INF233-TD16-Coloration

30 novembre 2011

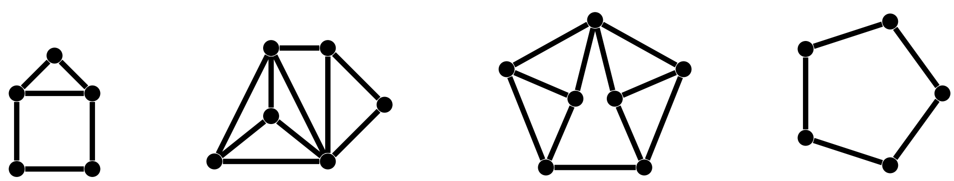
Exercice 1 :

Un groupe de 8 personnes doit participer à deux réunions. À la première réunion, ils sont tous assis autour d'une table ronde. Comme l'entente est totale, pour la seconde réunion, chacun des participants, non seulement ne veut pas se retrouver à côté de l'un ou l'autre de ses voisins, mais ne veut pas non plus qu'ils soient assis à la même table.

Question 1 – Combien de tables au minimum seront alors nécessaires ? Combien de personnes au maximum pourront s'asseoir à une même table ?

Question 2 – On suppose maintenant qu'il y a 9 participants et que l'entente est tout aussi cordiale. Que se passera-t-il alors ?

Exercice 2 : Donnez le nombre chromatique de chacun des graphes suivants et justifiez pourquoi.



(a) (b) (c) (d)

Exercice 3 : (**Cours**) Montrez que l'unique graphe d'ordre n ayant comme nombre chromatique n est le graphe complet K_n.

Exercice 4 : (**Cours**)

Soit G un graphe et soit H un sous-graphe (partiel) de G.

Question 1 – Montrez que $\chi(H) \leq \chi(G)$.

Question 2 – Montrez que $\chi(G) \geq \omega(G)$.

On note $\Delta(G)$ le degré maximum du graphe G.

Question 3 – Montrez par récurrrence sur l'ordre n du graphe la propriété suivante :

$\mathcal{P}(n)$: "Tout graphe G d'ordre n vérifie l'inégalité $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$."

Question 4 – On vient de montrer la chaîne d'inégalités suivante : $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$. Trouvez des graphes correspondant aux situations suivantes :

1. $\omega(G) = \chi(G) = \Delta(G) + 1$

2. $\omega(G) = \chi(G) < \Delta(G) + 1$
3. $\omega(G) < \chi(G) = \Delta(G) + 1$
4. $\omega(G) < \chi(G) < \Delta(G) + 1$

Exercice 5 : (Cours) Soit G un graphe colorié avec $\chi(G)$ couleurs. Pour une couleur i on note V_i l'ensemble des sommets de couleurs i.

Question 1 – Montrez que pour tout i, $|V_i| \leq \alpha(G)$.

Question 2 – Déduisez-en que $\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}$. (Indice : Calculez de deux manières $\sum |V_i|$.)

Question 3 – Utilisez la question précédente pour justifier le nombre chromatique du graphe (d) de l'exercice 3.

Exercice 6 : **Roue**

Une roue d'ordre n ($n \geq 3$) est un graphe à $n + 1$ sommets constitué d'un cycle à n sommets (appelons ses sommets v_1,...,v_n) auquel on ajoute un sommet u tel que uv_i est une arête pour tout i. On note R_n la roue d'ordre n.

Question 1 – Dessinez R_3,R_4 et R_5 et donnez le nombre chromatique de ces trois graphes.

Question 2 – Donnez les valeurs de $\omega(R_n)$ et de $\alpha(R_n)$ pour toutes les valeurs de n.

Question 3 – Démontrez que $\chi(R_n) = 3$ si $n \geq 4$ est pair et $\chi(R_n) = 4$ si $n \geq 3$ est impair.

Exercice 7 : **Produits chimiques**

Huit lots de produits chimiques doivent être expédiés par avion depuis Saint-Denis (île de la Réunion) à la station scientifique de Port-aux-Français (îles Kerguélen). Pour des raisons de sécurité, certains de ces produits chimiques ne peuvent pas être transportés dans le même container. En effet, les produits interagissent entre eux et il est risqué de les stocker dans un même container si les lots ne sont pas parfaitement étanches. Les produits sont notés $P_1, \ldots, P_8$. La table ci-dessous liste les interactions entre les produits chimiques. Par exemple, le produit P_1 peut être placé dans le même container que les produits P_3, P_4, P_7 et P_8, mais ne peut pas être placé avec P_2, P_5 ou P_6.

$P_1 : P_2, P_5, P_6$	$P_2 : P_1, P_3, P_5, P_7$	$P_3 : P_2, P_4, P_7$
$P_4 : P_3, P_6, P_7, P_8$	$P_5 : P_1, P_2, P_6, P_7, P_8$	$P_6 : P_1, P_4, P_5, P_8$
$P_7 : P_2, P_3, P_4, P_5, P_8$	$P_8 : P_4, P_5, P_6, P_7$	

Le prix de l'envoi d'un container est de 3000 euros. On peut supposer qu'il n'y a pas de contrainte de capacité sur les containers (c.-à-d. un container peut contenir un nombre maximum de n lots, avec $n \geq 8$).

Question 1 – Donner le prix minimum de l'envoi des huit lots de produits chimiques ainsi que la répartition des lots de produits chimiques dans les containers. Justifier soigneusement. (Indice : ne réinventez pas la roue !).