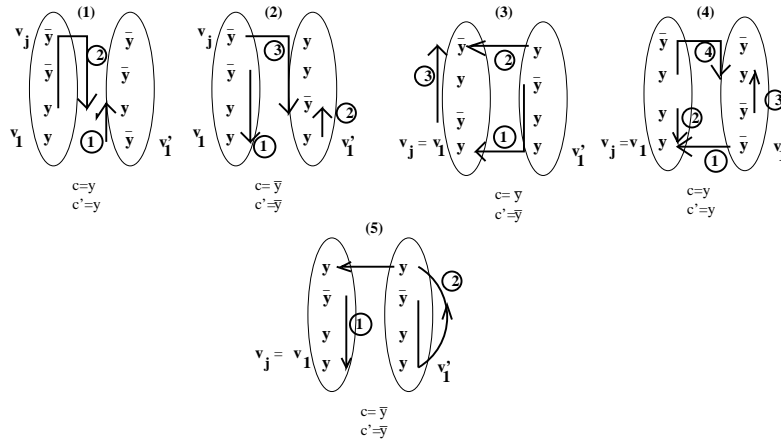


FIG. 4.13 – 2-réductibilité forte: cas 9 sur Q_3 (1)

- $c(v'_j) = \bar{d}$, et \bar{d} est rare sur Q' . Si $n > 3$, on joue comme précédemment grâce au lemme 10. Si $n = 3$, voici les cas que l'on doit cas considérer:

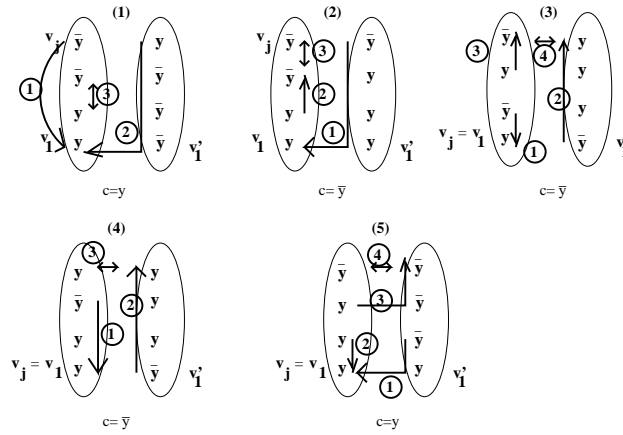


FIG. 4.14 – 2-réductibilité forte: cas 9 sur Q_3 (2)

A noter: la présence d'une double flèche indique que l'on choisit qui capture qui en fonction de c' .

- $c(v'_j) = d$, et d est rare sur Q' . Si $n > 3$, on joue de manière identique aux deux cas précédents. Si $n = 3$, on considère les dispositions suivantes:

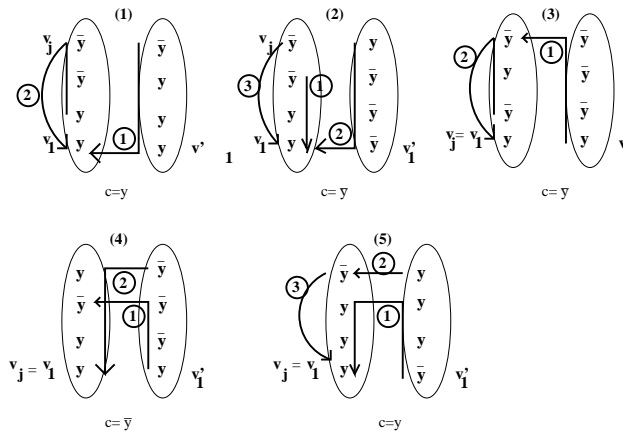


FIG. 4.15 – 2-réductibilité forte: cas 9 sur Q_3 (3)

10. On suppose maintenant que $c(v_1) = \bar{y}$ est rare sur Q , ou bien que Q est monochrome. Q' possède quant à lui une couleur rare. Quatre dispositions des pierres sont alors possibles:

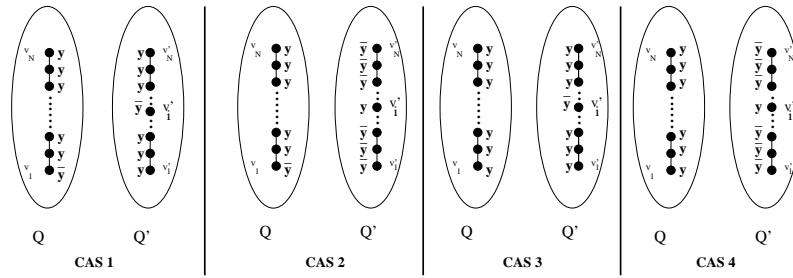


FIG. 4.16 – 2-réductibilité forte: cas 10

Voici comment jouer dans chacun des cas:

- CAS 1: $c(v_1) = \bar{y}$ est rare sur Q et sur Q' . Soit v'_i le sommet de Q' qui porte cette couleur. Soit v'_{i+1} , soit v'_{i-1} (ou peut-être les deux) est différent de v'_1 . Sans restreindre la généralité, on suppose que v'_{i+1} est différent de v_1 . Grâce au lemme 9, on applique une $(1, v'_{i+1}, \bar{y})$ -réduction sur Q' puis on joue de v'_{i+1} vers v_{i+1} . Les deux couleurs sont maintenant communes sur Q , ce qui nous permet d'y appliquer une $(2, v_1, c, c')$ -réduction.
- CAS 2: $c(v_1) = \bar{y}$ est rare sur Q et y est rare sur un certain sommet v'_i de Q' . Grâce au lemme 9, on applique la $(1, v'_i \pm 2, \bar{y})$ -réduction de Q' (on choisit de terminer sur un sommet différent de v'_1). On joue ensuite de la même façon que pour le cas 1. Cette opération n'est cependant pas possible lorsque $n = 3$ et avec la disposition suivante des pierres:

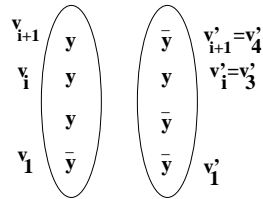


FIG. 4.17 – 2-réductibilité forte: cas 10.2 sur Q_3

Dans ce cas, si $(c, c') \neq (y, y)$, on considère la suite de coups suivante: v'_{i+1} vers v_{i+1} , v'_i vers v'_2 , v'_1 vers v'_2 , et v'_2 vers v_2 . On utilise ensuite le cycle Hamiltonien \mathbb{H} de Q pour conclure. Si $(c, c') = (y, y)$, on joue alors comme suit: grâce au cycle Hamiltonien de Q' , on applique une $(1, v'_1, \bar{y})$ -réduction sur Q' . Puis on joue de v_2 vers v_1 , de v'_1 vers v_1 , et de v_N vers v_1 .

- CAS 3: Q est monochrome de couleur y et \bar{y} est rare sur un certain sommet v'_i de Q' . On joue de façon identique au cas 1. A noter: le cas $c = c' = \bar{y}$ n'est pas autorisé car \bar{y} est rare sur Q_n .
 - CAS 4: Q est monochrome de couleur y et y est rare sur un certain sommet v'_i de Q' . v'_i capture alors tous les sommets de Q' à l'exception de v'_{i+1} et v'_{i+2} , en terminant par v'_{i+3} . Puis on joue de v'_{i+2} vers v'_{i+3} , de v'_{i+3} vers v_{i+3} , et de v'_{i+1} vers v_{i+1} . Q' est maintenant vidé et les deux couleurs sont communes sur Q . Il ne nous reste plus qu'à appliquer la $(1, v_1, c)$ - ou $(2, v_1, c, c')$ -réduction de Q .
11. On suppose que $c(v_1) = \bar{y}$ est rare sur Q , et que les deux couleurs sont communes sur Q' .

Si Q' est $(1, v'_{N-1}, \bar{y})$ -réductible, alors on applique cette réduction et on joue de v'_{N-1} vers v_{N-1} . Les deux couleurs deviennent alors communes sur Q , ce qui nous permet de le réduire comme voulu.

Dans le cas contraire, on applique une $(2, v'_{N-1}, \bar{y}, \bar{y})$ -réduction de Q' . On note v'_i le sommet qui porte la seconde pierre. Si $v'_i \neq v'_1$, alors on joue de v'_{N-1} vers v_{N-1} , et de v'_i vers v_i . Si $n > 3$, les deux couleurs sont communes sur Q après cette opération, ce qui nous permet de conclure. Si $n = 3$, alors y est rare sur Q , et se trouve en v_2 ou en v_N . Le cycle Hamiltonien de Q permet de conclure.

Dans le cas où $v'_i = v'_1$, on considère deux cas: si $c = y$, alors on joue de v_2 vers v_1 , de v'_1 vers v_1 , et de v_N vers v_1 . Le sommet v'_{N-1} capture ensuite v_{N-1} et suit le cycle Hamiltonien \mathbb{H} de Q pour capturer les pierres qui s'y trouvent et laisser la dernière de la couleur c' . Si $c = \bar{y}$, alors on joue de v_N vers v_1 , et de v'_1 vers v_1 . v'_{N-1} capture ensuite v_{N-1} et suit le cycle Hamiltonien \mathbb{H} pour capturer les pierres restantes en prenant soin de laisser la dernière de la couleur c' .

□

Ces résultats nous prouvent que toute configuration non monochrome sur un hypercube est 2-réductible. Cependant, ils ne nous permettent pas de distinguer les configurations 1-réductibles de celles qui ne le sont pas. On pourrait d'ailleurs se demander si tous les hypercubes ne sont pas 1-réductibles. On a vu que ce n'est pas le cas pour Q_2 , mais peut-être qu'à partir d'un certain rang...La proposition suivante répond à cette question:

Proposition 6. *Pour tout entier positif n , il existe une configuration non monochrome de l'hypercube Q_n qui n'est pas 1-réductible.*

Preuve. Cette preuve utilise un invariant défini par Demaine et al. dans leur papier (cf. [DDF04]). En voici la définition: sur un graphe biparti G , les sommets de chacune des deux partitions sont étiquetés 0 et 1. Soit une configuration C de Solitaire Clobber sur G , avec des pierres étiquetées 0 et

1. Une pierre est dite "en opposition" si son étiquette est différente de celle du sommet de la bipartition. On note $\delta(C)$ la valeur suivante:

$$\delta(C) = \text{nombre de pierres sur } C + \text{nombre de pierres en opposition}$$

Dans leur papier, Demaine et al. ont montré que la valeur $\delta(C) \bmod 3$ est un invariant du jeu.

Soit $n > 1$ et on considère $Q_n = Q_{n-1} \square K_2$. Comme précédemment, on notera Q et Q' les deux copies de Q_{n-1} . Puisque les hypercubes sont des graphes bipartis, on choisit une bipartition de Q_n telle que la moitié des sommets de Q soit étiquetée 0, et l'autre moitié 1. Idem pour Q' . On choisit ensuite une disposition des pierres sur Q_n telle que toutes les pierres de couleur 0 appartiennent à Q , et toutes celles de couleur 1 appartiennent à Q' . Dans ce cas, on a alors:

$$\delta(C) = 2^n + 2^{n-1} = 3 \cdot 2^{n-1}$$

Par conséquent, on a $\delta(C) \bmod 3 = 0$. Puisqu'une configuration avec une seule pierre ne peut jamais vérifier $\delta(C) \bmod 3 = 0$ (cf. [DDF04]), on peut conclure. \square

4.3 Solitaire Clobber 2 sur les graphes de Hamming généralisés

4.3.1 Introduction et notations

Les hypercubes sont des graphes de Hamming particuliers. On a vu dans la partie précédente qu'ils sont 2-réductibles. Qu'en est-il de tous les autres graphes de Hamming généralisés?

Par la suite, on va s'intéresser aux produits $K_n \square G$, où G sera un graphe fortement 1-réductible. Un tel produit contient n copies de G , qui seront notées $G_1 \dots G_n$. Un sommet noté v_i appartiendra à la i^{eme} copie de G . Deux sommets notés v_i et v_j seront alors adjacents, puisqu'ils appartiennent à la même copie de la clique K_n . Notons aussi que v_1 définit un sommet quelconque de G_1 .

4.3.2 Les résultats

Lemme 12. *Soit G un graphe fortement 1-réductible contenant au moins quatre sommets. Alors le produit $K_2 \square G$ est fortement 1-réductible.*

Preuve. On considère le graphe $K_2 \square G$, où G est un graphe fortement 1-réductible contenant au moins quatre sommets. Sans restreindre la généralité, on suppose que l'on souhaite laisser la dernière pierre sur le sommet v_1 . Soit

$c \in \{0,1\}$. On considère n'importe quelle disposition des pierres sur $K_2 \square G$ telle que $K_2 \square G \setminus \{v_1\}$ ne soit pas monochrome. On va maintenant prouver que cette configuration est $(1, v_1, c)$ -réductible. Trois cas seront considérés:

1. **G_2 n'est pas monochrome.**

Puisque G est de taille au moins quatre, il existe deux sommets de même couleur sur $G_1 \setminus v_1$. On les notera a_1 et b_1 . Par un raisonnement identique, on sait que a_2 ou b_2 porte une couleur commune sur G_2 . Sans restreindre la généralité, on suppose que $c(a_2)$ est commune. Puisque G_2 n'est pas monochrome, les conditions sont réunies pour y appliquer une $(1, a_2, \overline{c(a_1)})$ -réduction, suivie de la capture de a_1 par a_2 . G_2 ne contient alors plus de pierres et les sommets a_1 et b_1 sont de couleurs différentes: on peut ainsi appliquer une $(1, v_1, c)$ -réduction sur G_1 .

2. **G_2 est monochrome de couleur y et $G_1 \setminus v_1$ n'est pas monochrome**

Cela signifie que G_1 est $(1, v_1, c)$ -réductible. On considère deux sous-cas:

- Quand on considère une suite de coups issue d'une $(1, v_1, c)$ -réduction de G_1 , on suppose qu'à un moment donné, il existe un sommet a_1 de couleur \bar{y} qui capture un sommet b_1 de couleur y . On choisit alors d'appliquer cette réduction, et au lieu de jouer de a_1 vers b_1 , on choisit de capturer a_2 . On applique ensuite une $(1, b_2, \bar{y})$ -réduction sur G_2 . b_2 capture ensuite b_1 et on peut poursuivre la $(1, v_1, c)$ -réduction de G_1 .
- On suppose qu'un tel coup n'existe pas. Cela signifie qu'il y a un seul sommet de couleur y sur G_1 . On l'appellera a_1 . Puisque G_1 est au moins de taille quatre, a_1 doit capturer consécutivement deux pierres pendant la $(1, v_1, c)$ -réduction. On les appellera b_1 et c_1 . On va remplacer ces deux captures consécutives par la suite de coups suivants: b_1 capture a_1 puis a_2 . On applique ensuite une $(1, c_2, y)$ -réduction de G_2 . Il suffit ensuite de jouer c_2 vers c_1 , puis de poursuivre la $(1, v_1, c)$ -réduction de G_1 .

3. **G_2 est monochrome de couleur y et $G_1 \setminus v_1$ est monochrome**

Par hypothèse, $G_1 \setminus v_1$ est de couleur \bar{y} . Soit a_1 un sommet quelconque de $G_1 \setminus v_1$. On fait maintenant "comme si" a_1 était de couleur y . Dans ce cas, G_1 serait $(1, v_1, c)$ -réductible et le premier coup d'une telle réduction serait la capture par a_1 d'un certain sommet b_1 . On décide alors de jouer de a_1 vers a_2 , puis d'appliquer une $(1, b_2, y)$ -réduction de G_2 . En jouant ensuite de b_2 vers b_1 , on fait maintenant "comme si" ce coup était le premier d'une $(1, v_1, c)$ -réduction de G_1 , où a_1 serait de couleur opposée.

□

Théorème 19. *Soit G un graphe fortement 1-réductible contenant au moins quatre sommets. Alors le produit $K_n \square G$ est fortement 1-réductible.*

Preuve. Par induction sur n . Pour $n = 2$, ce théorème est vrai d'après le lemme 12. Soit $n > 2$, et on suppose le résultat vrai au rang $(n - 1)$.

On considère le graphe $K_n \square G$, où G est un graphe fortement 1-réductible contenant au moins quatre sommets. Sans restreindre la généralité, on suppose que l'on souhaite laisser la dernière pierre sur le sommet v_1 . Soit $c \in \{0,1\}$. On considère n'importe quelle disposition des pierres sur $K_n \square G$ telle que $K_n \square G \setminus \{v_1\}$ ne soit pas monochrome. On va maintenant prouver que cette configuration est $(1, v_1, c)$ -réductible. Trois cas seront considérés:

1. **Il existe $i \in [2 \dots n]$ tel que G_i est non monochrome.**

Puisque G possède au moins quatre sommets, il existe deux sommets a_i et b_i tels que $G_i \setminus \{a_i, b_i\}$ ne soit pas monochrome. Pour les mêmes raisons, dans n'importe quelle autre copie G_j , $c(a_j)$ ou $c(b_j)$ (ou peut-être les deux) n'est pas une couleur rare. Sans restreindre la généralité, on suppose que $c(a_j)$ est commune sur G_j . On commence alors par appliquer une $(1, a_i, c(a_j))$ -réduction de G_i , suivi d'un coup de a_i vers a_j . Le graphe restant est un $K_{n-1} \square G$ non monochrome, ce qui permet d'appliquer l'hypothèse d'induction.

2. **Pour tout $i \in [2 \dots n]$, G_i est monochrome de couleur y .**

Si l'on supprime la copie G_n , la configuration est $(1, v_1, c)$ -réductible d'après l'hypothèse d'induction. Dans cette réduction, il existe un coup d'un certain a_i vers un certain b_i de couleur y , où $1 < i < n$. Quand on rajoute la copie G_n , on applique la $(1, v_1, c)$ -réduction comme si cette copie était absente, et au moment de jouer de a_i vers b_i , on joue vers a_n à la place. On enchaîne par une $(1, b_n, \bar{y})$ -réduction rendue possible sur G_n , puis b_n capture b_i . On n'a ensuite plus qu'à terminer l'exécution de la $(1, v_1, c)$ -réduction.

3. **Pour tout $i \in [2 \dots n]$, G_i est monochrome, mais toutes les copies n'ont pas la même couleur.**

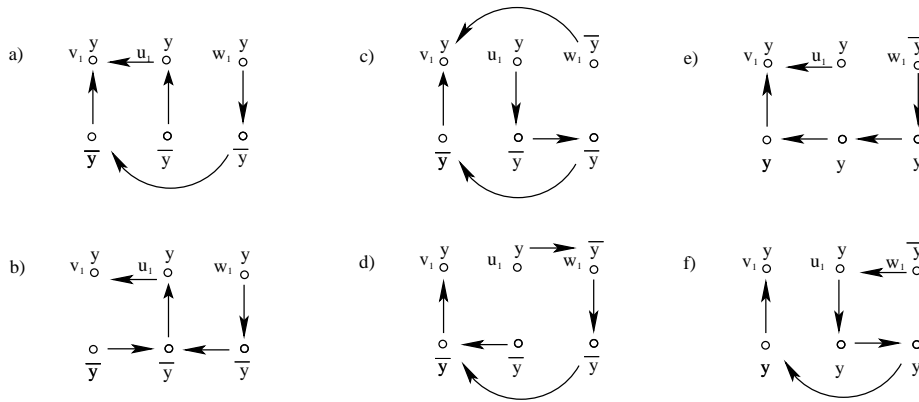
Soit y la couleur d'un sommet de $G_1 \setminus v_1$. Soient G_i ($i > 1$) un copie monochrome de couleur y , et G_j ($j > 1$) un copie de couleur \bar{y} . Tous les sommets de G_j capturent alors toutes leurs copies dans G_i . On se ramène à un $K_{n-1} \square G$ les deux couleurs apparaissent en dehors de v_1 : l'hypothèse d'induction est applicable.

□

Ces résultats nous permettent d'affirmer que tout graphe de Hamming contenant un K_4 est fortement 1-réductible. Le reste de notre étude va alors porter sur les graphes de Hamming produits de K_2 et K_3 . Les trois lemmes suivants vont nous conduire au résultat général:

Lemme 13. Soit G le graphe produit $K_2 \square K_3$ et v_1 un sommet quelconque de G . On notera G_1 et G_2 les deux copies de K_3 qui constituent G . On fera en sorte que G_1 soit la copie qui contienne v_1 . Soit $c \in \{0,1\}$. Pour toute configuration de jeu sur G telle que: (i) $c(v_1)$ n'est pas rare sur G_1 et (ii) $K_3 \square K_2 \setminus v_1$ n'est pas monochrome, G est $(1, v_1, c)$ -réductible.

Preuve. Pour $i \in \{1,2\}$, soient v_i , u_i , et w_i les sommets de chaque copie G_i . Sans restreindre la généralité, on suppose qu'on veut laisser la dernière pierre sur v_1 . D'après (i), on peut supposer que v_1 et u_1 portent la couleur y . Soit $c \in \{0,1\}$. On va maintenant montrer que toute configuration satisfaisant (i) et (ii) est $(1, v_1, c)$ -réductible. On considère plusieurs cas:


 FIG. 4.18 – réduction de $K_2 \square K_3$

- $c(w_1) = y$ et G_2 est monochrome. D'après le lemme 5, G_2 est soit $(1, u_2, \bar{y})$ -réductible, soit $(1, w_2, \bar{y})$ -réductible. Sans restreindre la généralité, on suppose que G_2 est $(1, u_2, \bar{y})$ -réductible. On applique cette réduction et on joue de u_2 vers u_1 . Les conditions sont maintenant réunies sur la clique G_1 pour appliquer une $(1, v_1, c)$ -réduction.
- $c(w_1) = y$ et G_2 is monochrome. D'après (ii), G_2 est monochrome de couleur \bar{y} . En fonction de c , on joue comme indiqué sur les schémas (a) ($c = y$) et (b) ($c = \bar{y}$) de la figure 4.18.
- $c(w_1) = \bar{y}$ et G_2 est $(1, v_2, \bar{y})$ -réductible. On applique alors cette réduction, et on joue de v_2 vers v_1 . G_1 est maintenant $(1, v_1, c)$ -réductible grâce au lemme 5.
- $c(w_1) = \bar{y}$ et G_2 is monochrome. On joue comme indiqué sur la figure 4.18. Sur les schémas (c) et (e), on a $c = y$. Pour les schémas, (d) et (f), on veut finir avec $c = \bar{y}$.
- $c(w_1) = \bar{y}$ et $c(v_2)$ est rare sur G_2 . On peut alors toujours jouer de v_2 vers u_2 ou w_2 , de telle sorte que $c(u_2) \neq c(u_1)$ et

$c(w_2) \neq c(w_1)$ après un tel coup. On joue ensuite de u_2 vers u_1 , et de w_2 vers w_1 . D'après le lemme 5, on exécute ensuite une $(1, v_1, c)$ -réduction de G_1 .

□

Lemme 14. $K_3 \square K_3$ est fortement 1-réductible.

Preuve. On considère le graphe $K_3 \square K_3$ dont v_1 est un sommet quelconque. On suppose que l'on souhaite laisser la dernière pierre sur le sommet v_1 . Soit $c \in \{0, 1\}$. On considère alors n'importe quelle disposition des pierres sur $K_3 \square K_3$ telle que $K_3 \square K_3 \setminus \{v_1\}$ ne soit pas monochrome. On va maintenant prouver que cette configuration est $(1, v_1, c)$ -réductible.

Parmi les six copies de K_3 qui constituent ce graphe (trois "horizontales" et trois autres "verticales"), il en existe une non monochrome qui ne contient pas v_1 : on l'appellera G_3 . On appelle G_1 la copie parallèle qui contient v_1 et G_2 la dernière copie parallèle. G_3 est alors 1-réductible avec n'importe quelle couleur sur deux sommets possibles, qu'on nommera a_3 et b_3 . Au moins un de ces deux sommets est différent de v_3 . Sans restreindre la généralité, on suppose que c'est la cas de a_3 .

Si $G_1 \setminus v_1$ n'est pas monochrome, on applique alors une $(1, a_3, \overline{c(a_2)})$ -réduction sur G_3 puis on joue de a_3 vers a_2 . Si $G_1 \setminus v_1$ est monochrome, on applique une $(1, a_3, \overline{c(a_1)})$ -réduction sur G_3 puis on joue de a_3 vers a_2 . Dans les deux cas, on obtient une configuration sur un $K_2 \square K_3$ sur laquelle s'applique le lemme 13. □

Lemme 15. $K_3 \square K_3 \square K_2$ est fortement 1-réductible.

Preuve. On considère le graphe $K_3 \square K_3 \square K_2$ dont v_1 est un sommet quelconque. On suppose que l'on souhaite laisser la dernière pierre sur le sommet v_1 . Soit $c \in \{0, 1\}$. On considère alors n'importe quelle disposition des pierres sur $K_3 \square K_3 \square K_2$ telle que $K_3 \square K_3 \square K_2 \setminus \{v_1\}$ ne soit pas monochrome. On va maintenant prouver que cette configuration est $(1, v_1, c)$ -réductible.

On appelle G_1 la copie de K_3 qui contient v_1 . G_2 , G_3 , et G_4 sont les trois autres copies de K_3 , G_3 étant celle qui ne contient aucun sommet adjacent à v_1 . On distingue deux cas:

- **Le graphe privé de G_1 n'est pas monochrome.**

Cela signifie qu'il existe une copie non monochrome de $K_2 \square K_3$ ne contenant pas G_1 . Sans restreindre la généralité, on suppose que c'est le cas de celle constituée par G_3 et G_4 .

On suppose tout d'abord que les deux sommets a_1 et b_1 de $G_1 \setminus v_1$ sont de même couleur. Au moins un des deux sommets copies a_4 et b_4 porte une couleur commune sur G_4 . On suppose que c'est le cas de a_4 . Les conditions sont réunies pour utiliser le lemme 13, et appliquer une $(1, a_4, \overline{c(a_1)})$ -réduction de $G_3 \cup G_4$. Puis w_4 capture

w_1 . $G_1 \cup G_2 \setminus v_1$ n'est plus monochrome et $c(v_1)$ est commune sur G_1 . Cela signifie que $G_1 \cup G_2$ est $(1, v_1, c)$ -réductible.

- **Le graphe privé de G_1 est monochrome de couleur y .**

Alors $G_1 \setminus v_1$ contient un sommet de couleur \bar{y} . Par ailleurs, on notera z la couleur initiale de v_1 . La façon de jouer pour résoudre ce problème est décrite sur le schéma 4.19:

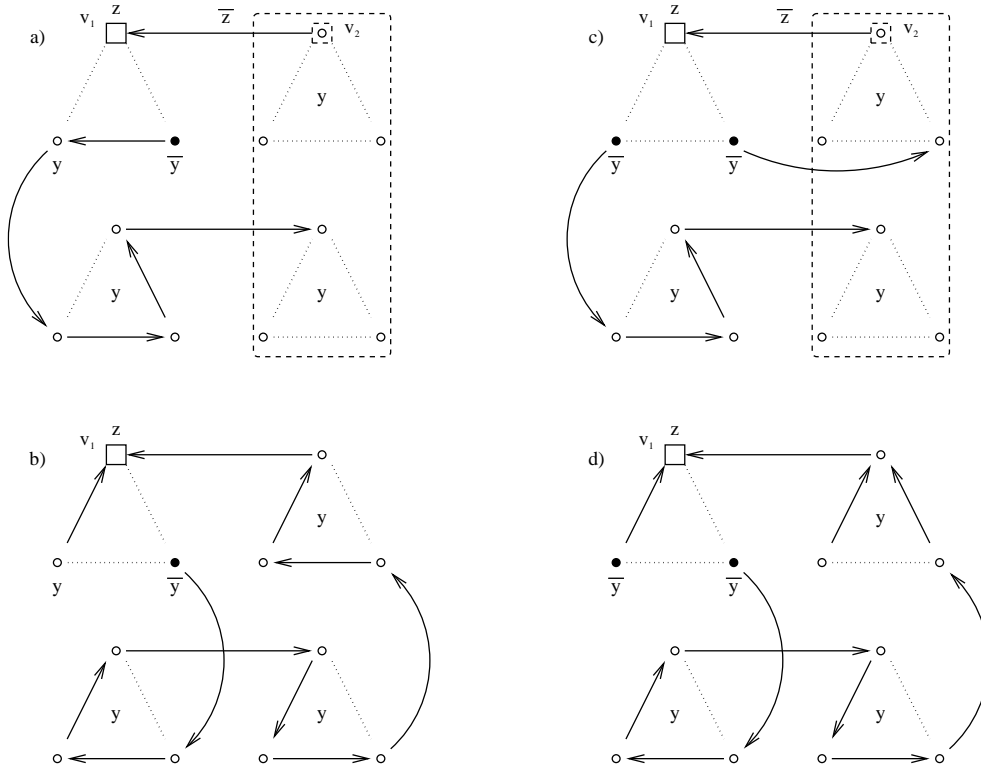


FIG. 4.19 – 1-réduction de $K_3 \square K_3 \square K_2$

Dans les cas (a) et (c), on a $c = \bar{z}$. On applique les captures indiquées sur le schéma, qui laissent une pierre en v_1 et une copie de $K_2 \square K_3$. D'après le lemme 13, on peut $(1, v_2, \bar{z})$ -réduire cette copie, puis jouer de v_2 vers v_1 pour conclure.

Dans les cas (b) et (d), on a $c = z$. Il suffit de suivre les coups indiqués sur le graphique...

□

Ces derniers résultats nous permettent de conclure sur les graphes de Hamming en général:

Théorème 20. *Tout graphe de Hamming généralisé qui n'est ni un hypercube, ni $K_2 \square K_3$, est fortement 1-réductible.*

On peut noter que $K_2 \square K_3$ est 1-réductible pour toute coloration non monochrome, et aussi 1-réductible joker.

4.4 Conclusions et perspectives

Lorsque l'on choisit d'étudier un nouveau jeu comme celui du *Solitaire Clobber 2*, le nombre de directions est tellement vaste qu'on peut s'attendre à rencontrer plusieurs impasses...La résolution rapide du problème sur les chaînes et les cycles nous a naturellement motivé et incité à poursuivre nos recherches sur ce jeu. J'avoue que les résultats se sont relativement bien enchaînés ; le cas des arbres a sans doute été le plus laborieux, d'autant plus qu'on hésitait entre un problème polynomial ou NP-complet. Les graphes de Hamming généralisés ont sans doute été la partie la plus amusante de nos investigations.

Ceci dit, d'autres recherches sont encore en cours et certaines questions n'ont pour le moment toujours pas de réponse. Au sujet des hypercubes, on ne sait par exemple toujours pas caractériser les configurations 1-réductibles. Par ailleurs, le problème sur les grilles n'a toujours pas été résolu. On sait y répondre lorsque la configuration initiale est un échiquier, mais dans le cas général, cela reste ouvert. Nous pensons qu'à partir d'une certaine taille, les grilles sont fortement 2-réductibles. Cependant, nos techniques de preuve développées ici ne suffisent pas pour en être certain. La dernière étude en cours est celle de la grille multidimensionnelle où la disposition est en échiquier.

Conclusion

Dans cette thèse, nous avons étudié les jeux combinatoires dont le support est un graphe, et impliquant deux puis un seul joueur. Dans le premier cas, il s'agissait surtout d'une étude des positions perdantes et gagnantes des jeux choisis. Dans le second cas, on se rapproche plus d'un problème d'optimisation combinatoire, pour estimer la valeur minimale d'une fonction objectif donnée.

Dans un premier temps, on s'est intéressé aux jeux qui entrent dans la définition habituelle des jeux combinatoires à deux joueurs. Nous avons donné plusieurs résultats généraux concernant une famille de jeux proche du jeu de domination. Ce résultat offre des perspectives intéressantes quant à la construction de nouveaux jeux, et il serait sans doute utile de poursuivre l'étude à la recherche d'exemples concrets qui justifient l'intérêt de l'opération *twin and match*.

Le jeu combinatoire qui nous a servi de fil rouge dans notre première partie aura été le Wythoff's game. Les diverses variantes que nous avons proposées illustrent le type de domaine que nous pouvons rencontrer lors de la recherche des positions perdantes d'un jeu. Si la vision "noyau de graphe" est très utile pour justifier de la nature perdante d'une position de jeu, l'obtention d'une stratégie polynomiale s'effectue souvent à l'aide de propriétés de théorie des nombres. Dans la plupart des variantes que nous avons traitées (puissances du roi, jeu aux trois vecteurs avec $\beta > \alpha(2\gamma - 1)$), la caractérisation des P-positions est élégante. Dans les autres cas, on a été limité par des problèmes de théorie des nombres (notamment pour le jeu $[2,2,1]$). Une étude de ce cas avec une connaissance plus approfondie des séquences d'entiers permettrait d'accéder à un résultat complet sur le jeu aux trois vecteurs. Par ailleurs, il peut sembler pertinent d'étendre l'étude des P-positions à celle des nimbers non nuls. Même si au premier abord, tous les jeux semblent différents, il se pourrait que l'équivalence apparaisse à partir de certains rangs de α , β , ou γ . Enfin, il peut être intéressant de considérer une version bornée du jeu aux trois vecteurs: bien que les résultats de convergence n'apparaissent pas immédiatement, on peut espérer obtenir des propriétés semblables à celles obtenues avec les puissances du roi.

Nous avons ensuite choisi d'étudier des jeux dont certains paramètres ne les font plus rentrer dans la catégorie des jeux combinatoires à deux joueurs. Le premier exemple est le jeu du Pic'arête, où le gagnant est déterminé par un nombre de points accumulés au cours de la partie. On a montré que l'étude de ce type de jeu n'est pas si éloignée de la précédente, de par l'utilisation d'une fonction "valeur" de jeu. Dans la plupart des cas, on a su dire quel joueur est en position gagnante. Seul un cas (très) pathologique reste en suspens. Nous avons aussi réussi à donner une estimation du nombre de points que peut espérer obtenir chacun des deux joueurs. Affiner cette estimation pour obtenir un encadrement de cette valeur reste un problème très pertinent, mais qui nécessite de considérer d'autres paramètres que ceux que nous avons choisis.

La relaxation de la contrainte du nombre de joueurs nous a fait sortir complètement des jeux combinatoires pour nous faire entrer dans le monde des casse-têtes. A travers les exemples des Solitaire et Solitaire Clobber, on voit que la recherche d'invariants est très utile pour démontrer des propriétés de non-existence. A propos du jeu du Solitaire sur un cycle avec un seul trou vide au départ, l'obtention d'un invariant prouvant que les cycles de taille impaire ne sont pas 1-réductibles reste un problème ouvert.

Le jeu du Clobber étant très récent, très peu de résultats sont connus à ce jour, c'est pourquoi il a été très plaisant de s'aventurer sur ce terrain quasi-inconnu. Nos résultats au sujet de Solitaire Clobber 2 proposent aussi bien des aspects algorithmiques (valeur de réductibilité des chaînes et arbres calculées en temps polynomial), que des problèmes d'existence sur des graphes (2-réductibilité des graphes de Hamming). Ils ont été soumis dans deux journaux ([ES06, PS06]). Des questions qui découlent directement de nos travaux restent toutefois ouvertes: le problème de la caractérisation des hypercubes 1-réductibles reste en suspens. On peut d'ailleurs se demander si l'utilisation de l'invariant $\delta(C)$ ne peut pas nous être utile pour résoudre ce problème. Le cas des grilles reste également ouvert. Dans un article récemment soumis (cf. [LES06]), nous avons montré que les grilles d -dimensionnelles où la disposition des pierres est en échiquier sont 1-réductibles lorsque $\delta(C) \bmod 3 \neq 0$. Nous étudions actuellement le cas des grilles où la disposition initiale est quelconque, et espérons borner la valeur de réductibilité à une constante (2 à partir d'une certaine taille de grille?). Le champ des extensions possibles pour ce jeu semble très vaste; on pourrait par exemple aussi le considérer sur d'autres types de graphes, comme la grille hexagonale ou triangulaire. Le jeu sur les puissances de cycles peut également avoir un sens: quelle que soit la disposition initiale des pierres, les cycles $C(n,1)$ ne sont pas 1-réductibles, contrairement aux cycles $C(n, \lfloor n/2 \rfloor)$. Peut-on trouver la valeur minimum de k pour laquelle $C(n,k)$ est 1-réductible? De telles variantes nous amèneraient sans doute à déterminer un nouvel invariant pouvant s'appliquer sur des

graphes non bipartis.

Bibliographie

- [ACJ82] A. Itai, C.H. Papadimitriou, and J.L. Szwarcfiter. Hamilton paths in grid graphs. *SIAM Journal on Computing*, 11:676–686, 1982.
- [AGNW05] M. H. Albert, J. P. Grossman, R. J. Nowakowski, and D. Wolfe. An introduction to clobber. *INTEGERS, Electr. J of Combinat. Number Theory*, 5(2):#A01, 12pp., 2005.
- [AL85] J. O. A. Ayeni and H. O. D. Longe. Game people play: Ayo. *Internat. J. Game Theory*, 14:207–218, 1985.
- [AVM] K. Acosta, M.H. Viera, and J.E. Lugo Martinez. Lexicographic and non-lexicographic greedy codes. *private report*.
- [BCG01] E.R. Berlekamp, J.H. Conway, and R.K. Guy. *Winning ways for your mathematical plays*. A K Peters, 2001.
- [BD92] R. B. Banerji and C. A. Dunning. On misere games. *Cybernetics and Systems*, 23:221–228, 1992.
- [Ber96] C. Berge. Combinatorial games on a graph. *Discrete Math.*, 151:59–65, 1996.
- [Ber00] E.R. Berlekamp. *The Dots and Boxes game*. A K Peters, 2000.
- [BF81] M. Boshernitzan and Aviezri S. Fraenkel. Nonhomogeneous spectra of numbers. *Discrete Math.*, 34:325–327, 1981.
- [BF90] U. Blass and Aviezri S. Fraenkel. The sprague-grundy function for wythoff's game. *Theor. Comput. Sci.*, 75:311–333, 1990.
- [Bou05] C.L. Bouton. Nim, a game with a complete mathematical theory. *Annals of Math.*, 3:35–39, 1905.
- [BP93] R.A. Brualdi and V.S. Pless. Greedy codes. *J. Combin. Theory A*, 64:10–30, 1993.
- [Byr03] S. Byrnes. Poset game periodicity. *INTEGERS, Electr. J. of Combinat. Number Theory*, 3:#G3, 16pp., Comb. Games Sect., 2003.
- [CN99a] P. Cull and I. Nelson. Error-correcting codes on the towers of hanoi graphs. *Discrete Math.*, 208/209:157–175, 1999.
- [CN99b] P. Cull and I. Nelson. Perfect codes, np-completeness, and towers of hanoi graphs. *Bull. Inst. Combin. Appl.*, 26:13–38, 1999.
- [Con59a] I. G. Connell. A generalization of wythoff's game. *Canad. Math. Bull.*, 2:181–190, 1959.

- [Con59b] I.G. Connell. Generalization of wythoff's game. *Canad. Math. Bull.*, pages 181–190, 1959.
- [Con76] J.H. Conway. *On number and games*. Academic Press, 1976.
- [Con90] J. H. Conway. Integral lexicographic codes. *Discrete Math.*, 83:219–235, 1990.
- [Con94] J. H. Conway. The surreals and the reals. real numbers, generalizations of the reals, and theories of continua. In *Synthese Lib.*, volume 242, pages 93–103. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1994.
- [Cox53] H. S. M. Coxeter. The golden section, phyllotaxis and wythoff's game. *Scripta Math.*, 19:135–143, 1953.
- [DDF04] Erik D. Demaine, Martin L. Demaine, and Rudolf Fleischer. Solitaire clobber. *Theor. Comput. Sci.*, 313:325–338, 2004.
- [dP84] H. de Parville. La tour d'hanoï et la question du tonkin. *La Nature*, 12:285–286, 1884.
- [ES05a] E.Duchêne and S.Gravier. A geometrical extension of wythoff's game. *submitted in Discrete Math.*, 2005.
- [ES05b] M.Mhalla E.Duchêne and S.Gravier. Combinatorial graph games. *to appear in Ars Combinatoria*, 2005.
- [ES06] L.Faria E.Duchêne and S.Gravier. Solitaire clobber played on graphs. *submitted in Theoretical Computer Science*, 2006.
- [FB73] A. S. Fraenkel and I. Borosh. A generalization of wythoff's game. *J. Combin. Theory (Ser. A)*, 15:175–191, 1973.
- [FO98a] A. S. Fraenkel and M. Ozery. Adjoining to wythoff's game its p -positions as moves. *Theoret. Comput. Sci.*, 205:283–296, 1998.
- [FO98b] A.S. Fraenkel and M. Ozery. Adjoining to wythoff's game its p -positions as moves. *Theoret. Comput. Sci.*, pages 283–296, 1998.
- [Fra] Aviezri S. Fraenkel. Combinatorial games: Selected bibliography with a succinct gourmet introduction. <http://www.wisdom.weizmann.ac.il/fraenkel>.
- [Fra82] A. S. Fraenkel. How to beat your wythoff games' opponent on three fronts. *Amer. Math. Monthly*, 89:353–361, 1982.
- [Fra95] Aviezri S. Fraenkel. Error-correcting codes derived from combinatorial games. *Combinatorial games, MSRI Publications*, 29, 1995.
- [Fra00] Aviezri S. Fraenkel. Recent results and questions in combinatorial game complexities. *Theor. Comput. Sci.*, 249:265–288, 2000.
- [Fra02] Aviezri S. Fraenkel. Complexity, appeal and challenges of combinatorial games. 2002. <http://www.wisdom.weizmann.ac.il/fraenkel>.

- [FS91] A.S. Fraenkel and E.R. Scheinerman. A deletion game on hypergraphs. *Discr.App.Math.*, 30:155–162, 1991.
- [FS93] A.S. Fraenkel and S. Simonson. Geography. *Theor.Comput.Sci.*, 110-1, 1993.
- [FSU93] A.S. Fraenkel, E.R. Scheinerman, and D. Ullman. Undirected edge geography. *Theor.Comput.Sci.*, 112-2, 1993.
- [FT75] Aviezri S. Fraenkel and U. Tassa. Strategy for a class of games with dynamic ties. *Comput. Math. Appl.*, 1:237–254, 1975.
- [FY86] Aviezri S. Fraenkel and Y. Yesha. The generalized sprague-grundy function and its invariance under certain mappings. *J. Combin. Theory A*, 43:165–177, 1986.
- [Gal74] D. Gale. A curious nim-type game. *Amer. Math. Monthly*, 81:876–879, 1974.
- [GN82] D. Gale and A. Neyman. Nim-types games. *Internat. J. Game Theory*, 11:17–20, 1982.
- [Gol79] M.J.E. Golay. Notes on digital coding. *Proc. I.R.I. (IEEE)*, 37:657, 1979.
- [Hor78] A.F. Horadam. Wythoff pairs. *Fibonacci Quart.*, pages 147–151, 1978.
- [JS86] J.H.Conway and N.J.A. Sloane. Lexicographic codes: error-correcting codes from game theory. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 32:337–348, 1986.
- [KE00] William F. Klostermeyer and Elaine M. Eschen. Perfect codes and independent dominating sets. *Congr. Numerantium*, 142:7–28, 2000.
- [Knu74] D. E. Knuth. *Surreal Numbers*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1974.
- [Lan02] H. Landman. A simple fsm-based proof of the additive periodicity of the sprague-grundy function of wythoff’s game. In R. J. Nowakowski, editor, *More Games of No Chance*, Proc. MSRI Workshop on Combinatorial Games, July, 2000, Berkeley, CA, MSRI Publ., volume 42, pages 383–386. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [LES06] L.Beaudou, E.Duchêne, and S.Gravier. A clobber solitaire game on d-dimensional grids. *submitted in Discrete Math.*, 2006.
- [Loe95] D.E. Loeb. Gagner au jeu de nim, 1995.
- [LS06] E.Duchêne L.Blanc and S.Gravier. A deletion game on graphs: le pic’arête. *Integers, Elec. J. on Combin. Number Th.*, 6:G02, 2006.
- [MR88] H. Meyniel and J.P. Roudneff. The vertex picking game and a variation of the game of dots and boxes. *Discr. Math.*, 70-3, 1988.

- [MS77] F.J. MacWilliams and N.J.A. Sloane. *The theory of error correcting codes*. North-Holland, 1977.
- [NO05] R. J. Nowakowski and P. Ottaway. Vertex deletion games with parity rules. *INTEGERS, Electr. J of Combinat. Number Theory*, 5(2):#A15, 16pp., 2005.
- [NP96] R. J. Nowakowski and D. G. Poole. Geography played on products of directed cycles. In R. J. Nowakowski, editor, *Games of No Chance*, Proc. MSRI Workshop on Combinatorial Games, July, 1994, Berkeley, CA, MSRI Publ., volume 29, pages 329–337. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [Pet02] Ivars Peterson. Getting clobbered. *Science News*, 161, 2002. <http://www.sciencenews.org/articles/20020427/mathtrek.asp>.
- [PS06] E.Duchêne P.Dorbec and S.Gravier. Solitaire clobber on hamming graphs. *submitted in Integers*, 2006.
- [R.J96] R.J.Nowakowski. *Games of no chance*. Cambridge University Press, 1996.
- [Rom92] Steven Roman. *Coding and information theory*. Springer-Verlag, 1992.
- [Sil76] R. Silber. A fibonacci property of wythoff pairs. *Fibonacci Quarterly*, pages 380–384, 1976.
- [Smi66] C.A.b. Smith. Graphs and composite games. *J. Combin. Theory*, 1:51–81, 1966.
- [Spr36] R.P. Sprague. Uber mathematische kampfspiele. *Tohoku Math.*, 41:438–444, 1936.
- [V.I60] V.I.Levenstein. A class of systematic codes. *Soviet. Math. Dokl.*, 1, 1960.
- [Wyt07] W. Wythoff. A modification of the game of nim. *Nieuw Arch. Wisk.*, 7:199–202, 1907.
- [Zan97] A.J.Van Zanten. Lexicographic order and linearity. *Designs, codes and cryptography*, 10:85–97, 1997.