INF233-TD17-Graphes planaires et révisions.

6 décembre 2011

1 Des graphes planaires

Exercice 1 : Trois villas doivent être reliées au réseau d'eau, d'électricité et de gaz. On veut savoir s'il est possible de réaliser cela sans que les canalisations ne se croisent.

Question 1 – Modélisez ce problème à l'aide d'un graphe. (On ne demande pas de résolution du problème, cela sera fait dans un autre exercice).

Exercice 2 : (Cours : **Formule d'Euler**)

Soit G un graphe planaire. On note :

1. n son nombre de sommets,
2. m son nombre d'arêtes,
3. f son nombre de faces (on compte la face extérieure comme une face).

Question 1 – Dessinez un graphe planaire quelconque mais **connexe**. Calculez les valeurs de n, m et f et de $n - m + f$. Comparez avec vos voisins. Que remarquez-vous ?

On fixe la valeur du nombre de sommets n. On veut montrer par récurrence sur le nombre d'arêtes la propriété suivante :

$\mathcal{P}(m)$: Tout graphe planaire connexe avec n sommets et m arêtes vérifie la formule d'Euler :

$$n - m + f = 2$$

Question 2 – Quel est le cas de base ? Montrez la propriété pour ce cas là.

Soit $m \geq n - 1$ un entier. On suppose $\mathcal{P}(m)$ vraie. Soit G un graphe planaire connexe avec n sommets et $m + 1$ arêtes.

Question 3 – Montrez qu'il existe une arête e de G telle que $G' = G - \{e\}$ le sous-graphe partiel de G où l'on a enlevé l'arête e soit connexe. On considère dans la suite une telle arête et un tel G'.

Question 4 – Montrez que G' est planaire et vérifie donc la formule d'Euler. Quelles sont les valeurs n',m' et f' de n,m et f pour G' en fonction de celles de G ? Conclure que la formule d'Euler est vraie pour G, et donc que $\mathcal{P}(m)$ est vraie pour tout m.

Question 5 – On suppose maintenant que le graphe G n'est plus connexe et possède c composantes. Montrez qu'on a alors $n - m + f = 1 + c$

Exercice 3 :

Soit G un graphe planaire connexe avec n sommets, m arêtes et f faces (face extérieure comprise).

Question 1 – Soit $\mathcal{E} = \{(e, F)$ tel que e soit une arête bordant la face $F\}$. Comptez la taille de $\mathcal{E}$ de deux manière pour montrer que $2m \geq 3f$.

Question 2 – Utilisez la question précédente et la formule d'Euler pour montrer que dans tout graphe planaire connexe, on a :

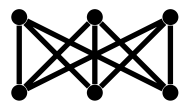
$$n \geq \frac{m+6}{3}$$

Question 3 – Utilisez la question précédente pour démontrer que K_5 n'est pas planaire.

Question 4 – (*) Avec la même méthode, montrez que si G n'a pas de triangle, on a :

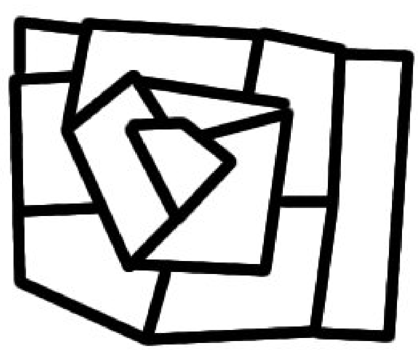
$$n \geq \frac{m+4}{2}$$

Utilisez ce résultat pour montrer que le graphe suivant n'est pas planaire :



Exercice 4 : (Cours) Montrez en utilisant la formule d'Euler que dans tout graphe planaire il y a un sommet de degré inférieur ou égal à 5.

Exercice 5 : Le dessin suivant reprénsente les régions du pays d'Oulalie. Combien de couleurs sont nécessaires pour colorier cette carte sans que deux régions frontalières n'aient la même couleur ?



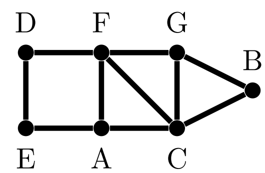
Exercice 6 : **Coloration avec 6 couleurs des graphes planaires**

Montrez en utilisant l'exercice précédent et une récurrence sur le nombre de sommets du graphe que tout graphe planaire admet une coloration propre de ses sommets avec six couleurs.

Exercice 7 : On se donne n points dans l'espace. Certains sont reliés par des segments, d'autres non, et chacun des points est relié au maximum à 3 autres points. Prouver qu'il existe au moins $\frac{n}{4}$ points tels que deux d'entre eux ne soient pas reliés.

2 Encore de la coloration

Exercice 8 : On considère le graphe suivant :



Question 1 – Donnez la coloration que renvoit l'algorithme glouton de coloration pour ce graphe en prenant l'ordre ABCDEFG.

Question 2 – Quel est le nombre chromatique de ce graphe ? Donnez une coloration optimale de ce graphe de telle sorte qu'un sommet colorié avec la couleur i ne puisse pas être changé avec unecouleur $j < i$.

Question 3 – Trouver un ordre des sommets tel que l'algortihme glouton pour cet ordre donne la coloration trouvée à la question précédente.

Exercice 9 : Question 1 – Soit G un graphe dont les sommets sont coloriés proprement avec $\chi(G)$ couleurs. Montrez que pour chaque couleur, il existe un sommet tel que toutes les autres couleurs soient présentes dans son voisinage.

Question 2 – Montrez que dans un graphe G il y a toujours $\chi(G)$ sommets de degré au moins $\chi(G)$.

Exercice 10 : **Coloration et graphes de Mycielski** Cet exercice a pour but de construire une famille infinie de graphes pour lesquelles ω vaut 2 mais le nombre chromatique peut être aussi large que l'on veut.

Soit M_0 le graphe K_2. Par récurrence on définit M_{n+1} en fonction de M_n, $n \geq 0$, de la façon suivante :

- si $v_1, \ldots, v_k$ sont les sommets de M_n, alors les sommets de M_{n+1} sont $v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_k, u$
- si v_iv_j est une arête de M_n alors v_iv_j est aussi une arête de M_{n+1}
- si v_iv_j est une arête de M_n alors w_iv_j est une arête de M_{n+1}
- uw_i est une arête de M_{n+1} pour tout $i = 1, \ldots, k$

Question 1 – Dessiner M_1 et M_2.

Question 2 – Démontrer que M_n a $3 \times 2^n - 1$ sommets pour tout $n \geq 0$.

Question 3 – Démontrer que par récurrence sur n que $\omega(M_n) = 2$ pour tout $n \geq 0$.

On veut montrer par récurrence sur n que $\chi(M_n) = 2 + n$ pour tout $n \geq 0$. Le cas de base ($n = 0$) est clair. Soit n un entier, supposons que $\chi(M_n) = n + 2$ et considérons M_{n+1}.

Question 4 – Montrez que $\chi(M_{n+1}) \leq \chi(M_n) + 1$.

On veut montrer que $\chi(M_{n+1}) \geq \chi(M_n) + 1$. Supposons par l'absurde qu'il existe une coloration c de M_{n+1} avec $k = \chi(M_n)$ couleurs. On peut supposer que u a la couleur k. La coloration c induit une k-coloration de M_n, dont le nombre chromatique est justement

k. D'après l'exercice précédent, il existe un sommet v_j de couleur k dont toutes les autres couleurs apparaissent dans son voisinage.

Question 5 – Quelle doit nécessairement être la couleur de w_j ?

Question 6 – Trouver une contradiction et finir la récurrence.

Les graphes de la famille $(M_n)_{n\geq 0}$ sont appelés *graphes de Mycielski* en l'honneur du mathématicien du même nom.

Exercice 11 : **Régulation de la circulation**

La figure ci-dessous représente les trajectoires de neuf voies $\{V_1, \ldots, V_9\}$ à un carrefour très fréquenté de Kuala Lumpur (Malaisie). Chaque voie est pourvue de ses propres feux de signalisation.

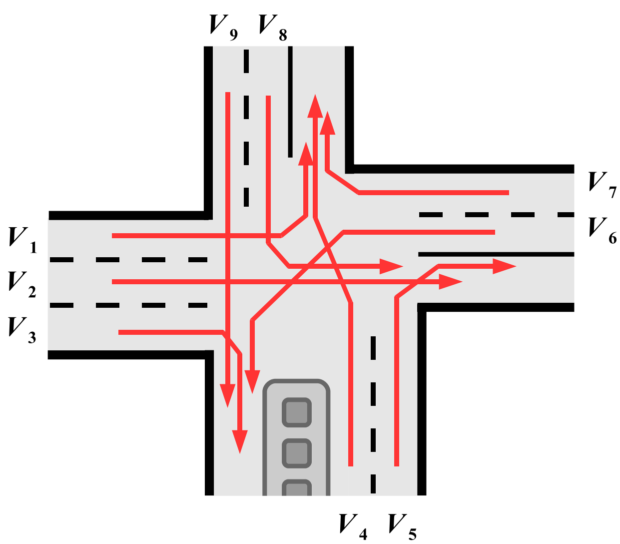


Figure 1 – Diagramme des neuf voies du carrefour. Le très grand nombre de véhicules empruntant ce carrefour (64 000 véhicules par jour en moyenne) conduit les autorités à réguler la circulation en phases, où à chaque phase les voies dont le feu est vert ne sont pas en conflit. Deux voies sont considérées en conflit si elles se croisent (par exemple V_1 et V_8) ou si elles ont la même destination (par exemple V_1 et V_7).

Les voitures d'une voie ne peuvent franchir le carrefour que lorsque leur feu est vert. La circulation est régulée par des cycles de 160 secondes, chaque cycle comportant 4 phases de durées 40 secondes comme suit :

- phase 1 : V_1, V_2 et V_3 sont au vert (les autres au rouge)
- phase 2 : V_4, V_5 et V_9 sont au vert (les autres au rouge)
- phase 3 : V_6 et V_7 sont au vert (les autres au rouge)
- phase 4 : V_8 est au vert (les autres au rouge)

Question 1 – Modélisez la situation par un graphe, tel que le nombre minimum de phases pour réguler le trafic soit égal au nombre chromatique de ce graphe.

Question 2 – Peut-on faire mieux que 4 phases pour réguler le trafic ?

Les voies V_2 et V_4 sont en fait très fréquentées, de sorte que les autorités souhaitent que V_2 et V_4 soient au vert deux fois par cycle et non plus une seule fois comme précédemment.

Question 3 – Modifiez le modèle pour prendre en compte cette contrainte ; donner un nouveau cycle ayant un nombre minimum de phases tel que V_2 et V_4 sont au vert deux fois dans le cycle.

Exercice 12 : Un graphe $G = (V, E)$ est dit *biparti* s'il existe une partition (V_1, V_2) de ses sommets telle qu'il n'y ait aucune arête au sein de chaque partie V_1 et V_2.

Question 1 – Montrez que G est biparti si et seulement $\chi(G) \leq 2$.

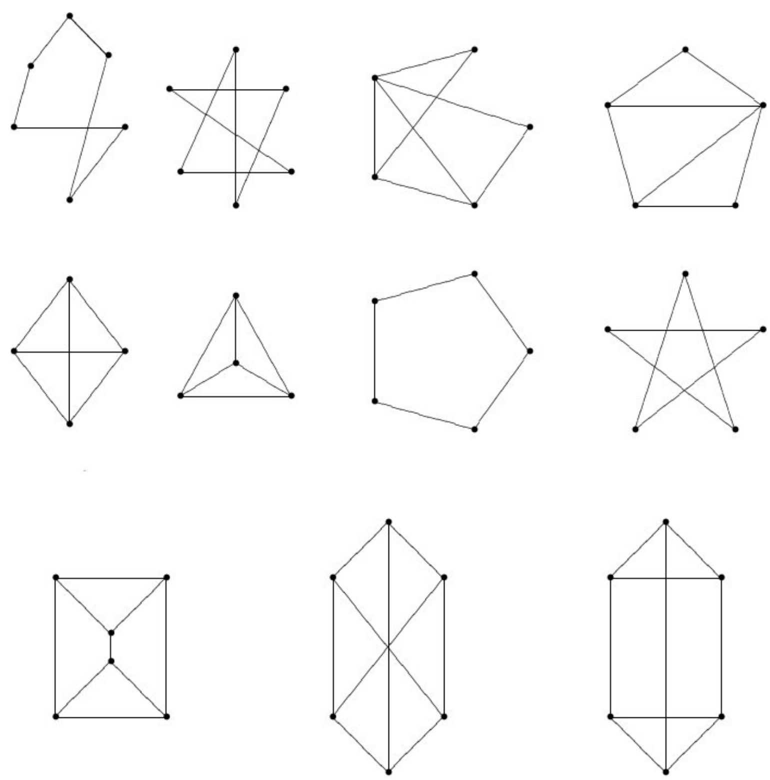
Question 2 – Montrez que G est biparti si et seulement G ne contient aucun cycle de taille impair.

Question 3 – Montrez qu'un arbre est un graphe biparti.

Question 4 – Montrez que si G biparti possède un cycle hamiltonien alors $|V_1| = |V_2|$.

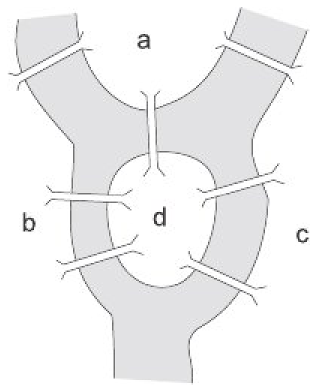
3 D'autres exercices de révisions

Exercice 13 : Parmi les représentations suivantes, dire quelles reprśentations correspondent au même graphe.



Exercice 14 :

Au XVIIIeme siecle, la ville de Königsberg comprenait 2 iles et 7 ponts, agencés comme sur le plan ci dessous.



Question 1 – Les visiteurs souhaitent faire une promenade passant une et une seule fois par chaque pont. Y sont-ils arrivés ?

Exercice 15 : Parmi les séquences de degrés suivantes, lesquelles sont réalisables ? Justifiez vos réponses en donnant soit un graphe qui repésente la séquence, soit en justifiant pourquoi il n'existe pas de tel graphe.

a. $(1; 2; 2; 3; 5; 5)$
b. $(3; 3; 3; 3; 3; 3)$
c. $(1; 1; 1; 1; 1; 1)$
d. $(1; 1; 1; 5; 5; 5)$
e. $(4; 4; 4; 4; 4; 4)$
f. $(1; 2; 2; 3; 4; 4)$
g. $(5; 5; 4; 4; 2; 2)$

Exercice 16 : Soit G un graphe connexe.

Question 1 – Montrez que si $n \geq 2$, il existe un sommet x tel que $G - x$ soit encore connexe.

Question 2 – Montrez que $|E| \geq |V| + 1$.

Exercice 17 : Trouvez un arbre couvrant de poids minimum dans le graphe suivant en utilisant l'Algorithme de Prim.