

**UNIVERSITE LUMIERE LYON2**

**N°**

| / / / / / / / / / / / / / / /

**THÈSE**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR EN INFORMATIQUE**

préparée au Laboratoire d'InfoRmatique en Images et Systèmes d'information  
dans le cadre de l'École Doctorale Informatique et Mathématiques

présentée et soutenue publiquement

par

**Tristan ROUSSILLON**

le 19 novembre 2009

**Algorithmes d'extraction de modèles géométriques  
discrets pour la représentation robuste des formes**

**Rapporteurs**

M. Ulrich ECKHARDT,	Professeur, Université de Hambourg
M. Jacques-Olivier LACHAUD,	Professeur, Université de Savoie, LAMA
M. Jean-Pierre REVEILLÈS,	Professeur, Université d'Auvergne, LAIC

**Jury**

Examineur	M. Jacques BLANC-TALON,	Responsable de domaine scientifique, DGA
Président	M. Jean-Marc CHASSERY,	Directeur de recherche CNRS, Gipsa-lab
Examineur	M. Olivier DEVILLERS,	Directeur de recherche INRIA, Sophia-Antipolis
Rapporteur	M. Jacques-Olivier LACHAUD,	Professeur, Université de Savoie, LAMA
Rapporteur	M. Jean-Pierre REVEILLÈS,	Professeur émérite, Université d'Auvergne, LAIC
Directrice	Mlle Isabelle SIVIGNON,	Chargée de recherche CNRS, LIRIS
Directrice	Mme Laure TOUGNE,	Professeure, Université Lumière Lyon2, LIRIS



# Remerciements

Une thèse, ça va de plus en plus vite. Au début, on ne sait pas quoi faire, ou on fait des choses, mais sans vraiment savoir pourquoi on les fait. Puis vient un moment où tout s'enchaîne jusqu'à la rédaction et la soutenance. C'est l'occasion de se rendre compte qu'après avoir défait deux ou trois nœuds et continué à tirer sur le fil, toute la pelote arrive.

Je remercie Laure et Isabelle qui m'ont encouragé à suivre les fils que je tenais et qui m'ont laissé mener mes petites expériences. Elles ont toutes les deux su se rendre disponibles quand il le fallait, malgré leurs multiples autres occupations (recrutements de vacataires ou changements de couches par exemple). Je pense aussi à Laure pour son constant soutien logistique : bureau, ordinateur et fournitures, missions diverses, trajets en voiture (malgré les flashs) et même repas (quand je n'avais pas de monnaie à Lyon1, ou pas de carte cumul à Lyon2).

Je souhaite exprimer toute ma gratitude à Ulrich Eckhardt, Jacques-Olivier Lachaud et Jean-Pierre Reveillès, qui ont accepté de lire et évaluer ce document. Je suis très honoré que Jean-Marc Chassery et Olivier Devillers aient accepté de participer à mon jury de thèse. Je remercie Jacques Blanc-Talon qui a défendu ce thème de recherche auprès de la DGA pour que j'obtienne un financement et qui a également participé à mon jury de thèse.

Un grand merci à Hervé Piégay, grâce à qui j'ai pu mener un projet pluridisciplinaire original mêlant informatique et géographie. Je lui suis aussi redevable d'avoir été payé pour pêcher des invertébrés dans la Drôme juste avant de commencer ma thèse !

Merci également à Serge, Laure, Marian et David Sarrut, qui n'ont pas douté de mes capacités à faire de l'image alors que ce n'était pas le domaine pour lequel j'ai été formé.

Je salue tous les membres de l'équipe M2disco et tous les locataires de la partie Lyon2 du LIRIS, avec une mention spéciale à Antoine, qui m'a souvent aidé à me dépatouiller avec  $\LaTeX$ .

Enfin, j'adresse un clin d'œil à toutes les personnes que j'ai eu le plaisir de rencontrer en séminaires ou en conférences. Merci à David et Jaco dont les questions ont stimulé mes recherches. Dédicace à tous les doctorants que j'ai croisé en ces occasions, aux écoles jeunes chercheurs du GDR-IM ou autour d'un verre.

---

---

# Résumé

Cette thèse se situe à l'interface entre l'analyse d'images, dont l'objectif est la description automatique du contenu visuel, et la géométrie discrète, qui est l'un des domaines dédiés au traitement des images numériques. Pour être stocké et manipulé sur un ordinateur, un signal observé est régulièrement échantillonné. L'image numérique, qui est le résultat de ce processus d'acquisition, est donc constituée d'un ensemble fini d'éléments distincts. La géométrie discrète se propose d'étudier les propriétés géométriques d'un tel espace dépourvu de continuité.

Dans ce cadre, nous avons considéré les régions homogènes et porteuses de sens d'une image, avec l'objectif de représenter leur contour au moyen de modèles géométriques ou de les décrire à l'aide de mesures. L'étendue des applications de ce travail en analyse d'images est vaste, que ce soit au cours du processus de segmentation, ou en vue de la reconnaissance d'un objet.

Nous nous sommes concentrés sur trois modèles géométriques discrets définis par la discrétisation de Gauss : la partie convexe ou concave, l'arc de cercle discret et le segment de droite discrète. Nous avons élaboré des algorithmes dynamiques (mise à jour à la volée de la décision et du paramétrage), exacts (calculs en nombres entiers sans erreur d'approximation) et rapides (calculs simplifiés par l'exploitation de propriétés arithmétiques et complexité en temps linéaire) qui détectent ces modèles sur un contour. L'exécution de ces algorithmes le long d'un contour aboutit à des décompositions ou à des polygonalisations réversibles.

De plus, nous avons défini des mesures de convexité, linéarité et circularité, qui vérifient un ensemble de propriétés fondamentales : elles sont robustes aux transformations rigides, elles s'appliquent à des parties de contour et leur valeur maximale est atteinte pour le modèle de forme qui sert de comparaison et uniquement sur celui-ci.

Ces mesures servent à l'introduction de nouveaux modèles dotés d'un paramètre variant entre 0 et 1. Le paramètre est fixé à 1 quand on est sûr de la position du contour, mais fixé à une valeur inférieure quand le contour est susceptible d'avoir été déplacé par un bruit d'acquisition. Cette approche pragmatique permet de décomposer de manière robuste un contour en segments de droite ou en parties convexes et concaves.

---

# *Abstract*

The work presented in this thesis concerns the fields of image analysis and discrete geometry. Image analysis aims at automatically describing the visual content of a digital image and discrete geometry provides tools devoted to digital image processing. A two-dimensional analog signal is regularly sampled in order to be handled on computers. This acquisition process results in a digital image, which is made up of a finite set of discrete elements. The topic of discrete geometry is to study the geometric properties of such kind of discrete spaces.

In this work, we consider homogeneous regions of an image having a meaning for a user. The objective is to represent their digital contour by means of geometric patterns and compute measures. The scope of applications is wide in image analysis. For instance, our results would be of great interest for segmentation or object recognition.

We focus on three discrete geometric patterns defined by Gauss digitization: the convex or concave part, the digital straight segment and the digital circular arc. We present several algorithms that detect or recognize these patterns on a digital contour. These algorithms are on-line, exact (integer-only computations without any approximation error) and fast (simplified computations thanks to arithmetic properties and linear-time complexity). They provide a way for segmenting a digital contour or for representing a digital contour by a reversible polygon.

Moreover, we define a measure of convexity, a measure of straightness and a measure of circularity. These measures fulfil the following important properties: they are robust to rigid transformations, they may be applied on any part of a digital contour, they reach their maximal value for the template with which the data are compared to.

From these measures, we introduce new patterns having a parameter that ranges from 0 to 1. The parameter is set to 1 when the localisation of the digital contour is reliable, but is set to a lower value when the digital contour is expected to have been shifted because of some acquisition noise. This measure-based approach provides a way for robustly decomposing a digital contour into convex, concave or straight parts.

---



# Sommaire

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>I Éléments préliminaires</b>	<b>5</b>
<b>1 Contexte et objectifs</b>	<b>7</b>
1.1 Le plan discret . . . . .	8
1.2 Les données . . . . .	10
1.3 Les modèles . . . . .	19
1.4 L'analyse . . . . .	29
1.5 Conclusion . . . . .	31
<b>2 Outils</b>	<b>33</b>
2.1 Programmation linéaire . . . . .	34
2.2 Transformations géométriques . . . . .	36
2.3 Géométrie algorithmique . . . . .	39
2.4 Arithmétique et dénombrement de points . . . . .	47
2.5 Conclusion . . . . .	54
<b>II Modèles linéaires et convexes</b>	<b>55</b>
<b>3 Reconnaissance de parties convexes et concaves, mesure de convexité</b>	<b>57</b>
3.1 Étude de l'existant . . . . .	58
3.2 Détection et reconnaissance . . . . .	61
3.3 Mesures de convexité et décomposition robuste . . . . .	72
3.4 Conclusion . . . . .	78
<b>4 Reconnaissance de segments et mesure de linéarité</b>	<b>83</b>
4.1 Étude de l'existant . . . . .	84
4.2 Algorithmes géométriques de reconnaissance . . . . .	88
4.3 Algorithmes arithmétiques de reconnaissance . . . . .	99

---

4.4	Décompositions du contour et mesure de linéarité . . . . .	106
4.5	Conclusion . . . . .	114
<b>5</b>	<b>Polygone réversible respectant les parties convexes et concaves</b>	<b>117</b>
5.1	Introduction . . . . .	118
5.2	Extraction des sommets du polygone . . . . .	121
5.3	Réversibilité . . . . .	131
5.4	Applications . . . . .	133
5.5	Conclusion . . . . .	140
<b>III</b>	<b>Modèles circulaires</b>	<b>141</b>
<b>6</b>	<b>Reconnaissance d'arcs de cercle et mesure de circularité</b>	<b>143</b>
6.1	Étude de l'existant . . . . .	144
6.2	Reconnaissance d'arcs de cercle . . . . .	149
6.3	Optimisation . . . . .	153
6.4	Mesure de circularité . . . . .	160
6.5	Conclusion . . . . .	168
<b>7</b>	<b>Version contrainte du problème de la reconnaissance d'arcs de cercle</b>	<b>171</b>
7.1	Définition et calcul des $P$ -enveloppes . . . . .	172
7.2	Séparation par des cercles passant par un point donné . . . . .	177
7.3	Décomposition d'un contour en arcs de cercle . . . . .	183
7.4	Conclusion . . . . .	190
<b>IV</b>	<b>Traitement d'images en Géomorphologie</b>	<b>193</b>
<b>8</b>	<b>Analyse de la forme des particules sédimentaires</b>	<b>195</b>
8.1	Objectifs du projet . . . . .	196
8.2	Forme des particules sédimentaires . . . . .	198
8.3	Définition et calcul de paramètres . . . . .	202
8.4	Évaluation des paramètres de forme . . . . .	204
8.5	Conclusion . . . . .	212
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>215</b>

---

# Liste des Algorithmes

1	Suivi de contour . . . . .	17
2	Remplissage de contour . . . . .	18
3	Balayage de Graham . . . . .	41
4	Algorithme de Melkman . . . . .	43
5	Vecteurs de la base par l'algorithme d'Euclide . . . . .	50
6	Reconnaissance d'une partie convexe par séparation . . . . .	63
7	Reconnaissance d'une partie convexe par dénombrement . . . . .	68
8	Procédure $\text{VerificationSeparabilite}(P, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, X_1, X_2, \bar{X}_1, \bar{X}_2, x)$ . . . . .	89
9	Reconnaissance d'un segment de droite par séparation . . . . .	90
10	Mise à jour des points d'appui pour le calcul de l'épaisseur . . . . .	98
11	Approche arithmétique pour la croissance d'un segment [Debled-Rennesson et Reveillès, 1995] . . . . .	102
12	Approche arithmétique pour l'érosion à l'arrière d'un segment de droite [Lachaud <i>et al.</i> , 2007] . . . . .	105
13	Prochain segment sans chevauchement . . . . .	107
14	Prochain segment avec le plus petit chevauchement possible . . . . .	110
15	Prochain segment avec le plus grand chevauchement possible . . . . .	110
16	Prochain segment avec le plus grand chevauchement possible et érosion par l'arrière . . . . .	111
17	Initialisation du calcul du polygone réversible $\mathcal{P}(C)$ . . . . .	128
18	Extraction des sommets du polygone réversible $\mathcal{P}(C)$ . . . . .	129
19	Procédure $\text{Tracer}(a,b,r,d_x,d_y,P,Q)$ . . . . .	132
20	Reconnaissance d'arcs de cercle . . . . .	152
21	Calcul de $\hat{\mathcal{S}}$ et $\hat{\mathcal{T}}$ , ensembles réduits pour la reconnaissance d'arcs de cercle .	159
22	Balayage de Graham étendu au calcul d'une $P$ -enveloppe externe . . . . .	177



# *Introduction*

L'image numérique connaît un essor considérable. Elle est l'objet de recherches intenses depuis plusieurs années. Les applications de ces travaux sont multiples et à fort enjeux techniques, économiques et sociaux : imagerie aérienne et satellitaire, vision robotique pour le guidage ou le contrôle de la qualité d'une production, vidéo-surveillance, imagerie biologique et médicale pour l'aide au diagnostic, informatique graphique et synthèse d'images, compression, tatouage et transmission d'images, indexation et recherche par le contenu dans de grandes bases d'images, etc.

Les travaux de cette thèse se situent dans l'articulation entre l'analyse d'images, dont l'objectif est la description du contenu visuel, et la géométrie discrète.

La géométrie intervient largement en analyse d'images. Une des tâches les plus importantes est la segmentation d'une image en régions considérées homogènes et porteuses de sens. La définition des concepts de base sert à élaborer l'algorithmique de base. Par exemple, le concept de connexité sert à extraire le contour d'une région. Localiser, détecter ou filtrer des objets caractérisés aux moyens de propriétés géométriques sont des opérations courantes. Déformer le contour d'une région sous contraintes géométriques peut conduire à l'amélioration d'une partition grossière. La segmentation est généralement suivie d'une description des objets d'intérêt. L'estimation de quantités géométriques, comme le périmètre, la courbure, ou le calcul de mesures comme la convexité, la circularité, peuvent être réalisées par des méthodes géométriques.

Mais la nature discrète des données pose des problèmes théoriques nouveaux. Une image numérique est en effet le résultat de l'échantillonnage régulier de l'observation d'un signal. C'est un ensemble fini de petits éléments distincts, que l'on peut assimiler à des points, porteurs d'une couleur ou d'une nuance de gris elle-même discrétisée. Dans un tel espace dénué de continuité, qu'est-ce qu'une droite ? Des points alignés ne semblent pas être suffisamment "proches" les uns des autres pour former quelque chose ressemblant à la droite euclidienne. Une définition discrète de la droite existe, dans laquelle plusieurs alignements parallèles de points sont pris en compte en même temps pour "épaissir" l'objet. Mais cela ne résout pas tout. Par exemple, deux droites discrètes peuvent se croiser sans avoir de point en commun, à l'image des diagonales blanches et noires d'un échiquier. Par ailleurs, la courbure n'a pas de sens en l'absence de continuité, du moins telle qu'elle est définie en

géométrie euclidienne. En pratique, pour la calculer, elle doit être estimée. Cette estimation est sans biais si elle converge vers la courbure de l'objet réel quand la résolution augmente, c'est-à-dire quand le pas d'échantillonnage diminue. Cette convergence asymptotique n'est pas toujours une propriété suffisante. Par exemple, que dire d'une mesure de circularité qui n'est pas maximale pour un cercle discret ? Une telle mesure est censée quantifier la ressemblance au cercle discret, et par conséquent, être maximale pour un cercle discret (et uniquement dans ce cas), même à basse résolution. Tous ces exemples montrent que les concepts de la géométrie euclidienne ne s'adaptent pas directement aux données discrètes. La géométrie discrète a pour but de participer à la création d'une nouvelle géométrie, qui ne s'était pas révélée utile jusqu'à présent, dédiée à l'analyse spatiale d'un ensemble de points distribués sur un maillage.

Pour réaliser une opération géométrique, deux approches sont envisageables. La première consiste à construire une représentation continue des données discrètes, en général par interpolation, à accomplir la tâche voulue, puis, éventuellement, à discrétiser le résultat. Mais les passages incessants entre discret et continu sont coûteux en temps et sources d'imprécisions. Ces imprécisions sont une conséquence de la mémoire finie des ordinateurs. Ceux-ci ne connaissent pas les réels, mais uniquement les nombres flottants, ayant un nombre variable mais limité de chiffres après la virgule. Si on travaille avec ces nombres et qu'on mène des calculs de la façon dont on les aurait menés avec des réels, on risque d'aboutir à des erreurs d'arrondi. Ces approximations s'avèrent cruciales quand elles font prendre une mauvaise décision qui met en jeu la terminaison d'un algorithme.

La seconde approche consiste à traiter directement les données discrètes par des opérateurs adéquats. La géométrie discrète définit les concepts et établit les propriétés nécessaires à cette approche. Les calculs sont généralement en nombres entiers, donc exacts, ne souffrant d'aucune imprécision. De plus, les propriétés arithmétiques sous-jacentes simplifient souvent les calculs, ce qui permet d'aboutir à des algorithmes très rapides en pratique. Dans ce cadre, nous avons, dans les chapitres 3, 4, 6 et 7, défini des modèles géométriques discrets et proposé des algorithmes performants pour les détecter ou les reconnaître.

Cependant, la géométrie discrète propose aussi des outils facilitant le passage entre représentation discrète et représentation continue, au centre de la première approche. Pour garantir la plus grande cohérence possible, la représentation obtenue est censée ne pas contenir d'aberrations et le changement être réversible. Vérifier ces critères demande une étude approfondie des objets discrets et de leur ressemblance à leurs homologues euclidiens. Par exemple, une droite discrète peut être caractérisée analytiquement, c'est-à-dire au moyen d'inégalités diophantiennes, comme une droite euclidienne peut être décrite par une équation cartésienne. C'est ce type de caractérisation qui rend possible la réversibilité. Dans cet esprit, nous avons, dans le chapitre 5, montré comment calculer, à partir d'un contour, un polygone réversible respectant les parties convexes et concaves.

Ce document comporte huit chapitres. Les deux premiers, rassemblés en une première partie, sont l'entrée en matière. Ils présentent le contexte de travail, les objectifs poursuivis et les outils utilisés. Le premier chapitre est crucial, car il définit le contour, les modèles de partie convexe, concave, de segment de droite et d'arc de cercle, représentés dans la fig. 1 et à la base de l'organisation du document.

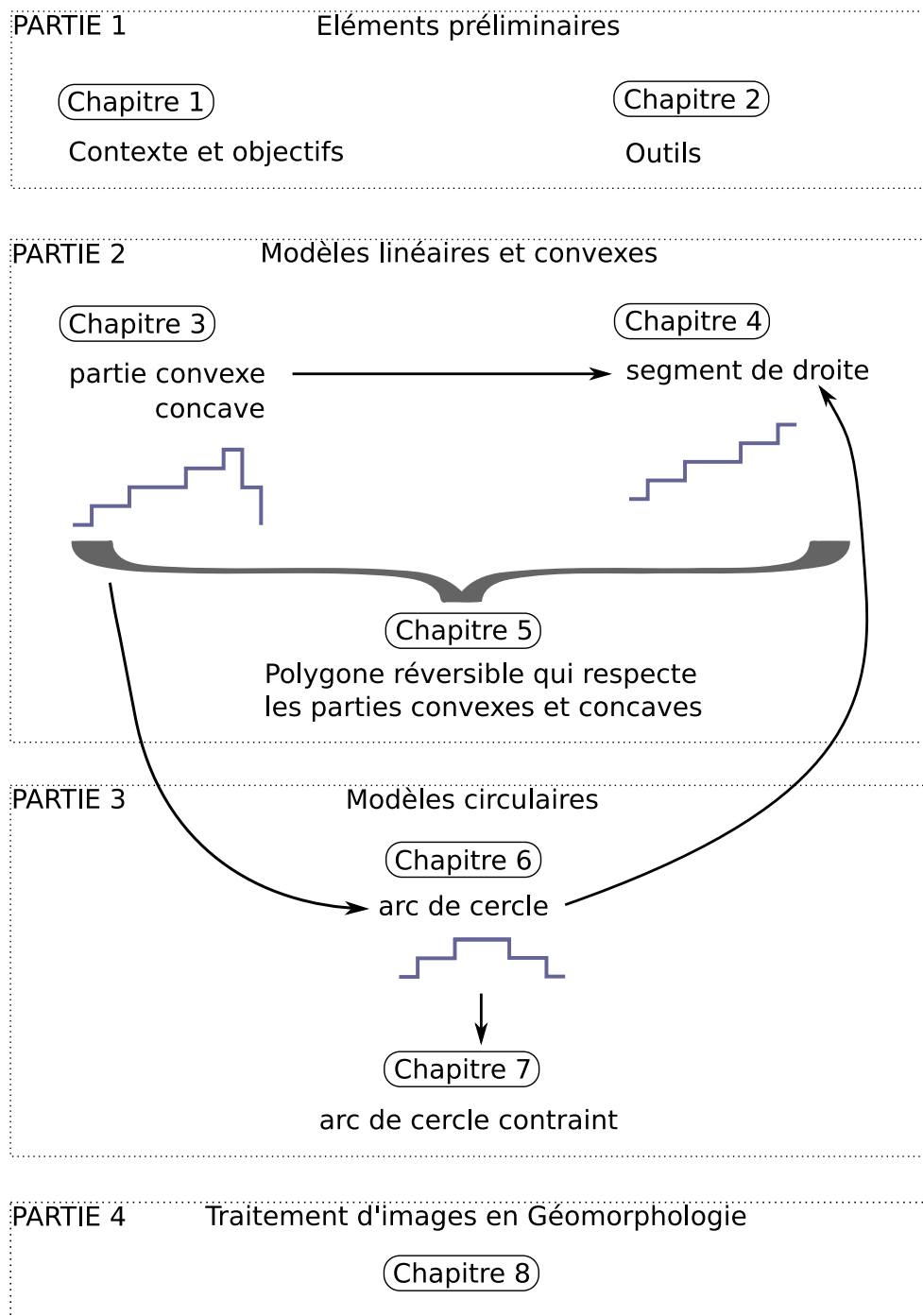


FIG. 1 – Organisation du document. Les flèches indiquent des relations d'héritage.

L'élément vers lequel les flèches de la fig. 1 pointent est un cas particulier de l'élément à partir duquel elles partent. Par exemple, d'après nos définitions, un segment de droite est une partie convexe particulière, qui est en même temps concave. Symétriquement, un segment de droite est aussi une partie concave particulière, qui est en même temps convexe. De plus, un segment de droite est un arc de cercle de rayon infini et un arc de cercle est lui-même une partie convexe ou concave particulière.

La deuxième partie est composée des chapitres 3, 4 et 5. Les deux premiers sont focalisés sur la reconnaissance des modèles de partie convexe, de partie concave et du segment de droite. Ils abordent aussi le calcul de mesures de convexité et de linéarité, à la base d'une approche pragmatique de décomposition robuste du contour. Nous avons délibérément choisi de commencer par la convexité pour mettre en évidence que le segment de droite peut être appréhendé *via* la convexité, alors qu'en général, c'est la convexité qui est définie à l'aide du segment de droite. Le chapitre 5 croise les résultats des deux chapitres précédents pour aboutir à la construction d'un polygone réversible respectant les parties convexes et concaves d'un contour.

La troisième partie est constituée des chapitres 6 et 7 portant sur le modèle de l'arc de cercle. Le premier aborde la reconnaissance des arcs de cercle et le calcul d'une mesure de circularité. Le deuxième s'intéresse à une version contrainte du problème de la reconnaissance des arcs de cercle, ce qui permet de donner une solution algorithmique incrémentale au problème non contraint.

Enfin, la dernière partie présente un projet qui a non seulement permis de tester, à l'aval, nos méthodes, mais qui a aussi fortement motivé nos travaux en amont.



**Première partie**

**Éléments préliminaires**



# Chapitre 1

## *Contexte et objectifs*

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Le plan discret</b> . . . . .	<b>8</b>
1.1.1	Pavage et maillage . . . . .	8
1.1.2	Image analogique et numérique . . . . .	9
<b>1.2</b>	<b>Les données</b> . . . . .	<b>10</b>
1.2.1	Voisinage, connexité et objets . . . . .	10
1.2.2	Bord et contour . . . . .	13
1.2.3	Codage, algorithmes et notations . . . . .	15
<b>1.3</b>	<b>Les modèles</b> . . . . .	<b>19</b>
1.3.1	Définition intrinsèque . . . . .	20
1.3.2	Définition par discrétisation . . . . .	21
1.3.3	Convexe, disque et droite . . . . .	23
1.3.4	Le bruit . . . . .	28
<b>1.4</b>	<b>L'analyse</b> . . . . .	<b>29</b>
1.4.1	Tâches d'analyse . . . . .	30
1.4.2	Objectifs . . . . .	31
<b>1.5</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>31</b>

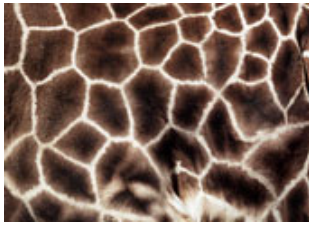
---

## 1.1 Le plan discret

Le *plan discret* désigne toute partition du plan euclidien. L'usage du terme discret, contraire du terme continu, signale la présence de discontinuités apparaissant entre deux régions voisines. L'espace discret en dimension trois, et plus, est défini de la même manière.

### 1.1.1 Pavage et maillage

Un *pavage* est un ensemble de cellules qui partitionnent le plan euclidien. Les cellules recouvrent l'intégralité du plan euclidien et ne se chevauchent pas. Toutes sortes de pavages existent dans la nature (peau des girafes, carapaces des tortues, cristaux, etc.) et dans les constructions humaines (cartes administratives, rues pavées, échiquiers, parquets, mosaïques, etc.). Certains de ces pavages sont illustrés dans la fig. 1.1.



(a) Peau de girafe



(b) Échiquier

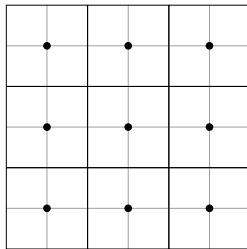


(c) Mosaïque

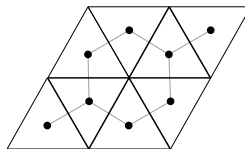
FIG. 1.1 – Exemples de pavage.

Les pavages réguliers sont ceux construits à partir de polygones réguliers. Il existe seulement trois manières de paver le plan euclidien à l'aide d'un seul polygone régulier :

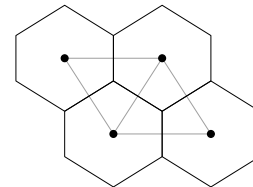
- pavage par carrés (fig. 1.2.a),
- pavage par triangles (fig. 1.2.b),
- pavage par hexagones (fig. 1.2.c).



(a) carrés



(b) triangles



(c) hexagones

FIG. 1.2 – Pavages réguliers en noir et maillages réguliers en gris.

Un *point discret* est un point du plan euclidien qui appartient à une cellule d'un pavage et qui la représente. Le *maillage*, dual du pavage, est obtenu en reliant les points discrets qui représentent des cellules voisines. Comme le montre la fig. 1.2, les mailles des pavages réguliers forment aussi des polygones réguliers.

La *géométrie discrète* est l'étude théorique et algorithmique d'objets constitués d'un ensemble de cellules (approche pavage) ou de points discrets (approche maillage) et de leur arrangement spatial en terme de distances ou de relations d'incidences.

La géométrie discrète est née et s'est développée pour résoudre des problèmes posés en imagerie. La synthèse et l'analyse d'images sont depuis les domaines d'application privilégiés de la géométrie discrète. La plupart des travaux et recherches menés en géométrie discrète le sont dans le cadre du plan discret engendré par le pavage par carrés. Cette thèse ne déroge pas à la règle. La raison première tient au fait que le maillage issu du pavage par carrés représente l'organisation en *grille régulière* des capteurs permettant l'acquisition des images numériques.

### 1.1.2 Image analogique et numérique

Une *image* désigne la représentation d'une scène obtenue par projection sur un plan. Dans ce plan, l'image analogique correspond à une distribution d'intensités lumineuses, notée  $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^n$ , où  $n$  est le nombre de canaux. Généralement, il y a trois canaux: rouge, vert et bleu.

Pour rendre possible le stockage de  $f$  sur ordinateur,  $f$  est représentée sur un pavage de  $\mathbb{R}^2$  constitué d'un ensemble dénombrable de cellules. L'intensité d'une cellule  $V_p$  du pavage, qui est l'intégration des intensités lumineuses sur l'ensemble de sa surface  $S_p$ , est associée à un point discret  $p$ . En notant l'ensemble des points discrets  $P$ , la discrétisation de  $f$  est donnée par la fonction  $F$ :

$$F : P \mapsto \mathbb{R}^n \\ F(p) = \frac{1}{S_p} \int_{(x,y) \in V_p} f(x,y) dx dy$$

Après discrétisation, l'image n'est plus analogique, mais *discrète* ou *numérique*. L'adjectif numérique convient particulièrement au pavage par des carrés. Le pavage définit le *support* de l'image numérique. Un élément du support est appelé *pixel*, de l'anglais "picture element" (fig. 1.3).

De plus, l'espace des intensités lumineuses est quantifié en un ensemble dénombrable par une fonction notée  $g : \mathbb{R}^n \mapsto I^n$ . La création d'une image discrète à partir d'une image analogique est alors modélisée par:

$$F : P \mapsto I^n \\ F(p) = g \left( \frac{1}{S_p} \int_{(x,y) \in V_p} f(x,y) dx dy \right)$$

Dans la réalité, plusieurs phénomènes dégradent l'image. La projection peut être imparfaite et provoquer des distorsions géométriques. Le flou, causé par les capteurs, l'objectif, une défocalisation, un bougé, etc., rend les discontinuités franches plus diffuses. Il peut être

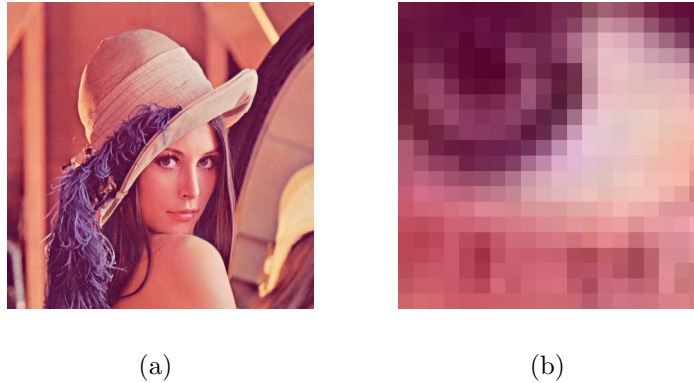


FIG. 1.3 – Lena (a) et son oeil gauche (b) montrent la décomposition en pixels du support d’une image numérique.

modélisé par une convolution de l’image par une fonction appelée “Point Spread Function”. Le bruit de mesure entache les quantités d’intensités lumineuses reçus par les capteurs. Il peut être modélisé par un bruit additif gaussien indépendant de l’intensité. Dans son acception large, le *bruit* regroupe toutes ces dégradations.

## 1.2 Les données

Le pavage du plan euclidien par des carrés offre une représentation tabulaire intrinsèque dans laquelle chaque carré (ou, ce qui revient au même, chaque point discret se trouvant au milieu d’un carré) possède une adresse constituée d’un couple de coordonnées entières appartenant au produit cartésien  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$ .

Les définitions suivantes se trouvent par exemple dans Coeurjolly *et al.* [2007, chap. 1].

### 1.2.1 Voisinage, connexité et objets

**Définition 1.1** (objet et fond). *Un objet désigne tout ensemble  $X$  de points de  $\mathbb{Z}^2$ . Le fond est l’ensemble  $\bar{X}$  des points de  $\mathbb{Z}^2$  ne se trouvant pas dans  $X$ .*

Le concept de voisinage permet de définir la connexité des objets.

**Définition 1.2** ( $r$ -voisinage). *Deux points de  $\mathbb{Z}^2$  sont  $r$ -voisins si, prises deux à deux, au moins  $r$  de leurs coordonnées sont égales et les autres ne diffèrent que de un.*

En dimension deux, chaque point a quatre 1-voisins (fig. 1.4.a) et huit 0-voisins (fig. 1.4.b). C’est pourquoi la notation la plus courante utilise le  $\alpha$ -voisinage où  $\alpha$  est égal au nombre de voisins :  $\alpha = 4$  pour le 1-voisinage et  $\alpha = 8$  pour le 0-voisinage. Nous avons cependant choisi le  $r$ -voisinage qui est aussi adapté aux espaces de dimension supérieure à deux.

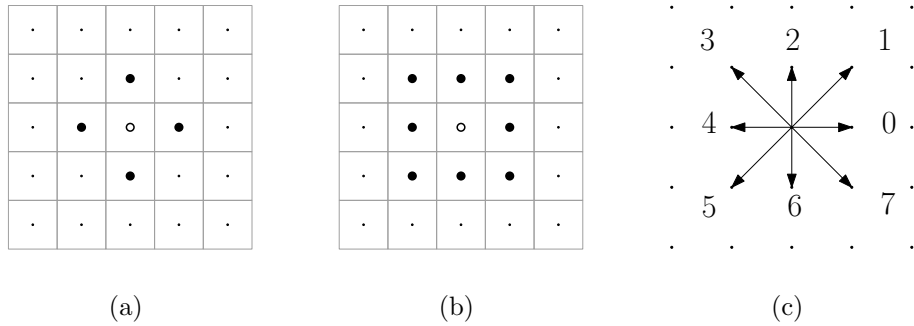


FIG. 1.4 – En noir, les quatre 1-voisins (a) et huit 0-voisins (b) du point situé au centre, en blanc. Le code de Freeman associe un entier de 0 à 7 au vecteur permettant de passer d’un point donné à un de ses huit 0-voisins (c).

**Définition 1.3** (*r*-chemin (fermé)). *Un r-chemin est une séquence  $(P_0, \dots, P_{n-1})$  de  $n$  points de  $\mathbb{Z}^2$  telle que, pour tout  $i = 0, \dots, (n - 2)$ ,  $P_i$  et  $P_{i+1}$  sont r-voisins. Un r-chemin est fermé si en plus,  $P_0$  et  $P_{n-1}$  sont r-voisins.*

Freeman [1961, 1974] a proposé un codage compact des *r*-chemins. La séquence de points est représentée à l’aide du point de départ  $P_0$  et de la liste de vecteurs de déplacement entre chaque paire de points consécutifs. Comme le montre la fig. 1.4.c, ces vecteurs n’ont que huit orientations possibles (seulement quatre pour un 1-chemin). Ces orientations sont codées sur trois bits dont la traduction décimale est un entier de 0 à 7.

**Définition 1.4** (*r*-courbe ouverte et fermée). *Une r-courbe est une séquence  $(P_0, \dots, P_{n-1})$  de  $n$  points de  $\mathbb{Z}^2$  telle que, pour tout  $i = 1, \dots, (n - 2)$ ,  $P_i$  a exactement deux r-voisins,  $P_{i-1}$  et  $P_{i+1}$ . Elle est ouverte si  $P_0$  et  $P_{n-1}$  n’ont qu’un seul r-voisin mais fermée si  $P_0$  et  $P_{n-1}$  ont aussi exactement deux r-voisins, respectivement  $P_1, P_{n-1}$  et  $P_0, P_{n-2}$ .*

La fig. 1.5 met en évidence qu’une *r*-courbe est un *r*-chemin qui n’a ni grosseur superflue, ni rebroussement, ni auto-intersection.

La connexité est maintenant définie à partir des concepts de voisinage et de chemin.

**Définition 1.5** (composante *r*-connexe). *Soit  $X$  un ensemble de points de  $\mathbb{Z}^2$ .  $X$  est une composante r-connexe si et seulement si pour tout couple de points  $A$  et  $B$  appartenant à  $X$ , il existe un r-chemin contenu dans  $X$  et reliant à la fois  $A$  et  $B$ .*

Un objet simple est 0-connexe et sans trou :

**Définition 1.6** (objet simple). *Un objet simple désigne tout objet  $X$  qui ne comprend qu’une seule composante 0-connexe et tel que le fond  $\bar{X}$  ne comprend qu’une seule composante 1-connexe.*

Selon cette définition, l’objet de la fig. 1.6.a est simple alors que celui de la fig. 1.6.b ne l’est pas.

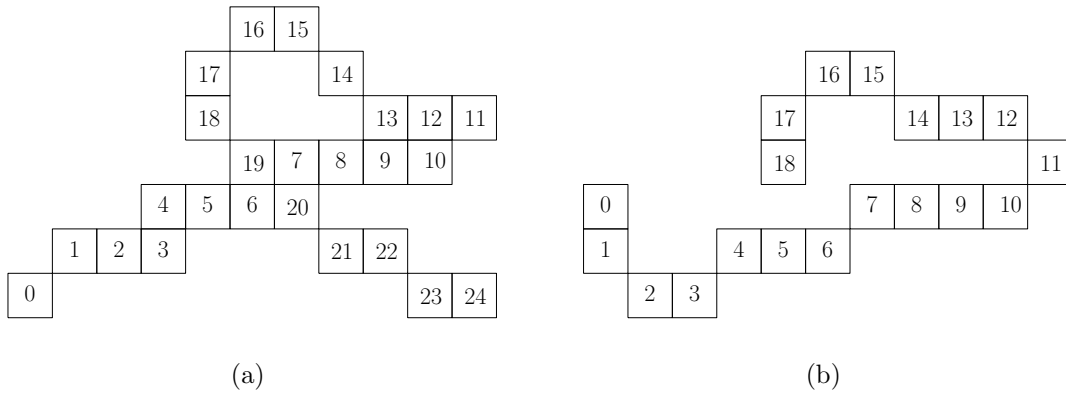


FIG. 1.5 – Un 0-chemin (a) et une 0-courbe ouverte (b).

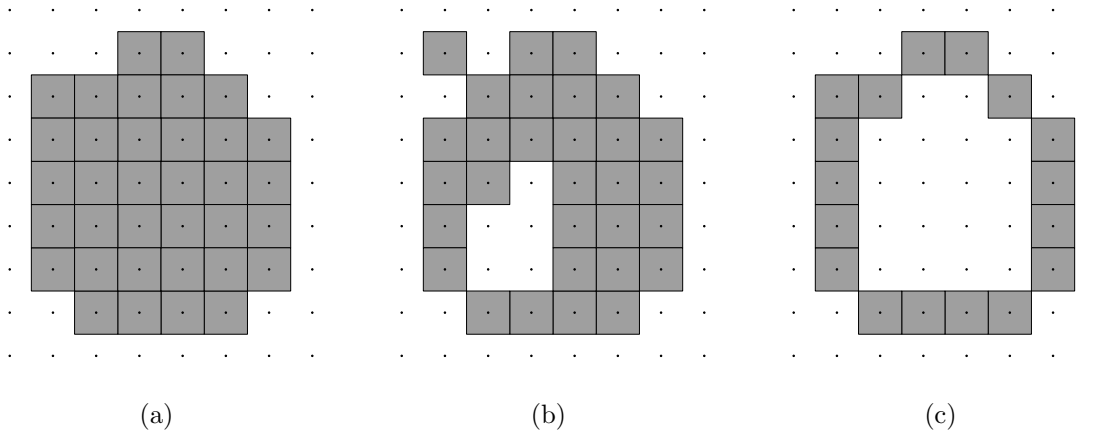


FIG. 1.6 – L'objet présenté en (a) est simple, alors que celui présenté en (b) n'est pas simple, car le fond est constitué de deux composantes 1-connexes. Le bord de l'objet (a), défini avec le 1-voisinage, est mis en évidence en (c).



Dans tout le reste de ce document, les objets sont supposés être simples. Le traitement d'objets non simples est supposé pouvoir être obtenu en traitant indépendamment les différentes composantes et en stockant les résultats dans des structures de données qui mettent en relations ces composantes.

## 1.2.2 Bord et contour

**Définition 1.7** ( $r$ -bord). *Le bord d'un objet  $X$  est l'ensemble des points de  $X$  dont le  $r$ -voisinage intersecte à la fois  $X$  et  $\bar{X}$ .*

Si l'analogie avec le plan euclidien tenait, le bord, comme celui de la fig. 1.6.c, devrait respecter le théorème de Jordan. Celui-ci affirme qu'une courbe fermée dans le plan euclidien sépare le reste du plan en deux composantes connexes, l'intérieur et l'extérieur. De plus, la suppression d'un point de la courbe connecte l'intérieur et l'extérieur en une seule composante. Or, différents problèmes apparaissent dans le plan discret selon le voisinage utilisé. Une 0-courbe fermée ne sépare pas le reste du plan discret en deux composantes 0-connexes (fig. 1.7.a). Au contraire, une 1-courbe fermée sépare bien le reste du plan discret en deux composantes 1-connexes (fig. 1.7.b). Mais on peut toujours enlever un point de la 1-courbe sans que le reste du plan devienne 1-connexe (fig. 1.7.c).

L'article pionnier de Rosenfeld [1970] démontre qu'une 0-courbe (respectivement 1-courbe) fermée sépare bien le reste du plan discret en deux composantes 1-connexes (respectivement 0-connexes) (fig. 1.7.d, e et f). Il explique aussi la procédure avec laquelle le bord d'une composante est identifié.

Cependant, il reste des problèmes. Par exemple, le 1-bord d'une composante  $r$ -connexe n'est généralement pas 1-connexe. Il est 0-connexe comme celui de la fig. 1.6.c. De plus, les points du bord peuvent être ordonnés de façon à obtenir un 0-chemin fermé, mais généralement pas une 0-courbe fermée. En fait, il n'existe pas de combinaison de voisinages pour laquelle le  $r$ -bord est toujours une  $r$ -courbe fermée [Coeurjolly *et al.*, 2007, chap. 3]. De plus, d'autres propriétés ne sont pas vérifiées. Par exemple, un objet  $X$  et le fond  $\bar{X}$  n'ont pas le même bord. Le bord, qui est un sous-ensemble de  $X$ , possède une surface non nulle [Kovalevsky, 1989].

La solution consiste à ne plus considérer les points discrets du maillage, mais une décomposition du pavage en éléments de différentes dimensions (fig. 1.8.a) [Coeurjolly *et al.*, 2007, chap. 3]. Un carré du pavage est un élément de surface (dimension 2) qui est appelé *surfel*. Chacun de ses côtés est un élément de ligne (dimension 1) qui est appelé *lignel* et chacun de ses sommets est un élément de point (dimension 0) qui est appelé *pointel*.

Une structure constituée de tels éléments existe en topologie et est appelé complexe cellulaire. A la fin des années 80, Kovalevsky explique comment utiliser ces structures en traitement et analyse d'images numériques [Kovalevsky, 1989]. Il propose dans ce cadre des définitions qui ne souffrent d'aucune contradiction et montre même que le complexe cellulaire est la seule façon d'appréhender la topologie de tout ensemble fini.

Généralement, les données ne sont pas disponibles sous la forme d'un complexe cellulaire, mais sont décrites comme un ensemble de surfels ou, ce qui revient au même, comme

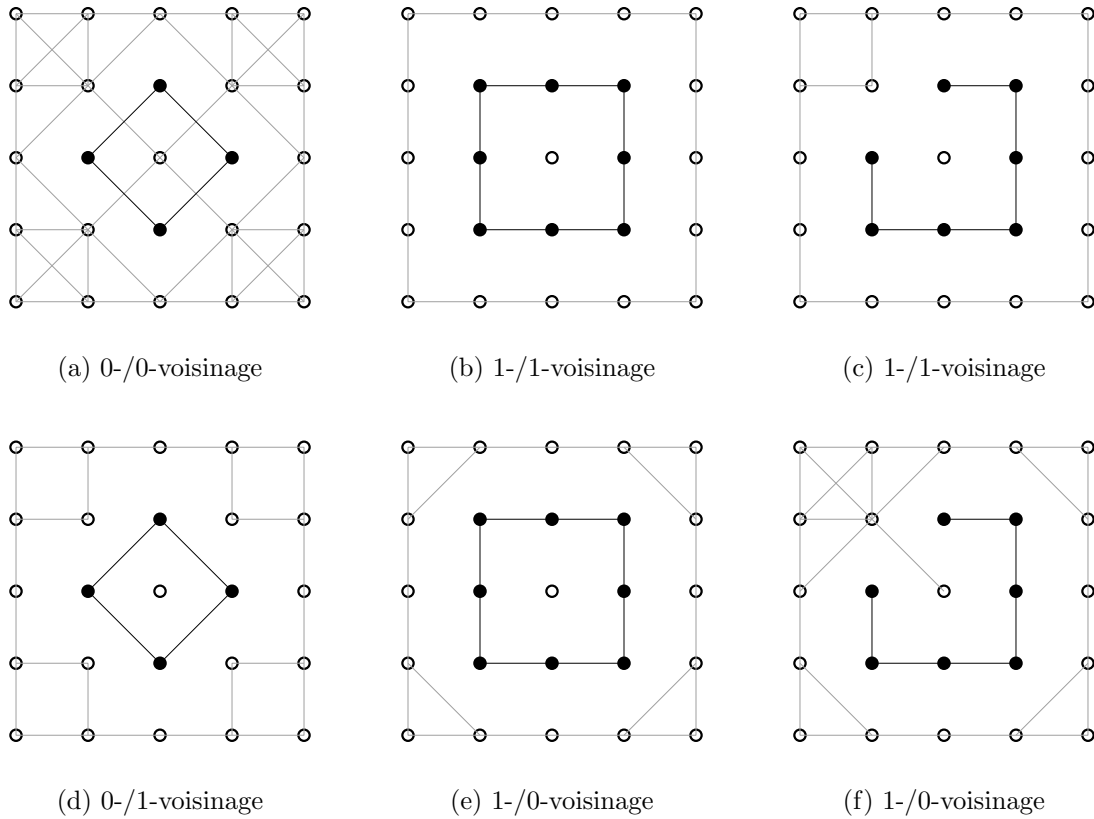


FIG. 1.7 – La courbe est représentée par des ronds noirs tandis que le fond l’est par des ronds blancs. Les traits noirs matérialisent le voisinage de la courbe alors que les traits gris matérialisent celui du fond. Chaque légende indique le type de voisinage utilisé pour la courbe (premier chiffre) puis pour le fond (second chiffre). Le théorème de Jordan n’est pas vérifié dans le plan discret si courbe et fond sont définis par un même voisinage (a)(b)(c), mais l’est si courbe et fond sont définis par deux voisinages différents (d)(e)(f).

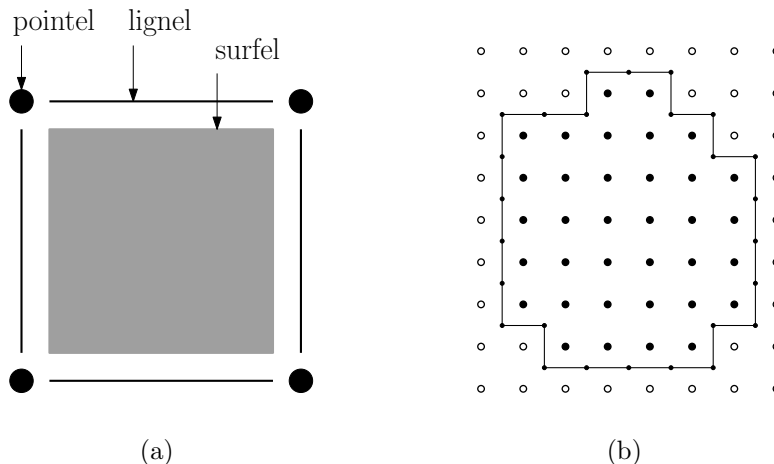


FIG. 1.8 – Décomposition du pavage en éléments (a). Le contour d'un objet est un ensemble de lignels et de pointels (b).

l'ensemble des points discrets associés aux surfels. L'utilisation d'un complexe cellulaire implique donc un changement du modèle de représentation des données. Cependant, pour étudier un objet simple en dimension deux, ce changement peut être évité. C'est pourquoi, la définition du contour que nous proposons, illustrée par la fig. 1.8.b, ne fait pas référence au formalisme des complexes cellulaires :

**Définition 1.8** (contour). *Le contour d'un objet  $X$  est l'ensemble des lignels et des pointels qui délimitent à la fois des surfels appartenant à l'objet  $X$  et des surfels appartenant au fond  $\bar{X}$ .*

### 1.2.3 Codage, algorithmes et notations

Il est commode de ne considérer, pour le contour d'un objet simple, que les pointels ordonnés dans une liste. Les lignels sont implicitement représentés par deux pointels consécutifs. Ces pointels sont des points dont les coordonnées sont des demi-entiers. Translaté par le vecteur  $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ , le contour peut être vu comme un 1-chemin fermé de points de  $\mathbb{Z}^2$ . Ainsi, compte tenu des restrictions faites sur la dimension et l'objet, l'usage du contour n'implique ni changement de modèle de représentation, ni changement de codage. De plus, les algorithmes de suivi de contour (algorithme 1 [Rosenfeld, 1970; Kovalevsky, 2001]) et de remplissage (algorithme 2 [Kovalevsky, 2001]) sont très simples.

L'algorithme de suivi (algorithme 1) comporte deux étapes. La recherche par balayage du point de l'objet  $X$  d'abscisse minimale et d'ordonnée maximale est la première étape (l. 1-11 et fig.1.9.a). Le suivi du contour est la seconde étape (l. 12-26). Le point  $P$  est un point de l'objet, tandis que le point  $Q$  est un point du fond. Les points  $R$  et  $S$  sont tels que  $P, Q, R$  et  $S$  sont les sommets d'un carré unité ordonnés dans le sens des aiguilles d'une

montre. L'appartenance ou non de ces points à l'objet  $X$  détermine la position du contour (l. 16-25, fig.1.9.b et fig.1.9.c).

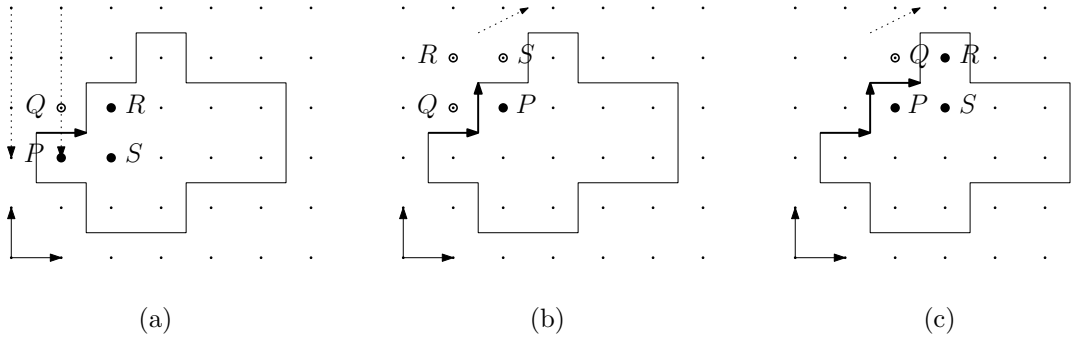


FIG. 1.9 – Recherche du point de départ par balayage en (a), puis suivi “en maintenant sa main droite sur le contour” en (b) et (c).

L'algorithme de remplissage (algorithme 2) comporte aussi deux étapes. La première est le marquage, pour toutes les colonnes, du début et de la fin de chaque séquence de points appartenant à l'objet ou au fond (l. 2-10 et fig. 1.10.b). La seconde est le remplissage par balayage (l. 11-22 et fig. 1.10.c).

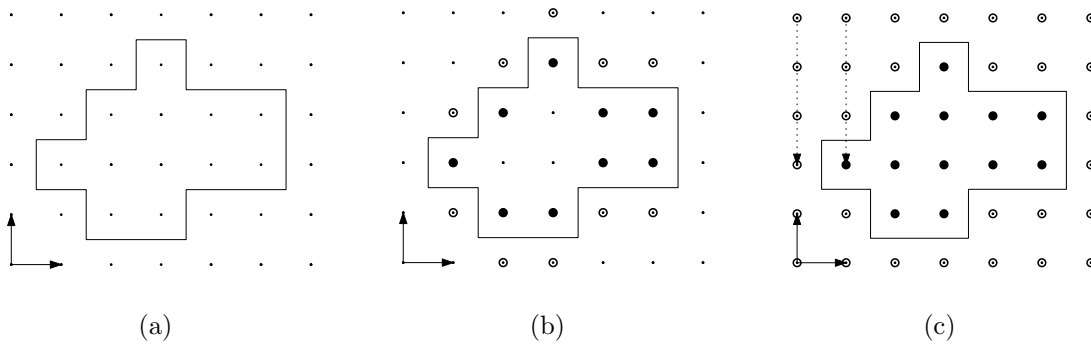


FIG. 1.10 – Initialisation (a), marquage (b) et remplissage (c).

Les  $n$  points d'un contour  $C$  sont numérotés de 0 à  $n - 1$ . Dans la suite du document, le premier point du contour  $C$  est d'abscisse minimale puis d'ordonnée maximale. Il est noté  $C_0$ . Les points suivants sont ordonnés dans le sens des aiguilles d'une montre. Un point quelconque de  $C$  est noté  $C_k$ .

Les définitions suivantes, fréquemment utilisées par la suite, sont illustrées dans la fig. 1.11 :

**Définition 1.9** (Partie élémentaire d'un contour). *Deux points consécutifs  $C_i$  et  $C_j$  (avec  $j = (i + 1) \% n$ ) forment une partie élémentaire du contour  $C$ . Pour simplifier les notations, elle est notée  $C_{i|i+1}$  sans tenir compte du modulo.*

**Algorithme 1** : Suivi de contour

---

**Entrées** : Une image sous la forme d'un tableau  $T$  de booléens de taille  $M \times N$ . 1 code un point de  $X$ , tandis que 0 code un point de  $\bar{X}$ .  $X$  ne touche pas le bord de l'image.

**Sorties** : Un point de départ  $D$  et une liste de vecteurs  $\mathcal{L}$

```

/* Point de départ */
1  $i \leftarrow 0$ ;  $stop \leftarrow faux$ ;  $P \leftarrow (0, 0)$ ; /* initialisation */
2 tant que  $(i < M - 1)$  et  $(\neg stop)$  faire
3    $j \leftarrow N - 1$ ;
4   tant que  $(j \geq 0)$  et  $(\neg stop)$  faire
5     si  $(T(i, j) = 1)$  alors
6        $Q \leftarrow P$ ;
7        $D \leftarrow P + (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ ;
8        $stop \leftarrow vrai$ ;
9      $j \leftarrow j - 1$ ;
10     $P \leftarrow (i, j)$ ;
11   $i \leftarrow i + 1$ ;

/* Suivi */
12  $P_1 \leftarrow P$ ;  $Q_1 \leftarrow Q$ ;  $\mathcal{L} \leftarrow \emptyset$ ; /* initialisation */
13 répéter
14    $R \leftarrow (Q_x + Q_y - P_y, Q_y + P_x - Q_x)$ ;
15    $S \leftarrow (P_x + Q_y - P_y, P_y + P_x - Q_x)$ ;
16   si  $(T(R_x, R_y) = 1)$  alors /* à gauche */
17      $\mathcal{L} \leftarrow \mathcal{L} + (Q - P)$ ;
18      $P \leftarrow R$ ;
19   si  $(T(R_x, R_y) = 0)$  et  $(T(S_x, S_y) = 1)$  alors /* tout droit */
20      $\mathcal{L} \leftarrow \mathcal{L} + (S - P)$ ;
21      $P \leftarrow S$ ;
22      $Q \leftarrow R$ ;
23   si  $(T(R_x, R_y) = 0)$  et  $(T(S_x, S_y) = 0)$  alors /* à droite */
24      $\mathcal{L} \leftarrow \mathcal{L} + (P - Q)$ ;
25      $Q \leftarrow S$ ;
26 jusqu'à  $(P = P_1)$  et  $(Q = Q_1)$ ;
27 retourner  $D$  et  $\mathcal{L}$ 

```

---

---

**Algorithme 2** : Remplissage de contour

---

**Entrées** : Un point de départ  $D$  et une liste de vecteurs  $\mathcal{L}$

**Sorties** : Un tableau  $T$  de booléens de taille  $M \times N$

```

1 Initialiser  $T$  avec des valeurs nulles;
  /* Marquage */
2  $sumvec \leftarrow (0, 0)$ ;
3 pour chaque vecteur  $vec$  de la liste  $\mathcal{L}$  faire
4    $sumvec \leftarrow sumvec + vec$ ;
5   si ( $vec = (1, 0)$ ) alors
6      $T(D_x + sumvec_x - 1, D_y + sumvec_y + 1) \leftarrow 0$ ;
7      $T(D_x + sumvec_x - 1, D_y + sumvec_y) \leftarrow 1$ ;
8   si ( $vec = (-1, 0)$ ) alors
9      $T(D_x + sumvec_x, D_y + sumvec_y) \leftarrow 0$ ;
10     $T(D_x + sumvec_x, D_y + sumvec_y + 1) \leftarrow 1$ ;
  /* Remplissage */
11  $couleur \leftarrow 0$ ;
12 pour  $i \leftarrow 0$  à  $M - 1$  faire /* colonne par colonne */
13   pour  $j \leftarrow N - 1$  à  $0$  faire
14     si ( $T(i, j) = 0$ ) alors
15        $couleur \leftarrow 0$ ;
16     si ( $T(i, j) = 1$ ) alors
17        $couleur \leftarrow 1$ ;
18     si ( $T(i, j) = null$ ) alors
19       si ( $couleur = 0$ ) alors
20          $T(i, j) \leftarrow 0$ ; /* remplir */
21       sinon
22          $T(i, j) \leftarrow 1$ ; /* remplir */

```

---

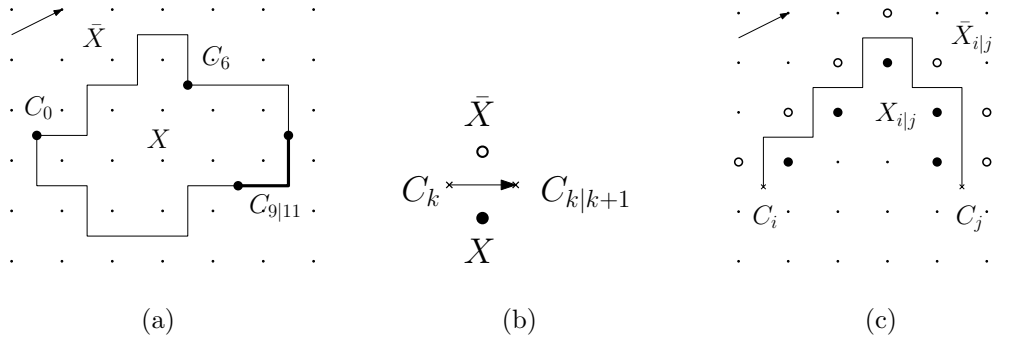


FIG. 1.11 – Illustration des notations utilisées sur un contour (a). Une partie élémentaire sépare un point de  $X$  (en noir) et un point de  $\bar{X}$  (en blanc) (b). Ainsi, une partie  $C_{i|j}$  sépare un ensemble de points intérieurs (en noir), noté  $X_{i|j}$ , et un ensemble de points extérieurs (en blanc), noté  $\bar{X}_{i|j}$  (c).

Compte-tenu de l'orientation du contour dans le sens des aiguilles d'une montre, une partie élémentaire sépare un point de  $X$  (à droite) d'un point de  $\bar{X}$  (à gauche).

**Définition 1.10** (Partie d'un contour). *Une partie  $C_{i|j}$  de  $C$  est la séquence de points de  $C$  démarrant à  $C_i$  et terminant à  $C_j$  telle que toutes ses paires de points consécutifs forment chacune une partie élémentaire de  $C$ .*

$C_{i|j}$  représente le contour  $C$  complet quand  $i = j$ .

**Définition 1.11** (Points intérieurs et extérieurs d'une partie). *L'ensemble des points intérieurs (respectivement extérieurs) associés à une partie  $C_{i|j}$  d'un contour  $C$ , qu'il est commode de noter  $X_{i|j}$  (respectivement  $\bar{X}_{i|j}$ ), est l'ensemble des points de  $X$  (respectivement  $\bar{X}$ ) localisés à droite (respectivement à gauche) des parties élémentaires de  $C_{i|j}$ .*

## 1.3 Les modèles

Un objet désigne tout ensemble de points discrets, alors qu'un modèle d'objet est la représentation abstraite d'un ensemble d'objets. Les objets qui possèdent une propriété identique, même s'ils sont tous différents, peuvent être représentés par un modèle commun. Pour définir un modèle d'objet, deux approches complémentaires sont possibles :

- La définition intrinsèque dans laquelle un modèle d'objet est défini par des propriétés topologiques, géométriques ou combinatoires remarquables.
- La définition par discrétisation dans laquelle un modèle d'objet est défini comme étant le résultat d'un processus de discrétisation d'un modèle d'objet euclidien comme la droite ou le disque euclidien.

### 1.3.1 Définition intrinsèque

La droite discrète possède des propriétés remarquables. Certaines conditions nécessaires pour qu’une 0-courbe ouverte soit considérée comme un segment de droite sautent aux yeux. Freeman [1970, 1974] a remarqué que, dans le premier octant, le code d’une 0-courbe “droite” ne contient que deux chiffres qui diffèrent d’au plus une unité modulo 8 (ce qui est vrai dans les fig. 1.12.b et c, mais pas dans la fig. 1.12.a). De plus, un des deux chiffres apparaît toujours de manière isolée (ce qui est vrai dans la fig. 1.12.c, mais pas dans la fig. 1.12.b).

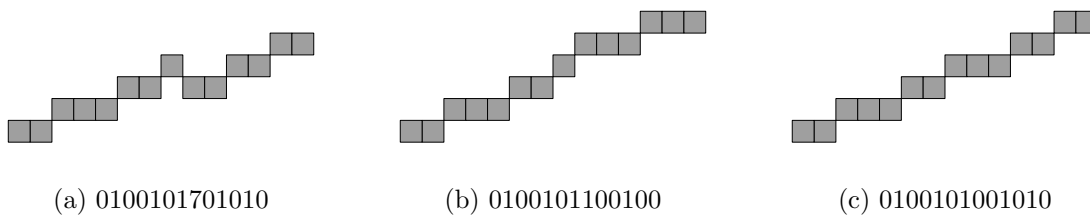


FIG. 1.12 – La 0-courbe dessinée en (a) n’est pas “droite”. Parmi les deux 0-courbes restantes, celle dessinée en (c) est la plus “régulière” car l’un des deux chiffres du code apparaît toujours de manière isolée, contrairement à celle dessinée en (b).

Ces observations sont généralisables en utilisant la notion de *palier* qui désigne la séquence maximale de points consécutifs de même ordonnée. Wu a mis en évidence des propriétés ressemblant aux propriétés de Freeman sur la taille et l’organisation des paliers [Wu, 1982] (voir aussi [Li et Loew, 1988; Bruckstein, 1991; Voss, 1991; Reveillès, 1991; Troesch, 1993; Yuan et Suen, 1995]). La taille des paliers est égale à  $t$  ou  $t + 1$ . De plus, le palier de taille  $t$  apparaît toujours de manière isolée. Sur la fig. 1.13, les paliers sont de taille 2 ou 3, les paliers de taille 2 apparaissant de manière isolée. Wu va même plus loin en étudiant ces propriétés sur plusieurs niveaux. Le palier de niveau 2 est la séquence maximale de paliers consécutifs de niveau 1 de taille  $t + 1$  situés entre deux paliers de niveau 1 de taille  $t$ . Sur la fig. 1.13, les paliers de niveau 2 sont de taille 1 ou 2, car ils sont composés de 1 ou 2 paliers de niveau 1 et de taille 3. Par récurrence, les paliers de niveau  $n$  sont définis à partir des paliers de niveau  $n - 1$  de la même manière. A chaque niveau, les paliers vérifient les mêmes propriétés sur leur taille et leur organisation (fig. 1.13).

Cette définition, bien qu’intrinsèque, est aussi étroitement liée à la discrétisation d’une droite continue, ce qui la valide. En effet, le nombre de niveaux nécessaires à la description d’une 0-courbe “droite” dépend de la profondeur du développement en fractions continues de la pente de la droite à discrétiser (voir par exemple [Li et Loew, 1988; Bruckstein, 1991; Voss, 1991]).

Peu de propriétés caractérisant des objets différents de la droite ont été mises en évidence. La définition par discrétisation est un moyen de dépasser le stade de la définition et de se concentrer sur l’analyse. Si de nouvelles propriétés sont découvertes, cela permettrait en retour, de proposer de nouvelles définitions intrinsèques.



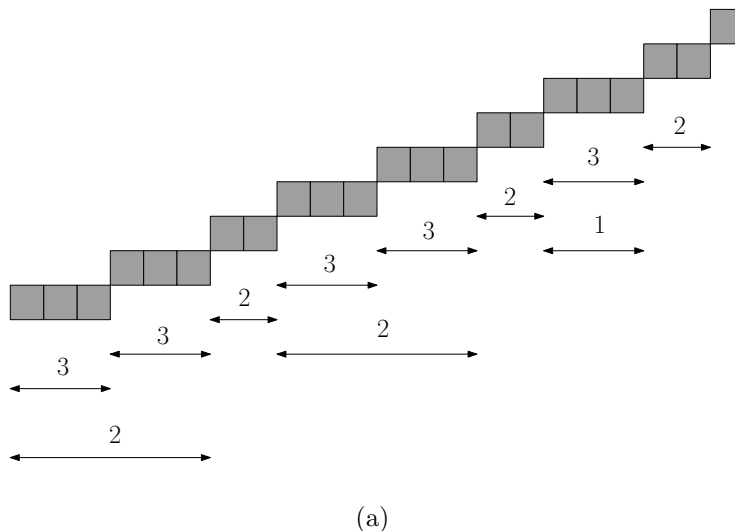


FIG. 1.13 – Une 0-courbe “droite” est caractérisée par une organisation hiérarchique en paliers. La taille des paliers de niveau 1 et 2 est indiquée.

### 1.3.2 Définition par discrétisation

Soit un objet continu superposé au plan discret. Le problème de la *discrétisation* consiste à déterminer quels points discrets (approche maillage) ou quels carrés (approche pavage) appartiennent à l'équivalent discret de l'objet continu. Le *discrétisé* désigne l'objet discret obtenu par discrétisation.

Gauss est à l'origine d'un processus de discrétisation qui consiste à retenir l'ensemble des points de  $\mathbb{Z}^2$  situés à l'intérieur ou à la frontière d'un objet continu [Klette et Žunić, 2000] (fig. 1.14.a). Pour les courbes fermées, le processus “*Object Boundary Quantization*”, noté OBQ, (respectivement “*Background Boundary Quantization*”, noté BBQ) consiste à étiqueter comme appartenant au discrétisé le point extrémité de chaque arête du maillage coupée par la courbe, qui est situé dans son intérieur (respectivement extérieur) [Groen et Verbeek, 1978] (fig. 1.14.b, fig. 1.14.c). Au sens strict, l'objet issu de la discrétisation OBQ (fig. 1.14.b) correspond au bord de l'objet issu de la discrétisation de Gauss (fig. 1.14.a). Mais souvent, discrétisations de Gauss et OBQ sont synonymes [Coeurjolly *et al.*, 2007, chap. 1]. Pour les courbes continues fermées ou ouvertes, le processus “*Grid Intersect Quantization*” (GIQ) consiste à retenir, à chaque fois que la courbe coupe une arête du maillage, le point extrémité de l'arête traversée qui est le plus proche de la courbe [Freeman, 1974] (fig. 1.14.d).

Un processus de discrétisation consistant à étiqueter comme appartenant au discrétisé tous les carrés du pavage intersectés par l'objet continu est appelé “*Square Quantization*” [Freeman, 1974] ou *supercouverture* [Andres, 2000] (fig. 1.15.a). Ce processus a l'avantage d'être simple et de posséder des propriétés intéressantes qui sont valides en dimension supérieure à deux. Par exemple, le discrétisé de l'union de deux objets est égal à l'union

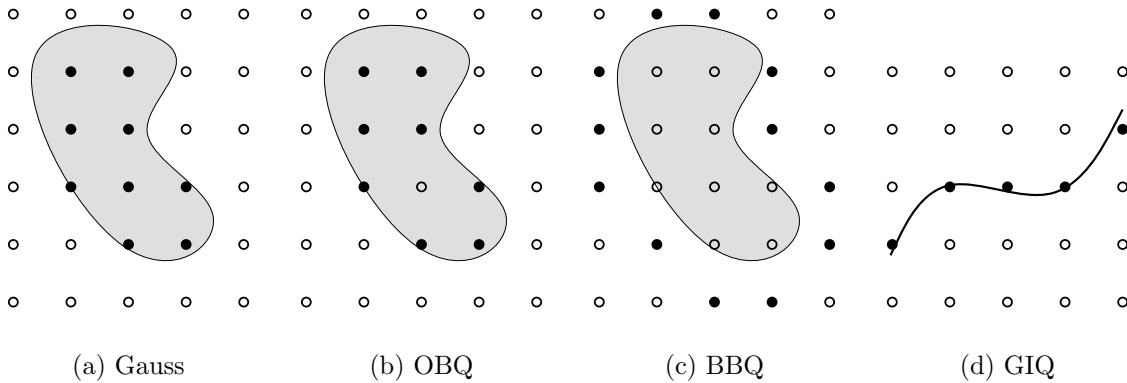


FIG. 1.14 – Discretisation basée sur le maillage.

de leur discrétisé, le discrétisé de l'intersection de deux objets appartient à l'intersection de leur discrétisé, etc. [Andres, 2000]. L'inconvénient est la présence de grosseurs dans le discrétisé, appelées *bulles*, quand une courbe continue passe exactement par le point incident à quatre carrés du pavage. Bien que la probabilité pour qu'une courbe continue passe par un point d'aire nulle soit nulle, des conventions d'orientation permettent de résoudre le problème. Ce processus de discrétisation est appelé *standard* [Andres, 2003] (fig. 1.15.b).

Une famille de processus de discrétisation, appelée "*Convex Quantization*" [Koplowitz, 1981], généralisent la discrétisation en supercouverture. Dans ces processus, c'est l'intersection entre l'objet continu et des zones convexes qui est considérée. Ces zones sont des boules définies par une certaine distance de Minkowski, de rayon  $\frac{1}{2}$  et centrées sur les points discrets (fig. 1.15.a et c). Ces processus de discrétisation peuvent être formulés de manière *analytique*. Dans les modèles de discrétisation analytiques, les objets sont définis comme étant constitués des points de  $\mathbb{Z}^2$  vérifiant un ensemble fini d'inégalités [Andres, 2000].

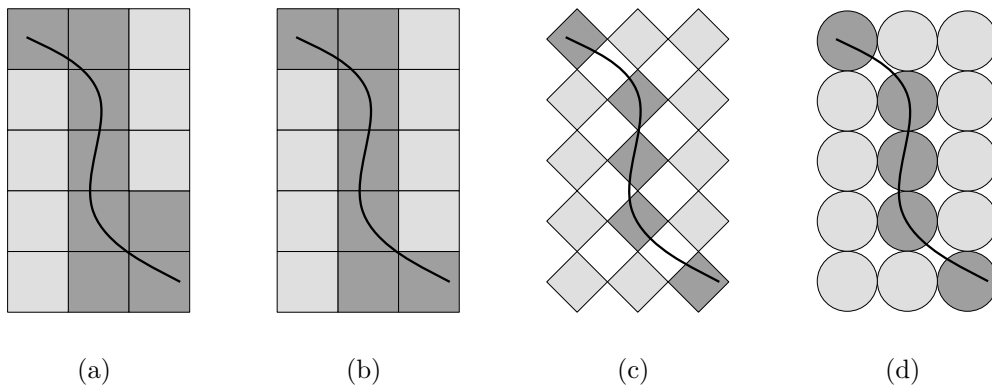


FIG. 1.15 – Discretisation supercouverture en (a) et standard en (b). "*Convex Quantization*" avec des boules définies par la norme  $L_\infty$  en (a), par la norme  $L_1$  en (c) et par la norme  $L_2$  en (d).

La *résolution* du plan discret est importante. Elle désigne le rapport entre la taille de l'objet continu et la distance entre les points discrets. Si l'objet continu est trop grand par rapport à l'espacement des points ou, ce qui revient au même, l'espacement des points est trop important par rapport à la taille de l'objet, les propriétés topologiques de l'objet continu ne seront pas préservées par la discrétisation (fig. 1.16). La résolution, si elle peut être contrôlée, dépendra de la courbure maximale ou de l'épaisseur locale de l'objet continu pour que l'objet discrétisé lui soit le plus ressemblant possible [Coeurjolly *et al.*, 2007, chap. 1].

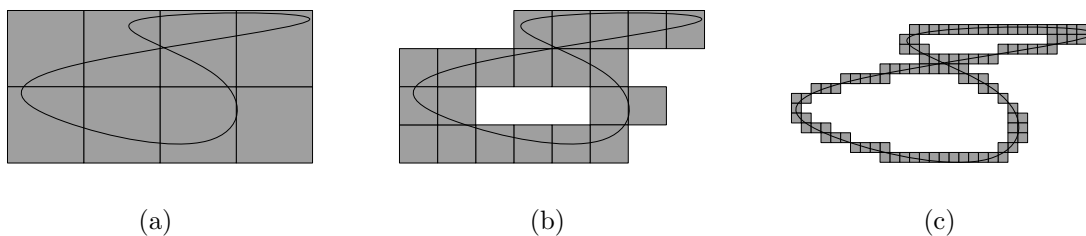


FIG. 1.16 – Importance de la résolution sur la préservation des propriétés topologiques. Illustration avec la discrétisation par supercouverture.

### 1.3.3 Convexe, disque et droite

Dans cette section, trois modèles de parties de contour sont définis à partir de la discrétisation de Gauss : les parties convexes ou concaves, les arcs de cercle discret, et les segments de droite discrète.

L'enveloppe convexe est le plus petit polygone convexe englobant un ensemble de points, à l'image d'un élastique autour d'un ensemble de clous.

**Définition 1.12** (Enveloppe convexe). *L'enveloppe convexe  $\mathcal{E}(\mathcal{S})$  d'un ensemble  $\mathcal{S}$  de points de  $\mathbb{R}^2$  est l'intersection de tous les demi-plans contenant  $\mathcal{S}$ .*

L'enveloppe convexe sert à définir la convexité discrète :

**Définition 1.13** (convexe). *Un objet discret  $X$  est convexe si et seulement si  $X$  est la discrétisation de Gauss de son enveloppe convexe  $\mathcal{E}(X)$ .*

L'objet de la fig. 1.17.a est convexe alors que celui de la fig. 1.17.b ne l'est pas car il y a un point extérieur (rond blanc) dans l'enveloppe convexe (en noir) des points intérieurs (ronds noirs). Par extension, le contour  $C$  d'un objet  $X$  est convexe si et seulement si  $X$  est convexe.

Plusieurs notions supplémentaires sont nécessaires pour adapter cette définition aux parties de contour. Comme la définition 1.12 repose sur des demi-plans, nous proposons la définition de demi-plans orientés pour pouvoir définir ensuite des enveloppes convexes partielles.

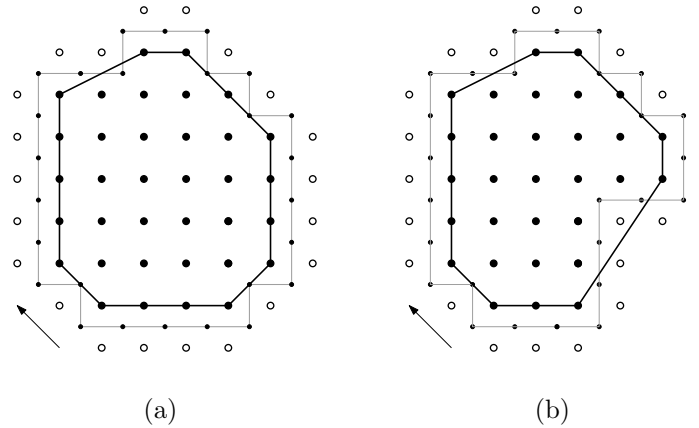


FIG. 1.17 – Contour convexe en (a), mais non convexe en (b).

Une seule droite, mais deux demi-plans, passent par deux points  $a$  et  $b$ . L'ordre lexicographique oriente l'un des deux demi-plans à gauche et l'autre à droite :

**Définition 1.14** (demi-plan orienté). *Un demi-plan défini par  $a$  et  $b$  est orienté à gauche (respectivement à droite) si et seulement si tous ses points se trouvent à gauche (respectivement à droite) de la ligne passant par  $a$  et  $b$ , orientée par le vecteur  $\vec{v} = b - a$ .*

Pour comprendre cette convention, il suffit de s'imaginer au point  $a$ , regardant dans la direction du point  $b$ . Sur notre gauche, se trouve les points appartenant au demi-plan orienté à gauche, tandis que sur notre droite se trouve les points appartenant au demi-plan orienté à droite (fig. 1.18).

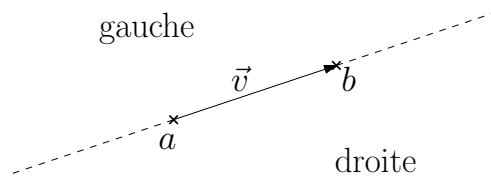


FIG. 1.18 – Demi-plans à gauche et à droite passant par deux points.

D'un point de vue pratique, décider si un point  $c$  appartient au demi-plan à droite défini par les points  $a$  et  $b$  revient à évaluer l'une des trois expressions équivalentes suivantes :

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & 1 \\ b_x & b_y & 1 \\ c_x & c_y & 1 \end{vmatrix} \leq 0 \quad (1.1)$$

$$\begin{vmatrix} (a_x - b_x) & (b_x - c_x) \\ (a_y - b_y) & (b_y - c_y) \end{vmatrix} \leq 0 \quad (1.2)$$

$$a_x(b_y - c_y) - b_x(a_y - c_y) + c_x(a_y - b_y) \leq 0 \quad (1.3)$$

Soit une séquence  $\mathcal{S}$  de points de  $\mathbb{R}^2$  formant une ligne polygonale simple, notée  $\Sigma(\mathcal{S})$ .

**Définition 1.15** (Enveloppe convexe partielle). *L'enveloppe convexe partielle à gauche (respectivement à droite) de  $\mathcal{S}$ , notée  $\mathcal{E}_g(\mathcal{S})$  (respectivement  $\mathcal{E}_d(\mathcal{S})$ ), est une ligne polygonale telle que :*

- ses sommets sont des points de  $\mathcal{S}$  ; le premier et le dernier sommets étant le premier et le dernier point de  $\mathcal{S}$ ,
- ses arêtes entre deux sommets  $s_k$  et  $s_l$  se trouvent sur le bord d'un demi-plan à droite défini par  $s_k$  et  $s_l$  contenant (respectivement ne contenant pas) tous les points de  $\mathcal{S}$  entre  $s_k$  et  $s_l$ , ainsi que le sommet suivant  $s_m$ .

Le texte de cette définition décrit un objet en fait assez simple. Pour obtenir l'enveloppe convexe partielle à gauche (ou à droite) de  $\mathcal{S}$ , il suffit d'attacher un fil au premier point de  $\mathcal{S}$ , puis de l'enrouler autour des points de  $\mathcal{S}$ , en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre (ou dans le sens inverse), jusqu'à atteindre le dernier point de  $\mathcal{S}$  (fig. 1.19).

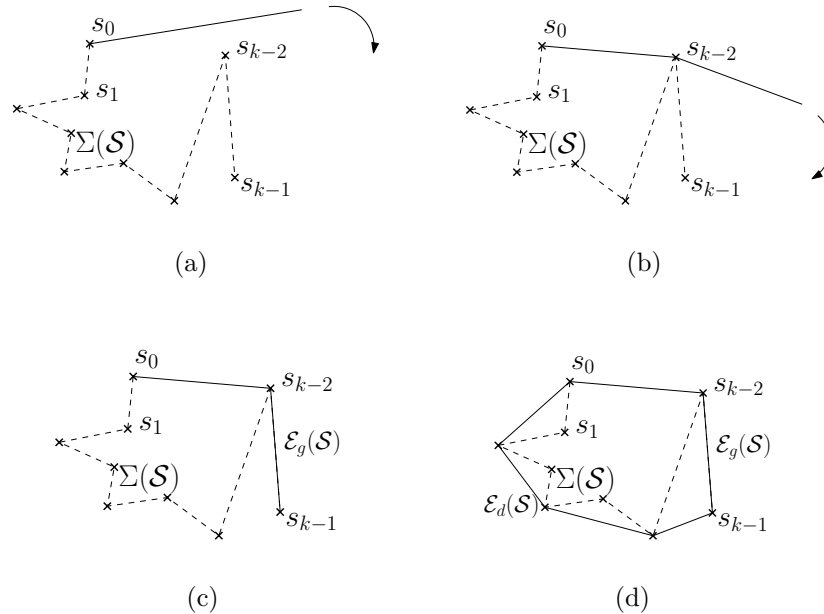


FIG. 1.19 – Les points  $s_0, s_1, \dots, s_{k-1} \in \mathcal{S}$  forment la ligne polygonale simple  $\Sigma(\mathcal{S})$  représentée par des tirets. L'enveloppe convexe partielle à gauche  $\mathcal{E}_g(\mathcal{S})$  s'obtient en enroulant un fil partant de  $s_0$ , autour des points de  $\mathcal{S}$ , dans le sens des aiguilles d'une montre (a-c). L'enveloppe convexe partielle à droite  $\mathcal{E}_d(\mathcal{S})$  s'obtient en tournant dans le sens inverse (d).

**Définition 1.16.** *La région du plan euclidien délimitée par la ligne polygonale simple  $\Sigma(\mathcal{S})$  et par son enveloppe convexe partielle à gauche  $\mathcal{E}_g(\mathcal{S})$  (respectivement son enveloppe*

convexe partielle à droite  $\mathcal{E}_d(\mathcal{S})$ ), mais privée de  $\Sigma(\mathcal{S})$ , est notée  $\mathcal{R}_g(\mathcal{S})$  (respectivement  $\mathcal{R}_d(\mathcal{S})$ ).

La fig. 1.20 illustre cette définition.

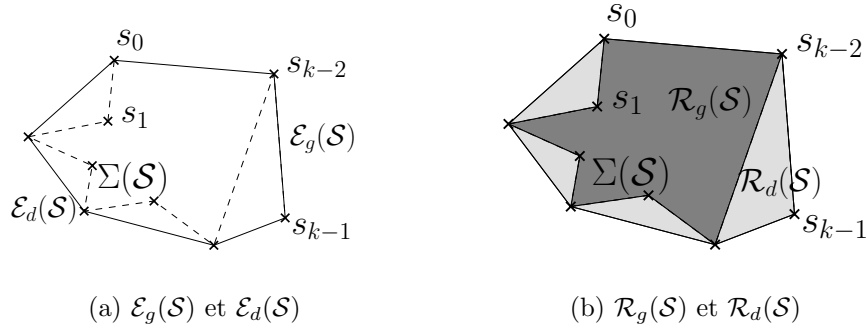


FIG. 1.20 – Les points  $s_0, s_1, \dots, s_{k-1} \in \mathcal{S}$  forment la ligne polygonale simple  $\Sigma(\mathcal{S})$  représentée par des tirets. La région du plan euclidien délimitée par l’enveloppe convexe de  $\mathcal{S}$  est séparée en deux zones (non nécessairement connexes) par  $\Sigma(\mathcal{S})$  : une zone gris sombre, notée  $\mathcal{R}_g(\mathcal{S})$ , et une zone gris claire, notée  $\mathcal{R}_d(\mathcal{S})$ .

Par la suite, nous considérons que les points de l’ensemble  $X_{i|j}$  (respectivement  $\bar{X}_{i|j}$ ) sont naturellement triés en une séquence selon l’ordre de parcours des points de la partie  $C_{i|j}$ . Ces points forment donc une ligne polygonale que nous notons  $\Sigma(X_{i|j})$  (respectivement  $\Sigma(\bar{X}_{i|j})$ ). Pour définir les parties convexes, nous utilisons l’enveloppe convexe partielle à gauche de  $X_{i|j}$ , notée  $\mathcal{E}_g(X_{i|j})$ , qui délimite avec  $\Sigma(X_{i|j})$ , la région  $\mathcal{R}_g(X_{i|j})$ . De même, pour définir les parties concaves, nous utilisons l’enveloppe convexe partielle à droite de  $\bar{X}_{i|j}$ , notée  $\mathcal{E}_d(\bar{X}_{i|j})$ , qui délimite avec  $\Sigma(\bar{X}_{i|j})$ , la région  $\mathcal{R}_d(\bar{X}_{i|j})$ .

Grâce à ces notations, les parties convexes et concaves sont définies de la manière suivante :

**Définition 1.17** (Partie convexe ou concave). *Une partie  $C_{i|j}$  d’un contour  $C$  est une partie convexe (respectivement concave) si et seulement si aucun point de  $\bar{X}$  (respectivement  $X$ ) ne se trouve dans  $\mathcal{R}_g(X_{i|j})$  (respectivement  $\mathcal{R}_d(\bar{X}_{i|j})$ ).*

Remarquons que si  $C$  n’est composé que de parties convexes, alors  $X$  est convexe.

La partie de la fig. 1.21.a est convexe car il n’y a aucun point extérieur dans la région  $\mathcal{R}_g(X_{i|j})$ , entre les points intérieurs et leur enveloppe convexe partielle à gauche  $\mathcal{E}_g(X_{i|j})$ . A l’inverse, la partie de la fig. 1.21.b est concave car il n’y a aucun point intérieur dans la région  $\mathcal{R}_d(\bar{X}_{i|j})$ , entre les points extérieurs et leur enveloppe convexe partielle à droite  $\mathcal{E}_d(\bar{X}_{i|j})$ . La fig. 1.21.c présente une partie ni convexe ni concave, car la région  $\mathcal{R}_g(X_{i|j})$  contient un point extérieur, tandis que la région  $\mathcal{R}_d(\bar{X}_{i|j})$  contient tous les points intérieurs. Enfin, la fig. 1.21.d présente une partie qui est à la fois convexe et concave.

La définition de disque que nous proposons est aussi fondée sur la discrétisation de Gauss :

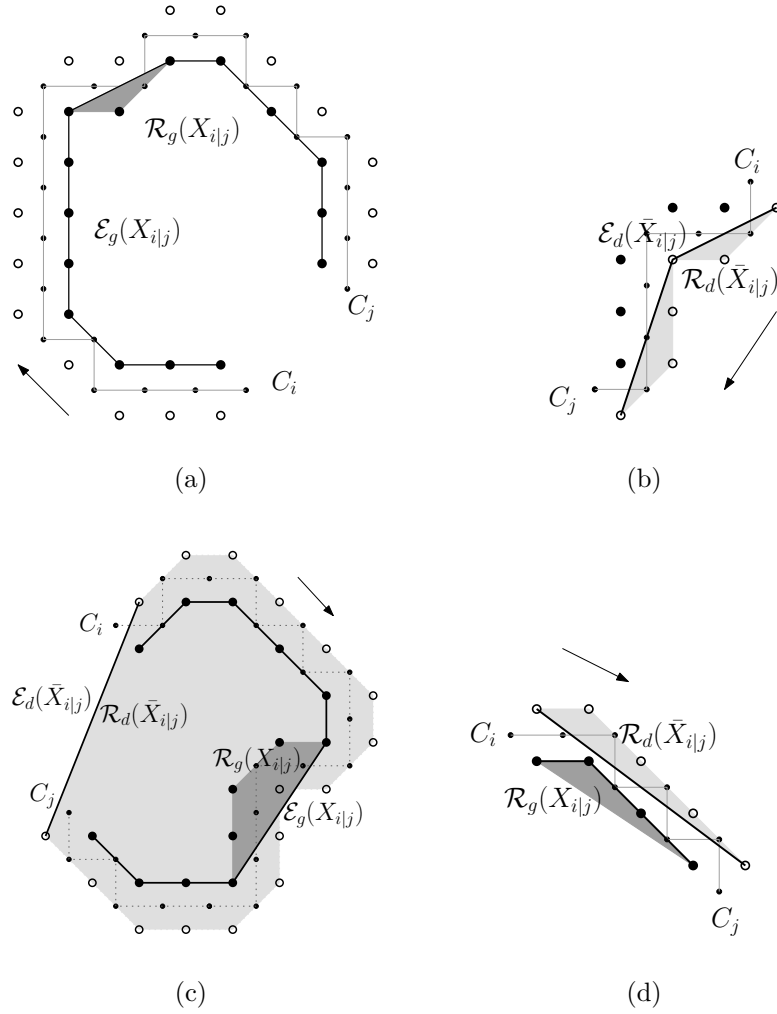


FIG. 1.21 – Partie convexe en (a), concave en (b), ni convexe, ni concave en (c) et à la fois convexe et concave en (d).

**Définition 1.18** (Disque). *Un objet  $X$  est un disque discret si et seulement si  $X$  est la discrétisation de Gauss d'un disque euclidien.*

Par extension, le contour  $C$  d'un objet  $X$  est un cercle discret si et seulement si  $X$  est un disque discret. Pour adapter cette définition aux parties de contour, l'approche par séparation est adoptée :

**Définition 1.19** (Arc de cercle). *Une partie  $C_{i|j}$  d'un contour  $C$  est un arc de cercle discret si et seulement s'il existe un cercle euclidien qui sépare  $X_{i|j}$  de  $\bar{X}_{i|j}$ .*

La fig. 1.22 donne un exemple de disque discret en (a) et un exemple d'arc de cercle discret en (b).

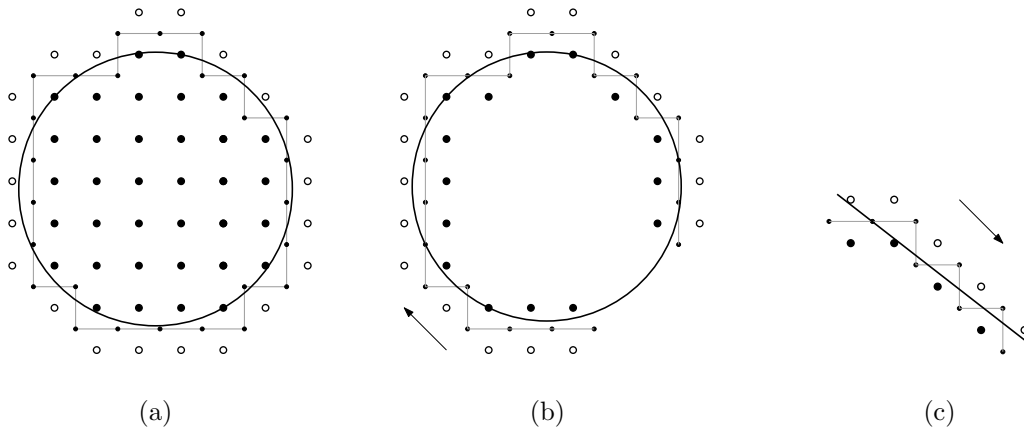


FIG. 1.22 – Définition par séparation d'un cercle (a), arc de cercle (b) et segment de droite (c).

Un segment de droite discrète, comme celui de la fig. 1.22.c est vu comme un arc de cercle de rayon infini :

**Définition 1.20** (Segment de droite). *Une partie  $C_{i|j}$  d'un contour  $C$  est un segment de droite discrète si et seulement s'il existe une droite euclidienne qui sépare  $X_{i|j}$  de  $\bar{X}_{i|j}$ .*

Le chapitre 4 montre qu'un segment de droite (fig. 1.22.c) est aussi une partie à la fois convexe et concave (fig. 1.17.f).

### 1.3.4 Le bruit

Le bruit synthétisé dans les expérimentations des chapitres 3 et 6 suit le modèle de Kungo *et al.* [2000]. Ce modèle, proposé et validé dans le contexte de l'analyse de documents, suppose que : (1) la probabilité qu'un pixel bascule de l'objet au fond (respectivement du fond à l'objet) dépend de sa distance au pixel du fond (respectivement de l'objet) le plus proche et (2) le flou est simulé par une fermeture morphologique.



En pratique, ce modèle est appliqué directement à une image binaire, notée  $I$ , sur laquelle une image représentant la carte des distances, notée  $T$ , a été calculée. Chaque pixel, caractérisé par ses coordonnées  $i$  et  $j$ , est traité selon la formule 1.4, qui est une version simplifiée, munie d'un seul paramètre, de celle de Kanungo *et al.* [2000] :

$$p(I(i, j) = 0 | I(i, j) = 1) = p(I(i, j) = 1 | I(i, j) = 0) = \exp\left(-\frac{T(i, j)}{\alpha}\right) \quad (1.4)$$

Plus les pixels de l'objet ou du fond sont proches des pixels du complémentaire, plus ils risquent d'être associés au complémentaire. Au-delà d'une certaine distance, la probabilité de changer la valeur d'un pixel est pratiquement nulle. Le paramètre  $\alpha$ , qui contrôle cette distance, détermine la quantité de bruit ajoutée.

Une fois que les pixels ont basculé de l'objet au fond et inversement selon la probabilité de l'équation 1.4, une fermeture morphologique avec un élément structurant circulaire de rayon 3 est appliquée afin de reconnecter l'objet (mais sans aucune garantie).

La fig. 1.23 donne deux exemples de résultats de ce modèle appliqué à un objet discret issu de la discrétisation de Gauss d'un cercle.

(a)  $\alpha = 1$ (b)  $\alpha = 15$ 

FIG. 1.23 – Discretisation de Gauss d'un cercle dégradée par du bruit. La quantité de bruit ajoutée aux deux figures selon le modèle de Kanungo *et al.* [2000] dépend du paramètre  $\alpha$  : plus  $\alpha$  est grand, plus la quantité de bruit ajoutée est importante.

## 1.4 L'analyse

L'analyse et la synthèse sont deux processus opposés. La *synthèse* désigne la construction d'objets à partir d'un modèle dont les paramètres sont connus. A l'usine, ce serait la production de biens selon un procédé de fabrication et à partir d'un moule. *L'analyse*, au contraire, est la définition d'un modèle à partir des objets. Le problème est ici de déterminer, parmi un ensemble de modèles disponibles, quels modèles conviennent et de trouver

leur paramétrage. Autrement dit, il s'agit, étant donné un produit, de trouver le moule qui a pu le fabriquer.

Pour chacun des trois modèles définis dans la section précédente (partie convexe ou concave, arc de cercle discret, segment de droite discrète), quatre opérations d'analyse sont considérées : la détection, la reconnaissance, la description et la représentation.

### 1.4.1 Tâches d'analyse

La *détection* consiste à tester un modèle donné sur un objet donné. En pratique, une des questions suivantes est posée : est-ce qu'une partie  $C_{ij}$  d'un contour est une partie convexe? concave? est un arc de cercle discret? ou un segment de droite discrète? La réponse est binaire : oui ou non.

La *reconnaissance* consiste à détecter un modèle et à trouver son paramétrage. La question suivante est par exemple posée : est-ce qu'une partie  $C_{ij}$  est un segment de droite? Si oui, quels sont les paramètres de la droite à laquelle appartient le segment? Avec la définition 1.20, il y a toujours une infinité de droites séparants  $X_{ij}$  de  $\bar{X}_{ij}$  et autant de réponses possibles. En règle générale, plusieurs paramétrages sont possibles. Selon l'objectif, un paramétrage ou tous les paramétrages possibles sont requis.

La *représentation* consiste à détecter ou reconnaître des modèles localement mais de manière répétée sur tout le long d'un contour. Ceci explique pourquoi les modèles et définitions présentés précédemment sont adaptés aux parties de contour. La réversibilité indique que les paramètres des modèles obtenus permettent la reconstruction du contour, sans perte d'information.

La *description* consiste à mesurer la ressemblance entre un modèle donné et un objet donné. La question suivante est par exemple posée : à quel degré  $C_{ij}$  ressemble-t-il à un arc de cercle? La réponse est un réel entre 0 et 1, où 1 indique que la détection aurait répondu oui.

Une des forces de la géométrie discrète en analyse d'images est de fournir des algorithmes rapides dont les calculs sont exacts. En revanche, le bruit inhérent aux images produites par les systèmes d'acquisition n'est généralement pas pris en compte. Une image analogique simple est une partition du plan euclidien dans laquelle chaque zone a une couleur et texture uniforme. La forme d'une zone peut être appréhendée par les lignes de discontinuité qui la délimite. Mais le bruit qui dégrade l'image analogique entraîne la dilution et la fragmentation des discontinuités. Par conséquent, même si la discrétisation est contrôlée, la position d'un contour ne peut pas être considérée comme certaine si le contour provient d'une image numérique acquise par un dispositif naturellement imparfait.

La description, par l'instauration d'un seuil strictement inférieur à 1, rend possible une détection tolérante à l'incertitude portant sur la position exacte du contour. Si la mesure obtenue est supérieure au seuil, la détection répond oui. Cela signifie que la partie du contour considérée peut être vue comme ressemblant à un modèle, moyennant une incertitude quant à la position exacte du contour.

### 1.4.2 Objectifs

L'objectif de cette thèse est de proposer des algorithmes qui réalisent les tâches de détection, reconnaissance, description et représentation pour chacun des trois modèles d'objets que sont la partie convexe ou concave, l'arc de cercle et le segment de droite.

L'objectif est aussi de repousser les limites classiques de la géométrie discrète en proposant des algorithmes gérant les incertitudes. Il n'existe pas aujourd'hui de modélisation du bruit qui soit à la fois simple, fidèle à la réalité et reconnue par la communauté. L'approche adoptée, basée sur la description, est donc pragmatique.

Les algorithmes qui sont présentés dans les chapitres suivants prennent en entrée un contour ou seulement une partie. Pour que les programmes qui implémentent ces algorithmes s'exécutent rapidement et soient utiles en analyse d'images, il est souhaitable que le nombre d'opérations nécessaires soit proportionnel à la taille du contour et que le coefficient multiplicatif ne soit pas trop grand. De plus, la tâche de représentation, comme elle consiste à recouvrir le contour de modèles, a besoin que les calculs soient effectués à la volée. La décision, le paramétrage ou la mesure de description est mise à jour à chaque fois qu'un point est ajouté ou supprimé d'une partie temporairement détectée ou reconnue comme correspondant à un modèle.

## 1.5 Conclusion

Nous travaillons dans le plan discret engendré par le pavage par carrés. Chaque point discret appartient à  $\mathbb{Z}^2$ . Nous étudions le contour (ou une partie du contour) des objets simples (0-connexes et sans trou).

Les propriétés du contour  $C$  d'un objet  $X$  sont résumées ci-dessous :

- $C$  est à l'interface de  $X$  et  $\bar{X}$ .
- Plongé dans le plan euclidien,  $C$  est une courbe fermée respectant le théorème de Jordan.
- $X$  et  $\bar{X}$  ont même contour.
- $C$  a une aire nulle et l'aire euclidienne de la région délimitée par  $C$ , facilement calculable, est égale au nombre de points discrets appartenant à  $X$ .
- Les algorithmes de suivi (algorithme 1) et de remplissage (algorithme 2) sont simples. Ils sont généralisables aux dimensions supérieures à deux avec des structures de données adaptées. En dimension deux, une structure de données plus simple constituée d'un point et d'une liste de vecteurs peut être utilisée.

En outre, les chapitres 3, 4, 6 et 7 montrent que le contour est bien adapté aux algorithmes de reconnaissance par séparation et le chapitre 5 montre que le contour permet, contrairement au bord, d'obtenir un polygone réversible respectant les parties convexes et concaves.

Le premier point du contour  $C$  est d'abscisse minimale puis d'ordonnée maximale. Les points suivants sont ordonnés dans le sens des aiguilles d'une montre. Ce choix rend valides les propriétés suivantes :

- Le premier point du contour est sommet de l'enveloppe convexe du contour  $C$ .
- Le premier point intérieur est sommet de l'enveloppe convexe des points de  $X$ .
- Dans le premier octant, les points extérieurs d'un segment de droite discrète sont au-dessus de ses points intérieurs.

Nous nous concentrons sur trois modèles que sont la partie convexe ou concave, l'arc de cercle discret et le segment de droite discrète dont la définition repose sur la discrétisation de Gauss. Notre objectif est l'élaboration d'algorithmes dynamiques (mise à jour à la volée de la décision et du paramétrage), exacts (calculs en nombres entiers ne souffrant d'aucune erreur d'approximation) et rapides (linéaires en temps), qui réalisent quatre types de tâches d'analyse. Ces opérations sont la détection et la reconnaissance des trois modèles, la description d'un contour (ou d'une partie) par similarité à un des trois modèles et la représentation d'un contour (ou d'une partie) par un ensemble de modèles organisés en chaîne ou graphe.

# Chapitre 2

## *Outils*

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Programmation linéaire . . . . .</b>	<b>34</b>
2.1.1	Formulation d'un programme linéaire . . . . .	34
2.1.2	Problème de séparation de deux ensembles de points . . . . .	35
2.1.3	L'algorithme de Megiddo [1984] . . . . .	36
<b>2.2</b>	<b>Transformations géométriques . . . . .</b>	<b>36</b>
2.2.1	Dualité géométrique . . . . .	37
2.2.2	Transformation cercle-point-plan . . . . .	39
<b>2.3</b>	<b>Géométrie algorithmique . . . . .</b>	<b>39</b>
2.3.1	Calcul d'enveloppe convexe . . . . .	41
2.3.2	Rotating calipers . . . . .	44
<b>2.4</b>	<b>Arithmétique et dénombrement de points . . . . .</b>	<b>47</b>
2.4.1	Interprétation géométrique de l'algorithme d'Euclide . . . . .	47
2.4.2	Formule de Pick . . . . .	51
<b>2.5</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>54</b>

---

Ce chapitre est consacré aux outils qui ont rendu possible les résultats décrits dans les chapitres suivants. Ils appartiennent à quatre domaines : la programmation linéaire, les transformations géométriques, la géométrie algorithmique et l'arithmétique. Ils sont ordonnés des plus génériques (valable pour tout ensemble de points du plan euclidien) aux plus spécifiques (tirant profit au mieux de l'organisation régulière des points de  $\mathbb{Z}^2$ ).

## 2.1 Programmation linéaire

Cette section a pour objectif de montrer que, compte-tenu des définitions choisies, le problème de reconnaissance se réduit en général à un problème de séparation de points par une fonction implicite, qui se réduit à son tour à un problème de programmation linéaire. Cette réduction est d'abord illustrée sur les coniques, puis la technique de résolution de Megiddo est présentée et discutée.

### 2.1.1 Formulation d'un programme linéaire

Un *programme linéaire* est une fonction objectif linéaire accompagnée d'un ensemble d'inégalités linéaires. Le terme programme désigne ici la description de l'ensemble des *contraintes* sous forme d'inégalités. Ce programme est noté :

$$\begin{cases} \text{Min} & c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1d}x_d \\ & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1d}x_d \leq b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2d}x_d \leq b_2 \\ & \dots \\ & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nd}x_d \leq b_n \end{cases} \quad (2.1)$$

ou, en écriture matricielle :

$$\begin{aligned} \text{Min} & \quad cx \\ & Ax \leq b \end{aligned} \quad (2.2)$$

où  $x$  et  $c$  sont des vecteurs de taille  $1 \times d$ ,  $b$  un vecteur de taille  $1 \times n$  et  $A$ , une matrice  $n \times d$ .

Le problème de la programmation linéaire consiste à optimiser la fonction objectif (généralement la minimiser) sous les contraintes données par les inégalités linéaires.

Géométriquement, chaque contrainte est un demi-espace. L'intersection de l'ensemble des contraintes est un polytope convexe appelé *domaine*. La fonction objectif est représentée par un hyperplan translaté dans une direction. Le problème consiste à chercher le point  $x^*$  du domaine touché en premier par l'hyperplan translaté. La fig. 2.1 illustre les contraintes (lignes continues noires), le domaine (surface grisée), la fonction objectif (lignes discontinues) ainsi que la solution (indiquée par une croix) d'un problème de programmation linéaire en dimension deux. Evidemment, si le domaine est vide, il n'y a aucune solution. Dans le cas contraire, il peut y avoir une ou plusieurs solutions, qui sont toutes sur le bord du domaine.

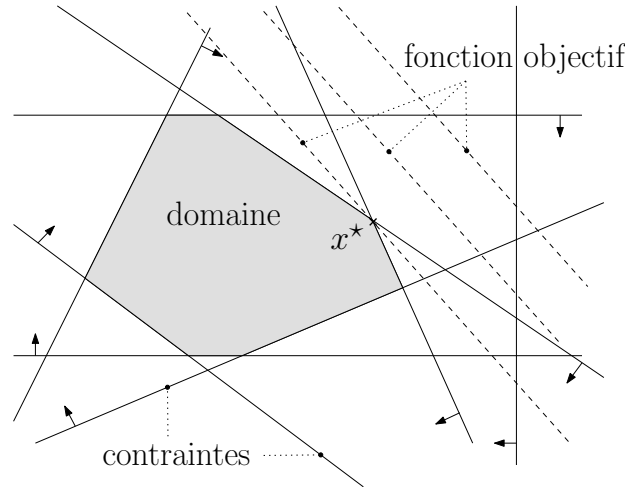


FIG. 2.1 – Interprétation géométrique d’un problème de programmation linéaire en dimension deux.

### 2.1.2 Problème de séparation de deux ensembles de points

En géométrie discrète, la plupart des problèmes de reconnaissance ont une formulation sous forme de problème de séparation de deux ensembles de points. Soit une partie  $I$  de  $\mathbb{Z}^2$  localisée dans un rectangle isothétique de taille  $M \times N$ . Soit l’objet  $S$  issu de la discrétisation de Gauss d’une conique :

$$S = \{s(x_s, y_s) \in I \mid ax_s^2 + bx_sy_s + cy_s^2 + dx_s + ey_s + f \leq 0\}$$

Par complémentarité :

$$\bar{S} = T = \{t(x_t, y_t) \in I \mid ax_t^2 + bx_ty_t + cy_t^2 + dx_t + ey_t + f > 0\}$$

Le problème de la reconnaissance consiste à rechercher les paramètres  $a, b, c, d, e, f$  des coniques ayant  $S$  comme discrétisation de Gauss. Or, les coniques ayant  $S$  comme discrétisation de Gauss sont évidemment celles qui séparent les deux ensembles  $S$  et  $T$ . Bien sûr, à cause de la perte irréversible d’informations provoqués par la discrétisation, il n’est pas possible de retrouver la conique dont la discrétisation de Gauss a donné  $S$ , mais cette conique appartient à l’ensemble des coniques qui séparent  $S$  et  $T$ .

Par définition, l’ensemble des coniques séparant  $S$  et  $T$  sont celles vérifiant le système de contraintes suivant :

$$\begin{cases} \forall s \in S & ax_s^2 + bx_sy_s + cy_s^2 + dx_s + ey_s + f \leq 0 \\ \forall t \in T & ax_t^2 + bx_ty_t + cy_t^2 + dx_t + ey_t + f > 0 \end{cases}$$

Comme les coordonnées des points de  $S$  et  $T$  sont données et que seuls les paramètres  $a, b, c, d, e, f$  sont inconnus, ces contraintes ont la forme d’un système d’inégalités linéaires. Par conséquent, quelle que soit la fonction objectif (il n’est même pas nécessaire d’en

définir une), ce problème de séparation est un problème de programmation linéaire. Ce système peut en effet être réécrit sous la forme matricielle de l'équation 2.2 en prenant  $x = (a, b, c, d, e, f)^T$ ,  $b = \underbrace{(0, \dots, 0)^T}_{|S|+|T|}$  et

$$A = \begin{pmatrix} \left. \begin{array}{cccccc} x_s^2 & x_s y_s & y_s^2 & x_s & y_s & 1 \end{array} \right\} |S| \\ \left. \begin{array}{cccccc} -x_t^2 & -x_t y_t & -y_t^2 & -x_t & -y_t & 1 \end{array} \right\} |T| \\ \dots \end{pmatrix}$$

### 2.1.3 L'algorithme de Megiddo [1984]

De nombreux algorithmes existent pour résoudre un problème de programmation linéaire [Schrijver, 1986]. Cependant celui de Megiddo [1984] est souvent cité du fait de sa complexité en temps qui est linéaire en le nombre de contraintes.

**Théorème 2.1** ([Megiddo, 1984]). *Il existe un algorithme en  $\mathcal{O}(n)$  qui résout tout problème de programmation linéaire comprenant  $n$  contraintes linéaires dans un espace de dimension  $d$ , où  $d$  est fixé.*

L'algorithme de Megiddo peut être résumé ainsi : pour trouver un point du domaine formé par  $n$  contraintes dans un espace de dimension  $d$ , l'algorithme résout récursivement le problème dans un espace de dimension  $d - 1$ . A chaque étape, pour un coût linéaire en le nombre de contraintes, il élimine une fraction fixe de ces contraintes. A la fin, il reste  $2^{2^{(d-1)}}$  contraintes [Megiddo, 1984], c'est-à-dire 4 si  $d = 2$ , 16 si  $d = 3$ , 256 si  $d = 4$ , etc. N'importe quel algorithme naïf polynomial résout le problème posé en ne prenant en compte que les contraintes restantes. Comme  $d$  est fixe, la complexité est linéaire, mais la constante est très importante et exponentielle en la dimension.

Quand  $d \geq 4$ , l'algorithme de Megiddo est tout simplement inutilisable en pratique. Quand  $d = 2$ , il est programmable et utilisable, mais en géométrie discrète (par exemple dans le cadre de la reconnaissance de segments de droites) d'autres algorithmes, ayant la même complexité et exploitant l'ordre ou la disposition régulière des points, sont plus rapides. L'algorithme de Megiddo est donc peu utilisé dans ce cas. Enfin, quand  $d = 3$ , bien que souvent cité pour conclure sur la complexité en temps du problème (par exemple dans le cadre de la reconnaissance de cercle [O'Rourke *et al.*, 1986; Sauer, 1993; Damaschke, 1995]), il n'est pas non plus utilisé car moins rapide et beaucoup plus difficile à implémenter qu'en dimension deux.

## 2.2 Transformations géométriques

Cette section a pour objectif de montrer que les transformations géométriques sont d'une aide précieuse en géométrie. Elles ont pour principal intérêt de modifier la façon dont est vu le problème de départ, ce qui améliore sa compréhension et donne des équivalences entre des approches ou algorithmes qui sont de prime abord différents.



### 2.2.1 Dualité géométrique

La dualité *point-ligne* est le principe qui repose sur la symétrie des deux interprétations possibles de l'équation d'une droite  $\mathcal{D}$  dans  $\mathbb{R}^2$  :

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0\}. \quad (2.3)$$

Les coefficients de la droite  $\mathcal{D}$  sont  $a$ ,  $b$  et  $c$ . Ils peuvent être vus aussi comme les coordonnées homogènes d'un point dans le plan des paramètres. Ce plan est *dual* du plan de départ, appelé *primal*. Les fig. 2.2.a et fig. 2.2.b montrent que la droite de pente 2 et d'ordonnée à l'origine 1 peut être vue comme un point de coordonnées  $(2, 1)$  dans le plan dual.

De manière symétrique,  $x$  et  $y$  sont les coordonnées d'un point dans le primal et peuvent aussi être vues comme les coefficients d'une droite dans le dual. Les fig. 2.2.c et fig. 2.2.d montrent que le point  $(2, 1)$  dans le primal correspond à la droite de pente  $-2$  et d'ordonnée à l'origine 1 dans le dual.

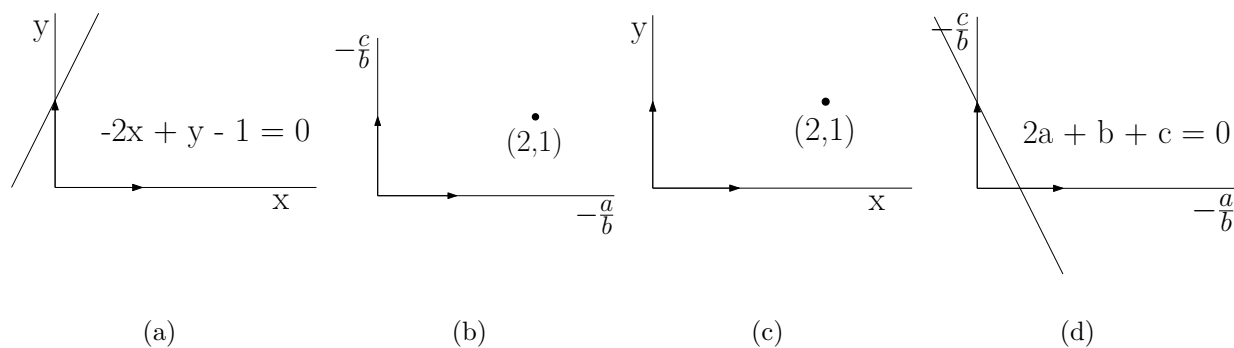


FIG. 2.2 – Une droite dans le primal (a) correspond à un point dans le dual (b). De manière symétrique, un point dans le primal (c) correspond à une droite dans le dual (d).

Les coordonnées homogènes sont commodes car elles autorisent les droites de pente infinie. Elles permettent en plus d'interpréter géométriquement la dualité dans un espace de dimension trois. Il suffit pour cela de voir les coordonnées homogènes des points en dimension deux comme des coordonnées non homogènes de points en dimension trois. Ainsi, une dimension artificielle est ajoutée au plan primal de manière à obtenir un espace à trois dimensions. Les points du plan primal sont relevés sur le plan horizontal d'altitude 1, noté  $\Pi$ . Le vecteur reliant l'origine à un point de  $\Pi$  de coordonnées  $(x, y, 1)$  est la normale du plan tangent à l'origine qui coupe  $\Pi$  en  $\mathcal{D}$  (fig. 2.3).

Plus de précisions se trouvent dans le livre d'introduction à la géométrie algorithmique de Preparata et Shamos [1985]. Les résultats sur la dualité utilisés dans les chapitres suivants sont résumés dans le tableau 2.1.

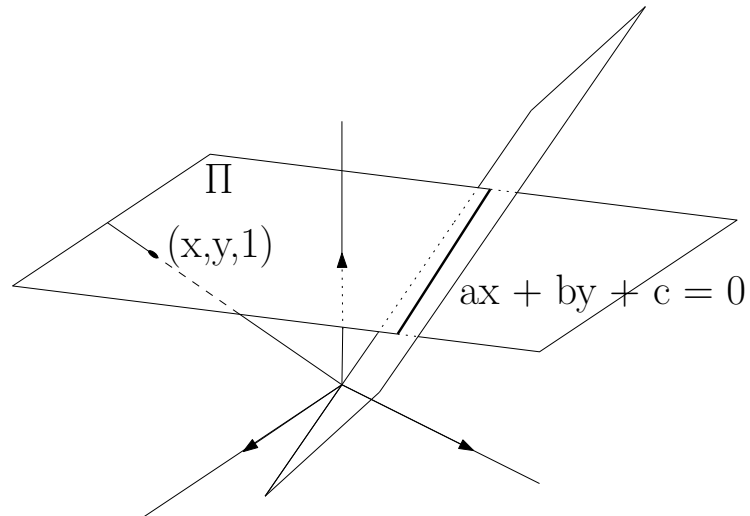


FIG. 2.3 – Dualité point-ligne vue dans un espace à trois dimensions.

plan primal	plan dual
point	droite
droite	point
point d'intersection entre $n$ droites	droite passant par $n$ points
$n$ droites concourantes	$n$ points alignés
intersection de $n$ demi-plans	enveloppe convexe de $n$ points
enveloppe convexe de $n$ points	intersection de $n$ demi-plans

TAB. 2.1 – Principales équivalences entre primal et dual

### 2.2.2 Transformation cercle-point-plan

L'interprétation géométrique de l'équation d'un cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $o$  et de rayon  $r$  dans  $\mathbb{R}^2$  est aussi multiple :

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = r^2\}. \quad (2.4)$$

En développant, on obtient :

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2ax - 2by + c + f(x, y) = 0\},$$

$$\text{où } \begin{cases} a = x_o, & b = y_o, \\ c = (x_o^2 + y_o^2 - r^2) \\ f(x, y) = x^2 + y^2 \end{cases} \quad (2.5)$$

Les paramètres du cercle  $\mathcal{C}$  sont  $a$ ,  $b$  (les coordonnées du centre) et  $c$  (la puissance de l'origine par rapport au cercle). Ils peuvent être vus comme les coordonnées d'un point dans l'espace des paramètres, noté  $abc$ .

Comme  $r \geq 0$ ,  $c \leq a^2 + b^2$ , l'espace  $abc$  est une copie de  $\mathbb{R}^3$  de laquelle on enlève l'intérieur du parabolôide d'équation  $c = a^2 + b^2$ . Un point sur le parabolôide correspond à un cercle de rayon nul dans le plan de départ, noté plan  $xy$ . Un point situé au-dessous du parabolôide correspond dans l'espace  $xy$  à un cercle dont le rayon est égal à la distance verticale entre le point et le parabolôide (fig. 2.4.a).

La seconde interprétation de l'équation 2.5 implique de plonger le plan  $xy$  dans un espace à trois dimensions, noté  $xyz$ . Les points du plan  $xy$  sont relevés le long de l'axe supplémentaire  $z$ , en fonction de  $f$ . Autrement dit, le plan  $xy$  est projeté sur le parabolôide d'équation  $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ . Or l'intersection entre un plan et le parabolôide d'équation  $z = x^2 + y^2$  se projette sur le plan  $xy$  en un cercle (fig. 2.4.b). Ainsi, les paramètres  $a$ ,  $b$  et  $c$  du cercle  $\mathcal{C}$  peuvent aussi être vus comme les coefficients d'un plan dans l'espace  $xyz$ .

Cette transformation a été utilisée en géométrie algorithmique pour la première fois par Brown [1979]. Elle est bien adaptée aux problèmes géométriques impliquant des cercles comme la construction du diagramme de Voronoï ou de la triangulation de Delaunay. Les diagrammes de Voronoï d'ordre  $k$  d'un ensemble de  $n$  points sont tels que chaque cellule de Voronoï regroupe les lieux plus proches de  $k$  points que des  $n - k$  autres. De même, les triangulations de Delaunay d'ordre  $k$  sont telles que le cercle circonscrit à chaque triangle contient  $k - 1$  points mais pas les  $n - k + 1$  autres. Les diagrammes de Voronoï d'ordre 1 et  $n + 1$  sont les projections sur le plan  $ab$  des enveloppes inférieure et supérieure de  $n$  plans. De même, les triangulations de Delaunay d'ordre 1 et  $n + 1$  sont les projections sur le plan  $xy$  des parties supérieure et inférieure de l'enveloppe convexe de  $n$  points.

Le tableau 2.2 résume ces résultats.

## 2.3 Géométrie algorithmique

La géométrie algorithmique a pour objet la conception et l'analyse des algorithmes destinés à résoudre des problèmes géométriques. Le problème le plus étudié a sans doute

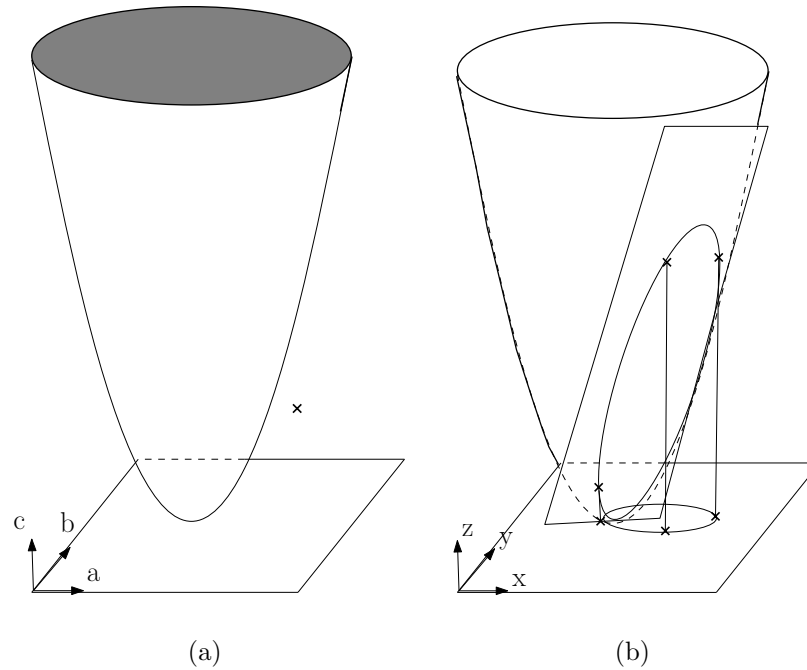


FIG. 2.4 – (a) Un point situé à l’extérieur du parabolôide d’équation  $c = a^2 + b^2$  dans l’espace  $abc$  correspond à un cercle dans le plan  $xy$  et inversement. (b) L’intersection entre un plan et le parabolôide d’équation  $z = x^2 + y^2$  dans l’espace  $xyz$  correspond à un cercle dans le plan  $xy$  et inversement.

plan $xy$	espace $xyz$	espace $abc$	plan $ab$
cercle	plan	point 3D	point 2D
point 2D	point 3D	plan	-
1-Delaunay	enveloppe convexe supérieure de points 3D	intersection de demi-espaces orientés vers le bas	1-Voronôï
$(n + 1)$ -Delaunay	enveloppe convexe inférieure de points 3D	intersection de demi-espaces orientés vers le haut	$(n + 1)$ -Voronôï

TAB. 2.2 – Principales équivalences entre les espaces  $abc$  et  $xyz$  et leur projection sur les plans  $ab$  et  $xy$ .

été celui du calcul de l'enveloppe convexe d'un ensemble de points. Il a de nombreuses applications en informatique graphique, robotique, vision, apprentissage, etc. C'est aussi un problème crucial en géométrie discrète au moins pour deux raisons : d'une part, l'enveloppe convexe est utilisée pour définir la convexité d'un objet (section 1.3.3) et d'autre part, les problèmes d'intersection de demi-espaces correspondent, par dualité, à des problèmes de calcul d'enveloppe convexe (section 2.2).

Enfin, le calcul d'enveloppe convexe est un prétraitement nécessaire pour beaucoup d'algorithmes tirant profit de la convexité, comme ceux de la famille des "rotating calipers", abordés au paragraphe 2.3.2.

### 2.3.1 Calcul d'enveloppe convexe

Le problème du calcul de l'enveloppe convexe d'un ensemble de  $n$  points de  $\mathbb{R}^2$  nécessite  $\Omega(n \log n)$  opérations [Preparata et Shamos, 1985]. Graham [1972] a trouvé un algorithme atteignant cette borne dans un article pionnier dont nous rappelons le contenu ci-dessous.

Un point dont on est sûr qu'il se trouve à l'intérieur de l'enveloppe convexe, comme le centre de gravité, est choisi comme pôle. Les  $n$  points sont ensuite triés par angle polaire et distance au pôle. Ce tri s'effectue évidemment en  $\mathcal{O}(n \log n)$ . Le premier point est un point extrémal (c'est-à-dire sommet de l'enveloppe convexe). C'est par exemple celui d'abscisse et ordonnée minimale. Les autres points extrémaux sont ensuite sélectionnés par un parcours des points en  $\mathcal{O}(n)$ , appelé "Graham scan", ou en français, "balayage de Graham".

---

#### Algorithme 3 : Balayage de Graham

---

**Entrées** : Séquence de points  $(p_0, p_1, \dots, p_n)$  de  $\mathbb{R}^2$  triés autour d'un pôle

**Sorties** : La pile contenant les sommets de l'enveloppe convexe

```

1 si  $n > 3$  alors
2   Empiler  $p_0$ ;
3   Empiler  $p_1$ ;
4   Empiler  $p_2$ ;
5   pour  $i$  de 3 à  $n$  faire
6     tant que  $p_i$  appartient au demi-plan à droite défini par les 2 derniers points
7       du haut de la pile faire
8       | Dépiler;
9     Empiler  $p_i$ ;
9   retourner la pile;

```

---

Le balayage de Graham (algorithme 3) repose sur un prédicat d'orientation (l. 6) formulé à l'aide de notre définition de demi-plan orienté (définition 1.14).

Pour éviter le passage en coordonnées polaires, les points peuvent être triés selon les axes du repère, au lieu d'être triés par rapport à un pôle [Andrew, 1979]. Les parties supérieure et inférieure de l'enveloppe convexe se trouvant entre les points d'abscisse minimale et maximale sont indépendamment calculées à l'aide d'un balayage de Graham. Ce

n'est rien d'autre qu'un cas particulier de l'algorithme de Graham où le pôle est un point à l'infini [Preparata et Shamos, 1985].

L'algorithme de Graham est optimal, mais si  $h$ , le nombre de sommets de l'enveloppe convexe, est *a priori* petit, les algorithmes "output-sensitive" [Jarvis, 1973; Chan, 1996] sont meilleurs.

L'algorithme de Graham ne se généralise pas en dimension supérieure. D'autres méthodes existent pour cela : "gift-wrapping", "quickhull", "divide-and-conquer", etc. (voir [Preparata et Shamos, 1985] pour leur description). Ces résultats généraux s'appliquent évidemment en dimension trois, mais les algorithmes spécifiques, comme l'approche incrémentale avec graphe de conflit en  $\mathcal{O}(n \log n)$  [de Berg *et al.*, 2000], sont plus simples.

L'algorithme de Graham n'est pas non plus en ligne car il a besoin que tous les points soient disponibles et correctement triés avant que le balayage commence. Preparata a conçu un algorithme dans lequel chaque point est traité en  $\mathcal{O}(\log n)$ , d'où une complexité globale en  $\mathcal{O}(n \log n)$  [Preparata, 1979]. La structure de données utilisée est celle d'un arbre binaire de recherche équilibré pour pouvoir réaliser les opérations d'insertion et suppression d'un élément, de concaténation et de scission en  $\log i$ , où  $i$  est le nombre de nœuds. Overmars et Van Leeuwen [1981] ont proposé ensuite un algorithme dynamique où la suppression d'un point, en plus de l'insertion, est possible. L'implémentation et l'utilisation de ces techniques sont un peu lourdes à cause de la complexité de la structure de données sous-jacente.

Melkman [1987] a proposé un algorithme rapide et en ligne pour calculer l'enveloppe convexe de points formant une ligne polygonale simple, c'est-à-dire qui ne s'intersecte pas. L'enveloppe convexe est représentée par une ligne polygonale simple mais fermée (le premier et le dernier point sont les mêmes). Grâce à l'ordre intrinsèque des points, seules les opérations d'ajout et de suppression au début et à la fin de l'enveloppe convexe courante sont nécessaires. Ainsi, une file à double extrémité ("deque" pour "double ended queue") ou une liste doublement chaînée sont des structures de données adaptées au stockage des sommets de l'enveloppe convexe.

Les points sont considérés les uns après les autres. En fonction de la position du nouveau point à traiter, noté  $p_k$ , et en fonction des points extrémités de la deque, plusieurs cas, illustrés dans la fig. 2.5, sont possibles :

- zone 1 :  $p_k$  est à l'intérieur de l'enveloppe, il n'est donc pas extrémal.
- zones 2, 3 et 4 :  $p_k$  est ajouté au début et à la fin de la deque ; la convexité est maintenue par un processus de dépilement comme dans le balayage de Graham (algorithme 4, lignes 2-3 et 5-6).
- zone 5 :  $p_k$  ne peut pas se trouver dans cette zone car les points sont supposés former une ligne polygonale simple.

Dans l'algorithme 4, la discrimination entre la zone 1 et les zones 2, 3 et 4 est réalisée à la première ligne. Les processus de dépilement se trouvent lignes 2-3 et 5-6.

Récemment, Buzer a utilisé l'algorithme de Melkman pour obtenir un algorithme de calcul d'enveloppe convexe dynamique quand les points à traiter forment une ligne polygonale simple [Buzer, 2007].

Le tableau 2.3 récapitule tous ces algorithmes et leur complexité.

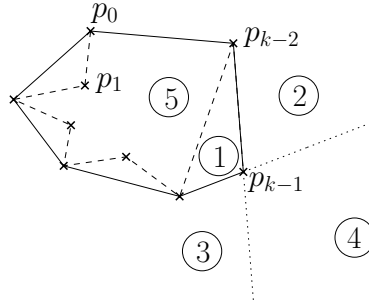


FIG. 2.5 – Illustration de l’algorithme de Melkman [1987]. Les points  $(p_0, p_1, \dots, p_{k-1})$ , indiqués par des croix, sont reliés par des tirets. L’enveloppe convexe courante est représentée en traits pleins. Le nouveau point  $p_k$  se trouve dans une des quatre premières zones, mais pas dans la cinquième car les points sont supposés former une ligne polygonale simple.

---

**Algorithme 4** : Algorithme de Melkman

---

**Entrées** : Un nouveau point  $p_k$  de  $\mathbb{R}^2$  à traiter, la deque contenant les sommets de l’enveloppe convexe courante

**Sorties** : La deque mise à jour

- 1 **si**  $p_k$  appartient au demi-plan à droite défini par les 2 premiers points de la deque ou à celui à gauche défini par les 2 derniers points de la deque **alors**
    - 2 /\* mise à jour de la deque à partir du début \*/
    - 3 **tant que**  $p_k$  appartient au demi-plan à droite défini par les 2 premiers points de la deque **faire**
    - 4     Dépiler au début;
    - 5     Empiler  $p_k$  au début;
    - 6     /\* mise à jour de la deque à partir de la fin \*/
    - 7     **tant que**  $p_k$  appartient au demi-plan à gauche défini par les 2 derniers points de la deque **faire**
    - 8     Dépiler à la fin;
    - 9     Empiler  $p_k$  à la fin;
  - 10 **retourner** la deque;
-

Référence	Contrainte	Complexité
[Graham, 1972]	aucune	$\mathcal{O}(n \log n)$ , hors ligne
[Jarvis, 1973]	aucune	$\mathcal{O}(nh)$ , hors ligne
[Chan, 1996]	aucune	$\mathcal{O}(n \log h)$ , hors ligne
[Preparata, 1979]	aucune	$\mathcal{O}(n \log n)$ , en ligne $\mathcal{O}(\log n)$ par ajout
[Overmars et Van Leeuwen, 1981]	aucune	$\mathcal{O}(n \log^2 n)$ , dynamique $\mathcal{O}(\log^2 n)$ par opération
[Melkman, 1987]	ligne polygonale simple	$\mathcal{O}(n)$ , en ligne $\mathcal{O}(n)$ par ajout
[Buzer, 2007]	ligne polygonale simple	$\mathcal{O}(n)$ , dynamique $\mathcal{O}(n)$ par opération

TAB. 2.3 – Algorithmes de calcul d’enveloppe convexe en dimension deux. Le nombre de points est noté  $n$ , tandis que le nombre de sommets de l’enveloppe convexe est noté  $h$ .

### 2.3.2 Rotating calipers

Le paradigme des “rotating calipers” regroupe un ensemble d’algorithmes dans lesquels des droites parallèles (en générale deux) tournent en s’appuyant autour d’un ou plusieurs polygones convexes (en général un ou deux). Le premier algorithme de ce type fut conçu par Shamos pour calculer le diamètre d’un polygone convexe, c’est-à-dire la plus grande distance entre deux de ses points [Shamos, 1978]. Ensuite, Toussaint montra dans les années 80 [Toussaint, 1983, 1985; Houle et Toussaint, 1988] que le principe utilisé dans l’algorithme proposé par Shamos peut résoudre de manière élégante un grand nombre de problèmes géométriques (tableau 2.4).

Tous ces algorithmes ont en commun le fait d’être faciles à implémenter et rapides (généralement linéaires en le nombre de sommets des polygones). Ils reposent tous sur la notion centrale de “droite de support”, illustrée par la fig. 2.6.

Une *droite de support* d’un polygone convexe est une droite qui passe par un des sommets et qui laisse tous les autres sommets dans un seul de ses deux côtés (fig. 2.6.a). Une *droite de support commune* à deux polygones convexes est une droite qui passe par un sommet du premier polygone, un sommet du second polygone et telle que l’ensemble des sommets des deux polygones se trouvent du même côté de la droite (fig. 2.6.b). Une *droite de support séparante critique* est une droite qui passe par un sommet du premier polygone, un sommet du second polygone et telle que les polygones se trouvent de part et d’autre de la droite (fig. 2.6.d). Une droite de support située entre deux polygones convexes et qui passe par un sommet ou deux sommets du même polygone n’est que séparante (fig. 2.6.c).

Le calcul des droites de support séparantes critiques (fig. 2.6.d) représente bien l’esprit des “rotating calipers”. L’algorithme est initialisé avec deux droites de support parallèles et verticales. L’une passe par le sommet d’abscisse minimale du premier polygone. L’autre



- Calcul de distances :
  - Diamètre d'un polygone convexe.
  - Largeur d'un polygone convexe.
  - Distance maximale entre deux polygones convexes.
  - Distance minimale entre deux polygones convexes.
- Rectangles englobants :
  - Rectangle englobant d'aire minimum.
  - Rectangle englobant de périmètre minimum.
- Triangulations, quadrangulations.
- Paire de polygones convexes :
  - Union et intersection de polygones convexes.
  - Droites de support communes, droites de support séparantes critiques.
  - Somme de Minkowski.

TAB. 2.4 – Problèmes géométriques traités par les “rotating calipers” [Pirzadeh, 1999].

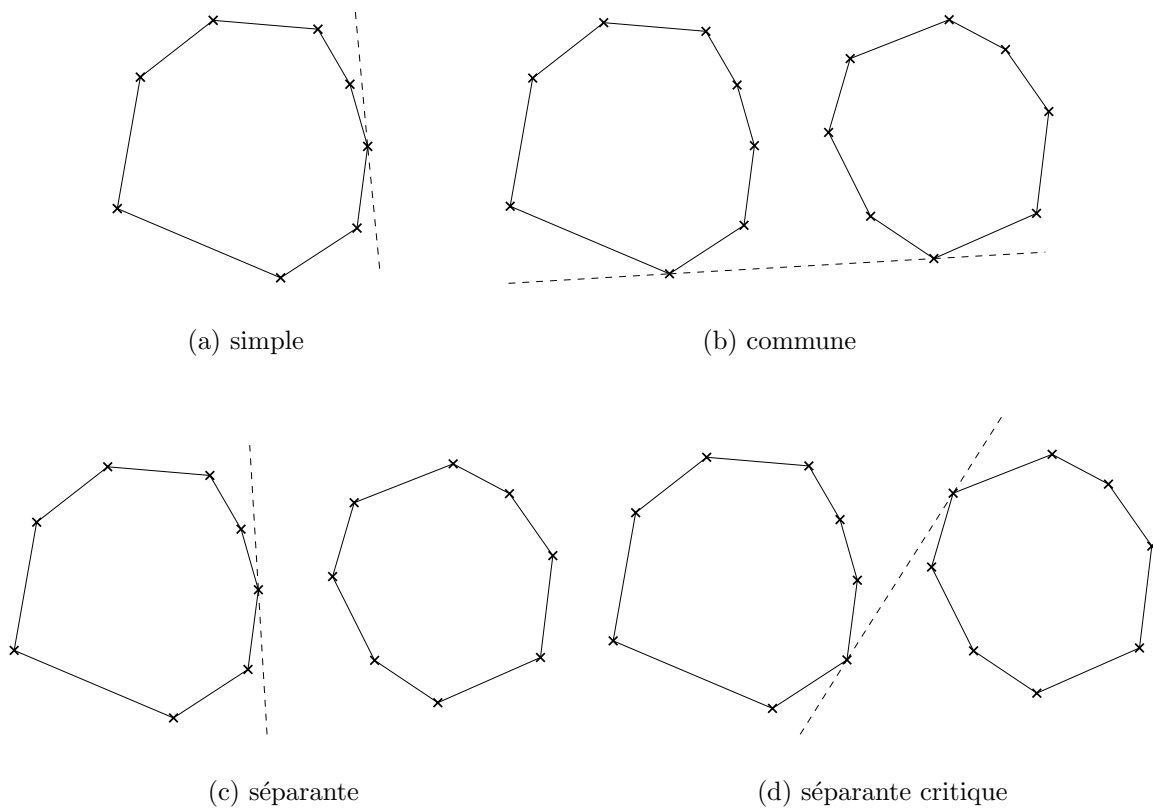


FIG. 2.6 – Droites de support (en tirets) d'un ou deux polygones convexes (en traits pleins).

passé par le sommet d'abscisse maximale du second polygone. La fig. 2.7.a illustre la position de départ des deux droites de support.

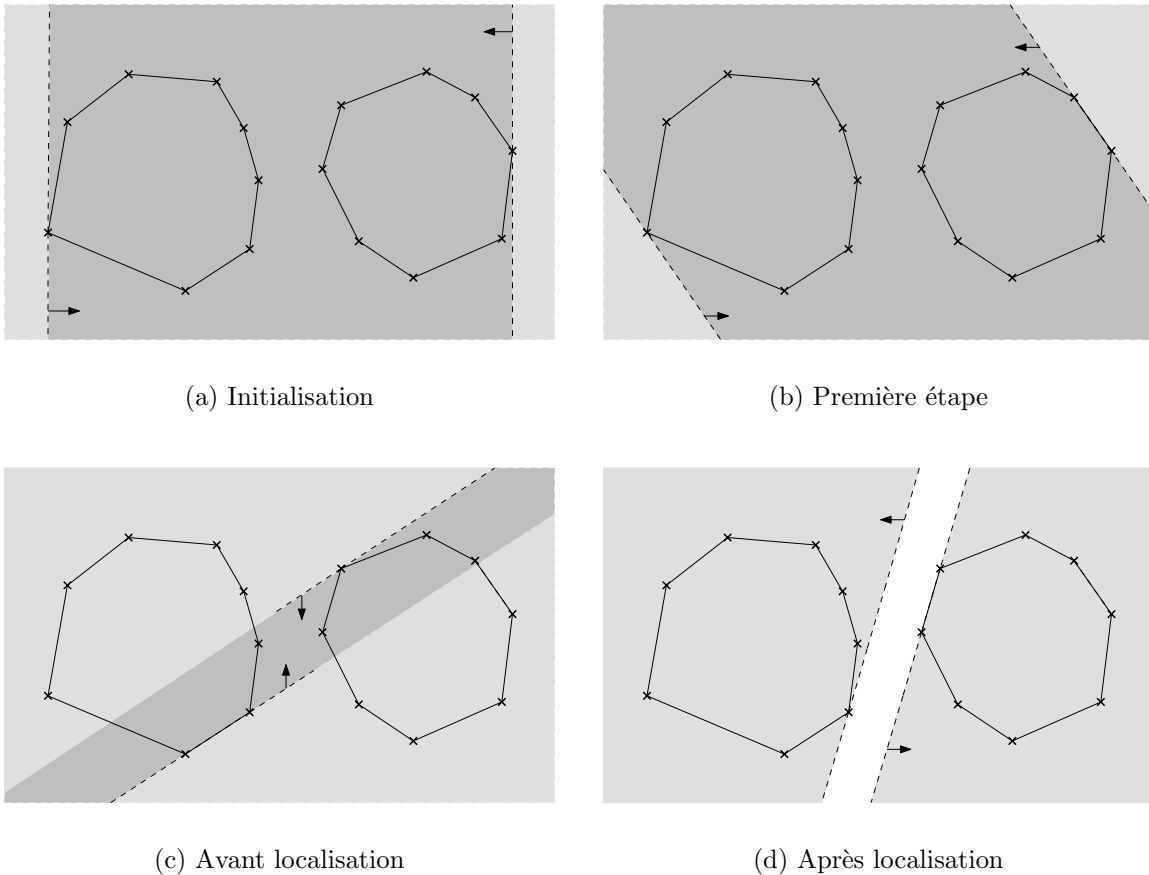


FIG. 2.7 – Étapes de la recherche d'une droite séparante critique par la méthode des "rotating calipers". Avant la localisation de la droite, les demi-plans pivotants s'intersectent en une zone sombre, tandis qu'après, ils ne s'intersectent plus.

Les deux droites de support sont tournées dans le sens trigonométrique autour des polygones tout en étant maintenues parallèles. Cette rotation n'est pas continue, mais effectuée pas à pas. A chaque étape, les droites pivotent chacune autour d'un sommet jusqu'à ce que l'une d'entre elles touche un troisième point. Comme les polygones sont convexes, ce point est forcément voisin d'un des deux sommets ayant servi de pivot (fig. 2.7.b).

Une droite de support séparante critique est détectée par un changement de la position relative des droites pivotantes. Chaque droite délimite un demi-plan qui contient le polygone sur lequel elle s'appuie. Ces deux demi-plans s'intersectent dans la fig. 2.7.c, avant la localisation, alors qu'ils ne s'intersectent plus dans la fig. 2.7.d, après la localisation. Au moment où l'intersection est réduite à une droite, comme dans la fig. 2.6.d, cette droite est la droite de support séparante critique.

Si la position relative des droites n'a pas changé après un tour complet, c'est que les deux polygones s'intersectent. Ainsi, pour vérifier que deux ensembles de points sont séparables par une droite, ce qui permet de détecter un segment de droite discrète (définition 1.20), il suffit de calculer l'enveloppe convexe des deux ensembles de points et d'appliquer l'algorithme précédent sur les polygones convexes obtenus.

Le calcul des droites de support communes à deux polygones convexes est similaire. Seule l'initialisation change. Les deux droites de support verticales passent par les sommets d'abscisse minimale des premier et second polygones. Les droites de support communes à deux polygones convexes permettent de calculer leur union, ce qui est utile pour le calcul d'enveloppe convexe, que ce soit dans les approches "divide-and-conquer" [Preparata et Shamos, 1985] ou dans les algorithmes dynamiques [Buzer, 2007].

## 2.4 Arithmétique et dénombrement de points

L'arithmétique est une branche des mathématiques qui, historiquement, étudie les propriétés des entiers relatifs et des nombres rationnels représentés sous forme de fractions, ainsi que les propriétés des opérations sur ces nombres.

Dans le plan discret engendré par le pavage par carrés, chaque point discret possède une adresse constituée d'un couple de coordonnées entières. Ainsi, plusieurs problèmes géométriques, comme le tracé ou la reconnaissance de droite, se résolvent analytiquement par des opérations arithmétiques.

L'interprétation géométrique de l'algorithme d'Euclide fait apparaître diverses propriétés, dont celle du triangle fondamental à base de la formule de Pick, utilisées dans les chapitres suivants.

### 2.4.1 Interprétation géométrique de l'algorithme d'Euclide

L'algorithme d'Euclide permet de calculer le PGCD de deux entiers. Il est fondé sur la propriété suivante :  $pgcd(a, b) = pgcd(b, r)$  où  $r$  est le reste de la division de  $a$  par  $b$ . Comme  $r \leq b$ , l'algorithme consiste à calculer, par récurrence, des divisions euclidiennes faisant intervenir des nombres de plus en plus petits, jusqu'à ce que le reste soit nul. Le PGCD de  $a$  et  $b$  est égal au dernier reste non nul.

Avec  $a = 6$  et  $b = 16$ , l'algorithme d'Euclide pose les divisions euclidiennes suivantes :

$$\begin{array}{cccc} 6 \overline{) 16} & 16 \overline{) 6} & 6 \overline{) 4} & 4 \overline{) 2} \\ 6 \overline{) 0} & 4 \overline{) 2} & 2 \overline{) 1} & 0 \overline{) 2} \end{array}$$

D'où la conclusion:  $pgcd(6, 16) = 2$ . Géométriquement, cela signifie qu'il y a deux points de  $\mathbb{Z}^2$  sur le segment reliant  $O$  et  $O + (b, a)$  (en excluant  $O$  et en incluant  $O + (b, a)$ ), comme le montre la fig. 2.8.

Deux nombres entiers sont *premiers entre eux* si leur PGCD est 1. Par exemple, 3 et 8 sont premiers entre eux car ce sont 6 et 16 divisés par leur PGCD, qui est égal à 2. D'ailleurs, le dernier reste non nul dans le déroulement de l'algorithme d'Euclide où  $a = 3$  et  $b = 8$  est bien 1 :

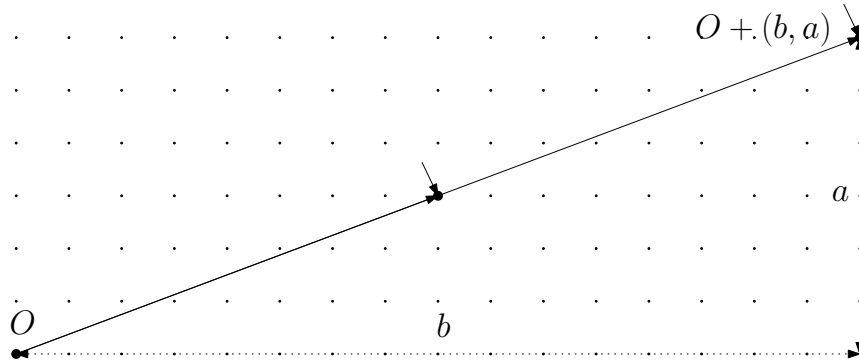


FIG. 2.8 – PGCD et nombre de points de  $\mathbb{Z}^2$  sur un segment.

$$\begin{array}{c|c} 3 & 8 \\ \hline 3 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} 8 & 3 \\ \hline 2 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} 3 & 2 \\ \hline 1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} 2 & 1 \\ \hline 0 & 2 \end{array}$$

Chaque division euclidienne s’interprète géométriquement. Soient  $a_0$  et  $b_0$  deux entiers premiers entre eux et tels que  $b_0 \leq a_0$ . La pente du vecteur  $\vec{u} = (b_0, a_0)$  dans la base formée par les vecteurs  $\vec{i}_0 = (1, 0)$  et  $\vec{j}_0 = (0, 1)$  est égale à la fraction  $\frac{a_0}{b_0}$ . Elle est donc supérieure ou égale à 1. La division euclidienne de  $a_0$  par  $b_0$  consiste à chercher la plus grande pente entière inférieure à  $\frac{a_0}{b_0}$ . Cette pente est le quotient de la division, noté  $q_0$ . Le reste de la division, noté  $r_0$ , est la distance verticale entre les points  $O + (b_0, a_0)$  et  $O + (b_0, q_0 b_0)$ . La fig. 2.9.a illustre la division euclidienne de 8 par 3.

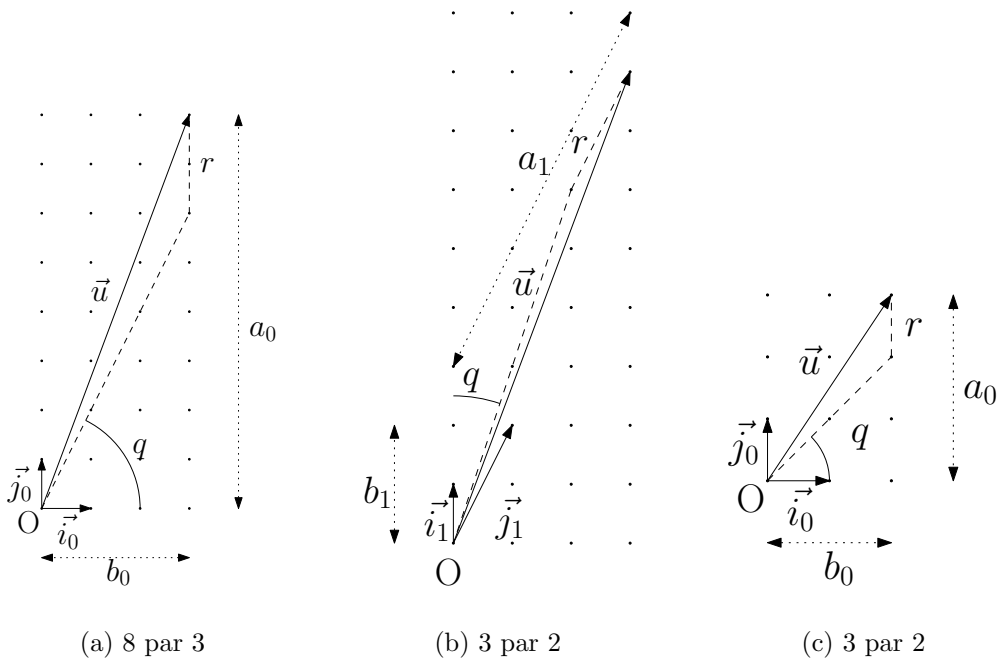


FIG. 2.9 – Interprétation géométrique de la division euclidienne.

## 2.4. Arithmétique et dénombrement de points

La division suivante dans l'algorithme d'Euclide est celle de  $a_1 = b_0$  par  $b_1 = r_0$ . Cette division s'interprète géométriquement de manière similaire, mais dans une base différente où  $\vec{i}_1 = \vec{j}_0$  et  $\vec{j}_1 = \vec{i}_0 + q_0\vec{j}_0$ . La fig. 2.9.b illustre la division euclidienne de 3 par 2 avec  $\vec{i}_1 = (0, 1)$  et  $\vec{j}_1 = (1, 2)$ . Comme le montre la fig. 2.9.c, le changement de base ne modifie en rien l'interprétation géométrique de la division.

Dans l'algorithme d'Euclide les vecteurs de la base,  $\vec{i}_n$  et  $\vec{j}_n$ , s'allongent et se resserrent autour du vecteur  $\vec{u}$  à mesure que  $n$  augmente, c'est-à-dire que les divisions s'enchaînent. La fig. 2.10 illustre le déroulement de l'algorithme avec  $a = 8$  et  $b = 3$ .

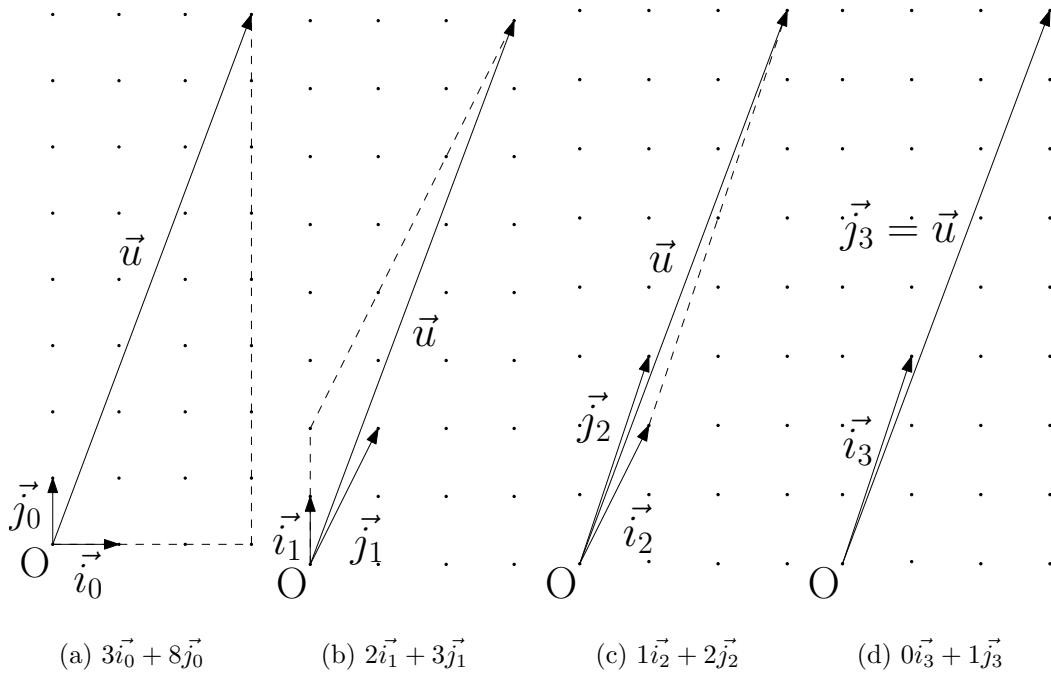


FIG. 2.10 – Interprétation géométrique de l'algorithme d'Euclide.

L'algorithme 5 calcule et stocke les vecteurs de la base.

Le déterminant des vecteurs  $\vec{i}_n$  et  $\vec{j}_n$  vaut 1 quand  $n$  est pair et  $-1$  quand  $n$  est impair. Sur l'exemple précédent,  $\det((1, 0), (0, 1)) = 1$  au début,  $\det((0, 1), (1, 2)) = -1$  après une division,  $\det((1, 2), (1, 3)) = 1$  après deux divisions et enfin  $\det((1, 3), (3, 8)) = -1$  à la fin. Ceci s'explique par récurrence, en remarquant que  $\det(\vec{i}_0, \vec{j}_0) = 1$  et  $\det(\vec{i}_n, \vec{j}_n) = -\det(\vec{i}_{n+1}, \vec{j}_{n+1})$ .

Si le reste vaut 1 à l'étape  $k$ , il vaut 0 à l'étape  $k + 1$ . Le vecteur  $\vec{i}_{k+1}$  est le *vecteur de Bézout* associé au vecteur  $\vec{j}_{k+1} = \vec{u}$ . Il est aussi noté  $\vec{v}$ . Cette appellation vient du fait que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  vérifient l'identité de Bézout, puisque leur déterminant vaut  $\pm 1$ . Géométriquement, cela signifie que l'aire du parallélogramme formé par les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  vaut 1 (fig. 2.11). Soient  $P = O + \vec{u}$  et  $Q = O + \vec{v}$ . L'aire du triangle  $OPQ$  vaut  $\frac{1}{2}$ . La distance entre le point  $Q$  et le segment  $[OP]$  est donc égale à 1 divisé par  $\|\vec{OP}\|$ .

**Algorithme 5** : Vecteurs de la base par l'algorithme d'Euclide

**Entrées** : Deux entiers positifs  $a$  et  $b$  tels que  $b \leq a$

**Sorties** : La pile contenant les vecteurs de la base

- 1  $\vec{i} \leftarrow (1, 0)$ ; Empiler  $\vec{i}$ ;
- 2  $\vec{j} \leftarrow (0, 1)$ ; Empiler  $\vec{j}$ ;
- 3 **tant que**  $b > 0$  **faire**
- 4      $q \leftarrow a/b$ ;  $r \leftarrow a - qb$  /\* calcul du quotient et du reste                     \*/
- 5      $a \leftarrow b$ ;  $b \leftarrow r$  /\* mise à jour de  $a$  et  $b$                                  \*/
- 6      $\vec{t} \leftarrow \vec{j}$ ;  $\vec{j} \leftarrow \vec{i} + q\vec{j}$ ;  $\vec{i} \leftarrow \vec{t}$  /\* mise à jour de  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$              \*/
- 7     Empiler  $\vec{j}$ ;
- 8 **retourner** la pile

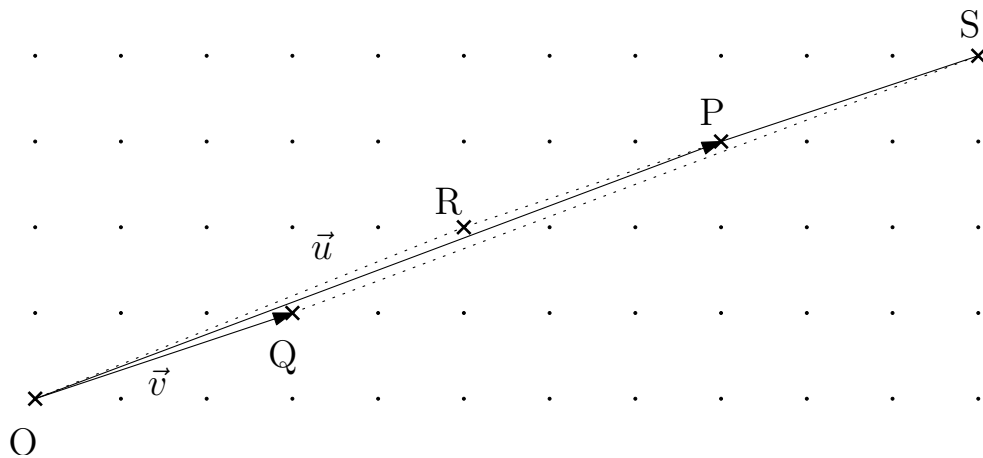


FIG. 2.11 – Les vecteurs  $\vec{u} = \vec{OP}$  et  $\vec{v} = \vec{OQ}$  sont représentés en noirs. Les parallélogrammes  $ORPQ$  et  $OPSQ$  ont une aire égale à 1 et sont vides de points de  $\mathbb{Z}^2$ .

### 2.4.2 Formule de Pick

La formule de Pick est un moyen de calculer le nombre de points de  $\mathbb{Z}^2$  se trouvant à l'intérieur d'un polygone dont les sommets sont des points de  $\mathbb{Z}^2$ , à partir de son aire. Elle repose sur le fait suivant :

**Théorème 2.2.** *Un triangle dont les sommets sont des points de  $\mathbb{Z}^2$  et ayant une aire égale à  $\frac{1}{2}$  ne contient aucun point de  $\mathbb{Z}^2$  autre que ses trois sommets. On dit qu'il est fondamental.*

Le triangle  $OQP$  de la fig. 2.11 est fondamental.

*Démonstration.* Comme les sommets du triangle sont des points de  $\mathbb{Z}^2$  et que l'aire du triangle vaut  $\frac{1}{2}$ , il peut toujours être la moitié d'un parallélogramme engendré par un vecteur  $\vec{u}$  dont les composantes  $a_0$  et  $b_0$  sont premières entre elles et son vecteur de Bézout  $\vec{v}$ . Le vecteur  $\vec{v}$  est calculé à l'aide de l'algorithme d'Euclide appliquée aux composantes  $a_0$  et  $b_0$ . A chaque étape de l'algorithme, le parallélogramme engendré par les vecteurs  $b_n \vec{i}_n$  et  $a_n \vec{j}_n$  contient exactement  $(a_n + 1) \times (b_n + 1)$  points en tout, dont exactement  $2(a_n + b_n)$  points uniquement sur son bord. La fig. 2.12 illustre ces faits avec  $a_0 = 8$  et  $b_0 = 3$ . Comme  $a_0$  et  $b_0$  sont premiers entre eux, le dernier reste non nul vaut 1 à l'étape  $k - 1$ . Ainsi,  $b_k = r_{k-1} = 1$  à l'étape  $k$ . Par conséquent, à partir des deux formules précédentes, tous les points que contient le parallélogramme engendré par les vecteurs  $b_k \vec{i}_k$  et  $a_k \vec{j}_k$  sont sur son bord. Comme  $\vec{v} = \vec{j}_k$ , le triangle formé par les points  $O$ ,  $O + \vec{u}$  et  $O + \vec{v}$  ne contient aucun point de  $\mathbb{Z}^2$  autre que ses trois sommets.  $\square$

Ce résultat est obtenu différemment dans le livre d'introduction à la Théorie des nombres de Hardy et Wright [1978] à l'aide de la série de Farey ou de considérations portant sur les réseaux de points. L'approche choisie ici à l'avantage de donner un aperçu de l'intérêt de l'interprétation géométrique de l'algorithme d'Euclide.

La formule de Pick s'applique à un polygone  $\mathcal{P}$  dont les sommets sont des points de  $\mathbb{Z}^2$ . Les quantités  $I$ ,  $J$  et  $B$  (avec  $J = I + B$ ) correspondent respectivement aux nombre de points de  $\mathbb{Z}^2$  se trouvant "strictement à l'intérieur", à "l'intérieur" et "sur"  $\mathcal{P}$ . La formule de Pick met en relation  $I$  ou  $J$ ,  $B$  et l'aire de  $\mathcal{P}$ , notée  $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ .

**Théorème 2.3** (Formule de Pick).

$$I = \mathcal{A}(\mathcal{P}) - \frac{B}{2} + 1 \tag{2.6}$$

$$\mathcal{A}(\mathcal{P}) = I + \frac{B}{2} - 1 \tag{2.7}$$

$$J = \mathcal{A}(\mathcal{P}) + \frac{B}{2} + 1 \tag{2.8}$$

$$\mathcal{A}(\mathcal{P}) = J - \frac{B}{2} - 1 \tag{2.9}$$

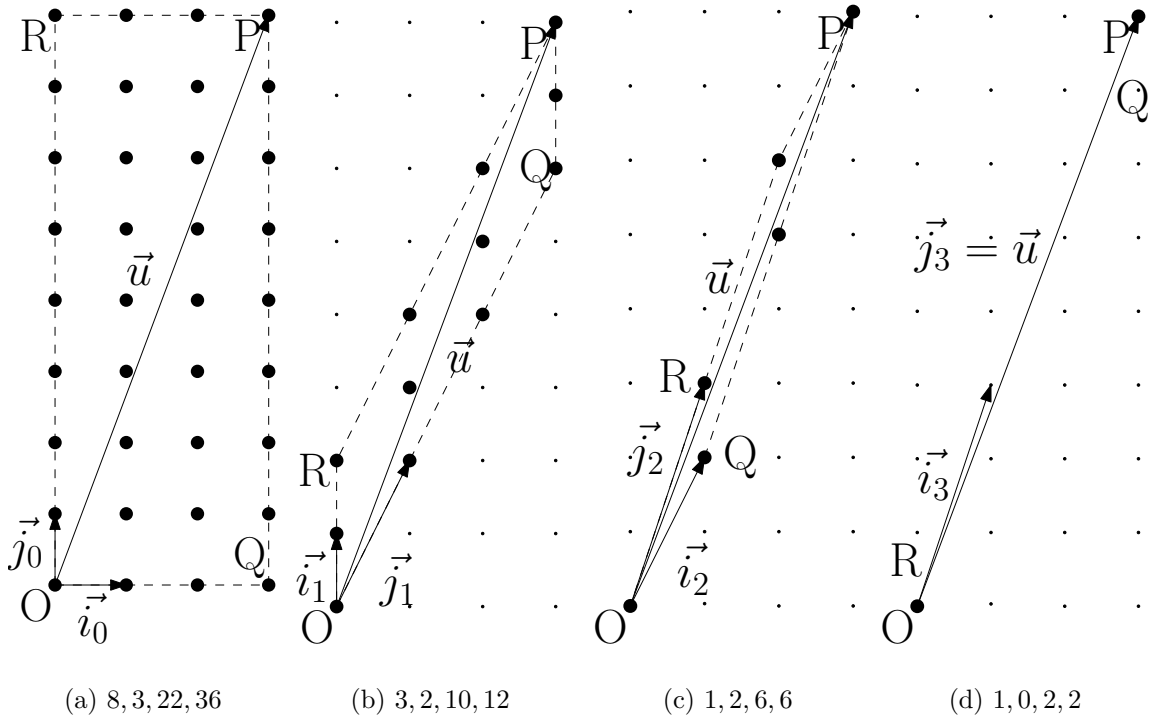


FIG. 2.12 – Algorithme d’Euclide et dénombrement de points. Les légendes indiquent à chaque étape  $n$ , de gauche à droite, les nombres  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $2(a_n + b_n)$  et  $(a_n + 1) \times (b_n + 1)$ . Le parallélogramme engendré par les vecteurs  $b_n \vec{i}_n$  et  $a_n \vec{j}_n$ , dessiné à l’aide de tirets, contient exactement  $(a_n + 1) \times (b_n + 1)$  points en tout, dont exactement  $2(a_n + b_n)$  points uniquement sur son bord.



## 2.4. Arithmétique et dénombrement de points

*Démonstration.* Tout polygone peut être triangulé par une procédure simple : étant donné trois sommets consécutifs, supprimer le sommet du milieu. Si le polygone résultant a plus de trois sommets, recommencer cette opération. De la même manière, tout triangle peut être décomposé en triangles n'admettant aucun point de  $\mathbb{Z}^2$  en son intérieur : relier un point se trouvant à l'intérieur du triangle à ses trois sommets, puis répéter ceci pour chacun des trois nouveaux triangles, jusqu'à ce qu'aucun triangle n'ait de point de  $\mathbb{Z}^2$  en son intérieur. Enfin, tout triangle sans point intérieur peut être découpé en triangles fondamentaux : relier les points se trouvant sur un côté au sommet opposé et répéter jusqu'à ce que tous les triangles soient fondamentaux.

Comme tout polygone peut être décomposé en triangles fondamentaux, la démonstration peut être faite par récurrence en vérifiant que pour un polygone  $\mathcal{P}$  et un triangle fondamental  $\mathcal{T}$ , la formule 2.7 est additive :  $\mathcal{A}(\mathcal{P} \cup \mathcal{T}) = \mathcal{A}(\mathcal{P}) + \mathcal{A}(\mathcal{T})$ . Si  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{T}$  ont un seul côté commun,  $\mathcal{P} \cup \mathcal{T}$  a autant de points intérieurs et un point sur le bord en plus que  $\mathcal{P}$ . Par conséquent l'aire de  $\mathcal{P} \cup \mathcal{T}$  est égale à  $I + \frac{(B+1)}{2} - 1 = \mathcal{A}(\mathcal{P}) + \frac{1}{2}$ . Si  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{T}$  ont deux côtés communs,  $\mathcal{P} \cup \mathcal{T}$  a un point intérieur de plus et un point sur le bord en moins que  $\mathcal{P}$ . Par conséquent l'aire de  $\mathcal{P} \cup \mathcal{T}$  est égale à  $(I + 1) + \frac{(B-1)}{2} - 1 = \mathcal{A}(\mathcal{P}) + \frac{1}{2}$ . D'après le théorème 2.2, l'aire d'un triangle fondamental vaut  $\frac{1}{2}$ . Donc si la formule de Pick est vraie pour un polygone  $\mathcal{P}$  et pour un triangle fondamental  $\mathcal{T}$ , elle est aussi vraie pour  $\mathcal{P} \cup \mathcal{T}$ . Comme la formule est vraie dans le cas d'un triangle fondamental ( $\frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 1 = 0$ ), par récurrence, la formule de Pick est vraie pour tout polygone.  $\square$

L'application de la formule de Pick est illustrée dans la fig. 2.13. Elle est utilisée en géométrie discrète pour s'assurer qu'une zone polygonale ne contient aucun points de  $\mathbb{Z}^2$  ou pour estimer des aires par comptage de points de  $\mathbb{Z}^2$ . Cette façon d'estimer l'aire d'un objet continu par le nombre de points de son discrétisé de Gauss converge vers l'aire de l'objet continu quand la résolution tend vers l'infini [Klette et Žunić, 2000].

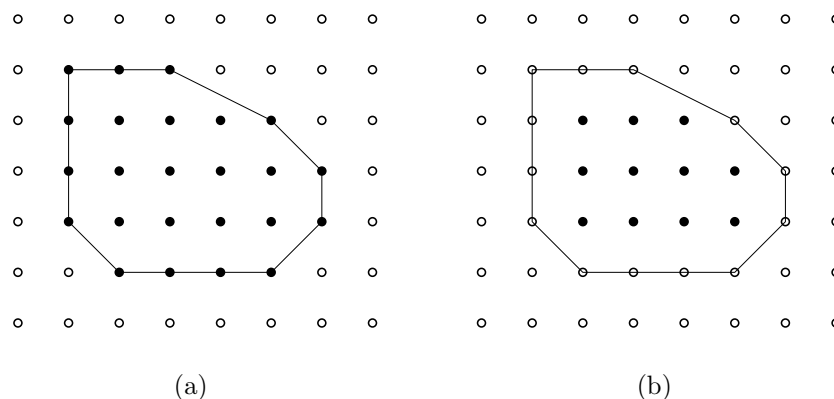


FIG. 2.13 – En (a), le nombre de points noirs se trouvant à l'intérieur du polygone est égal à  $16.5 + \frac{13}{2} + 1 = 24$  en appliquant la formule 2.8. En (b), le nombre de points noirs se trouvant strictement à l'intérieur du polygone est égal à  $16.5 - \frac{13}{2} + 1 = 11$  en appliquant la formule 2.6.

## 2.5 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre des outils théoriques qui appartiennent à quatre domaines : la programmation linéaire, les transformations géométriques, la géométrie algorithmique et l'arithmétique.

Compte-tenu de nos définitions fondées sur la discrétisation de Gauss, la plupart des problèmes de reconnaissance se réduisent à des problèmes de séparation de deux ensembles de points par des fonctions implicites, qui se réduisent à leur tour en problèmes de programmation linéaire. Or les problèmes de programmation linéaires se résolvent en temps linéaire en le nombre de contraintes quand la dimension est fixe, grâce à l'algorithme de Megiddo. Cependant, ce résultat, qui est très puissant d'un point de vue théorique, est de peu d'intérêt d'un point de vue pratique, car la constante est très importante et exponentielle en la dimension du problème, qui elle-même dépend du degré de la fonction implicite séparante. Dès la dimension trois (problème de séparation par un cercle ou une parabole par exemple), l'algorithme de Megiddo est inefficace.

Pour faire aussi bien en théorie et mieux en pratique que l'algorithme de Megiddo, d'autres outils sont disponibles. La géométrie nous donne des moyens de transformer les problèmes de programmation linéaire en problèmes de calcul d'enveloppe convexe et de séparation d'enveloppes convexes. Ces problèmes de calcul d'enveloppe convexe ont été largement étudiés en dimensions deux, trois et plus. En dimension deux, de nombreux algorithmes rapides existent. Certains sont dynamiques, d'autres tirent parti de l'ordre intrinsèque des points à traiter, de façon à être linéaires en temps. Les algorithmes de la famille des "rotating calipers" permettent de résoudre toute une famille de problèmes liés aux enveloppes convexes en dimension deux, voire trois, comme la séparation linéaire.

Les points traités en géométrie discrète sont spatialement structurés sur  $\mathbb{Z}^2$ . Outre l'ordre, de cette organisation émerge des propriétés arithmétiques. Celle de l'aire du triangle fondamental, à la base de la formule de Pick, en est un exemple. Cette formule donne le nombre de points d'un objet discret simple sans tous les dénombrer. Or, ce nombre de points est une bonne estimation de l'aire de l'objet. Plus généralement, les propriétés arithmétiques permettent de simplifier les calculs, ce qui mène à des algorithmes non seulement exacts, car en nombres entiers, mais aussi souvent incrémentaux et linéaires en temps.

**Deuxième partie**

**Modèles linéaires et convexes**



Chapitre **3**

*Reconnaissance de parties convexes et concaves, mesure de convexité*

**Sommaire**

---

<b>3.1</b>	<b>Étude de l'existant</b> . . . . .	<b>58</b>
3.1.1	Définitions . . . . .	58
3.1.2	Algorithmes . . . . .	60
<b>3.2</b>	<b>Détection et reconnaissance</b> . . . . .	<b>61</b>
3.2.1	Calcul d'enveloppes . . . . .	61
3.2.2	Approche par séparation . . . . .	62
3.2.3	Approche par dénombrement . . . . .	66
<b>3.3</b>	<b>Mesures de convexité et décomposition robuste</b> . . . . .	<b>72</b>
3.3.1	Définition et calcul par dénombrement . . . . .	73
3.3.2	Résultats expérimentaux . . . . .	74
3.3.3	Décomposition robuste en parties convexes et concaves . . . . .	76
<b>3.4</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>78</b>

---

Ce chapitre est consacré à la reconnaissance de parties convexes et concaves ainsi qu'à la définition et au calcul d'une mesure de convexité. Après avoir rappelé les différentes définitions de convexité, ainsi que les différents algorithmes qui détectent la convexité, deux algorithmes originaux de reconnaissance de parties convexes et concaves sont présentés. Le premier utilise une approche par séparation, tandis que le second, qui procède par dénombrement de points, permet de calculer directement une mesure de convexité. A partir de cette mesure, de nouveaux modèles de parties convexes et concaves, destinés à prendre en compte l'incertitude quant à la position du contour, sont introduits pour décomposer de manière robuste un contour en parties convexes et concaves. Ce travail a été présenté à *19-th International Conference on Pattern Recognition (ICPR'08)* [Roussillon *et al.*, 2008a].

## 3.1 Étude de l'existant

### 3.1.1 Définitions

Dans le plan discret, il existe de nombreuses définitions de la convexité. La plus simple est la définition par discrétisation due à Sklansky [1970] appelée S-convexité (premier item du tableau 3.1). Pour élaborer un algorithme qui détecte si un objet  $X$  est S-convexe ou non, Sklansky cherche une forme continue qui se discrétise en  $X$  et qui possède la propriété suivante : si elle est concave, alors toutes les formes continues ayant  $X$  pour discrétisation sont aussi concaves. Il s'avère que cette forme existe pour tout  $X$  : c'est le polygone de périmètre minimal englobant  $X$  mais pas  $\bar{X}$  [Sklansky, 1970]. Il se calcule facilement [Sklansky *et al.*, 1972] et est utile non seulement pour la détection mais aussi pour la description et la représentation [Sklansky, 1972].

Kim [1981, 1982b]; Kim et Rosenfeld [1981, 1982]; Kim et Sklansky [1982] ont proposé plusieurs définitions de convexité et ont établi leur équivalence avec les définitions précédentes de Minsky et Papert [1968] d'une part et de Sklansky [1970] d'autre part. Quelques autres définitions ont été proposées par la suite : la  $\epsilon$ -convexité de Chassery [1983] ou la T-convexité de Ronse [1985] par exemple. La plupart des définitions existantes sont rassemblées dans le tableau 3.1. Ronse a compilé l'ensemble des travaux portant sur la convexité en géométrie discrète et algorithmique au cours des années soixante, soixante-dix et quatre-vingt [Ronse, 1989].

Ronse a montré que les définitions de A-convexité, H-convexité et T-convexité sont parfaitement équivalentes [Ronse, 1985]. En revanche, les autres définitions sont différentes. Par exemple, un objet composé de plusieurs composantes connexes ne peut pas être DL-convexe, alors qu'il peut très bien être L-convexe ou T-convexe [Chaudhuri et Rosenfeld, 1998]. Cependant, comme toutes les définitions coïncident pour un objet 0-connexe [Kim et Rosenfeld, 1981; Kim, 1982b; Ronse, 1985; Eckhardt, 2001] et comme les objets traités sont supposés être 0-connexes (section 1.2.1), chacune de ces définitions pourrait être utilisée dans nos travaux. La définition 1.13 introduite au paragraphe 1.3.3 correspond à la H-convexité. Ce choix met en évidence l'utilité de l'enveloppe convexe dans les solutions algorithmiques apportées aux problèmes de détection et reconnaissance.

- S-convexité [Sklansky, 1970] : un objet  $X$  est S-convexe ssi  $X$  est la discrétisation d'une forme continue convexe.
- L-convexité [Minsky et Papert, 1968] : un objet  $X$  est L-convexe ssi pour toute paire de points  $P, Q \in X$ , les points de  $\mathbb{Z}^2$  se trouvant sur le segment  $[PQ]$  appartiennent aussi à  $X$ .
- A-convexité [Kim, 1981] : un objet  $X$  est A-convexe ssi pour toute paire de points  $P, Q \in X$ , la région du plan euclidien bornée par le contour de  $X$  et le segment  $[PQ]$  ne contient aucun point du fond.
- C-convexité [Kim et Rosenfeld, 1981, 1982] : un objet  $X$  est C-convexe ssi  $X$  possède la propriété de la corde [Rosenfeld, 1974].
- DL-convexité [Kim, 1982b; Kim et Rosenfeld, 1982] : un objet  $X$  est DL-convexe ssi pour toute paire de points  $P, Q \in X$ , les points appartenant à un segment de droite discrète allant de  $P$  à  $Q$  appartiennent aussi à  $X$ .
- H-convexité [Kim et Rosenfeld, 1981; Kim, 1982b] : un objet  $X$  est H-convexe ssi  $X$  est la discrétisation de Gauss de l'enveloppe convexe euclidienne de  $X$ .
- T-convexité [Ronse, 1985] : un objet  $X$  est T-convexe ssi pour tout triplet de points  $P, Q, R \in X$ , la discrétisation de Gauss du triangle  $PQR$  est incluse dans  $X$ .
- $\epsilon$ -convexité [Chassery, 1983] : un objet  $X$  est  $\epsilon$ -convexe, ssi pour toute paire de points  $P, Q \in X$ , les points situés sur le segment  $[PQ]$  se trouvent à une distance de l'échiquier d'un point  $R$  de  $X$  inférieure à  $\epsilon$ .

TAB. 3.1 – Définitions de la convexité

### 3.1.2 Algorithmes

Soit le contour  $C$  d'un objet simple  $X$ .  $C$  est convexe si et seulement si  $X$  est convexe. Or,  $X$  est convexe si et seulement si  $X$  est la discrétisation de Gauss de son enveloppe convexe (section 1.3.3). Mais comment détecter que  $X$  est convexe ?

Les premiers algorithmes de détection reposent sur un calcul d'enveloppe convexe. Dans les travaux de Kim [1981, 1982b]; Kim et Rosenfeld [1981, 1982], la détection se déroule en deux étapes. La première consiste à calculer l'enveloppe convexe  $\mathcal{E}(X)$  de l'objet  $X$ . Cette étape peut être réalisée en  $\mathcal{O}(n \log n)$  [Graham, 1972]. La seconde consiste à vérifier qu'aucun point de  $\bar{X}$  ne se trouve à l'intérieur de  $\mathcal{E}(X)$ . Vérifier si un point  $P$  donné se trouve à l'intérieur de  $\mathcal{E}(X)$  peut se faire en calculant les droites de support communes à  $\mathcal{E}(X)$  et au point  $P$ , vu comme un polygone dégénéré, selon l'approche des "rotating calipers" (section 2.3.2 et fig. 3.1). Ce calcul est linéaire en le nombre  $h$  de sommets de  $\mathcal{E}(X)$ , d'où un coût total en  $\mathcal{O}(nh)$ . Cette étape peut être optimisée en utilisant un arbre binaire de recherche, comme pour l'algorithme d'enveloppe convexe en ligne [Preparata, 1979], en  $\mathcal{O}(n \log h)$ .

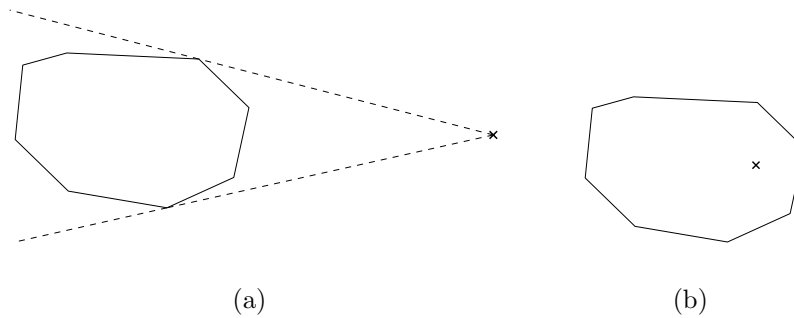


FIG. 3.1 – Vérifier si un point (marqué par une croix) se trouve à l'intérieur d'une enveloppe convexe (en noir) se fait par le calcul des droites de support communes. S'il n'y a pas, alors le point se trouve à l'intérieur de l'enveloppe.

Cependant, en tirant parti de l'ordre et de la disposition particulière des points, cette approche par séparation mène à un algorithme en ligne, linéaire et applicable aux parties de contour définies dans le paragraphe 3.2.2. Il ressemble au calcul du polygone de périmètre minimal [Sklansky *et al.*, 1972; Sloboda *et al.*, 1998; Klette *et al.*, 1999]. En outre, vérifier qu'aucun point de  $\bar{X}$  ne se trouve à l'intérieur de  $\mathcal{E}(X)$  peut se faire plus simplement par dénombrement de points à l'aide de la formule de Pick (section 3.2.3). Cette approche par dénombrement de points mène naturellement à une mesure de convexité (section 3.3).

De nouveaux algorithmes de type arithmétique [Debled-Rennesson *et al.*, 2003] ou combinatoire [Brlék *et al.*, 2009], reposant sur une reconnaissance de segments de droite, ont été présentés ces dernières années. Or, comme nous le verrons dans le chapitre 4, un segment de droite est une partie à la fois convexe et concave. Ainsi, détecter la convexité ou concavité d'une partie de contour devrait être "deux fois moins difficile" que détecter un segment de droite. Cette constatation laisse penser que les solutions reposant sur une



reconnaissance de segments de droite sont plus sophistiquées que ce dont il est suffisant pour résoudre le problème. Notre approche est donc de s'attaquer, dans ce chapitre, à la convexité sans faire référence aux segments de droite. Néanmoins, la posture opposée, qui consiste à appréhender la convexité à partir des segments de droite, sera aussi adoptée dans le chapitre 5.

## 3.2 Détection et reconnaissance

### 3.2.1 Calcul d'enveloppes

Pour décider si un objet  $X$ , et donc son contour  $C$ , est convexe ou non, la première étape consiste à calculer l'enveloppe convexe  $\mathcal{E}(X)$  de  $X$ . Il n'est pas nécessaire de considérer l'ensemble des points de  $X$ , mais seulement ceux sur son bord, c'est-à-dire les points intérieurs associés aux parties élémentaires du contour  $C$  (section 1.2.3). Ces points forment une ligne polygonale, possédant éventuellement des rebroussements (certains segments sont confondus), mais sans entrelacements (aucun segment ne se croise strictement). Cette ligne polygonale est quasiment simple et peut donc être traitée par l'algorithme 4 de Melkman [1987] en manipulant une inégalité stricte dans le prédicat d'orientation 1.3. Ainsi,  $\mathcal{E}(X)$  est calculée en  $\mathcal{O}(n)$ , où  $n$  est la taille du contour.

Cependant, l'algorithme de Melkman [1987] n'est pas nécessaire pour calculer  $\mathcal{E}(X)$ , un balayage de Graham [1972] suffit. Deux raisons l'expliquent :

- Les points forment une ligne polygonale simple fermée (le premier et le dernier point sont confondus).
- Le premier et le dernier point sont d'abscisse minimale puis d'ordonnée maximale (section 1.2.3). Ils sont donc sommets de  $\mathcal{E}(X)$ .

Une étude du fonctionnement de l'algorithme de Melkman illustre l'importance de ces deux remarques. La fig. 3.2 illustre ce qu'est une enveloppe convexe et ce que sont les enveloppes convexes partielles d'une séquence de points  $\mathcal{S}$ . La partie de l'enveloppe convexe  $\mathcal{E}(S)$  entre le point de départ ( $s_0$  dans la fig. 3.2.a) et le début de la deque ( $s_{k-1}$  dans la fig. 3.2.a) correspond à l'enveloppe convexe partielle à gauche  $\mathcal{E}_g(S)$ . De même, la partie de l'enveloppe convexe  $\mathcal{E}(S)$  entre le point de départ ( $s_0$  dans la fig. 3.2.a) et la fin de la deque ( $s_{k-1}$  dans la fig. 3.2.a) correspond à l'enveloppe convexe partielle à droite  $\mathcal{E}_d(S)$ . Ceci est toujours vrai parce que le point de départ est sommet de l'enveloppe convexe  $\mathcal{E}(S)$ . En effet, les enveloppes convexes partielles contiennent par définition les points de départ et d'arrivée. Pour qu'il y ait correspondance entre enveloppe convexe et enveloppes convexes partielles, il est donc nécessaire que le point de départ soit sommet de l'enveloppe convexe.

Comme les points de  $\mathcal{S}$  forment une ligne polygonale simple fermée, à la fin,  $\mathcal{E}(S) = \mathcal{E}_g(S)$  et  $\mathcal{E}_d(S)$  est vide (fig. 3.2.b). Par conséquent, pour obtenir  $\mathcal{E}(S)$ , il suffit de calculer  $\mathcal{E}_g(S)$  en ajoutant et supprimant des points d'un seul côté de la deque. Une deque n'est donc pas nécessaire ; une pile et un processus d'empilement et dépilement à la manière du balayage de Graham [1972] suffisent.

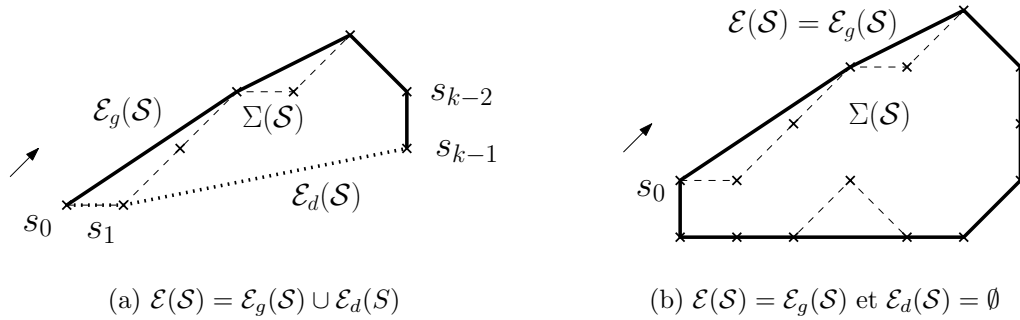


FIG. 3.2 – Les points  $s_0, s_1, \dots, s_{k-1} \in \mathcal{S}$  forment une ligne polygonale simple représentée par des tirets et notée  $\Sigma(\mathcal{S})$ . En (a),  $\mathcal{E}(\mathcal{S})$  est l’union de  $\mathcal{E}_g(\mathcal{S})$  et  $\mathcal{E}_d(\mathcal{S})$ . En (b), il y a correspondance entre  $\mathcal{E}(\mathcal{S})$  et  $\mathcal{E}_g(\mathcal{S})$ .

Ainsi, un balayage de Graham [1972] permet de calculer  $\mathcal{E}(X)$  pour tester la convexité d’un contour complet. Il permet aussi de calculer  $\mathcal{E}_g(X_{i|j})$  et  $\mathcal{E}_d(\bar{X}_{i|j})$  pour déterminer si une partie  $C_{i|j}$  est convexe, concave, ni l’un, ni l’autre ou les deux.

### 3.2.2 Approche par séparation

Pour vérifier qu’aucun point de  $\bar{X}$  ne se trouve à l’intérieur de  $\mathcal{E}(X)$ , il n’est pas nécessaire de considérer l’ensemble des points de  $\bar{X}$ , mais seulement ceux sur son bord, c’est-à-dire les points extérieurs associés aux parties élémentaires du contour  $C$ . Comme dit précédemment, cette vérification peut être faite indépendamment pour chaque point en adoptant l’approche des “rotating calipers”. Cependant, comme ces points extérieurs sont ordonnés et étroitement liés aux points intérieurs, un algorithme en ligne et linéaire existe.

L’algorithme 6 est dédié à la reconnaissance de parties convexes. Il s’appuie sur le calcul de l’enveloppe convexe partielle à gauche  $\mathcal{E}_g(X_{i|j})$  expliqué dans la section précédente et vérifie en plus qu’aucun point de  $\bar{X}_{i|j}$  ne se trouve dans  $\mathcal{R}_g(X_{i|j})$ , la région du plan euclidien délimitée par  $\Sigma(X_{i|j})$  et  $\mathcal{E}_g(X_{i|j})$  (définition 1.16 de la section 1.3.3). La reconnaissance de parties concaves est identique. Il suffit de remplacer  $\mathcal{E}_g(X_{i|j})$  par  $\mathcal{E}_d(\bar{X}_{i|j})$ , de permuter “gauche” et “droite” dans les prédicats d’orientation et de permuter le rôle des points intérieurs  $X_{i|j}$  et extérieurs  $\bar{X}_{i|j}$ . La détection de la convexité pour un contour complet est aussi identique, puisque  $\mathcal{E}(X) = \mathcal{E}_g(X_{i|j})$  (avec  $i = j$ ).

L’algorithme 6 est en ligne. Il traite séquentiellement chaque partie élémentaire de la partie  $C_{i|j}$  donnée en entrée (boucle de la ligne 5) et décide si la partie courante  $C_{i|k}$  (avec  $i < k \leq j$ ) est convexe ou non. A chaque fois qu’une nouvelle partie élémentaire est considérée, le traitement concernant le point intérieur (l. 6-12) précède celui concernant le point extérieur (l. 13-19).

Si le point intérieur remet en cause la convexité de la partie  $C_{i|j}$  (l. 7-8), l’algorithme s’arrête en renvoyant faux (l. 20). Sinon, un processus de dépilement met à jour la liste contenant les sommets de  $\mathcal{E}_g(X_{i|k})$  (l. 10-12). Selon la position du point extérieur, les points

**Algorithme 6** : Reconnaissance d'une partie convexe par séparation

---

**Entrées** : Une partie  $C_{i|j}$  avec  $i < j$ .  
**Sorties** : Le booléen *estConvexe* et la liste  $\mathcal{L}$  contenant les sommets de l'enveloppe  $\mathcal{E}_g(X_{i|j})$  si  $C_{i|j}$  est convexe.

```

/* Initialisation */
1  $\mathcal{L} \leftarrow \emptyset$ ; estConvexe  $\leftarrow$  vrai;
2 PtSupportInt  $\leftarrow$  le point intérieur associé à  $C_{i|i+1}$ ;
3 PtSupportExt  $\leftarrow$  le point extérieur associé à  $C_{i|i+1}$ ;
4  $k \leftarrow i + 1$ ;
5 tant que  $C_k \neq C_j$  et estConvexe faire
    /* Point intérieur */
6 PtInt  $\leftarrow$  le point intérieur associé à  $C_{k|k+1}$ ;
7 si PtInt appartient au demi-plan à gauche défini par PtSupportInt et
   PtSupportExt alors
8     | estConvexe  $\leftarrow$  faux ; /*  $C_{i|j}$  n'est pas convexe */
9 sinon
10    | /* mise à jour de la liste  $\mathcal{L}$  */
11    | tant que  $\mathcal{L}$  contient plus de 2 points et PtInt appartient au demi-plan à
12    | gauche défini par les 2 derniers points de  $\mathcal{L}$  faire
13    |     | Supprimer le dernier point de  $\mathcal{L}$ ;
14    |     | Ajouter PtInt au bout de  $\mathcal{L}$ ;
15    | /* Point extérieur */
16    | PtExt  $\leftarrow$  le point extérieur associé à  $C_{k|k+1}$ ;
17    | /* mise à jour des points PtSupportInt et PtSupportExt */
18    | si PtExt appartient au demi-plan à droite défini par PtSupportInt et
19    | PtSupportExt alors
20    |     | PtSupportExt  $\leftarrow$  PtExt;
21    |     | PtSuivant  $\leftarrow$  le point suivant PtSupportInt dans  $\mathcal{L}$ ;
22    |     | tant que PtSupportExt appartient au demi-plan à droite défini par
23    |     | PtSupportInt et PtSuivant faire
24    |     |     | PtSupportInt  $\leftarrow$  PtSuivant;
25    |     |     | PtSuivant  $\leftarrow$  le point suivant PtSupportInt dans  $\mathcal{L}$ ;
26    |     |  $k \leftarrow k + 1$ ;
27 retourner estConvexe et  $\mathcal{L}$ 

```

---

de support intérieur et extérieur, notés  $PtSupportInt$  et  $PtSupportExt$ , sont mis à jour de façon à ce que la droite qui les traverse soit toujours une droite de support commune à  $\mathcal{E}_g(X_{i|k})$  et à  $PtSupportExt$  (l. 13-19). La structure de donnée utilisée est celle d'une liste doublement chaînée car il est nécessaire d'accéder, d'ajouter, de supprimer des éléments aux extrémités (l. 10-12) et d'accéder aux voisins d'un élément (l.13-19) en temps constant.

Toutes les décisions sont prises à partir de la réponse d'un prédicat d'orientation, qui repose sur le concept de demi-plan orienté (définition 1.14 de la section 1.3.3) et qui évalue l'expression de l'équation 1.2.

Nous allons illustrer l'algorithme 6 sur l'exemple de la fig. 3.3. La partie de contour entre les points  $C_0$  et  $C_{12}$  est représentée en pointillé afin que les indications qui seront ajoutées pour décrire le déroulement de l'algorithme soient aisément lisibles.

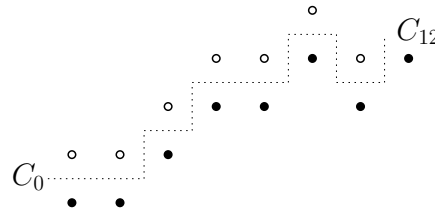


FIG. 3.3 – Une partie de contour non convexe.

A l'initialisation, les points  $PtSupportInt$  et  $PtSupportExt$  sont affectés aux points intérieurs et extérieurs de la première partie élémentaire  $C_{0|1}$  (l.2-3). Sur la fig. 3.4.a, ils sont marqués par deux flèches épaisses, respectivement noires et blanches.

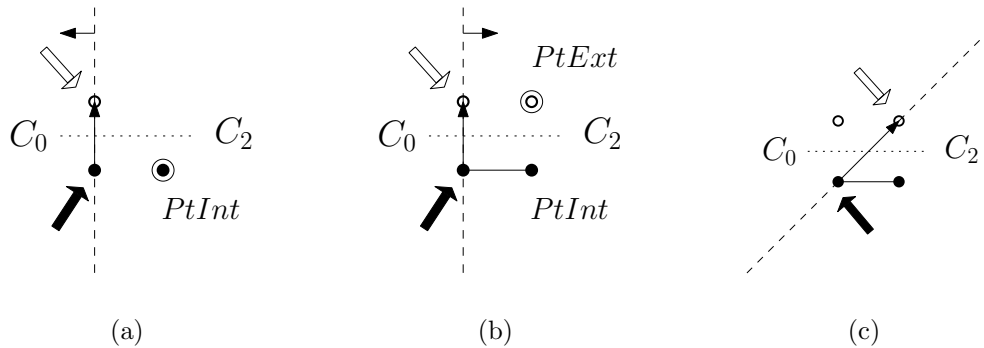


FIG. 3.4 – Initialisation et premières étapes de l'algorithme 6.

Les points intérieur puis extérieur de la partie élémentaire suivante  $C_{1|2}$  sont ensuite pris en compte (l. 4). Comme le point intérieur n'appartient pas au demi-plan à gauche défini par  $PtSupportInt$  et  $PtSupportExt$  (l. 6-7), la convexité n'est pas remise en cause (fig. 3.4.a) et il est ajouté à l'enveloppe convexe partielle à gauche  $\mathcal{E}_g(X_{0|2})$  (fig. 3.4.b). Comme le point extérieur appartient au demi-plan à droite défini par  $PtSupportInt$  et  $PtSupportExt$  (l. 13-14 et fig. 3.4.b), il devient le nouveau point  $PtSupportExt$  (l. 15 et fig. 3.4.c).

Parfois,  $PtSupportInt$  doit être déplacé le long de l'enveloppe convexe partielle à gauche (l. 16-19). Ce phénomène est illustré par l'exemple suivant, où le point extérieur de la partie  $C_{9|10}$  est traité (fig. 3.5.a). Comme ce point extérieur appartient au demi-plan à droite défini par  $PtSupportInt$  et  $PtSupportExt$  (l. 13-14 et fig. 3.5.a), il devient le nouveau point  $PtSupportExt$  (l. 15 et fig. 3.5.b). De plus,  $PtSupportInt$  est déplacé le long de deux arêtes de  $\mathcal{E}_g(X_{0|10})$  (l. 16-19 et fig. 3.5.b). Ce mécanisme sert à ce que les points  $PtSupportInt$  et  $PtSupportExt$  déterminent toujours une droite de support commune à  $PtSupportExt$  et à l'enveloppe convexe partielle à gauche des points intérieurs.

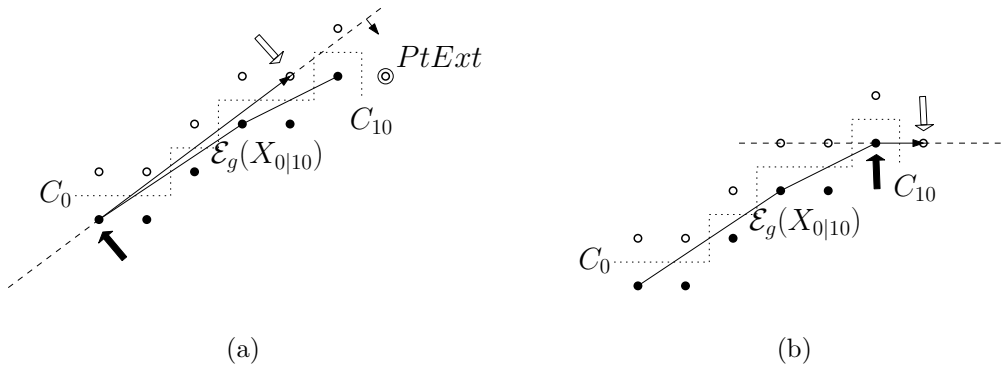


FIG. 3.5 – Ajout d'un point extérieur par l'algorithme 6.

La partie  $C_{0|11}$  est convexe tandis que la partie  $C_{0|12}$  ne l'est pas. En effet, le point intérieur associé à la partie élémentaire  $C_{11|12}$  appartient au demi-plan à gauche défini par  $PtSupportInt$  et  $PtSupportExt$  (l. 6-8), donc l'algorithme 6 renvoie faux (fig. 3.6.a). La constatation sur la fig. 3.6.b que la région  $\mathcal{R}_g(X_{0|12})$  (en gris) contient un point de  $\bar{X}_{0|12}$  (blanc) valide ce résultat.

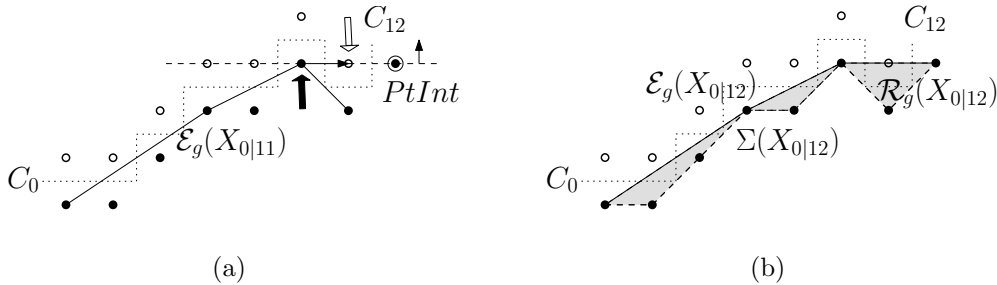


FIG. 3.6 – Fin de l'algorithme 6.

**Théorème 3.1.** *L'algorithme 6 détecte correctement les parties convexes. De plus, il est linéaire en la taille de la partie du contour donnée en entrée.*

*Démonstration.* Il est facile de vérifier que le point extérieur associé à  $C_{k|k+1}$  ne peut pas tomber directement dans la région  $\mathcal{R}_g(X_{i|k})$ , parce qu'il est distant d'une unité du point intérieur associé à  $C_{k|k+1}$ , qui est par définition le dernier sommet de  $\mathcal{E}_g(X_{i|k})$ .

Par conséquent, c'est le calcul de  $\mathcal{E}_g(X_{i|k})$  après l'ajout du point intérieur associé à  $C_{k|k+1}$  qui peut remettre en cause la convexité. Appelons *PtInt* ce point intérieur.

Si *PtInt* appartient au demi-plan à gauche défini par *PtSupportInt* et *PtSupportExt*,  $\mathcal{R}_g(X_{i|k})$  va forcément contenir *PtSupportExt* (fig. 3.7.a). Ainsi, dans le cas où  $C_{i|k}$  est une partie qui n'est pas convexe, l'algorithme renvoie faux.

Si *PtInt* n'appartient pas au demi-plan à gauche défini par *PtSupportInt* et *PtSupportExt*,  $\mathcal{R}_g(X_{i|k})$  ne va ni contenir *PtSupportExt*, ni aucun point de  $\bar{X}_{i|k}$ , puisqu'aucun d'entre eux n'appartient à l'intersection entre les demi-plans à droite définis par les paires de sommets consécutifs de  $\mathcal{E}_g(X_{i|k})$  allant du point de départ au point *PtSupportExt* et le demi-plan à droite défini par *PtSupportInt* et *PtSupportExt*. Autrement dit, tous les points de  $\bar{X}_{i|k}$  se trouvent dans la zone hachurée de la fig. 3.7.b. Comme les points *PtSupportInt* et *PtSupportExt* sont mis à jour de façon à ce que la droite qui les traverse soit toujours une droite de support commune à *PtSupportExt* et  $\mathcal{E}_g(X_{i|k})$ , les points de  $\bar{X}_{i|k}$  restent toujours dans la zone hachurée de la fig. 3.7.b. Ainsi, dans le cas où  $C_{i|j}$  est une partie convexe, il n'y a jamais remise en cause de la convexité des parties  $C_{i|k}$  où  $i < k \leq j$  et l'algorithme renvoie vrai.

A chaque fois qu'un point intérieur est pris en compte, il y a une boucle ligne 10. C'est un processus de dépilement à la manière du balayage de Graham. Chaque point est ajouté et supprimé une seule fois. La complexité de cette opération est donc de l'ordre de  $\mathcal{O}(n)$  après avoir considéré  $n$  points intérieurs.

A chaque fois qu'un point extérieur est considéré, il y a une boucle ligne 17. Le point *PtSupportInt* se déplace sur les sommets de  $\mathcal{E}_g(X_{i|k})$  toujours dans le même sens. Ainsi, *PtSupportInt* passe au plus une fois sur chaque point intérieur. La complexité de ce processus est de l'ordre de  $\mathcal{O}(n)$  après avoir traité  $n$  points intérieurs et  $n$  points extérieurs.

En conclusion, la complexité globale de l'algorithme 6 est linéaire en la taille de la partie de contour.  $\square$

### 3.2.3 Approche par dénombrement

Pour affirmer qu'un contour  $C$  est convexe ou non, l'étape qui consiste à vérifier qu'aucun point de  $\bar{X}$  ne se trouve à l'intérieur de  $\mathcal{E}(X)$  est rendue aisée par l'utilisation de la formule de Pick (section 2.4.2). Ce nouvel algorithme est lui aussi en ligne et linéaire, mais plus simple que le précédent.

L'algorithme 7 est dédié à la reconnaissance de parties convexes. Il s'appuie sur le calcul de l'enveloppe convexe partielle à gauche  $\mathcal{E}_g(X_{i|j})$  expliqué dans la section 3.2.1 et vérifie qu'aucun point extérieur  $\bar{X}_{i|j}$  ne se trouve dans  $\mathcal{R}_g(X_{i|j})$  grâce à la formule de Pick. La reconnaissance de parties concaves est identique. Il suffit de remplacer  $\mathcal{E}_g(X_{i|j})$  par  $\mathcal{E}_d(\bar{X}_{i|j})$ , de modifier le prédicat d'orientation et de permuter le rôle des points intérieurs et extérieurs. La détection de la convexité pour un contour complet est aussi identique.

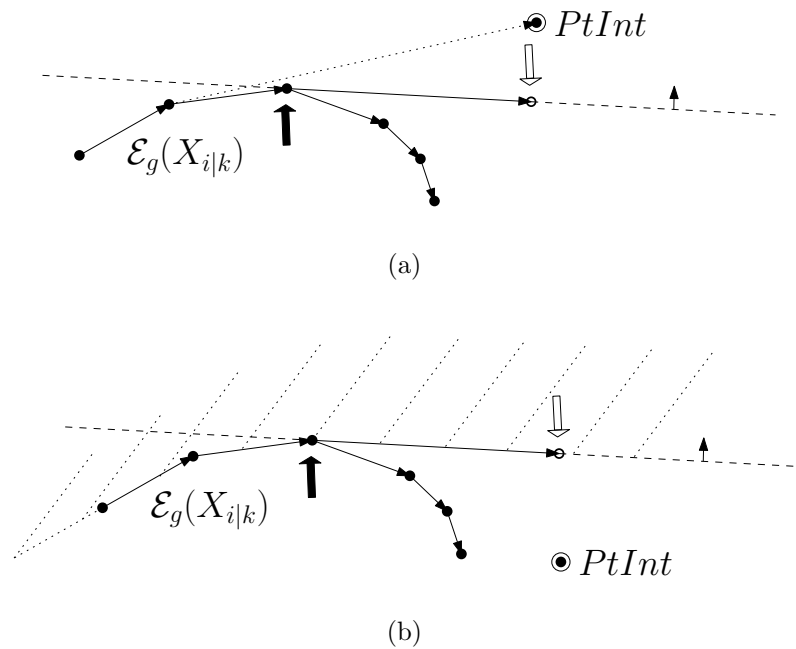


FIG. 3.7 – Ajout d'un nouveau point intérieur appelé  $PtInt$ . Si  $PtInt$  appartient au demi-plan à gauche défini par les points  $PtSupportInt$  et  $PtSupportExt$ , pointés respectivement par une flèche noire et blanche (a), la convexité est remise en cause. Dans le cas contraire (b), tous les points extérieurs déjà traités se trouvent avec certitude dans la zone hachurée et la convexité n'est pas remise en cause.

---

**Algorithme 7** : Reconnaissance d'une partie convexe par dénombrement

---

**Entrées** : Une partie  $C_{i|j}$ .

**Sorties** : Le booléen *estConvexe* et la pile contenant les sommets de l'enveloppe  $\mathcal{E}_g(X_{i|j})$  si  $C_{i|j}$  est convexe.

```

/* initialisation                                     */
1  estConvexe ← vrai;
2  Mettre les deux premiers points intérieurs dans la pile;
3   $n \leftarrow 2$  ;                                     /* nombre de points traités */
4  aire ← 0;
5  Fixer  $k$  de sorte que le point intérieur associé à  $C_{k-1|k}$  soit le second point de la
   pile;
   /* corps de l'algorithme                             */
6  tant que  $C_k \neq C_j$  et estConvexe faire
7  |   PtInt ← le point intérieur associé à  $C_{k|k+1}$ ;
   |   /* mise à jour                                     */
8  |    $a \leftarrow$  aire signée du triangle formé par les 2 derniers points de la pile et PtInt;
9  |   tant que ( $a < 0$ ) faire
10 | |    $aire \leftarrow aire + |a|$  ;                       /* augmentation de l'aire */
11 | |   Enlever un point de la pile;
12 | |    $a \leftarrow$  aire signée du triangle formé par les 2 derniers points de la pile et
   | |   PtInt;
13 |   Empiler PtInt;
14 |    $n \leftarrow n + 1$ ;
   |   /*  $n_{pile}$  désigne la taille de la pile et  $n$  le nombre de points traités */
15 |   estConvexe ←  $((aire - n/2 + n_{pile}/2) \leq 0)$  ;      /* formule de pick */
16 |    $k \leftarrow k + 1$ ;
17 retourner estConvexe et la pile

```

---



L'algorithme 7 est en ligne. Il traite séquentiellement les parties élémentaires de la partie  $C_{i|j}$  donnée en entrée (boucle de la ligne 5) et décide si la partie courante  $C_{i|k}$  (avec  $i < k \leq j$ ) est convexe ou non. La partie principale de l'algorithme (l. 5-14) est constituée d'un processus de dépilement qui met à jour l'enveloppe convexe partielle courante  $\mathcal{E}_g(X_{i|k})$ . La structure de données peut être celle d'une pile. Les opérations de lecture (l. 7 et 11), d'ajout (l. 12) ou suppression (l. 10) en haut de la pile prennent un temps constant. La taille de la pile est disponible en temps constant (l. 13).

L'aire euclidienne de  $\mathcal{R}_g(X_{i|k})$  est calculée par triangulation pendant le processus de dépilement (l. 8-11). Cela vient du fait que le prédicat d'orientation comprend le calcul de l'aire signée d'un triangle (équation 1.2).

En adaptant aux polygones dégénérés la formule de Pick (équation 2.6), on calcule le nombre de points de  $\mathbb{Z}^2$  se trouvant dans  $\mathcal{R}_g(X_{i|k})$  à partir de son aire euclidienne en temps constant (l. 13).

Nous allons maintenant illustrer le fonctionnement de l'algorithme 7 sur l'exemple de la fig. 3.3. Au début, les deux premiers points intérieurs initialisent la pile des sommets de l'enveloppe convexe partielle à gauche. L'aire signée du triangle que forment ces deux points avec le point intérieur suivant est négative, car ces trois points sont orientés dans le sens trigonométrique (fig. 3.8.a). L'enveloppe convexe partielle à gauche est donc mise à jour par la suppression du second sommet (fig. 3.8.b). L'aire du triangle vaut  $\frac{1}{2}$ . Comme  $\frac{1}{2} - \frac{3}{2} + \frac{2}{2} = 0$ , il ne contient aucun point de  $\mathbb{Z}^2$  et  $C_{0|3}$  est convexe.

Ensuite, l'aire signée du triangle que forme le point intérieur suivant avec les deux sommets du haut de la pile est négative (fig. 3.8.c). L'enveloppe convexe partielle à gauche est donc à nouveau mise à jour par la suppression du second sommet. L'aire de la région grise est incrémentée d'un triangle d'aire  $\frac{1}{2}$  et vaut donc 1 (fig. 3.8.d). Comme  $1 - \frac{4}{2} + \frac{2}{2} = 0$ , il en résulte que  $C_{0|5}$  est convexe.

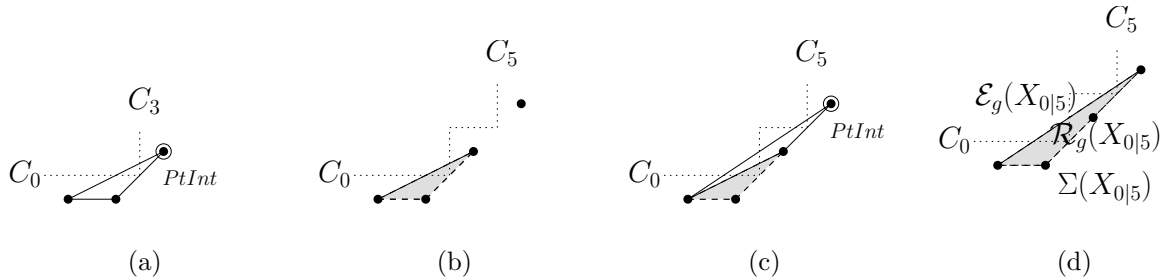


FIG. 3.8 – Premières étapes de l'algorithme 7

Les étapes suivantes sont illustrées dans la fig. 3.9. A la fin, l'aire de  $\mathcal{R}_g(X_{0|12})$  (en gris) vaut  $\frac{5}{2}$ . Le nombre de points intérieurs appartenant à  $\mathcal{E}_g(X_{0|12})$  est 4, alors que 8 points ont été traités. La somme de la ligne 13 vaut ainsi  $\frac{5}{2} - \frac{8}{2} + \frac{4}{2} = \frac{1}{2}$ . La valeur  $\frac{1}{2}$  signifie qu'il y a un point de  $\mathbb{Z}^2$  (en blanc dans la fig. 3.9.d) sur le bord de  $\mathcal{R}_g(X_{0|12})$  et  $C_{0|12}$  n'est donc pas convexe.

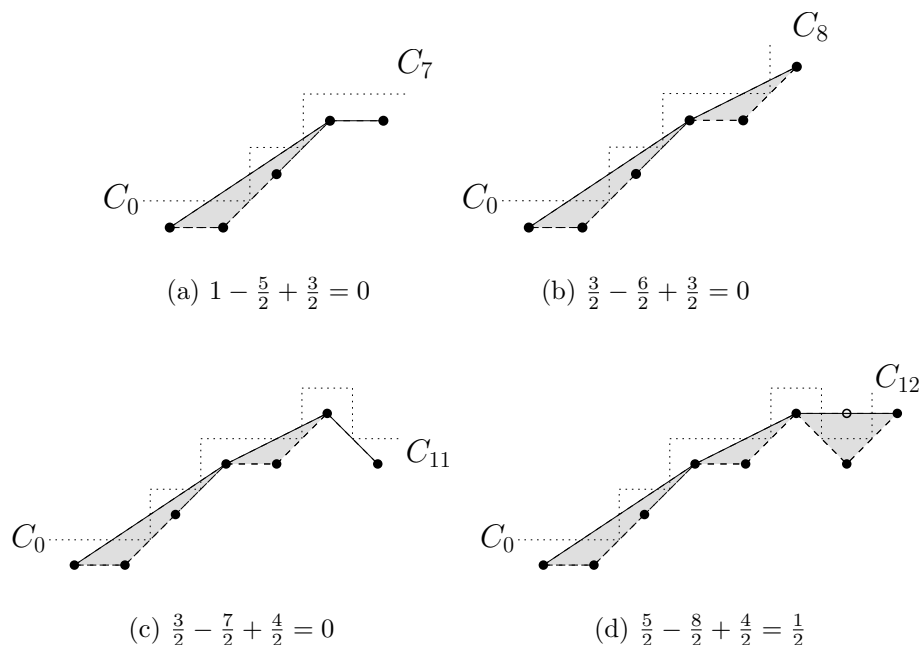


FIG. 3.9 – Initialisation et première étape de l'algorithme 7

**Théorème 3.2.** *L'algorithme 7 détecte correctement les parties convexes. De plus, il est linéaire en la taille de la partie du contour donnée en entrée.*

*Démonstration.* La correction de l'algorithme 7 dépend de deux choses :

- sa faculté à calculer  $\mathcal{E}_g(X_{i|k})$  ainsi que l'aire de  $\mathcal{R}_g(X_{i|k})$ ,
- sa faculté à dénombrer les points de  $\mathbb{Z}^2$  se trouvant dans  $\mathcal{R}_g(X_{i|k})$ .

A l'ajout du point intérieur  $PtInt$  associé à  $C_{k|k+1}$ , le calcul de  $\mathcal{E}_g(X_{i|k})$  consiste à trouver la droite de support commune à  $PtInt$  et  $\mathcal{E}_g(X_{i|k})$  (représentée par des tirets dans la fig. 3.10). Compte-tenu des discussions précédentes, un balayage de Graham permet de trouver le sommet  $PtSupportInt$  de  $\mathcal{E}_g(X_{i|k})$  par lequel passe cette droite et de supprimer les sommets suivants de  $\mathcal{E}_g(X_{i|k})$ . Comme le sommet  $PtSupportInt$  et les sommets supprimés forment une ligne polygonale convexe, les relier à  $PtInt$  produit une triangulation naturelle permettant de mettre à jour l'aire de  $\mathcal{R}_g(X_{i|k})$  (fig. 3.10). Ainsi, le calcul de  $\mathcal{E}_g(X_{i|k})$  et la mise à jour de l'aire de  $\mathcal{R}_g(X_{i|k})$  sont corrects.

Connaissant l'aire de  $\mathcal{R}_g(X_{i|k})$ , la formule de Pick (équation 2.6) est un moyen de calculer le nombre de points de  $\mathbb{Z}^2$  localisés dans  $\mathcal{R}_g(X_{i|k})$ . Cependant,  $\mathcal{R}_g(X_{i|k})$  est délimité par un polygone qui peut être dégénéré. Pour contourner ce problème, la formule de Pick est appliquée d'une part à des polygones non dégénérés et d'autre part à des segments reliant deux points de  $\mathbb{Z}^2$  pour lesquels la formule est vraie (fig. 3.11.a). Le nombre de polygones non dégénérés et de segments vaut  $n_{pile} - 1$ , où  $n_{pile}$  est le nombre de points de  $X_{i|k}$  se trouvant sur  $\mathcal{E}_g(X_{i|k})$ . Le polygone dégénéré de la fig. 3.11.a est bien décomposé en  $5 - 1 = 4$  éléments. Les  $n_{pile} - 1$  équations issues de l'application de la formule de Pick

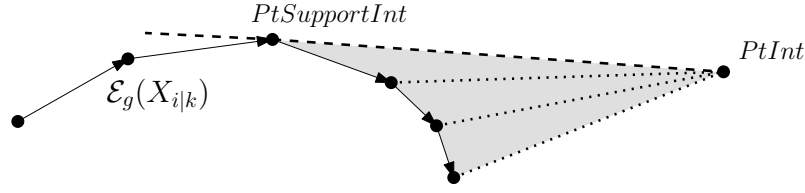


FIG. 3.10 – Calcul de l’enveloppe convexe  $\mathcal{E}_g(X_{i|k})$  (en noir) à l’ajout du point  $PtInt$ . Calcul de l’aire de  $\mathcal{R}_g(X_{i|k})$  (en gris) par triangulation (en pointillé).

indépendamment sur chaque élément sont ensuite cumulées (fig. 3.11.b). Le résultat est la somme de trois quantités :

- l’aire totale qui est égale à l’aire de  $\mathcal{R}_g(X_{i|k})$  (2 dans l’exemple de la fig. 3.11.b),
- le nombre de points se trouvant sur le bord de tous les éléments divisés par 2 ( $\frac{12}{2}$  dans l’exemple de la fig. 3.11.b),
- le nombre d’éléments (4 dans l’exemple de la fig. 3.11.b).

Pour déterminer la deuxième quantité, supposons que chaque arête de  $\mathcal{E}_g(X_{i|k})$  ne contienne aucun point de  $\mathbb{Z}^2$  autre que ses deux extrémités. Comme il y a  $n_{pile} - 1$  éléments, il y a  $n_{pile} - 2$  points appartenant à deux éléments. Le cumul des points se trouvant sur le bord de chaque élément s’élève donc à  $n + n_{pile} - 2$ . Par exemple, d’après les données de la fig. 3.11.a,  $n + n_{pile} - 2 = 9 + 5 - 2 = 12$  et dans la fig. 3.11.b, on compte bien  $4 + 4 + 2 + 2 = 12$  points. Par conséquent, le nombre de points de  $\mathbb{Z}^2$  localisés dans  $\mathcal{R}_g(X_{i|k})$ , noté ici  $I$ , est calculé par la formule suivante :

$$I = \text{aire de } \mathcal{R}_g(X_{i|k}) - \frac{\text{nombre des points du bord de tous les éléments}}{2} + \text{nombre d'éléments}$$

Ce qui est équivalent à :

$$I = \text{aire de } \mathcal{R}_g(X_{i|k}) - \left( \frac{n + n_{pile} - 2}{2} \right) + (n_{pile} - 1)$$

Ce qui correspond à la formule de la ligne 13 de l’algorithme 7 :

$$I = \text{aire de } \mathcal{R}_g(X_{i|k}) - \frac{n}{2} + \frac{n_{pile}}{2}$$

Chaque arête de  $\mathcal{E}_g(X_{i|k})$  est supposée ne contenir aucun point de  $\mathbb{Z}^2$  autre que ses deux extrémités, comme c’est le cas dans l’exemple de la fig. 3.11. Or, ce n’est pas vrai en général :  $n_{pile}$  est amputé des points du fond situés sur une arête de  $\mathcal{E}_g(X_{i|k})$  et par conséquent, le dénombrement effectué ligne 13, est amputé exactement de la moitié des points du fond situés sur une arête de  $\mathcal{E}_g(X_{i|k})$ . Comme le nombre de points obtenu par l’application de notre formule est égal à 0 si  $\mathcal{R}_g(X_{i|k})$  ne contient aucun point de  $\mathbb{Z}^2$  et est strictement supérieur à 0 sinon, le test de la ligne 13 est tout de même correct.

Enfin, comme l’algorithme est constitué essentiellement d’un balayage de Graham et que le dénombrement par la formule de Pick prend un temps constant, la complexité globale est linéaire en la taille de la partie donnée en entrée.  $\square$

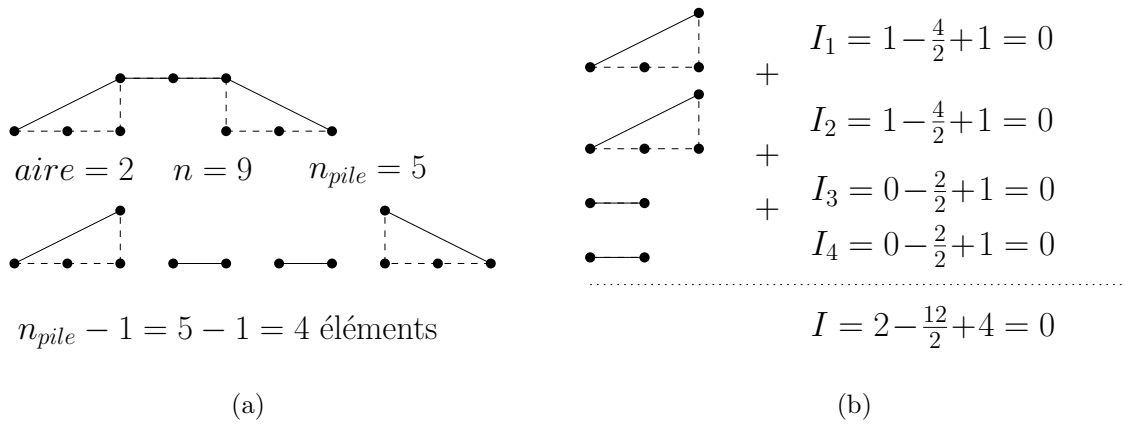


FIG. 3.11 – Utilisation de la formule de Pick sur des polygones dégénérés.

### 3.3 Mesures de convexité et décomposition robuste

Une mesure de convexité doit quantifier la similarité entre une partie de contour et les modèles de partie convexe ou concave. La mesure de convexité est basée sur une évaluation d'aires discrètes par dénombrement de façon à posséder un certain nombre de propriétés :

1. Elle prend ses valeurs dans l'intervalle  $]0, 1]$ .
  - (a) L'unité signifie que le contour considéré est convexe.
  - (b) L'écart à l'unité est proportionnel à la taille des cavités.
2. Elle est invariante à la translation, à la rotation et à la mise à l'échelle.

En imagerie, le réflexe consiste habituellement à calculer l'un de ces deux rapports géométriques :

- l'aire de l'objet  $X$  sur l'aire de son enveloppe convexe  $\mathcal{E}(X)$ ,
- le périmètre de l'enveloppe convexe  $\mathcal{E}(X)$  sur le périmètre de l'objet  $X$ .

L'aire et le périmètre d'une enveloppe convexe, qui est un polygone, sont calculés simplement. Mais que sont l'aire et le périmètre d'un objet discret ? Et comment les calculer ? Les solutions naïves consistent à considérer l'aire de  $X$  comme étant égal au nombre de points discrets appartenant à  $X$  et à considérer le périmètre de  $X$  comme étant égal au nombre de points discrets appartenant au bord de  $X$ . Les mesures utilisant cette estimation du périmètre sont acceptables dans certaines applications, mais sont biaisées car elles ne convergent pas vers la mesure réelle à résolution infinie et ne sont pas égales à l'unité quand la partie est convexe.

Deux solutions sont possibles. La première consiste à calculer l'aire ou le périmètre d'un polygone qui représente  $X$ , de sorte que les rapports soient ceux de deux quantités euclidiennes. C'est ce qu'a proposé Sklansky [1972] au début des années soixante-dix, mais sa mesure ne permet pas de vérifier toutes les propriétés voulues. La seconde, décrite ci-dessous, consiste à dénombrer les points de  $\mathbb{Z}^2$  situés à l'intérieur de  $\mathcal{E}(X)$  (voire dans

$\mathcal{R}_g(X_{i|j})$  ou  $\mathcal{R}_d(\bar{X}_{i|j})$ ), de façon à calculer le rapport de deux aires discrètes définies en nombre de points de  $\mathbb{Z}^2$ .

### 3.3.1 Définition et calcul par dénombrement

Soit  $E(X)$  la discrétisation de Gauss de  $\mathcal{E}(X)$ . La mesure de convexité de  $X$  est définie comme le rapport entre le nombre de points se trouvant dans  $X$  (vu comme l'aire discrète de  $X$ ) et le nombre de points se trouvant dans  $E(X)$  (vu comme l'aire discrète de  $E(X)$ ). Le nombre de points est noté  $|\cdot|$  :

$$\text{convexité}(X) = \frac{|X|}{|E(X)|} \quad (3.1)$$

Il est clair que cette mesure possède les propriétés suivantes :

- Comme  $\frac{|X|}{|E(X)|} = 1 - \frac{|E(X)| - |X|}{|E(X)|}$ , et que  $|E(X)| - |X|$  est l'aire discrète des cavités,  $\text{convexité}(X)$  mesure la taille des cavités (normalisée par la taille de  $E(X)$ ).
- $\text{convexité}(X) = 1$  si  $X$  est convexe,  $0 < \text{convexité}(X) < 1$  sinon.
- Comme le dénombrement de points est une évaluation convergente de l'aire euclidienne [Klette et Žunić, 2000],  $\text{convexité}(X)$  est une mesure qui converge vers la mesure de convexité qui pourrait être calculée à partir de l'aire euclidienne de l'objet continu dont  $X$  est la discrétisation et de l'aire de son enveloppe convexe.
- $\text{convexité}(X)$  est une mesure invariante aux transformations rigides à résolution infinie.

Soit  $R_g(X_{i|j})$  (respectivement  $R_d(\bar{X}_{i|j})$ ) l'ensemble des points de  $\mathbb{Z}^2$  appartenant à la région  $\mathcal{R}_g(X_{i|j})$  (respectivement  $\mathcal{R}_d(\bar{X}_{i|j})$ ). Grâce à ces nouvelles notations, la mesure de convexité définie par l'équation 3.1 est adaptée aux parties de contour ainsi :

$$\text{convexité}(C_{i|j}) = 1 - \frac{|R_g(X_{i|j})|}{|E(X)|} \quad (3.2)$$

$$\text{concavité}(C_{i|j}) = 1 - \frac{|R_d(\bar{X}_{i|j})|}{|E(X)|} \quad (3.3)$$

Pour calculer ces mesures, il suffit d'adapter l'algorithme 7 de façon à ce qu'il prenne en entrée  $|E(X)|$  et qu'il retourne le résultat après l'évaluation de  $|R_g(X_{i|j})|$  ou  $|R_d(\bar{X}_{i|j})|$  à partir du membre gauche de l'inégalité de la ligne 13.

Avant l'exécution de l'algorithme,  $|E(X)|$  est calculé grâce à la formule de Pick. La formule implique le calcul de l'aire euclidienne de  $\mathcal{E}(X)$ , ce qui est fait en temps linéaire en la taille du contour. La formule implique aussi le dénombrement des points se trouvant exactement sur  $\mathcal{E}(X)$ . Cela peut être effectué par un calcul de PGCD sur chacune des arêtes de  $\mathcal{E}(X)$ . Le nombre d'opérations ne peut excéder l'ordre de la taille du contour.

Comme cela est expliqué dans la preuve du théorème 3.2, au paragraphe 3.2.3, le dénombrement effectué dans l'algorithme est amputé exactement de la moitié des points du fond situés sur une arête de  $\mathcal{E}_g(X_{i|j})$ . Le dénombrement peut être rendu exact en comptant le nombre de points de  $\mathbb{Z}^2$  se trouvant sur chaque nouvelle arête de  $\mathcal{E}_g(X_{i|j})$ , par un

calcul de PGCD. Mais il n'est pas intéressant d'opérer une telle modification, car elle implique une augmentation de la complexité de l'algorithme qui n'est pas accompagnée d'une amélioration de la mesure. Au contraire, comme le montrent la fig. 3.12 et les résultats expérimentaux du paragraphe 3.3.2, la mesure est moins sensible aux petites concavités quand le dénombrement n'est qu'approché.

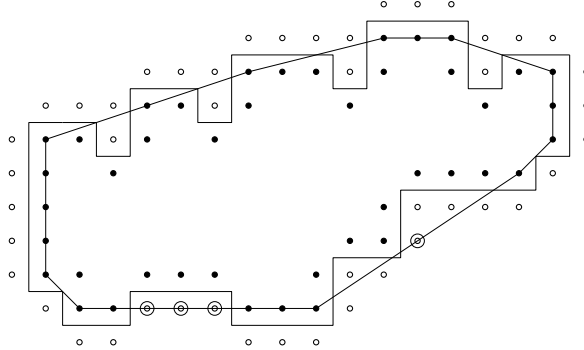


FIG. 3.12 – Comme  $|X| = 89$  et  $|E(X)| = 100$ ,  $\text{convexité}(X) = \frac{89}{100}$ . L'algorithme 7 retourne  $1 - \frac{9}{100} = \frac{91}{100}$  au lieu de  $1 - \frac{11}{100} = \frac{89}{100}$ , car le numérateur est diminué de la moitié des points du fond qui se trouve exactement sur une arête de  $\mathcal{E}(X)$ , c'est-à-dire de  $\frac{4}{2} = 2$ . Ces quatre points sont détournés sur la figure.

Ces mesures rendent possible la définition de nouveaux modèles qui prennent en compte une incertitude, contrôlée par un paramètre, quant à la position du contour.

**Définition 3.1** ( $\alpha$ -convexe). *Un objet  $X$  est  $\alpha$ -convexe si et seulement si  $\text{convexité}(X) \geq \alpha$*

Un objet  $X$  est convexe si et seulement si  $\alpha = 1$ . L'objet dessiné fig. 3.12 est  $\alpha$ -convexe pour  $\alpha \leq 0.89$ .

Cette définition est adaptée aux parties de contour ainsi :

**Définition 3.2** (Partie  $\alpha$ -convexe et  $\alpha$ -concave). *Une partie  $C_{ij}$  d'un contour  $C$  est une partie  $\alpha$ -convexe (respectivement  $\alpha$ -concave) si et seulement si  $\text{convexité}(C_{ij}) \geq \alpha$  (respectivement  $\text{concavité}(C_{ij}) \geq \alpha$ ).*

Une partie  $C_{ij}$  est convexe (respectivement concave) si et seulement si  $\alpha = 1$ . La fig. 3.13 montre un exemple de partie 0.95-convexe et 0.95-concave.

Un algorithme similaire à l'algorithme 7 peut être élaboré pour la tâche de détection. Il suffit d'ajouter  $\alpha$  comme paramètre d'entrée et de comparer la mesure obtenue à  $\alpha$ .

### 3.3.2 Résultats expérimentaux

Dans cette section, nous mesurons la convexité de deux classes de contours : des rosaces et des cercles bruités. Ces contours sont ceux d'objets discrets générés à partir de la discrétisation de Gauss d'objets euclidiens (fig. 3.14).

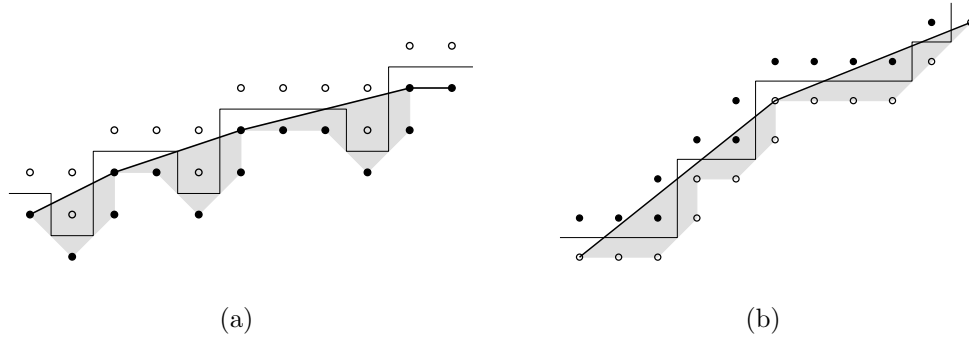


FIG. 3.13 – Ces deux parties sont extraites du contour de la fig. 3.12. En (a), c'est une partie 0.95-convexe et en (b), c'est une partie 0.95-concave, car leur mesure valent toutes deux  $1 - \frac{3}{100} = 0.97$ , ce qui est supérieur à  $\alpha = 0.95$ .

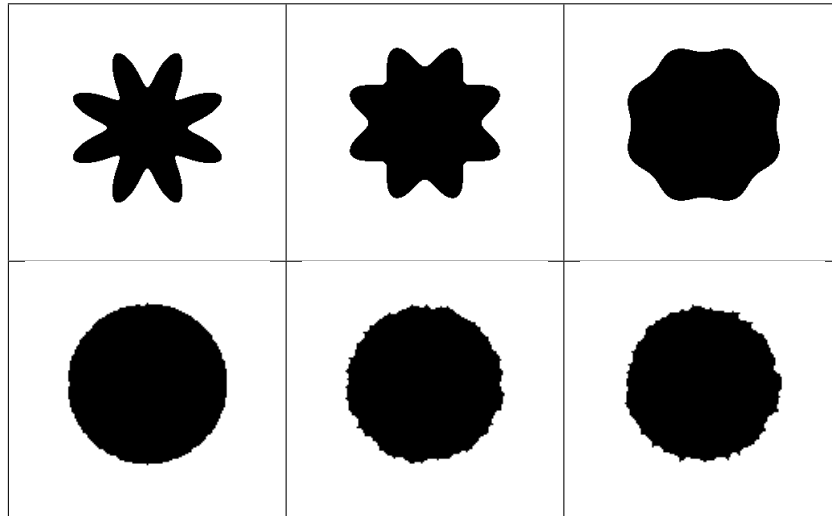


FIG. 3.14 – En haut, discrétisation de rosaces à 8 pétales pour lesquelles le rayon intérieur s'approche de plus en plus du rayon extérieur. En bas, discrétisation de Gauss d'un cercle, de plus en plus dégradé par le modèle de bruit de Kanungo *et al.* [2000] (section 1.3.4). Les contours utilisés dans le calcul de la convexité sont les contours de ces objets.

Une centaine de rosaces ont été générées. Elles sont obtenues par discrétisation de Gauss. Les pétales s'étendent entre un cercle intérieur et un cercle extérieur. Le cercle intérieur est augmenté tandis que le cercle extérieur est fixe afin que le rapport atteigne l'unité (fig. 3.14). La convexité a été mesurée de manière approchée et exacte pour un rapport entre les rayons croissant. La fig. 3.15 montre que les deux courbes obtenues sont très proches et varient en fonction de l'importance des cavités. Quand les cercles intérieur et extérieur des rosaces se superposent, les pétales disparaissent. Les rosaces deviennent des cercles et par conséquent convexes. Les mesures, qu'elles soient approchées ou exactes, sont maximales et valent un dans ce cas.

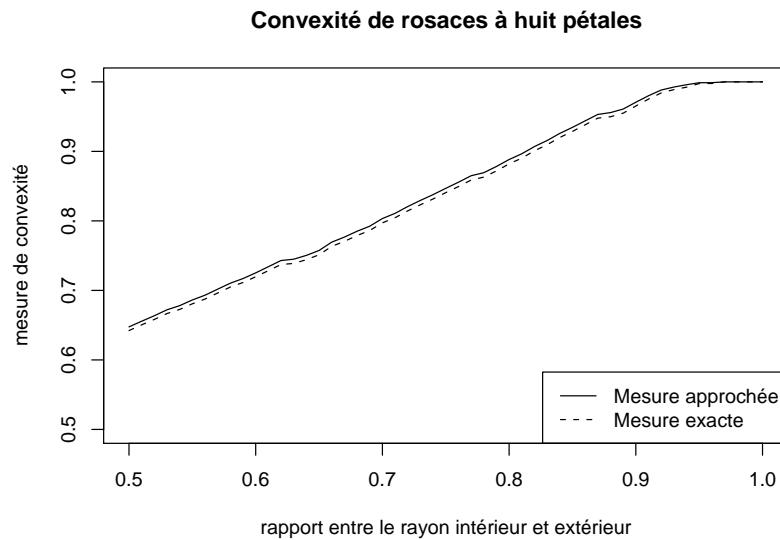


FIG. 3.15 – Evolution de la convexité en fonction du rapport entre les rayons intérieurs et extérieurs d'une rosace à huit pétales.

Une centaine de cercles discrets bruités ont été générés. Ils sont obtenus par discrétisation de Gauss de cercles de rayon 30, puis par ajout de bruit selon le modèle de Kanungo *et al.* [2000] (section 1.3.4). La fig. 3.16 montre que la convexité diminue à mesure que le bruit augmente. Cette évolution n'est pas régulière, mais en dents de scie, parce que les points basculent de l'objet au fond et inversement de manière aléatoire. La mesure approchée, qui est diminuée, par rapport à la mesure exacte, de la moitié des points du fond situés sur une arête de  $\mathcal{E}(X)$ , est moins sensible aux petites cavités que génère le bruit.

### 3.3.3 Décomposition robuste en parties convexes et concaves

Cette section décrit un algorithme qui décompose un contour en parties convexes et concaves. La décomposition est effectuée lors d'un balayage du contour dans lequel chaque partie convexe et chaque partie concave reconnue le long du contour est étendue le plus possible vers l'avant et/ou vers l'arrière selon un principe de *maximalité*.



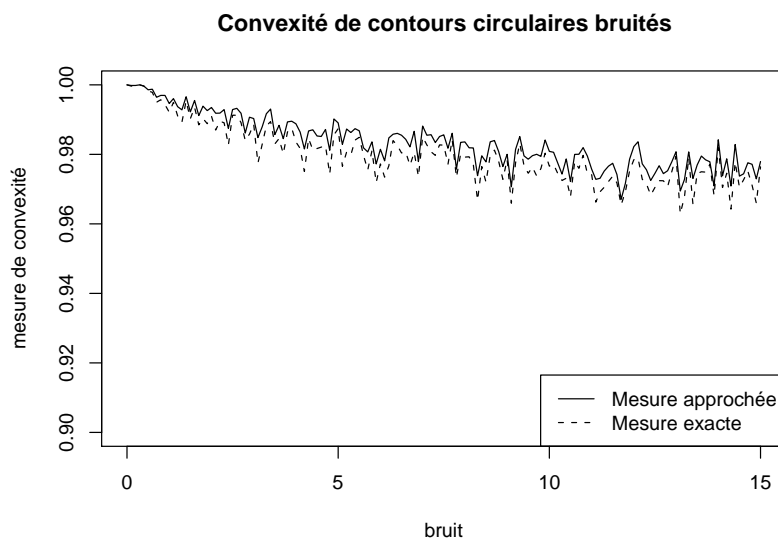


FIG. 3.16 – Evolution de la convexité en fonction de la quantité de bruit ajoutée à des cercles.

Pour décider si une partie  $C_{k|l}$  de  $C$  correspond à une partie convexe ou concave, il suffit d'appliquer l'algorithme 6 ou l'algorithme 7. Pour décider si une partie  $C_{k|l}$  de  $C$  correspond à une partie  $\alpha$ -convexe ou  $\alpha$ -concave, il suffit d'appliquer un algorithme similaire à l'algorithme 7. Afin d'être le plus générique possible, nous allons parler uniquement de parties  $\alpha$ -convexes ou  $\alpha$ -concaves. S'il s'avère que  $C_{k|l}$  est une partie  $\alpha$ -convexe (respectivement  $\alpha$ -concave), le principe de maximalité garantit que  $C_{k|l}$  n'est pas contenue dans une partie  $\alpha$ -convexe (respectivement  $\alpha$ -concave) plus grande.

**Définition 3.3** (Partie  $\alpha$ -convexe maximale). *Une partie  $\alpha$ -convexe  $C_{k|l}$  d'un contour  $C$  qui ne peut être étendue à l'avant (respectivement à l'arrière), c'est-à-dire telle que  $C_{k|l+1}$  (respectivement  $C_{k-1|l}$ ) n'est pas une partie  $\alpha$ -convexe, est une partie  $\alpha$ -convexe maximale à l'avant (respectivement à l'arrière). De plus, une partie  $\alpha$ -convexe maximale, est maximale à la fois à l'avant et à l'arrière.*

Une partie  $\alpha$ -concave maximale est définie de la même manière.

Les contraintes ayant guidées l'élaboration de notre algorithme sont les suivantes :

1. Les parties  $\alpha$ -convexes et  $\alpha$ -concaves détectées sont maximales. Nous voulons par exemple retrouver l'intégralité du pétale d'une fleur en tant que partie  $\alpha$ -convexe et pas seulement un morceau de celui-ci.
2. Le contour est recouvert de parties  $\alpha$ -convexes et  $\alpha$ -concaves qui se chevauchent. Certaines parties de contour appartiennent à la fois à une partie  $\alpha$ -convexe et à une partie  $\alpha$ -concave.
3. Une partie  $\alpha$ -convexe est suivie d'une partie  $\alpha$ -concave et inversement. Il ne semble pas naturel que deux parties  $\alpha$ -convexes ou deux parties  $\alpha$ -concaves se suivent.

4. Le nombre de parties  $\alpha$ -convexes et  $\alpha$ -concaves retenues est le plus petit possible. Nous ne voulons pas que deux parties  $\alpha$ -convexes se chevauchent sur une partie de contour représentant un seul pétale de fleur.

L'algorithme débute par la reconnaissance d'une partie  $\alpha$ -convexe car le point de départ est un sommet de l'enveloppe convexe du contour. Tant qu'elle est  $\alpha$ -convexe, la partie reconnue est étendue vers l'avant (contrainte 1). La croissance s'arrête au point  $P$ , dont l'ajout n'est pas compatible avec le caractère  $\alpha$ -convexe de la partie détectée jusqu'ici. Cette dernière est maximale à l'avant, mais pas à l'arrière. C'est pourquoi, tant qu'elle est  $\alpha$ -convexe, elle est aussi étendue vers l'arrière (contraintes 1 et 2). L'algorithme se poursuit par la reconnaissance d'une partie  $\alpha$ -concave à partir du point  $P$  (contrainte 3). Tant qu'elle est  $\alpha$ -concave, la partie reconnue est étendue vers l'avant (contrainte 1). Ensuite, elle est étendue vers l'arrière pour la rendre maximale (contrainte 1 et 2). L'algorithme continue ainsi en alternant les reconnaissances de parties  $\alpha$ -convexes et  $\alpha$ -concaves (contrainte 3). Le fait que la croissance vers l'avant précède la croissance vers l'arrière minimise le nombre de parties  $\alpha$ -convexes et  $\alpha$ -concaves détectées conformément à la quatrième contrainte.

L'algorithme de reconnaissance (l'algorithme 7) opère à la volée et est linéaire en temps. Néanmoins, cela n'implique pas forcément que l'algorithme de décomposition soit lui-même linéaire en temps. En effet, chaque point du contour est traité autant de fois qu'il est contenu par des parties convexes ou concaves différentes. Ce nombre est en pratique très faible (il excède rarement 4).

Les fig. 3.17 et 3.18 fournissent la décomposition résultante pour un contour légèrement bruité avec respectivement  $\alpha = 1$  et  $\alpha < 1$ . Pour visualiser le résultat,  $\mathcal{E}_g(X_{i|j})$  est représentée en rouge si  $C_{i|j}$  est  $\alpha$ -convexe, tandis que  $\mathcal{E}_d(\bar{X}_{i|j})$  est représentée en vert si  $C_{i|j}$  est  $\alpha$ -concave. Les parties  $\alpha$ -convexes obtenues sont bien maximales. Dans la fig. 3.18, comme  $\alpha < 1$ , chacune recouvre l'intégralité d'un pétale. En outre, il y a autant de parties  $\alpha$ -convexes que de pétales, c'est-à-dire huit.

Bien sûr, il reste à déterminer automatiquement  $\alpha$  pour que la décomposition convienne à un contexte et à un objectif donné. De plus, il est possible de créer de nouveaux modèles par combinaison logique des modèles de partie  $\alpha$ -convexe et de partie  $\alpha$ -concave. Une partie peut être à la fois  $\alpha$ -convexe et  $\alpha$ -concave. A l'opposé, une partie peut être  $\alpha$ -convexe ou bien  $\alpha$ -concave. Pour détecter ces modèles, la reconnaissance d'une partie  $\alpha$ -convexe est lancée parallèlement à la reconnaissance d'une partie  $\alpha$ -concave. La détection continue tant que l'une *et* l'autre, ou tant que l'une *ou* l'autre des reconnaissances se poursuit. L'introduction de ces modèles démultiplie les décompositions possibles. Leur exploration reste à faire.

## 3.4 Conclusion

Dans la définition que nous avons adoptée, l'enveloppe convexe d'un objet convexe ne contient que l'objet lui-même et ne contient aucun point du fond. Ce choix permet d'une part de définir naturellement des parties convexes et concaves et d'autre part de mon-

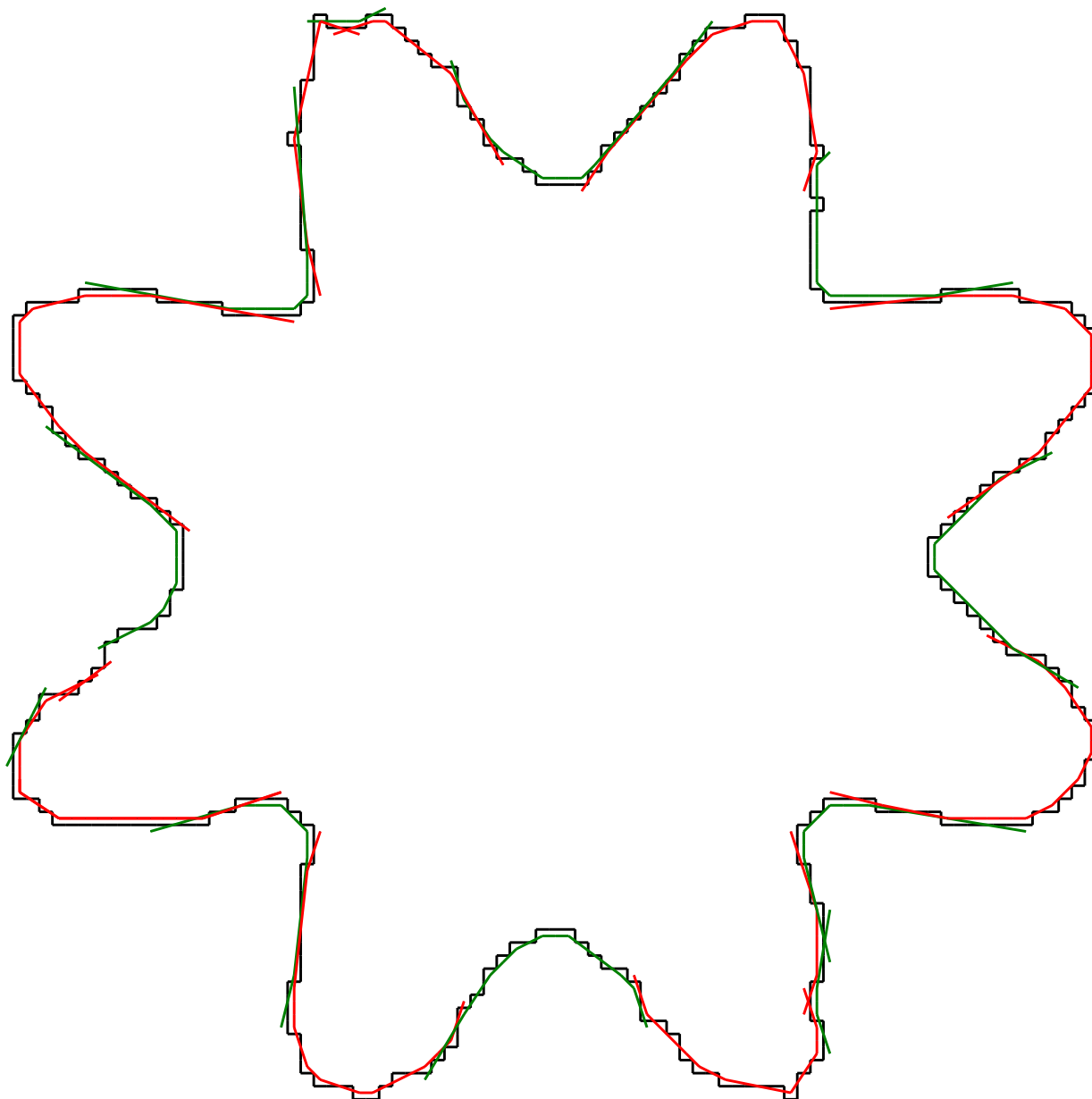


FIG. 3.17 – Décomposition en parties convexes et concaves.  $\mathcal{E}_g(X_{i|j})$  est dessinée en rouge si  $C_{i|j}$  est convexe, tandis que  $\mathcal{E}_d(\bar{X}_{i|j})$  est dessinée en vert si  $C_{i|j}$  est concave.

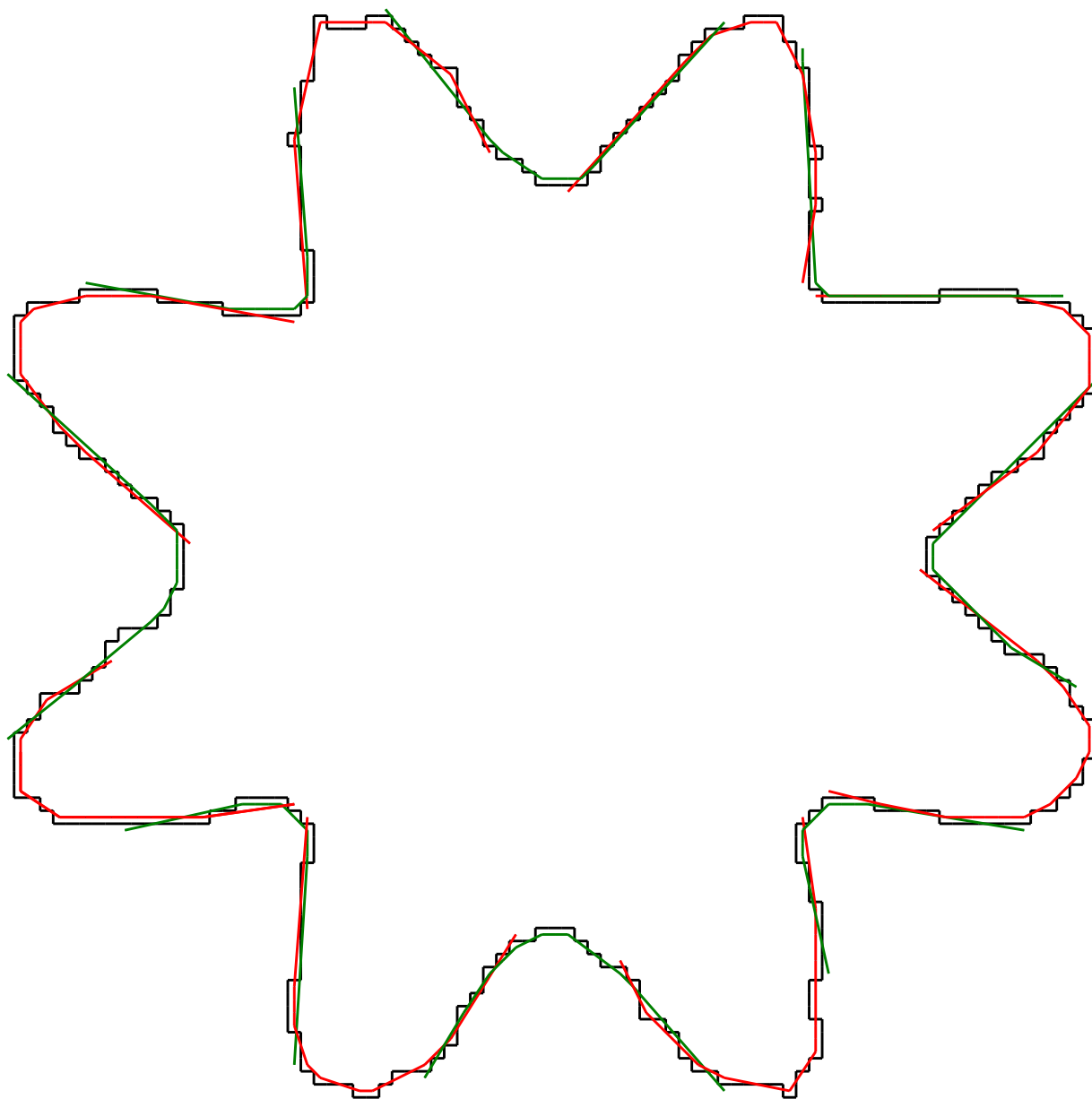


FIG. 3.18 – Décomposition robuste au bruit.  $\mathcal{E}_g(X_{i|j})$  est dessinée en rouge si  $C_{i|j}$  est  $\alpha$ -convexe, tandis que  $\mathcal{E}_d(\bar{X}_{i|j})$  est dessinée en vert si  $C_{i|j}$  est  $\alpha$ -concave. Le paramètre  $\alpha$  est fixé de sorte que la région  $\mathcal{R}_g(X_{i|j})$  (respectivement  $\mathcal{R}_d(\bar{X}_{i|j})$ ) contienne 5 points de  $\mathbb{Z}^2$  si  $C_{i|j}$  est  $\alpha$ -convexe (respectivement  $\alpha$ -concave).

trer l'importance de l'enveloppe convexe dans le traitement algorithmique de la convexité discrète.

Nous avons proposé deux algorithmes originaux de reconnaissance de parties convexes et concaves. Les deux sont en ligne et linéaires en temps. Ces qualités sont essentielles pour décomposer un contour en parties convexes et concaves de manière efficace. Ils comprennent tous les deux un calcul d'enveloppe convexe partielle par un balayage de Graham. Pour vérifier qu'aucun point du fond ne se trouve du mauvais côté de l'enveloppe, le premier calcule une droite de support à la manière des "rotating calipers", tandis que le second procède par dénombrement de points à l'aide de la formule de Pick.

Nous avons introduit une mesure de convexité basée sur un rapport d'aires discrètes. Les aires discrètes, définies en terme de nombre de points, sont d'une part cohérentes avec notre définition de convexité et sont d'autre part de bonnes estimations d'aire. Ainsi, notre mesure vérifie un ensemble de propriétés fondamentales, contrairement aux mesures traditionnelles. De plus, notre approche par dénombrement de points permet de calculer cette mesure à la volée et en temps linéaire.

A partir de cette mesure, nous avons enfin introduit de nouveaux modèles de parties convexes et concaves, destinés à prendre en compte l'incertitude quant à la position du contour. Ces modèles ont un paramètre entre 0 et 1. L'incertitude est nulle quand le paramètre est fixé à 1 et croissante à mesure que le paramètre diminue. Nous pouvons ainsi décomposer de manière robuste un contour en parties convexes et concaves. Cette opération est importante en analyse d'images car la décomposition obtenue segmente un objet en parties visuellement significatives.



Chapitre **4**

*Reconnaissance de segments et mesure de linéarité*

**Sommaire**

---

<b>4.1</b>	<b>Étude de l'existant</b> . . . . .	<b>84</b>
4.1.1	Définitions . . . . .	84
4.1.2	Algorithmes . . . . .	87
<b>4.2</b>	<b>Algorithmes géométriques de reconnaissance</b> . . . . .	<b>88</b>
4.2.1	Approche par séparation . . . . .	88
4.2.2	Comparaison avec l'algorithme de O'Rourke [1981] . . . . .	92
4.2.3	Approche par épaisseur . . . . .	94
<b>4.3</b>	<b>Algorithmes arithmétiques de reconnaissance</b> . . . . .	<b>99</b>
4.3.1	Croissance d'un segment . . . . .	99
4.3.2	Érosion d'un segment . . . . .	104
<b>4.4</b>	<b>Décompositions du contour et mesure de linéarité</b> . . . . .	<b>106</b>
4.4.1	Décomposition exacte sans chevauchement . . . . .	106
4.4.2	Décompositions exactes avec chevauchements . . . . .	107
4.4.3	Décomposition robuste basée mesure . . . . .	112
<b>4.5</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>114</b>

---

Plusieurs méthodes de reconnaissance de segments de droite sont présentés dans ce chapitre. Parmi elles, deux mènent naturellement à l'introduction de mesures de linéarité. A partir de ces mesures, selon le même cheminement que celui suivi au chapitre 3, de nouveaux modèles de segments de droite, destinés à prendre en compte l'incertitude quant à la position du contour, servent à obtenir des segmentations robustes. L'approche par épaisseur, adaptée aux parties de contour au paragraphe 4.2.3, provient de résultats similaires portant sur le bord des objets discrets, présentés à *14-th IEEE International Conference on Image Analysis and Processing (ICIAP'07)* [Roussillon *et al.*, 2007].

## 4.1 Étude de l'existant

### 4.1.1 Définitions

Les définitions de segments utilisées sont souvent celles par discrétisation (OBQ ou GIQ en général), même s'il est possible de caractériser la taille et l'organisation des paliers par des propriétés géométriques et combinatoires (voir par exemple [Wu, 1982; Li et Loew, 1988; Voss, 1991; Reveillès, 1991; Troesch, 1993; Yuan et Suen, 1995] et le paragraphe 1.3.1).

Or, la propriété suivante établit une relation entre discrétisation et épaisseur.

**Propriété 4.1.** *Les points d'une 0-courbe ouverte qui est issue de la discrétisation OBQ (ou GIQ) d'une droite du premier octant se trouvent entre deux droites parallèles séparées par une distance verticale strictement inférieure à un.*

Plusieurs définitions sont fondées sur cette propriété d'épaisseur :

- celle de Rosenfeld [1974] pour la 0-connexité (par le biais de la célèbre propriété de la corde qui n'est rien d'autre qu'une propriété de type Helly [Veelaert, 1999]) pouvant être déduite de la propriété 4.1,
- celle de Kovalevsky [1990] pour la 1-connexité,
- celle de Reveillès [1991], qui est adaptée à toute connexité.

La propriété 4.1 peut être traduite dans les termes des définitions du paragraphe 1.3.3. On peut supposer sans perte de généralité que, pour un segment de droite  $C_{i|j}$ ,  $\bar{X}_{i|j}$  est le translaté de  $X_{i|j}$  par le vecteur  $(0, 1)$ .

**Propriété 4.2.** *Les points intérieurs  $X_{i|j}$  d'un segment de droite  $C_{i|j}$  se trouvent entre deux droites parallèles séparées par une distance verticale strictement inférieure à un.*

Comme  $C_{i|j}$  est un segment de droite, il existe une droite séparant  $X_{i|j}$  de  $\bar{X}_{i|j}$ . On peut diminuer (respectivement augmenter) l'ordonnée à l'origine de cette droite jusqu'à ce qu'elle touche un point de  $X_{i|j}$  (respectivement un point de  $\bar{X}_{i|j}$ ). Il y a donc une paire de droites parallèles qui séparent  $X_{i|j}$  de  $\bar{X}_{i|j}$  (fig. 4.1.a). Si on diminue d'une unité l'ordonnée à l'origine de la droite qui touche un des points de  $\bar{X}_{i|j}$ , alors elle se retrouve au-dessous de la droite qui touche un point de  $X_{i|j}$ , à une distance verticale forcément strictement inférieure à un (fig. 4.1.b). Cette paire de droites parallèles englobant  $X_{i|j}$  ne contient ni les points de  $\bar{X}_{i|j}$ , ni les points de  $X_{i|j}$  translatés par le vecteur  $(0, -1)$  par hypothèse.



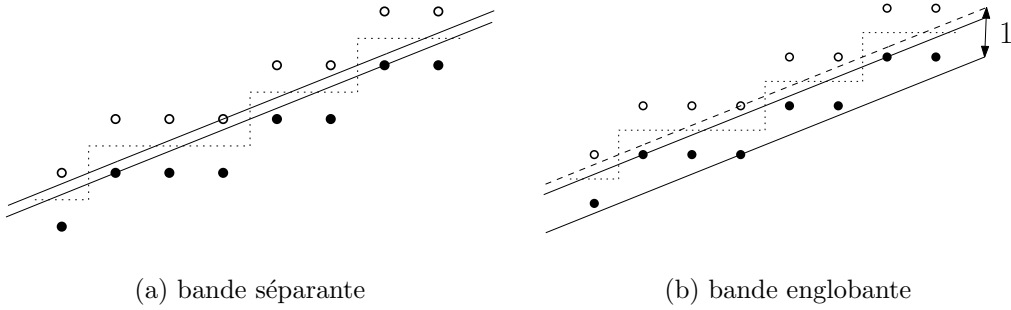


FIG. 4.1 –  $C_{ij}$  est représentée par un pointillé. Ses points intérieurs,  $X_{ij}$ , sont en noir et ses points extérieurs,  $\bar{X}_{ij}$ , sont en blanc.  $X_{ij}$  et  $\bar{X}_{ij}$  sont séparables par une bande d'épaisseur verticale strictement inférieure à un (a) et  $X_{ij}$  est contenu par une bande d'épaisseur verticale strictement inférieure à un (b).

De plus, il est possible d'aller plus loin en montrant une propriété du même type directement sur  $C_{ij}$ . La différence est que la distance séparant les deux droites parallèles est mesurée le long de la seconde diagonale. La seconde diagonale (respectivement la première) est la droite qui passe par l'origine et qui forme un angle de 135 (respectivement 45) degrés avec l'axe des abscisses.

**Propriété 4.3.** *Les points d'un segment de droite  $C_{ij}$  se trouvent entre deux droites parallèles séparées par une distance mesurée le long de la seconde diagonale strictement inférieure à  $\sqrt{2}$ .*

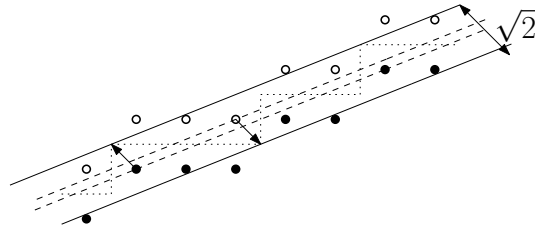
Pour saisir la propriété 4.3, il suffit de déplacer les droites parallèles qui séparent  $X_{ij}$  de  $\bar{X}_{ij}$ , obtenues plus haut (fig. 4.1.a). Si la droite qui touche un des points de  $\bar{X}_{ij}$  est translatée par le vecteur  $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$  et la droite qui touche un des points de  $X_{ij}$  est translatée par le vecteur  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , elles se retrouvent à englober  $C_{ij}$ , tout en étant séparées par une distance mesurée selon la diagonale strictement inférieure à  $\sqrt{2}$  (fig. 4.2).

La définition arithmétique (ou analytique) de la droite discrète proposée par Reveillès [1991] a l'intérêt d'être valable pour toute épaisseur. Cette définition est née de travaux concernant la résolution numérique d'équations différentielles par des calculs en nombres entiers. L'intérêt des nombres entiers est de contrôler l'exactitude des calculs à n'importe quelle échelle, tout en facilitant l'algorithmique. La droite discrète est apparue dans la résolution de l'équation  $y' = c$  initialement sans référence à la droite continue. Par la suite, l'équivalence avec les définitions par discrétisation GIQ, OBQ ou BBQ a été montrée.

**Définition 4.1** (Droite discrète [Reveillès, 1991]). *L'ensemble des points  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  vérifiant  $\mu \leq ax - by < \mu + \omega$  appartient à la droite discrète  $\mathcal{D}$  de pente  $\frac{a}{b}$ , de borne inférieure  $\mu$  et d'épaisseur  $\omega$  (avec  $a, b, \mu, \omega$  entiers et  $\text{pgcd}(a, b) = 1$ ).*

La fig. 4.3 illustre le rôle du paramètre  $\omega$ .

Enfin, la propriété suivante établit une relation entre séparation et convexité.



(a) épaisseur de  $C_{i|j}$

FIG. 4.2 –  $C_{i|j}$  est représentée par un pointillé. Ses points intérieurs,  $X_{i|j}$ , sont en noir et ses points extérieurs,  $\bar{X}_{i|j}$ , sont en blanc.  $C_{i|j}$  est contenu par une bande d'épaisseur diagonale strictement inférieure à  $\sqrt{2}$ .

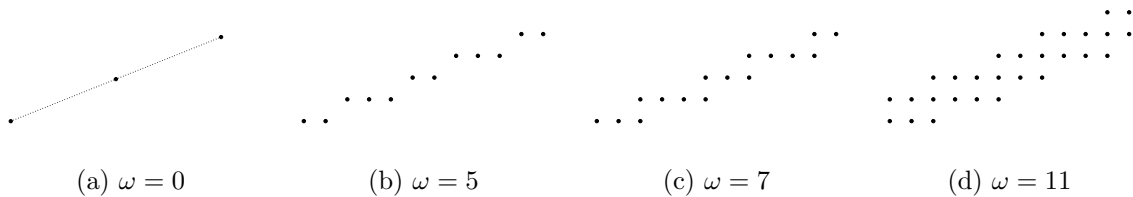


FIG. 4.3 – Différentes valeurs pour  $\omega$  qui contrôle l'épaisseur d'une droite de pente  $\frac{2}{5}$ . (a) Si  $\omega = 0$ , la droite est déconnectée mais tous ses points sont alignés. (b) Si  $\omega = \max(|a|, |b|)$ , la droite est une 0-courbe. (c) Si  $\omega = |a| + |b|$ , la droite est une 1-courbe. (d) Enfin, la droite est épaisse si  $\omega > |a| + |b|$ .

**Propriété 4.4.** *Un segment de droite est une partie à la fois convexe et concave.*

En effet, par définition, une partie  $C_{i|j}$  est un segment de droite si et seulement si  $X_{i|j}$  et  $\bar{X}_{i|j}$  sont séparables par une droite. Or, cela est vrai si et seulement si l'enveloppe convexe de  $X_{i|j}$  ne contient aucun point de  $\bar{X}_{i|j}$  ( $C_{i|j}$  est une partie convexe) et que  $\bar{X}_{i|j}$  ne contient aucun point de  $X_{i|j}$  ( $C_{i|j}$  est une partie concave).

### 4.1.2 Algorithmes

De nombreux algorithmes ont été conçus pour détecter ou reconnaître des segments de droite. Un certain nombre sont fondés sur la relation entre convexité et segment de droite, mis en évidence au début des années quatre-vingt [Kim et Rosenfeld, 1981; Kim, 1982b,a; Hübler *et al.*, 1981]. De même, grâce à la propriété 4.4, les algorithmes du paragraphe 3.2 peuvent être utilisés pour détecter à la volée un segment de droite en un temps linéaire en la taille du contour.

Cependant, ce type d'algorithmes ne permet pas la reconnaissance, c'est-à-dire le calcul d'une ou de toutes les droites qui séparent  $X_{i|j}$  de  $\bar{X}_{i|j}$ . Dans le plan dual, l'ensemble des points intérieurs et extérieurs correspond à un ensemble de demi-plans. L'intersection de tous ces demi-plans, appelé *domaine*, représente l'ensemble des droites qui séparent  $X_{i|j}$  de  $\bar{X}_{i|j}$ , appelé *préimage* (fig. 4.4).

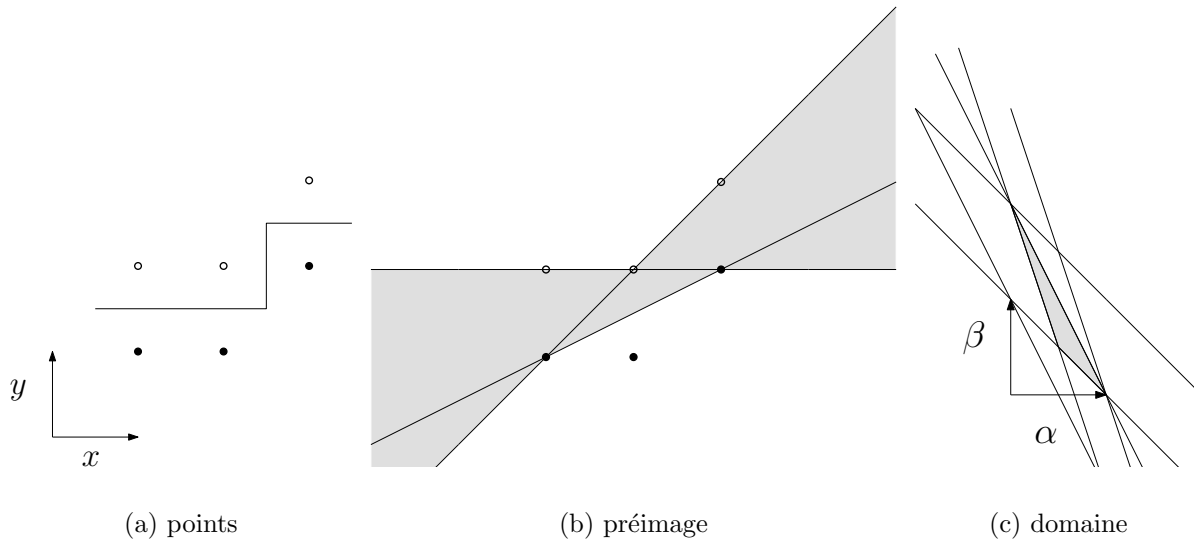


FIG. 4.4 – Une partie de contour et ses points intérieurs  $X_{i|j}$  (en noir) et extérieurs  $\bar{X}_{i|j}$  (en blanc) est dessinée en (a). Toutes les droites séparant  $X_{i|j}$  de  $\bar{X}_{i|j}$  traversent la zone grise de la figure (b). Tous les points de la zone grise de la figure (c), dans le dual, représentent les droites séparant  $X_{i|j}$  de  $\bar{X}_{i|j}$ .

Si  $C_{i|j}$  n'est pas un segment de droite, le domaine est vide. Dans le cas contraire, la reconnaissance consiste à trouver un point du domaine ou à décrire le domaine entier

sous la forme d'un polygone convexe. Les techniques issues de la géométrie algorithmique permettent de calculer ce domaine en  $\mathcal{O}(n \log n)$  [Preparata et Shamos, 1985] (section 2.3). Trouver un seul point du domaine est par contre un problème de programmation linéaire qui peut être résolu en  $\mathcal{O}(n)$  [Megiddo, 1984] (section 2.1). Mais le domaine complet peut être calculé en ligne en  $\mathcal{O}(n)$  [O'Rourke, 1981] quand les points sont d'abscisses croissantes. De plus, le domaine possède une structure très contrainte quand les points de  $\mathbb{Z}^2$  sont 0-connectés [Dorst et Smeulders, 1984; McIlroy, 1984]. C'est un polygone convexe ayant trois ou quatre sommets. Quand il en a quatre, deux ont même abscisse, cette abscisse étant encadrée par l'abscisse des deux autres sommets. Ces propriétés mènent à un algorithme constant en espace et linéaire en temps [Lindenbaum et Bruckstein, 1993]. Il est en ligne avec une complexité de mise à jour constante, contrairement à l'algorithme de O'Rourke [1981].

Plusieurs autres algorithmes géométriques permettent d'éviter le passage au dual. Ils reposent soit sur la définition par discrétisation [Creutzburg *et al.*, 1988; Yuan et Suen, 1995], soit sur les propriétés d'épaisseur [Anderson et Kim, 1985; Creutzburg *et al.*, 1988; Kovalevsky, 1990; Debled-Rennesson et Reveillès, 1995]. Ces deux types d'algorithmes sont équivalents. Ils sont de plus équivalents, par dualité, aux algorithmes calculant le domaine [O'Rourke, 1981; Lindenbaum et Bruckstein, 1993].

Plusieurs autres algorithmes non géométriques existent aussi [Creutzburg *et al.*, 1982; Shlien, 1983; Wu, 1982; Troesch, 1993]. Ils tirent profit des propriétés particulières des points de  $\mathbb{Z}^2$  qui ont été mises en évidence par l'algorithme d'Euclide [Reveillès, 1991; Troesch, 1993], les fractions continues [Li et Loew, 1988; Voss, 1991], les réseaux de points [Bruckstein, 1991; Reveillès, 1991; Debled-Rennesson et Reveillès, 1995] ou les séries de Farey [Dorst et Smeulders, 1984; McIlroy, 1984; Lindenbaum et Bruckstein, 1993].

De nombreuses autres références se trouvent dans l'article de [Klette et Rosenfeld, 2004].

## 4.2 Algorithmes géométriques de reconnaissance

Cette section débute par la description d'un algorithme fondé sur la définition originale par séparation (définition 1.20). Il ressemble à l'algorithme 6 du paragraphe 3.2.2. Comme il calcule l'ensemble de la préimage, il est équivalent, par dualité, à l'algorithme de O'Rourke [1981] qui calcule l'ensemble du domaine. Il ne suppose qu'un ordre dans le traitement des points et par conséquent pourrait être utilisé pour des maillages irréguliers. Les algorithmes suivants sont fondés sur la propriété d'épaisseur d'un segment de droite.

### 4.2.1 Approche par séparation

La reconnaissance d'une partie  $C_{ij}$  comme étant un segment de droite repose sur le calcul des enveloppes convexes partielles à gauche et à droite des points intérieurs et extérieurs, puis sur la vérification que ces deux enveloppes sont séparables par une droite ou, ce qui revient au même, ne s'intersectent pas. Il s'agit donc de vérifier que  $C_{ij}$  est à

## 4.2. Algorithmes géométriques de reconnaissance

---

la fois convexe et concave, d'où la ressemblance de l'algorithme 8 avec l'algorithme 6. Les lignes 7 à 12 de l'algorithme 6 correspondent aux lignes 2 à 7 de l'algorithme 8 et les lignes 16 à 19 de l'algorithme 6 correspondent aux lignes 10 et 11 de l'algorithme 8.

---

**Algorithme 8** : Procédure *VerificationSeparabilite*( $P, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, X_1, X_2, \bar{X}_1, \bar{X}_2, x$ )

---

**Entrées** : Un point intérieur ou extérieur  $P$ , deux listes de points  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_2$ , quatre points de support  $X_1, X_2, \bar{X}_1$  et  $\bar{X}_2$ , ainsi qu'une orientation  $x = \{\text{gauche, droite}\}$ .

**Sorties** : Le booléen *estUnSegment*, les deux listes de points et les quatre points de support mis à jour.

```

1  estUnSegment ← vrai;
2  si  $P$  appartient au demi-plan à “ $x$ ” défini par  $X_1$  et  $\bar{X}_2$  alors           /* zone 1 */
3  |   estUnSegment ← faux;
4  sinon                                                                                       /* zones 2 et 3 */
   |   /* mise à jour de la liste  $\mathcal{L}_1$                                                          */
5  |   tant que  $P$  appartient au demi-plan à “ $x$ ” défini par les 2 derniers points de  $\mathcal{L}_1$ 
   |   faire
6  |   |   Supprimer le dernier point de  $\mathcal{L}_1$ ;
7  |   |   Ajouter  $P$  au bout de  $\mathcal{L}_1$ ;
   |   |   /* mise à jour des points de support                                                         */
8  |   |   si  $P$  appartient au demi-plan à “ $x$ ” défini par  $\bar{X}_1$  et  $X_2$  alors           /* zone 2 */
9  |   |   |    $X_2 \leftarrow P$ ;                                                                 /* mise à jour de  $X_2$  */
   |   |   |   /* déplacement de  $\bar{X}_1$                                                          */
10 |   |   |   tant que  $P$  appartient au demi-plan à “ $x$ ” défini par les 2 premiers points de
   |   |   |   support de  $\mathcal{L}_2$  faire
11 |   |   |   |    $\bar{X}_1 \leftarrow$  le point suivant  $\bar{X}_1$  dans  $\mathcal{L}_2$ ;
   |   |   |
12 retourner estUnSegment,  $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, X_1, X_2, \bar{X}_1, \bar{X}_2$ ;

```

---

L'algorithme 8 est appelé par l'algorithme 9. Ce dernier traite séquentiellement chaque partie élémentaire de la partie  $C_{i|j}$  donnée en entrée (boucle de la ligne 5) et décide si la partie courante  $C_{i|k}$  (avec  $i \leq k < j$ ) est un segment de droite ou non. A chaque fois qu'une nouvelle partie élémentaire est considérée, les points intérieurs (l. 6-7) puis extérieurs (l. 9-10) sont traités de manière symétrique dans l'algorithme 8.

Le principe de l'algorithme consiste à maintenir les enveloppes convexes partielles ainsi que les quatre sommets par lesquels passent les deux droites de support séparantes critiques. La définition de ces droites se trouve au paragraphe 2.3.2. Les droites de support séparantes sont les droites séparantes qui passent par un sommet d'une des deux enveloppes convexes partielles  $\mathcal{E}_g(X_{i|k})$  ou  $\mathcal{E}_d(\bar{X}_{i|k})$ . Ces sommets, par analogie, sont appelés *points de support*. Il est aisé de montrer que ces points sont des sommets consécutifs des enveloppes convexes partielles. Les premiers et derniers points de support de  $\mathcal{E}_g(X_{i|k})$  sont notés  $X_f$  et  $X_l$

---

**Algorithme 9** : Reconnaissance d'un segment de droite par séparation

---

**Entrées** : Une partie  $C_{i|j}$ .

**Sorties** : Le booléen  $estUnSegment$ , les listes  $\mathcal{L}_g$  (respectivement  $\mathcal{L}_d$ ) contenant les sommets de l'enveloppe  $\mathcal{E}_g(X_{i|j})$  (respectivement  $\mathcal{E}_d(\bar{X}_{i|j})$ ) ainsi que les 4 points de support  $X_f, X_l, \bar{X}_f$  et  $\bar{X}_l$ .

```

/* initialisation */
1  $X_f \leftarrow X_l \leftarrow$  le point intérieur associé à  $C_{i|i+1}$ ;
2  $\bar{X}_f \leftarrow \bar{X}_l \leftarrow$  le point extérieur associé à  $C_{i|i+1}$ ;
3 Initialiser  $\mathcal{L}_g$  et  $\mathcal{L}_d$  avec les points intérieur et extérieur associé à  $C_{i|i+1}$ ;
4  $estUnSegment \leftarrow vrai$ ;  $k \leftarrow i + 1$  /* corps de l'algorithme */
5 tant que  $C_k \neq C_j$  et  $estUnSegment$  faire
    /* Point intérieur */
6  $I \leftarrow$  le point intérieur associé à  $C_{k|k+1}$ ;
    /* Vérification de la convexité */
7  $estUnSegment \leftarrow$   $VerificationSeparabilite(I, \mathcal{L}_g, \mathcal{L}_d, X_f, X_l, \bar{X}_f, \bar{X}_l, gauche)$ ;
8 si  $estUnSegment$  alors
    /* Point extérieur */
9  $E \leftarrow$  le point extérieur associé à  $C_{k|k+1}$ ;
    /* Vérification de la concavité */
10  $estUnSegment \leftarrow$ 
     $VerificationSeparabilite(E, \mathcal{L}_d, \mathcal{L}_g, \bar{X}_f, \bar{X}_l, X_f, X_l, droite)$ ;
11  $k \leftarrow k + 1$ ;
12 retourner  $estUnSegment, \mathcal{L}_g, \mathcal{L}_d, X_f, X_l, \bar{X}_f, \bar{X}_l$ 

```

---

respectivement, tandis que les premiers et derniers points de support de  $\mathcal{E}_d(\bar{X}_{i|j})$  sont notés  $\bar{X}_f$  et  $\bar{X}_l$  respectivement.

La fig. 4.5 schématise le principe de l’algorithme. Pour une plus grande lisibilité, les points sont quelconques et n’appartiennent pas à  $\mathbb{Z}^2$ . Ceux qui représentent les points intérieurs sont en noir, tandis que ceux qui représentent les points extérieurs sont en blanc. Les points de support sont encerclés. Les droites de support séparantes critiques sont en pointillé. Elles passent par les premiers et derniers points de support. La superposition des enveloppes et des droites partagent le plan euclidien en différentes zones. Quand un nouveau point est considéré, le traitement effectué par l’algorithme 8 dépend du type du point (s’il est intérieur ou extérieur) et de sa position (s’il se trouve dans les zones 1, 2 ou 3 représentées dans la fig. 4.5).

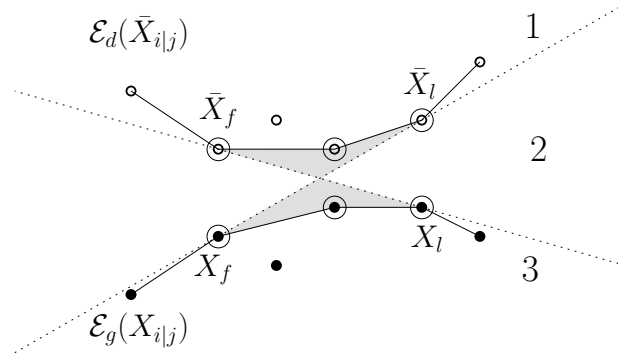


FIG. 4.5 – Principe de l’algorithme 9. Quand un nouveau point est considéré, le traitement effectué par l’algorithme 8 dépend du type du point (s’il est intérieur ou extérieur) et de sa position (s’il se trouve dans les zones 1, 2 ou 3).

Pour rendre l’algorithme 8 générique et adapté à l’ajout de points intérieurs comme à l’ajout de points extérieurs, nous avons utilisé la lettre “ $x$ ” qu’il faut remplacer par “gauche” pour l’ajout d’un point intérieur et par “droite” pour l’ajout d’un point extérieur.

Si le point intérieur (respectivement extérieur) se trouve dans la zone 1 (respectivement 3), l’algorithme s’arrête en retournant faux (ligne 3). Sinon, un processus de dépilement, lignes 5 à 7, met à jour la liste contenant les sommets de  $\mathcal{E}_g(X_{i|k})$  (respectivement de  $\mathcal{E}_d(\bar{X}_{i|k})$ ). Si le point se trouve dans la zone 2, le dernier point de support  $X_l$  (respectivement  $\bar{X}_l$ ) est superposé au dernier point de  $\mathcal{E}_g(X_{i|k})$  (respectivement de  $\mathcal{E}_d(\bar{X}_{i|k})$ ), ligne 9. Lignes 10 et 11, le premier point de support  $\bar{X}_f$  (respectivement  $X_f$ ) est déplacé le long de  $\mathcal{E}_d(\bar{X}_{i|k})$  (respectivement  $\mathcal{E}_g(X_{i|k})$ ). Ces traitements sont similaires à ceux mis en œuvre pour la détection de parties convexes (section 3.2.2).

Pour stocker les sommets de  $\mathcal{E}_g(X_{i|k})$  et  $\mathcal{E}_d(\bar{X}_{i|k})$ , deux listes doublement chaînées sont utilisées, car il est nécessaire d’accéder, d’ajouter, de supprimer des éléments aux extrémités et d’accéder aux voisins d’un élément en temps constant. Les points de support sont implémentés comme des pointeurs vers un élément de ces listes.

**Théorème 4.1.** *L’algorithme 9 détecte correctement les segments de droite. De plus, il est linéaire en la taille de la partie du contour donnée en entrée.*

*Démonstration.* L'algorithme 9 est la juxtaposition de deux algorithmes similaires à l'algorithme 6 et par conséquent le théorème 3.1 prouve directement le théorème 4.1.  $\square$

### 4.2.2 Comparaison avec l'algorithme de O'Rourke [1981]

Par dualité, l'algorithme 9 est en fait parfaitement équivalent à celui de O'Rourke [1981]. Le principe de la dualité est expliqué au paragraphe 2.2.1 et peut être résumé par le fait qu'un point dans le primal correspond à une droite dans le dual et inversement.

Les droites portées par une arête de l'enveloppe convexe partielle  $\mathcal{E}_g(X_{i|j})$  (respectivement  $\mathcal{E}_d(\bar{X}_{i|j})$ ) correspondent dans le dual aux sommets d'une ligne polygonale, notée  $\mathcal{E}_g(X_{i|j})'$  (respectivement  $\mathcal{E}_d(\bar{X}_{i|j})'$ ). La fig. 4.6 illustre cette correspondance.

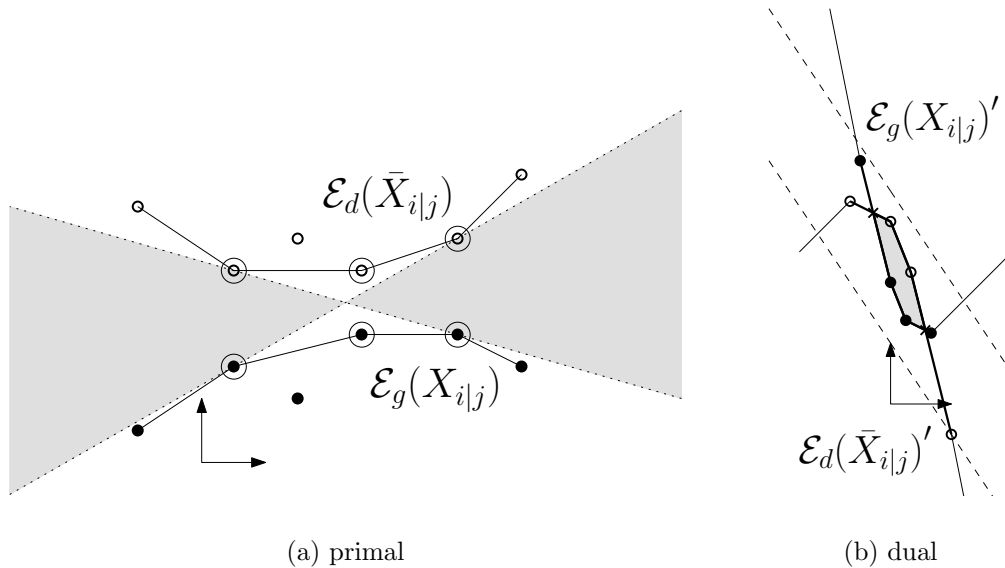


FIG. 4.6 – Équivalence entre l'algorithme 9 qui fonctionne dans le primal et l'algorithme de O'Rourke [1981] qui fonctionne dans le dual.

Les positions relatives sont aussi conservées. Un point de  $X_{i|j}$  (respectivement  $\bar{X}_{i|j}$ ) qui n'est pas sommet de  $\mathcal{E}_g(X_{i|j})$  (respectivement  $\mathcal{E}_d(\bar{X}_{i|j})$ ) appartient aux demi-plans à droite (respectivement à gauche) définis par les paires de sommets consécutifs de  $\mathcal{E}_g(X_{i|j})$  (respectivement  $\mathcal{E}_d(\bar{X}_{i|j})$ ). Ce point correspond dans le dual à une droite (représentée par des tirets dans la fig. 4.6.b) pour laquelle tous les sommets de  $\mathcal{E}_g(X_{i|j})'$  (respectivement  $\mathcal{E}_d(\bar{X}_{i|j})'$ ) se trouvent du même côté.

Si les deux lignes polygonales  $\mathcal{E}_g(X_{i|j})'$  et  $\mathcal{E}_d(\bar{X}_{i|j})'$  s'intersectent, alors elles délimitent un domaine convexe non vide (en gris sur la fig. 4.6.b). Ce domaine représente la préimage (en gris sur la fig. 4.6.a), c'est-à-dire l'ensemble des droites qui séparent  $X_{i|j}$  de  $\bar{X}_{i|j}$ . Les deux points d'intersection (représentés par des croix dans la fig. 4.6.b) correspondent dans le primal aux deux droites de support séparantes critiques (représentées en pointillé dans



la fig. 4.6.a). Les arêtes délimitant le domaine (en gras sur la fig. 4.6.b) correspondent dans le primal aux points de support (encadrés sur la fig. 4.6.a). Ainsi, l'algorithme 9 donne l'ensemble du domaine *via* les points de support.

L'algorithme de O'Rourke [1981] se déroule dans le dual. A chaque fois qu'une nouvelle contrainte est prise en compte, deux cas se présentent, illustrés en (a) et (b) de la fig. 4.7.

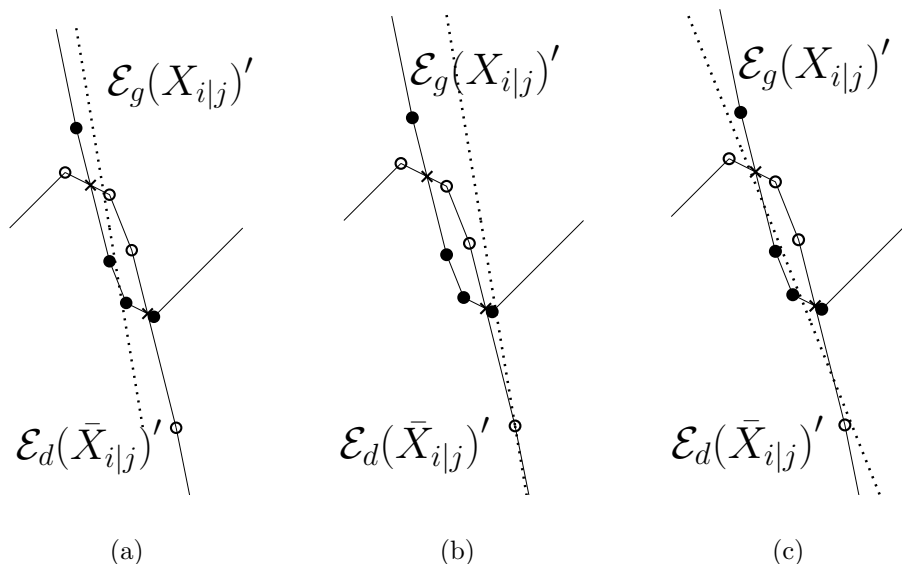


FIG. 4.7 – Insertion d'une nouvelle contrainte dans l'algorithme de [O'Rourke, 1981]. Les cas (a) et (b) sont traités par l'algorithme tandis que le cas (c) est considéré comme impossible. C'est ce qui explique la complexité linéaire de l'algorithme.

Le premier cas possible est que la contrainte (en pointillé sur la fig. 4.7.a) coupe en un seul point chacune des deux lignes polygonales délimitant le domaine. La mise à jour du domaine s'effectue alors en deux temps. L'une des deux lignes polygonales est d'abord mise à jour par un processus de dépilage (comme la mise à jour d'une des deux enveloppes convexes partielles, lignes 5 à 7 de l'algorithme 8). Ensuite, les arêtes de la seconde ligne polygonale sont parcourues jusqu'à ce que le nouveau point d'intersection soit trouvé (comme le balayage de la seconde enveloppe convexe partielle, lignes 10 et 11 de l'algorithme 8).

Le second cas possible est que la contrainte (en pointillé sur la fig. 4.7) ne coupe pas le domaine du tout. Le cas où une seule ligne polygonale est coupée en deux endroits n'est pas pris en considération. En effet, O'Rourke montre que ce cas est impossible si les contraintes sont de pentes décroissantes. Or, ce cas correspond dans le primal à l'ajout d'un point dans une des deux zones grisées de la fig. 4.5. L'hypothèse des pentes décroissantes de O'Rourke est donc trop restrictive. Son algorithme, ainsi que l'algorithme 9, fonctionnent correctement tant que l'ordre et la disposition des points interdisent le cas où une seule ligne polygonale est coupée en deux endroits.

En définitive, l'algorithme 9 est en ligne, linéaire et n'implique aucune transformation, qu'elle soit implicite ou explicite. Il décrit l'ensemble du domaine *via* les points de support et est très général. Il peut être appliqué à la séparation linéaire de points appartenant à un maillage irrégulier, comme le montre la fig. 4.8. L'ordre des triangles indique l'ordre de parcours des points.

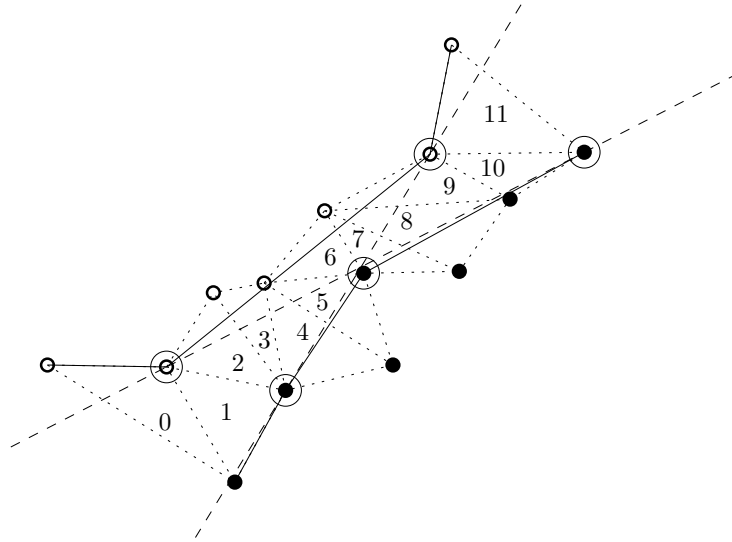


FIG. 4.8 – L'algorithme 9 appliqué à un maillage triangulaire.

### 4.2.3 Approche par épaisseur

Dans cette section, un deuxième algorithme de reconnaissance est proposé. Son principe repose sur la propriété 4.3. Il a donc l'avantage de traiter directement les points de la partie  $C_{i|j}$  et non ses points intérieurs et extérieurs comme l'algorithme précédent. Un algorithme de ce type a déjà été proposé par Debled-Rennesson *et al.* [2006] pour la reconnaissance de *segments flous* et par Buzer [2005] pour la reconnaissance de *segments  $\alpha$ -épais*. Mais leur algorithme traite des courbes 0-connexes et contrairement au notre, ne fonctionne que sous l'hypothèse restrictive de points aux abscisses ou ordonnées croissantes.

De nouvelles notions sont nécessaires pour décrire le fonctionnement de cet algorithme. Une paire de droites parallèles est appelée *bande*. L'*épaisseur* d'une bande est la distance qui sépare ses deux droites parallèles mesurée le long d'une droite de pente donnée. L'*épaisseur* d'un ensemble de points est celle de la bande qui le contient et qui est d'épaisseur minimale (fig. 4.9.a). La *fonction d'épaisseur* d'un polygone convexe renvoie la longueur de l'intersection entre une droite de pente donnée et le polygone convexe. L'épaisseur d'un ensemble de points est aussi le maximum de la fonction d'épaisseur de son enveloppe convexe (fig. 4.9.b).

D'après la propriété 4.3,  $C_{i|j}$  est un segment de droite si l'épaisseur de son enveloppe convexe selon la première diagonale, notée  $\sigma_{d_1}(\mathcal{E}(C_{i|j}))$  ou l'épaisseur de son enveloppe

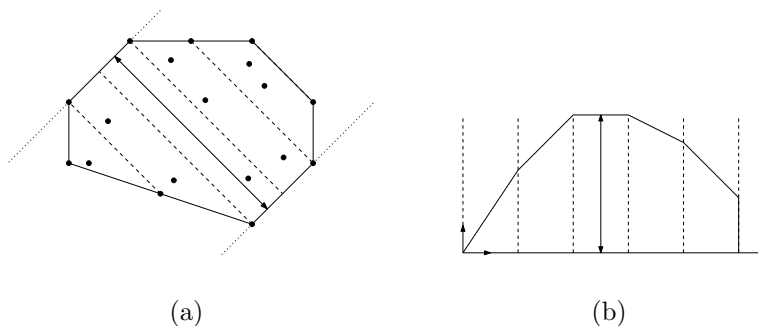


FIG. 4.9 – Épaisseur d'un ensemble de points mesurée le long de la seconde diagonale. (a) C'est l'épaisseur de la bande d'épaisseur minimale le contenant. (b) C'est aussi le maximum de la fonction d'épaisseur de son enveloppe convexe.

convexe selon la seconde diagonale, notée  $\sigma_{d_2}(\mathcal{E}(C_{i|j}))$ , est strictement inférieure à  $\sqrt{2}$ . Au contraire, si  $\sigma_{d_1}(\mathcal{E}(C_{i|j})) \geq \sqrt{2}$  et  $\sigma_{d_2}(\mathcal{E}(C_{i|j})) \geq \sqrt{2}$ ,  $C_{i|j}$  n'est pas un segment de droite.

L'épaisseur d'un ensemble de points est égale à l'épaisseur de son enveloppe convexe. Or l'épaisseur d'une enveloppe convexe est égale à l'épaisseur de trois points, généralement une arête et un sommet. Cependant, deux cas particuliers peuvent survenir : celui où l'épaisseur est donnée par deux sommets et celui où l'épaisseur est donnée par deux arêtes parallèles. Au total, quatre points sont retenus dans notre algorithme. Ils sont appelés *points d'appui* et sont notés  $L_f$ ,  $L_l$ ,  $R_f$  et  $R_l$  (fig. 4.10). Si les points d'appui  $L_f$  et  $L_l$  sont confondus,  $R_f$  et  $R_l$  ne le sont pas et inversement. La paire de points non confondus définit un demi-plan. Il est orienté à droite s'il s'agit de  $L_f$  et  $L_l$  et à gauche s'il s'agit de  $R_f$  et  $R_l$ . La paire de points confondus définit un second demi-plan, de même pente, mais orienté dans le sens opposé. L'intersection de ces demi-plans (en sombre dans la fig. 4.10) est l'intérieur de la bande d'épaisseur minimale qui contient l'ensemble des points traités. Les indices  $_f$  (pour *first*) et  $_l$  (pour *last*) indique un ordre fondé sur le prédicat suivant : un point  $a$  est *avant* (respectivement *après*) un point  $b$  si la quantité  $(b_x - a_x) + (b_y - a_y)$  est supérieure (respectivement inférieure) à 0. Un point  $c$  se trouve entre les points  $a$  et  $b$  s'il est après  $a$  et avant  $b$  (fig. 4.10).

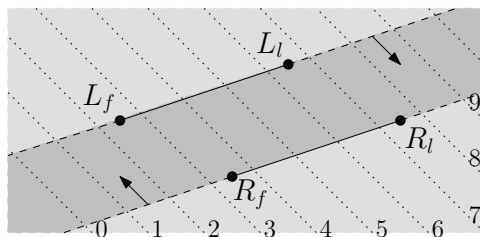


FIG. 4.10 – Configuration des points d'appui  $L_f$ ,  $L_l$ ,  $R_f$  et  $R_l$  déterminant la bande d'épaisseur minimale.

L'épaisseur est calculée à partir des coordonnées de trois des quatre points d'appui. Soient trois points  $a$ ,  $b$  et  $c$ , non alignés le long de la première diagonale, leur épaisseur selon la première diagonale est calculée à partir de l'expression suivante :

$$\sigma_{d_1}(a, b, c) = \frac{|(b_x - a_x)(b_y - c_y) - (b_y - a_y)(b_x - c_x)|}{|(b_x - a_x) - (b_y - a_y)|} \cdot \sqrt{2} \quad (4.1)$$

Pareillement, si  $a$ ,  $b$  et  $c$  ne sont pas alignés le long de la seconde diagonale, leur épaisseur selon la seconde diagonale est :

$$\sigma_{d_2}(a, b, c) = \frac{|(b_x - a_x)(b_y - c_y) - (b_y - a_y)(b_x - c_x)|}{|(b_x - a_x) + (b_y - a_y)|} \cdot \sqrt{2} \quad (4.2)$$

Ainsi, en choisissant  $\sqrt{2}$  comme unité, l'épaisseur est exprimée par un rationnel dont le numérateur est le double de l'aire du triangle formé par les points  $a$ ,  $b$  et  $c$ .

Le cœur de l'algorithme est constitué de la mise à jour de l'enveloppe convexe par l'algorithme de Melkman [1987] (section 2.3.1) et de la mise à jour de son épaisseur. Or, la mise à jour de l'épaisseur est effectuée par la mise à jour des points d'appui à partir desquels elle est calculée. Le théorème 4.2 borne la recherche des nouveaux points d'appui, quand un point  $C_{k+1}$  est ajouté à une partie  $C_{i|k}$  dont les points d'appui et l'épaisseur sont déjà connus. Seul le cas où l'épaisseur est mesurée le long de la seconde diagonale est étudié. De plus,  $C_{k+1}$  est supposé sans perte de généralité appartenir au demi-plan à gauche défini par  $R_f$  et  $R_l$ .

**Théorème 4.2.** *Si  $C_{k+1}$  appartient au demi-plan à droite défini par  $L_f$  et  $L_l$ , alors  $\sigma_{d_2}(\mathcal{E}(C_{i|k+1})) = \sigma_{d_2}(\mathcal{E}(C_{i|k}))$ . Sinon, le maximum de la fonction d'épaisseur de  $\mathcal{E}(C_{i|k+1})$  est atteinte : (1) soit entre  $C_{k+1}$  et  $R_f$ , si  $C_{k+1}$  se trouve avant  $R_f$ ; (2) soit entre  $R_l$  et  $C_{k+1}$ , si  $C_{k+1}$  se trouve après  $R_l$ ; (3) soit en  $C_{k+1}$ , si  $C_{k+1}$  se trouve entre  $R_f$  et  $R_l$ .*

*Démonstration.* Si  $C_{k+1}$  appartient au demi-plan à droite défini par  $L_f$  et  $L_l$ , comme il appartient aussi par hypothèse au demi-plan à gauche défini par  $R_f$  et  $R_l$ , il appartient à la bande d'épaisseur minimale contenant  $\mathcal{E}(C_{i|k})$ . Dans ce cas,  $\sigma_{d_2}(\mathcal{E}(C_{i|k+1})) = \sigma_{d_2}(\mathcal{E}(C_{i|k}))$ . Dans le cas contraire  $\sigma_{d_2}(\mathcal{E}(C_{i|k+1})) > \sigma_{d_2}(\mathcal{E}(C_{i|k}))$ . Le maximum de la fonction d'épaisseur de  $\mathcal{E}(C_{i|k+1})$  donne  $\sigma_{d_2}(\mathcal{E}(C_{i|k+1}))$ .

Notons  $\theta$  la pente des droites parallèles délimitant la bande d'épaisseur minimale contenant  $\mathcal{E}(C_{i|k})$ .  $C_{k+1}$  relie deux arêtes de  $\mathcal{E}(C_{i|k+1})$ . Compte-tenu de la convexité, celle à l'avant a une pente inférieure à  $\theta$ , tandis que celle à l'arrière a une pente supérieure à  $\theta$  (fig. 4.11). Les points d'appui  $R_f$  et  $R_l$  relient chacun deux arêtes de  $\mathcal{E}(C_{i|k+1})$ . Compte-tenu de la convexité, celle à l'avant a une pente supérieure à  $\theta$ , tandis que celle à l'arrière a une pente inférieure à  $\theta$  (fig. 4.11). L'arête qui relie  $R_f$  et  $R_l$ , quand elle existe, est de pente  $\theta$ . Étant donnée cette configuration de pentes, si  $C_{k+1}$  se trouve entre  $R_f$  et  $R_l$ , la fonction d'épaisseur de  $\mathcal{E}(C_{i|k+1})$  est convexe et atteint son maximum en  $C_{k+1}$ . Si  $C_{k+1}$  se trouve avant  $R_f$  (respectivement après  $R_l$ ), la fonction d'épaisseur de  $\mathcal{E}(C_{i|k+1})$  est convexe entre  $C_{k+1}$  et  $R_f$  (respectivement entre  $R_l$  et  $C_{k+1}$ ).  $\square$

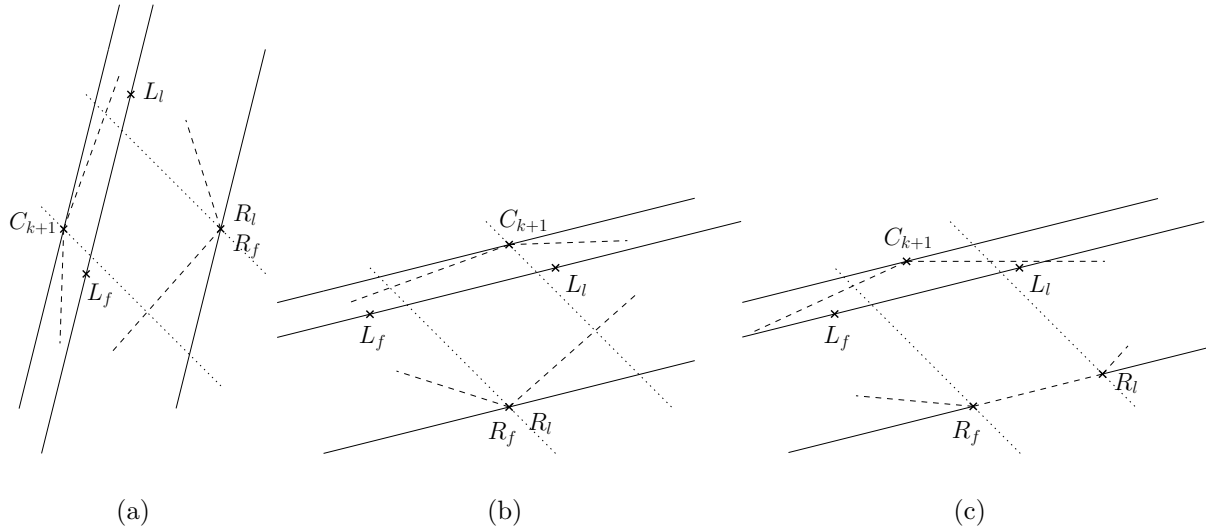


FIG. 4.11 – La fonction d'épaisseur de  $\mathcal{E}(C_{i|k+1})$  atteint son maximum entre les deux droites de pente  $-1$ , représentées en pointillé : entre  $C_{k+1}$  et  $R_f$  si  $C_{k+1}$  se trouve avant  $R_f$  (a), entre  $R_l$  et  $C_{k+1}$  si  $C_{k+1}$  se trouve après  $R_l$  (b), en  $C_{k+1}$  si  $C_{k+1}$  se trouve entre  $R_f$  et  $R_l$  (c).

Une fois la zone de recherche bornée, il suffit d'un simple balayage pour trouver le maximum de la fonction d'épaisseur de  $\mathcal{E}(C_{i|k+1})$ . Ce balayage est réalisé par l'algorithme 10. Cette procédure prend en entrée des pointeurs vers les quatre points d'appui ainsi que vers le point qui cause la mise à jour de l'enveloppe convexe et de son épaisseur, c'est-à-dire  $C_{k+1}$ . Pour simplifier,  $C_{k+1}$  est supposé ici appartenir au demi-plan à gauche défini par  $R_f$  et  $R_l$ , ainsi que se trouver après  $R_l$ . Les traitements concernant les autres cas sont similaires. Il suffit de permuter les indices  $f$  et  $l$ , de remplacer "précédant" par "suivant" et *vice versa*, si  $C_{k+1}$  se trouve avant  $R_f$ . De même, il suffit d'échanger le rôle des points d'appui à gauche  $L_f$  et  $L_l$  avec celui des points d'appui à droite  $R_f$  et  $R_l$  si  $C_{k+1}$  appartient au demi-plan à droite défini par  $L_f$  et  $L_l$ .

Nous allons illustrer le déroulement de l'algorithme 10 par un petit exemple (fig. 4.12).

La fig. 4.12.a représente une partie  $C_{0|7}$  dont l'épaisseur a été déjà calculée. Comme  $\sigma_{d_2}(\mathcal{E}(C_{0|7})) < \sqrt{2}$ ,  $C_{0|7}$  est un segment de droite. Est-ce que  $C_{0|8}$  est aussi un segment de droite? Comme  $C_8$  n'appartient pas à la bande d'épaisseur minimale englobant  $C_{0|7}$ , nous déplaçons les points d'appui donnant  $\sigma_{d_2}(\mathcal{E}(C_{0|7}))$  afin d'obtenir  $\sigma_{d_2}(\mathcal{E}(C_{0|8}))$ . Toutes les conditions sont réunies pour que l'algorithme 10 s'applique.

Comme le montre la fig. 4.12.b, l'enveloppe convexe  $\mathcal{E}(C_{0|8})$  est d'abord mise à jour. Ensuite, les points d'appui sont initialisés de sorte que (1)  $C_8$  devienne le dernier point d'appui à gauche  $L_l$ , (2)  $R_f$  soit entre  $L_f$  et  $L_l$ , (3)  $R_f$  et  $R_l$  ne soient plus confondus (lignes 1 à 3 de l'algorithme 10).

Comme  $R_l$  est plus loin que  $R_f$  de la droite passant par  $L_f$  et  $L_l$ , dans la fig. 4.12.c,  $R_f$  et  $R_l$  sont déplacés vers l'arête suivante de  $\mathcal{E}(C_{0|8})$  (boucle des lignes 4 à 6 de l'algorithme 10).

**Algorithme 10** : Mise à jour des points d'appui pour le calcul de l'épaisseur

**Entrées** : Le nouveau point à traiter  $C_{k+1}$ , les points d'appui  $L_f$ ,  $L_l$ ,  $R_f$  et  $R_l$ ,  $prec\_L_l$ , le sommet de l'enveloppe convexe précédant  $L_l$ , et  $suiv\_R_f$ , le sommet de l'enveloppe convexe suivant  $R_f$ .

**Sorties** : Les points d'appui  $L_f$ ,  $L_l$ ,  $R_f$  et  $R_l$  mis à jour.

- 1  $L_l \leftarrow C_{k+1}$ ;
- 2  $L_f \leftarrow prec\_L_l$ ;
- 3  $R_l \leftarrow suiv\_R_f$ ;
- 4 **tant que**  $L_l$  n'est pas entre  $R_f$  et  $R_l$ , et que l'épaisseur augmente **faire**
  - 5     /\* déplacement sur l'enveloppe convexe de  $R_f$  et  $R_l$  en direction de  $L_l$  \*/
  - 6      $R_f \leftarrow R_l$ ;
  - 6      $R_l \leftarrow$  le sommet de l'enveloppe convexe suivant  $R_f$ ;
- 7 **si** le maximum de la fonction d'épaisseur est atteint en  $L_l$  **alors**
  - 8      $L_f \leftarrow L_l$  ;
- 9 **sinon**
  - 10     $R_l \leftarrow R_f$  ;

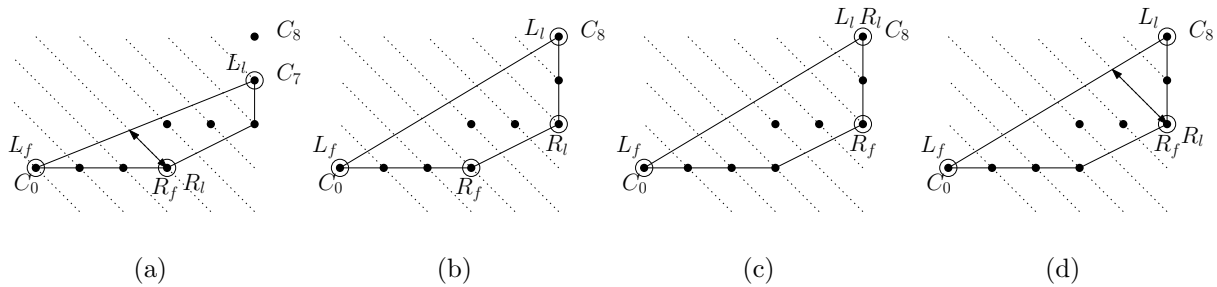


FIG. 4.12 – Déplacement des points d'appui dans le calcul de l'épaisseur. Le point  $C_8$  est ajouté à la partie  $C_{0|7}$  en (a). Les points  $R_f$  et  $R_l$  se déplacent vers le point  $C_8$  en (b) et (c). Ils sont, après deux itérations de l'algorithme 10, confondus avec le point  $C_6$ .

$R_l$  se trouve confondu avec le point  $L_l$ . Cette fois-ci  $R_f$  est plus loin que  $R_l$  de la droite passant par  $L_f$  et  $L_l$ , ce qui arête la boucle. Ensuite,  $R_l$  rejoint  $R_f$  dans la fig. 4.12.d (lignes 7 à 10 de l'algorithme 10). Comme  $\sigma_{d_2}(\mathcal{E}(C_{0|8})) < \sqrt{2}$ ,  $C_{0|8}$  n'est pas un segment de droite.

En définitive, l'appel à l'algorithme 10 au moment opportun entraîne la mise à jour des points d'appui à partir desquels la dimension  $\sigma_{d_2}(\mathcal{E}(C_{i|k+1}))$  est mesurée. Un traitement similaire, impliquant quatre autres points d'appui, permet de calculer  $\sigma_{d_1}(\mathcal{E}(C_{i|k+1}))$ . Ainsi, tant que  $\min(\sigma_{d_2}(\mathcal{E}(C_{i|k+1})), \sigma_{d_1}(\mathcal{E}(C_{i|k+1}))) < \sqrt{2}$  (avec  $i \leq k < j$ ),  $C_{i|k+1}$  est un segment de droite.

L'algorithme de Melkman est utilisé pour le calcul à la volée de l'enveloppe convexe en temps linéaire. En contrepartie, les points doivent former une ligne polygonale simple. En l'absence de toute autre restriction, en particulier quand les points peuvent être plus ou moins éloignés les uns des autres, la mise à jour des points d'appui peut nécessiter un balayage de l'ordre de  $\mathcal{O}(n)$  points à chaque nouvelle mise à jour, d'où une complexité globale quadratique. En revanche, pour des points 1-connectés comme ceux d'une partie de contour, le nombre total de points parcourus lors des mises à jour successives est borné par le nombre total de points traités, d'où une complexité globale linéaire.

## 4.3 Algorithmes arithmétiques de reconnaissance

L'approche précédente mène à un algorithme très simple, quand la spécificité de la disposition des points d'une partie  $C_{i|j}$  est prise en compte. Les trois ou quatre points d'appui contiennent implicitement la description complète du domaine [Dorst et Smeulders, 1984]. De plus, lors de la mise à jour, les points d'appui ne se déplacent au plus que d'un sommet, ce qui rend inutile la boucle de l'algorithme 10.

Le formalisme de la définition analytique des droites discrètes [Reveillès, 1991; Debled-Rennesson et Reveillès, 1995] est choisi pour décrire un algorithme équivalent à ceux de Kovalevsky [1990] et Debled-Rennesson et Reveillès [1995], connus pour être les plus simples.

### 4.3.1 Croissance d'un segment

La définition 4.2 est le cas particulier de la définition 4.1 où  $\omega = |a| + |b|$  :

**Définition 4.2.** (*Droite discrète standard*) *L'ensemble des points  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  vérifiant  $\mu \leq ax - by < \mu + |a| + |b|$  appartient à la droite discrète standard  $\mathcal{D}$  de pente  $\frac{a}{b}$  et borne inférieure  $\mu$  (avec  $a, b, \mu$  entiers tels que  $\text{pgcd}(a, b) = 1$ ).*

La quantité  $r = ax - by$ , appelée *reste*, qui peut être interprétée comme une aire ou une distance, détermine la position du point  $(x, y)$  par rapport à la droite  $\mathcal{D}$ . Le tableau 4.1 regroupe les points de  $\mathbb{Z}^2$  en sept groupes selon leur position par rapport à la droite  $\mathcal{D}$ .

La fusion des deux dernières lignes du tableau 4.1 correspond aux deux inégalités de la définition 4.2.

La différence entre deux points faiblement intérieurs, tous deux à gauche (ou à droite) de  $\mathcal{D}$  est égale à un multiple du vecteur  $\vec{u} = (b, a)$  (fig. 4.13.b). Les points faiblement

position	à gauche	à droite
fortement extérieur	$ax - by < \mu - 1$	$ax - by > \mu +  a  +  b $
faiblement extérieur	$ax - by = \mu - 1$	$ax - by = \mu +  a  +  b $
faiblement intérieur	$ax - by = \mu$	$ax - by = \mu +  a  +  b  - 1$
fortement intérieur	$\mu < ax - by < \mu +  a  +  b  - 1$	

TAB. 4.1 – Les points de  $\mathbb{Z}^2$  sont divisés en sept groupes selon leur position par rapport à la droite  $\mathcal{D}$  de paramètres  $a$ ,  $b$  et  $\mu$ .

extérieurs sont étroitement liés aux points faiblement intérieurs et inversement. En effet, les points faiblement extérieurs qui sont à gauche (respectivement à droite) de  $\mathcal{D}$  sont obtenus par combinaison du vecteur  $\vec{u}$  et du vecteur  $\vec{v}$  (respectivement  $\vec{w}$ ) tel que  $\det(\vec{u}, \vec{v}) = -1$  (respectivement  $\det(\vec{u}, \vec{w}) = 1$ ) (fig. 4.13.b). Les vecteurs  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  ne sont rien d'autre que les vecteurs de Bézout du vecteur  $\vec{u}$  (section 2.4.1). En outre, les points faiblement intérieurs à droite (respectivement à gauche) de  $\mathcal{D}$  correspondent aux points faiblement extérieurs du côté opposé quand ils sont translatés par le vecteur  $\vec{s}$  (respectivement  $-\vec{s}$ ) qui dépend uniquement du quadrant dans lequel se trouve la droite  $\mathcal{D}$  (fig. 4.13.b).

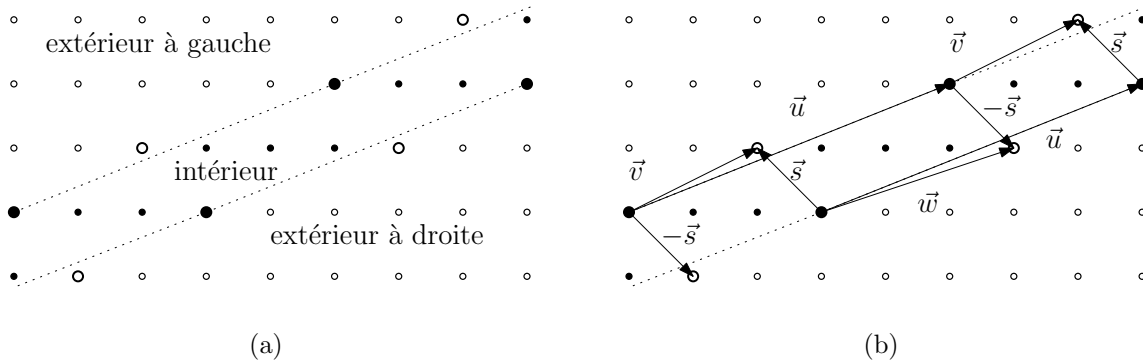


FIG. 4.13 – L'ensemble des points noirs se trouvant entre les deux droites parallèles appartient à la droite discrète standard  $\mathcal{D}$  de pente  $\frac{2}{5}$ . Les points les plus gros représentent les points faiblement intérieurs (en noir) et extérieurs (en blanc) de  $\mathcal{D}$ . En (b), les vecteurs  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  and  $\vec{s}$  montrent que les points faiblement extérieurs sont étroitement liés aux points faiblement intérieurs et inversement.

Le tableau 4.2 donne les valeurs du vecteur  $\vec{s}$  en fonction de  $a$  et  $b$ .

$\vec{s}$	$b$ positif	$b$ négatif
$a$ positif	$(-1, 1)$	$(-1, -1)$
$a$ négatif	$(1, 1)$	$(1, -1)$

TAB. 4.2 – Valeur du vecteur  $\vec{s}$  en fonction de  $a$  et  $b$ .

La propriété suivante est équivalente à la propriété 4.3 :



**Propriété 4.5.** *Un segment de droite  $C_{i|j}$  est contenu dans une droite discrète standard.*

Il y a une infinité de droites discrètes standards qui contiennent un segment de droite  $C_{i|j}$ . Cependant, il y en a toujours une qui est *strictement englobante* pour  $C_{i|j}$ .

**Définition 4.3.** *Une droite discrète standard  $\mathcal{D}$  est strictement englobante pour un segment de droite  $C_{i|j}$  et notée  $\mathcal{D}(C_{i|j})$  si au moins trois de ses points faiblement intérieurs appartiennent à  $C_{i|j}$ . Au moins l'un d'eux est un point faiblement intérieur à gauche et au moins l'un d'eux est un point faiblement intérieur à droite.*

$\mathcal{D}(C_{i|j})$  a une infinité de points faiblement intérieurs à gauche et à droite, mais un nombre fini appartiennent à  $C_{i|j}$ . Les premier et dernier d'entre eux sont les points d'appui de l'enveloppe convexe  $\mathcal{E}(C_{i|j})$  et permettent le calcul de son épaisseur.

L'algorithme 11 vérifie qu'une partie  $C_{i|j}$  peut être contenue dans une droite discrète standard. Si c'est le cas, il calcule à partir des points d'appui, les paramètres  $a$ ,  $b$ ,  $\mu$  d'une droite strictement englobante. Il est équivalent à l'algorithme de Debled-Rennesson et Reveillès [1995], à qui il emprunte le formalisme, ainsi qu'à l'algorithme de Kovalevsky [1990].

La correction de cet algorithme n'est pas prouvée dans Kovalevsky [1990]. Elle l'est en revanche dans Debled-Rennesson et Reveillès [1995] au moyen de réseaux de points.

Voici comment l'interpréter au moyen de la propriété d'épaisseur (propriétés 4.3 et 4.5). Supposons d'abord que le segment  $C_{i|k-1}$  est contenu par une droite standard strictement englobante  $\mathcal{D}(C_{i|k-1})$  de paramètres  $a$ ,  $b$  et  $\mu$ , avec  $a$  et  $b$  positifs (fig. 4.14.a).

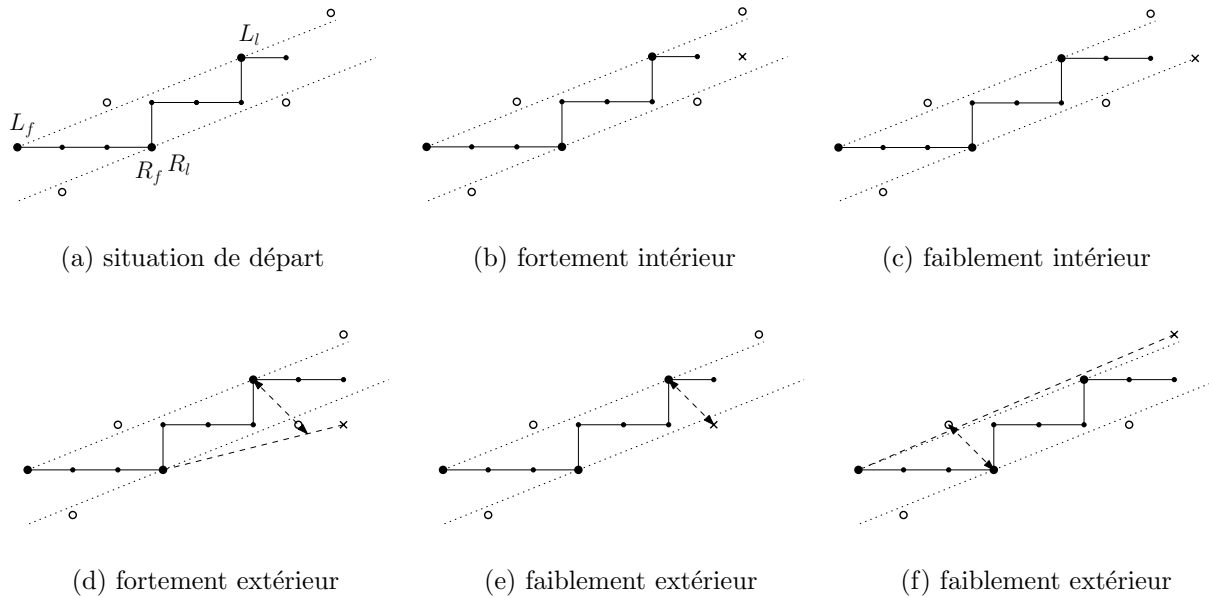


FIG. 4.14 – Ajout du point identifié par une croix à un segment contenu par la droite standard strictement englobante  $\mathcal{D}$  de pente  $\frac{2}{5}$ .

**Algorithme 11** : Approche arithmétique pour la croissance d'un segment [Debled-Rennesson et Reveillès, 1995]

**Entrées** : Un segment de droite  $C_{i|k-1}$ , les points d'appui  $L_f, L_l, R_f$  et  $R_l$  et les paramètres  $a, b$  et  $\mu$  de sa droite strictement englobante.

**Sorties** : Le booléen *estUnSegment*, les points d'appui  $L_f, L_l, R_f$  et  $R_l$  et les paramètres  $a, b$  et  $\mu$  mis à jour.

```

1  estUnSegment ← vrai;
2   $r \leftarrow aC_{kx} - bC_{ky}$ ;
3   $c \leftarrow \mu$ ;  $\omega \leftarrow |a| + |b|$ ;
4  si  $(c - 1) \leq r \leq (c + \omega)$  alors           /* intérieur ou faiblement extérieur */
    /* Mise à jour                                     */
5    si  $r \leq c$  alors                             /* faiblement intérieur à gauche */
6       $L_l \leftarrow C_k$ ;
7      si  $r = c - 1$  alors                           /* faiblement extérieur à gauche */
8        si  $C_k \neq R_l + \vec{s}$  alors
9           $R_f \leftarrow R_l$ ;
10          $a \leftarrow L_{ly} - L_{fy}$ ;
11          $b \leftarrow L_{lx} - L_{fx}$ ;
12          $\mu \leftarrow r$ ;
13       sinon
14          $estUnSegment = faux$  ; /*  $C_{i|k}$  n'est pas un segment de droite */
15     si  $r \geq c + \omega - 1$  alors                 /* faiblement intérieur à droite */
16        $R_l \leftarrow C_k$ ;
17       si  $r = c + \omega$  alors                     /* faiblement extérieur à droite */
18         si  $C_k \neq L_l - \vec{s}$  alors
19            $L_f \leftarrow L_l$ ;
20            $a \leftarrow R_{ly} - R_{fy}$ ;
21            $b \leftarrow R_{lx} - R_{fx}$ ;
22            $\mu \leftarrow r$ ;
23         sinon
24            $estUnSegment = faux$  ; /*  $C_{i|k}$  n'est pas un segment de droite */
25 sinon                                           /* fortement extérieur */
26    $estUnSegment = faux$  ;                          /*  $C_{i|k}$  n'est pas un segment de droite */
27 retourner estUnSegment,  $L_f, L_l, R_f, R_l, a, b, \mu$ 

```

Si  $C_k$  (repéré par une croix sur la fig. 4.14) est intérieur à  $\mathcal{D}(C_{i|k-1})$ , alors  $C_{i|k}$  est un segment de droite et  $\mathcal{D}(C_{i|k}) = \mathcal{D}(C_{i|k-1})$  (fig. 4.14.b et fig. 4.14.c). En outre,  $C_k$  devient le nouveau dernier point d'appui à gauche (respectivement à droite) s'il est faiblement intérieur à gauche (respectivement à droite) de  $\mathcal{D}(C_{i|k-1})$  (fig. 4.14.c).

Si  $C_k$  est fortement extérieur à  $\mathcal{D}(C_{i|k-1})$ , alors  $C_{i|k}$  ne peut être un segment de droite car  $\mathcal{E}(C_{i|k})$  contient un point de  $\mathbb{Z}^2$  n'appartenant pas à  $C_{i|k}$  d'après la formule de Pick (section 2.4.2). Il en résulte que l'épaisseur de  $\mathcal{E}(C_{i|k})$  excède  $\sqrt{2}$  (fig. 4.14.d).

Si  $C_k$  est faiblement extérieur à  $\mathcal{D}(C_{i|k-1})$ , deux cas illustrés par les fig. 4.14.e et fig. 4.14.f se présentent. Si  $C_k = R_l + \vec{s}$  quand  $C_k$  est à gauche ou  $C_k = L_f - \vec{s}$  quand  $C_k$  est à droite, l'épaisseur de  $\mathcal{E}(C_{i|k})$  est exactement égale à  $\sqrt{2}$  (fig. 4.14.e).  $C_{i|k}$  n'est donc pas un segment de droite.

Dans le cas contraire, il s'avère que l'épaisseur de  $\mathcal{E}(C_{i|k})$  est strictement inférieure à  $\sqrt{2}$  (fig. 4.14.f).

Supposons pour simplifier (et sans perte de généralité) que  $C_k$  est à gauche de  $\mathcal{D}(C_{i|k-1})$  comme illustré fig. 4.14.f.  $C_k$  est forcément le dernier point d'appui à gauche de l'enveloppe  $\mathcal{E}(C_{i|k})$ . De plus, le premier point d'appui à gauche est le même que celui de l'enveloppe précédente  $\mathcal{E}(C_{i|k-1})$ , c'est-à-dire  $L_f$ . En effet, comme le montre la fig. 4.15, la pente de la droite passant par  $L_f$  et  $C_k$  est toujours plus petite que celle de la droite passant par les points  $L_f - \vec{v}$  et  $L_f$ . Le théorème 4.2 dit que le point d'appui situé à droite de  $\mathcal{E}(C_{i|k})$  se trouve entre le dernier point d'appui à droite de l'enveloppe précédente  $\mathcal{E}(C_{i|k-1})$ , c'est-à-dire  $R_l$ , et  $C_k$ . Or, c'est exactement  $R_l$  car la pente de la droite passant par  $L_f$  et  $C_k$  est toujours plus petite que celle de la droite passant par les points  $R_l$  et  $R_l + \vec{v}$  (fig. 4.15).

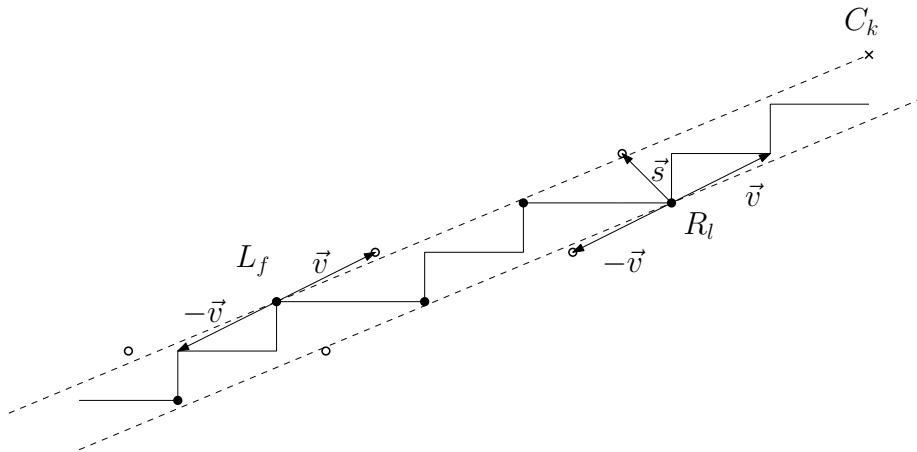


FIG. 4.15 – Ajout d'un point faiblement extérieur à gauche d'un segment contenu par la droite standard strictement englobante  $\mathcal{D}(2, 5, 0)$ .

De plus, comme la pente de la droite passant par  $L_f$  et  $C_k$  est toujours plus petite que celle de la droite passant par  $L_f$  et  $R_l + \vec{s}$ ,  $R_l + \vec{s}$  n'est pas contenu dans  $\mathcal{E}(C_{i|k})$  (fig. 4.15). L'épaisseur de  $\mathcal{E}(C_{i|k})$  est donc strictement inférieure à  $\sqrt{2}$  et  $C_{i|k}$  est un segment de droite.

Les paramètres de sa droite strictement englobante sont fournis par les points d'appui de son enveloppe  $\mathcal{E}(C_{i|k})$ .

### 4.3.2 Érosion d'un segment

Il est possible de mettre à jour les paramètres de la droite strictement englobante quand l'un des points extrémaux,  $C_i$  ou  $C_k$ , est retiré du segment  $C_{i|k}$  [Lachaud *et al.*, 2007]. Seul le cas de la suppression du premier point  $C_i$  est discuté ci-dessous, car c'est l'opération la plus fréquemment utilisée.

Si  $C_i$  est un point fortement intérieur de  $\mathcal{D}(C_{i|k})$ , il peut être retiré sans aucune mise à jour de ses points d'appui et  $\mathcal{D}(C_{i|k}) = \mathcal{D}(C_{i+1|k})$  (fig. 4.16.a). S'il est faiblement intérieur, c'est forcément un premier point d'appui. Deux cas se présentent suivant le nombre de points faiblement intérieurs appartenant au segment  $C_{i+1|k}$ . Si  $C_{i+1|k}$  possède trois points faiblement intérieurs ou plus, le point  $C_i + \vec{u}$  devient le premier point d'appui de  $C_{i+1|k}$  (fig. 4.16.b). Si  $C_{i+1|k}$  ne possède que deux points faiblement intérieurs, un à gauche, un à droite,  $\mathcal{D}(C_{i|k}) \neq \mathcal{D}(C_{i+1|k})$  (fig. 4.16.c).

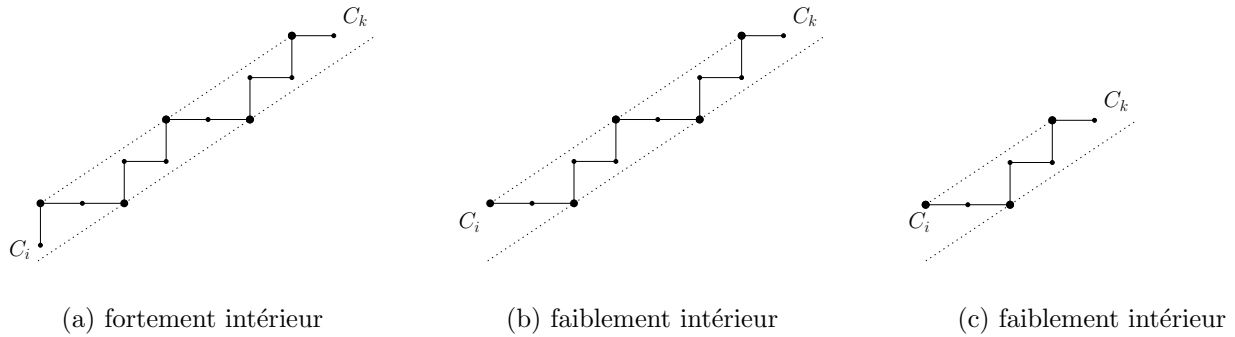


FIG. 4.16 – Il y a trois configurations différentes quand le premier point  $C_i$  est retiré du segment  $C_{i|k}$ . Dans le cas (a), aucune mise à jour n'est nécessaire. Dans le cas (b), il suffit de mettre à jour l'un des points d'appui. Dans le cas (c), la mise à jour des points d'appui est nécessaire pour calculer  $\mathcal{D}(C_{i+1|k})$ .

Une inversion du processus de mise à jour qui aurait été entraîné par l'ajout du point  $C_i$  au segment  $C_{i+1|k}$  doit être réalisée (fig. 4.17).  $C_i$  est faiblement extérieur à  $\mathcal{D}(C_{i+1|k})$ . Grâce à la relation qui existe entre points faiblement intérieurs et faiblement extérieurs,  $C_i \pm \vec{s}$  est un point faiblement intérieur de  $\mathcal{D}(C_{i+1|k})$ , mais du côté opposé à celui de  $C_i$  (fig. 4.17.b). Les nouveaux paramètres sont donc obtenus par la différence entre  $C_i \pm \vec{s}$  et le premier point faiblement intérieur se trouvant du côté de  $C_i \pm \vec{s}$ . Les points d'appui sont calculés à partir des deux points d'appui faiblement intérieurs connus qui restent inchangés et de la pente de la droite strictement englobante (fig. 4.17.c).

L'algorithme 12 décrit ce processus.

---

**Algorithme 12** : Approche arithmétique pour l'érosion à l'arrière d'un segment de droite [Lachaud *et al.*, 2007]

---

**Entrées** : Un segment de droite  $C_{i|k}$ , les points d'appui  $L_f, L_l, R_f, R_l$ , les paramètres  $a, b, \mu$  de sa droite strictement englobante

**Sorties** : Les points d'appui  $L_f, L_l, R_f, R_l$  et les paramètres  $a, b, \mu$  éventuellement mis à jour.

```

1 si  $C_i = L_f$  alors
2   si  $R_f = R_l$  alors
3      $\vec{u} \leftarrow R_f - (L_f - \vec{s})$ ;
4      $L_f \leftarrow L_l - \frac{|\vec{u}|}{L_l - C_i} \vec{u}$ ;           /* division entière */
5      $R_l \leftarrow R_f + \frac{|\vec{u}|}{C_k - R_f} \vec{u}$ ;       /* division entière */
6      $a \leftarrow \vec{u}_x; b \leftarrow \vec{u}_y$ ;
7      $\mu \leftarrow aL_{fx} - bL_{fy}$ ;
8   sinon
9      $\vec{u} \leftarrow (a, b)$ ;
10     $L_f \leftarrow L_f + \vec{u}$ ;
11 si  $C_i = R_f$  alors
12   si  $L_f = L_l$  alors
13      $\vec{u} \leftarrow L_f - (R_f + \vec{s})$ ;
14      $R_f \leftarrow R_l - \frac{|\vec{u}|}{R_l - C_i} \vec{u}$ ;           /* division entière */
15      $L_l \leftarrow L_f + \frac{|\vec{u}|}{C_k - L_f} \vec{u}$ ;       /* division entière */
16      $a \leftarrow \vec{u}_x; b \leftarrow \vec{u}_y$ ;
17      $\mu \leftarrow aR_{fx} - bR_{fy}$ ;
18   sinon
19      $\vec{u} \leftarrow (a, b)$ ;
20     $R_f \leftarrow R_f + \vec{u}$ ;
21 retourner  $L_f, L_l, R_f, R_l, a, b, \mu$ ;

```

---

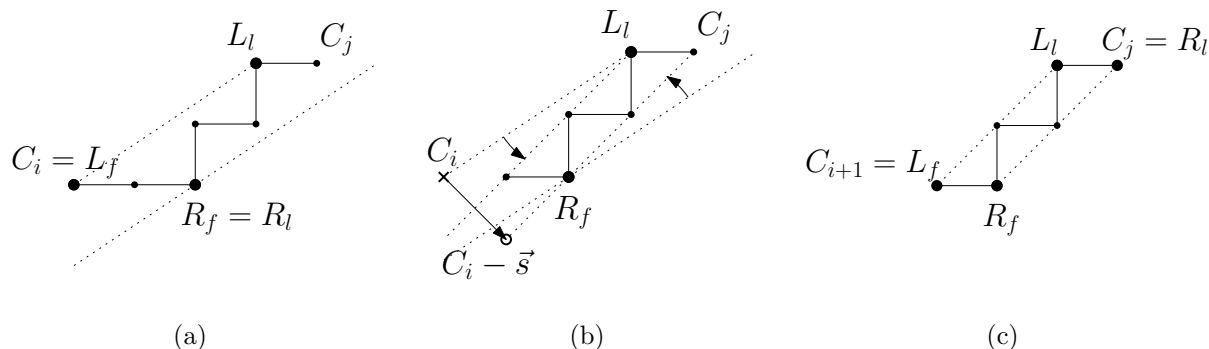


FIG. 4.17 – La droite  $\mathcal{D}(C_{i|j})$  a pour paramètres  $a = 2$ ,  $b = 3$  et  $\mu = 0$ , tandis que la droite  $\mathcal{D}(C_{i+1|j})$  a pour paramètres  $a = 1$ ,  $b = 2$  et  $\mu = 1$ .

## 4.4 Décompositions du contour et mesure de linéarité

Cette section décrit des algorithmes qui décomposent un contour en une succession de segments de droites discrètes. Contrairement aux méthodes d'ajustement utilisées traditionnellement en vision par ordinateur, les modèles recherchés ne sont pas euclidiens mais discrets. C'est pourquoi la décomposition est exacte et ne nécessite pas d'approximation par minimisation d'une erreur. Le contour peut généralement être retrouvé à partir des paramètres des segments de droite lorsque ceux-ci sont connus.

Les algorithmes comprennent tous un balayage du contour dans lequel chaque segment de droite reconnu le long du contour est étendu le plus possible vers l'avant et/ou vers l'arrière selon un principe de *maximalité*.

**Définition 4.4** (Segment maximal à l'avant ou à l'arrière). *Soit une partie de contour  $C_{i|j}$ . Un segment de droite  $C_{k|l}$  où  $i < k < l < j$  qui ne peut être étendu à l'avant (respectivement à l'arrière), c'est-à-dire tel que  $C_{k|l+1}$  (respectivement  $C_{k-1|l}$ ) n'est pas un segment de droite, est un segment maximal à l'avant (respectivement à l'arrière). De plus, un segment maximal, est un segment à la fois maximal à l'avant et à l'arrière.*

### 4.4.1 Décomposition exacte sans chevauchement

La décomposition sans chevauchement ou partition est la plus simple possible. Le premier segment est le segment maximal à l'avant dont le premier point est le point de départ du contour. Étant donné un segment maximal à l'avant sur un contour, l'algorithme 13 renvoie le segment maximal à l'avant suivant. Il est conçu à la manière d'un itérateur, afin qu'il soit aisé de l'adapter au traitement d'un contour complet comme à celui d'une partie de contour. Pour simplifier les notations, les modulus  $n$  ont été omis. Il est constitué d'une boucle (l. 2-3) qui appelle un algorithme de détection ou de reconnaissance.

Pour la détection, parmi les approches présentées, il y a :

- l'approche par convexité (algorithme 7).

**Algorithme 13** : Prochain segment sans chevauchement

---

**Entrées** : Un contour  $C$  et l'indice  $k$  du dernier point d'un segment maximal à l'avant

**Sorties** : Le segment  $C_{k|l}$  suivant

- 1  $l \leftarrow k + 1$ ;
- 2 **tant que**  $C_{k|l}$  est un segment **faire**
- 3    $l \leftarrow l + 1$  ; /\* extension avant du segment \*/
- 4  $l \leftarrow l - 1$ ;
- 5 **retourner**  $C_{k|l}$ ;

---

- l'approche par séparation (algorithme 9).
- l'approche par épaisseur (algorithme 10).
- l'approche arithmétique (algorithme 11).

Si le résultat est identique pour toutes ces approches, la manière de le représenter dans la fig. 4.18, selon les informations disponibles, diffère : en (a) sont dessinées les enveloppes convexes partielles à gauche et à droite, en (b) sont dessinées les droites séparantes, tandis qu'en (c) sont dessinées les boîtes d'épaisseur selon la première ou la seconde diagonale inférieure à  $\sqrt{2}$ .

Tous ces algorithmes opèrent à la volée et sont linéaires en temps. Comme chaque point du contour n'est traité qu'une seule fois, la décomposition de l'algorithme 13 est réalisée en un temps proportionnel à la taille du contour.

Malgré une complexité théorique identique, certains algorithmes sont plus rapides que d'autres. La fig. 4.19 représente le temps de calcul nécessaire à la décomposition en segments de droite d'un cercle en fonction de sa taille.

L'approche arithmétique est très rapide et bien meilleure que les trois autres approches. Sa complexité est constante en espace contrairement aux trois autres approches, où la gestion de listes chaînées, stockant les points des enveloppes convexes partielles, consomme des ressources. En second, vient l'approche par convexité. L'approche par séparation, légèrement plus lente, arrive en troisième. Ces deux approches exigent chacune le calcul de deux enveloppes convexes partielles. Cependant, l'application de la formule de Pick (approche par convexité) est plus rapide que la mise à jour des points de support (approche par séparation). Enfin, l'approche par épaisseur est approximativement deux fois plus lente que l'approche par séparation, car le calcul de l'épaisseur est réalisé indépendamment selon la première et la seconde diagonale, ce qui double le temps d'exécution. Cet algorithme s'étend en revanche aux contours bruités comme nous le verrons au paragraphe 4.4.3.

#### 4.4.2 Décompositions exactes avec chevauchements

L'inconvénient avec la décomposition gloutonne vue au paragraphe précédent est qu'elle dépend du point de départ. De plus, ses segments ne sont maximaux qu'à l'avant et non à l'arrière. D'autres décompositions, cependant, autorisent les chevauchements de manière à

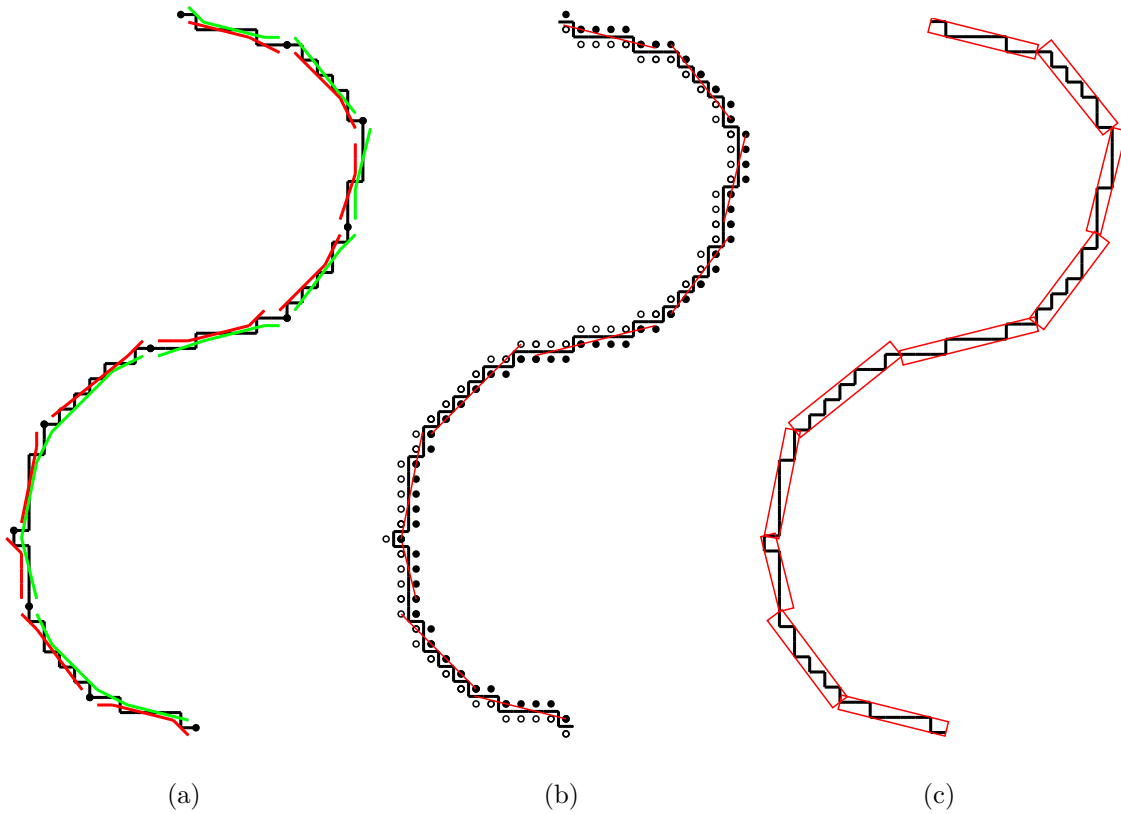


FIG. 4.18 – Décomposition en segments de droite obtenues par les algorithmes 7 en (a), 9 en (b) et 10 en (c).



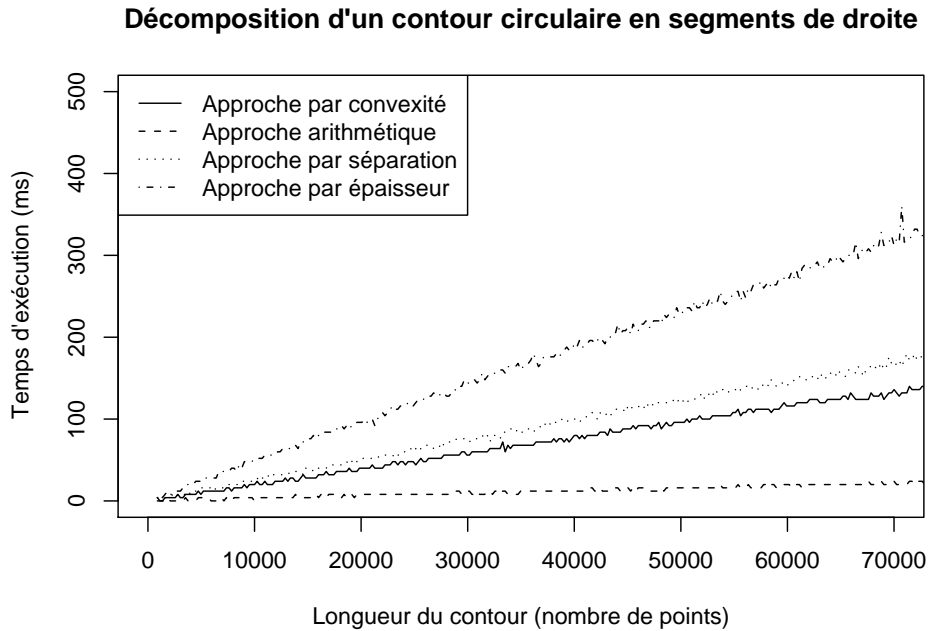


FIG. 4.19 – Durée de la décomposition en segments de droite d'un contour circulaire de plus en plus grand.

ce que chaque segment soit maximal. La décomposition en segments maximaux a commencé à être étudiée dans le contexte de l'estimation de tangentes et de courbure [Feschet et Tougne, 1999]. Les algorithmes 14 et 15 sont deux algorithmes possibles. Ils diffèrent de l'algorithme 13 en ce qu'ils étendent le nouveau segment à la fois à l'avant et à l'arrière. Les algorithmes de reconnaissance ont tous été présentés dans le cas d'une croissance vers l'avant. Néanmoins, la croissance vers l'arrière est similaire.

Dans l'algorithme 14, l'extension à l'avant du segment est réalisée en premier et l'extension à l'arrière en second. Dans l'algorithme 15, l'ordre est inversé. Ces deux algorithmes aboutissent à deux décompositions différentes. La première minimise les chevauchements, tandis que la seconde les maximise. La fig. 4.20 compare les décompositions en segments de droite obtenues par les algorithmes 13 en (a), 14 en (b) et 15 en (c).

La croissance vers l'avant va beaucoup plus loin quand elle n'est pas précédée par une croissance vers l'arrière qui impose des contraintes supplémentaires (fig. 4.20.b). Pour la même raison, la croissance vers l'arrière va beaucoup plus loin quand elle n'est pas précédée par une croissance vers l'avant (fig. 4.20.c). Ainsi, l'ordre des directions selon lesquelles est étendu un segment a un impact sur le nombre de segments obtenus et l'importance de leur chevauchement.

En alternant entre la croissance vers l'avant et vers l'arrière, de nouvelles décompositions où les chevauchements ne sont ni minimaux, ni maximaux pourraient être obtenues.

**Algorithme 14** : Prochain segment avec le plus petit chevauchement possible

**Entrées** : Un contour  $C$  et l'indice  $k$  du dernier point d'un segment maximal

**Sorties** : Le segment  $C_{k|l}$  suivant

```

1  $l \leftarrow k + 1$ ;
2 tant que  $C_{k|l}$  est un segment faire
3    $l \leftarrow l + 1$  ;                               /* extension avant du segment */
4  $l \leftarrow l - 1$ ;
5 tant que  $C_{k|l}$  est un segment faire
6    $k \leftarrow k - 1$  ;                               /* extension arrière du segment */
7  $k \leftarrow k + 1$ ;
8 retourner  $C_{k|l}$ ;
```

**Algorithme 15** : Prochain segment avec le plus grand chevauchement possible

**Entrées** : Un contour  $C$  et l'indice  $k$  du dernier point d'un segment maximal

**Sorties** : Le segment  $C_{k|l}$  suivant

```

1  $l \leftarrow k + 1$ ;
2 tant que  $C_{k|l}$  est un segment faire
3    $k \leftarrow k - 1$  ;                               /* extension arrière du segment */
4  $k \leftarrow k + 1$ ;
5 tant que  $C_{k|l}$  est un segment faire
6    $l \leftarrow l + 1$  ;                               /* extension avant du segment */
7  $l \leftarrow l - 1$ ;
8 retourner  $C_{k|l}$ ;
```

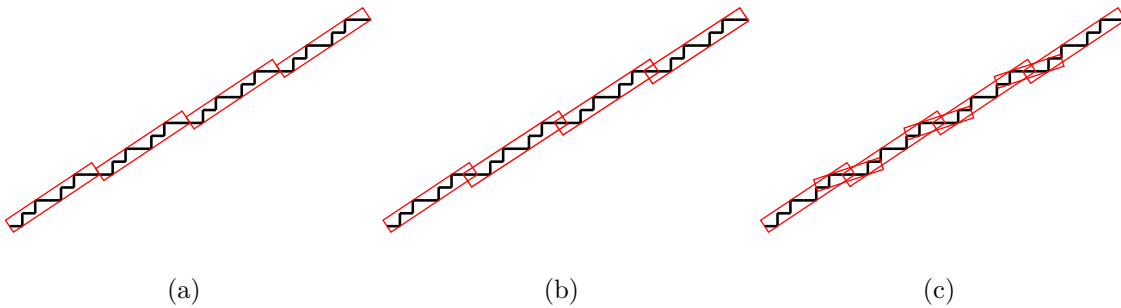


FIG. 4.20 – Décompositions en segments de droite obtenues par les algorithmes 13 en (a), 14 en (b) et 15 en (c).

#### 4.4. Décompositions du contour et mesure de linéarité

---

Dans les algorithmes 14 et 15, chaque point du contour est traité autant de fois qu'il est contenu par des segments différents. Les algorithmes 14 et 15 ne sont donc linéaires en temps qu'à condition que le nombre moyen de segments différents contenant un point soit une constante indépendante de la longueur du contour. Or, le nombre de segments passant par un point est faible en pratique (il excède rarement 7 [Feschet, 2004]). De plus, on peut déduire des résultats sur la longueur des segments maximaux dus à de Vieilleville *et al.* [2007], que le nombre *moyen* de segments passant par un point ne peut dépasser 19.

Cependant l'algorithme 15 peut être optimisé. Dans l'algorithme 16, le segment suivant est obtenu en rétrécissant dans un premier temps le segment courant par l'arrière. L'érosion se poursuit jusqu'à ce que le segment puisse croître à l'avant. Il est alors étendu le plus loin possible dans cette direction.

---

**Algorithme 16** : Prochain segment avec le plus grand chevauchement possible et érosion par l'arrière

---

**Entrées** : Un contour  $C$  et les indices  $k$  et  $l$  des premier et dernier points d'un segment maximal

**Sorties** : Le segment  $C_{k|l}$  suivant

```
1  $l \leftarrow l + 1$ ;  
2 tant que  $C_{k|l}$  n'est pas un segment faire  
3    $k \leftarrow k + 1$  ;                               /* érosion du segment par l'arrière */  
4 tant que  $C_{k|l}$  est un segment faire  
5    $l \leftarrow l + 1$  ;                               /* croissance avant du segment */  
6  $l \leftarrow l - 1$ ;  
7 retourner  $C_{k|l}$ ;
```

---

L'algorithme 16 exige toutefois l'existence d'algorithmes qui puissent mettre à jour les paramètres d'un segment après une érosion, comme l'algorithme 12. Si la croissance et l'érosion d'un segment sont réalisées en temps constant (éventuellement amorti) l'algorithme 16 est linéaire en temps.

La décomposition d'un contour en segments maximaux par l'algorithme 16 est unique et contient l'ensemble des décompositions sans chevauchement. On peut même trouver parmi elles, celle ayant le nombre minimal de segments [Feschet et Tougne, 2005]. Elle est utile à l'estimation de quantités géométriques, comme les tangentes [Feschet et Tougne, 1999; Lachaud *et al.*, 2007], la courbure [Feschet et Tougne, 1999; Coeurjolly *et al.*, 2001; Kerautret et Lachaud, 2009] ou le périmètre [Coeurjolly et Klette, 2004]. Dans ce cadre, la précision est d'autant plus élevée que le nombre de segments est grand, c'est pourquoi il est important que les chevauchements soient maximisés. La pente des segments maximaux donne de plus les parties convexes et concaves [Feschet, 2005; Dorksen-Reiter et Debled-Rennesson, 2006a]. La fig. 4.21 met en parallèle la décomposition en parties convexes et concaves réalisée au paragraphe 3.3.3 (a) et celle obtenue à partir des segments maximaux (b).

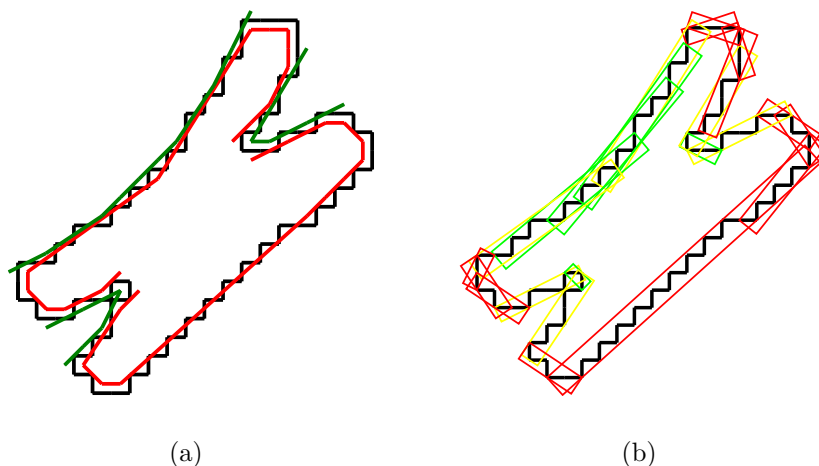


FIG. 4.21 – Décomposition en parties convexes et concaves obtenue à partir de la reconnaissance de parties convexes et concaves (a) et à partir des segments maximaux (b).

### 4.4.3 Décomposition robuste basée mesure

L'inconvénient des décompositions précédentes est leur sensibilité au bruit. Pour résoudre ce problème nous adoptons une approche pragmatique basée sur une mesure, comme au paragraphe 3.3. Cette mesure doit quantifier la similarité entre une partie de contour et le modèle du segment de droite :

1. Elle prend ses valeurs dans l'intervalle  $]0, 1]$ .
  - (a) L'unité est atteinte pour un segment de droite.
  - (b) L'écart à l'unité reflète la dissimilarité entre une partie de contour et le modèle du segment de droite.
2. Elle est invariante à la translation, à la rotation et à la mise à l'échelle.

Le critère (b) est vague. Pourtant, des propriétés du segment de droite découlent naturellement deux mesures qui semblent satisfaisantes. La première exploite le fait qu'un segment de droite est à la fois convexe et concave (propriété 4.4). Elle consiste à calculer le minimum de la mesure de convexité et de concavité de  $C_{i|j}$  (section 3.3) :

$$\text{convexité\&concavité}(C_{i|j}) = \min(\text{convexité}(C_{i|j}), \text{concavité}(C_{i|j})) \quad (4.3)$$

L'algorithme 7 permet de calculer cette mesure.

La seconde mesure repose sur la propriété d'épaisseur (propriété 4.5). Elle consiste à calculer le minimum de l'épaisseur calculée le long de la première et seconde diagonale :  $\sigma(\mathcal{E}(C_{i|j}) = \min(\sigma_{d_1}(\mathcal{E}(C_{i|j})), \sigma_{d_2}(\mathcal{E}(C_{i|j})))$  (section 4.2.3). Cette quantité n'est pas normalisée entre 0 et 1, c'est pourquoi elle est adaptée ainsi :

$$\begin{cases} \text{linéarité}(C_{i|j}) = \frac{\sqrt{2}}{\sigma(\mathcal{E}(C_{i|j}))} & \text{si } \sigma(\mathcal{E}(C_{i|j})) > \sqrt{2} \\ \text{linéarité}(C_{i|j}) = 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.4)$$

#### 4.4. Décompositions du contour et mesure de linéarité

---

La section 4.2.3 propose un algorithme qui permet de calculer  $\sigma_{d_2}(\mathcal{E}(C_{i|j}))$  et  $\sigma_{d_1}(\mathcal{E}(C_{i|j}))$  peut être calculé de manière similaire. De ces deux épaisseurs se déduit la mesure de linéarité par l'équation 4.4. Comme  $\sigma_{d_1}(\mathcal{E}(C_{i|j}))$  et  $\sigma_{d_2}(\mathcal{E}(C_{i|j}))$  sont des rationnels de la forme  $\frac{p}{q}$  multipliés par  $\sqrt{2}$ ,  $\text{linéarité}(C_{i|j})$  est un rationnel de la forme  $\frac{q}{p}$ . Ainsi, tous les calculs peuvent être effectués en nombres entiers.

A partir des mesures précédentes, les définitions suivantes sont proposées :

**Définition 4.5** (Partie  $\alpha$ -convexe&concave). *Une partie  $C_{i|j}$  d'un contour  $C$  est une partie  $\alpha$ -convexe&concave si et seulement si  $\text{convexité}\&\text{concavité}(C_{i|j}) \geq \alpha$ .*

Une partie  $C_{i|j}$  est un segment de droite si et seulement si elle est  $\alpha$ -convexe&concave avec  $\alpha = 1$ . La fig. 4.22 montre un exemple de partie 0.95-convexe&concave.

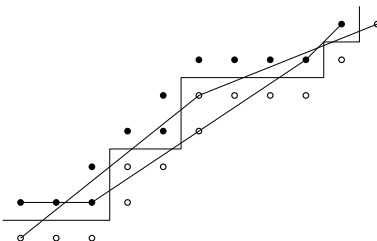


FIG. 4.22 – Cette partie, qui est extraite du contour de la fig. 3.12, est 0.95-convexe&concave. Sa mesure de convexité, qui vaut 0.97, et sa mesure de concavité, qui vaut 0.96, sont supérieures à  $\alpha = 0.95$ .

**Définition 4.6** (Partie  $\alpha$ -linéaire). *Une partie  $C_{i|j}$  d'un contour  $C$  est une partie  $\alpha$ -linéaire si et seulement si  $\text{linéarité}(C_{i|j}) \geq \alpha$ .*

Une partie  $C_{i|j}$  est un segment de droite si et seulement si elle est  $\alpha$ -linéaire avec  $\alpha = 1$ . La fig. 3.13 montre un exemple de partie 0.5-linéaire. Cette notion est au contour ce que les segments flous [Debled-Rennesson *et al.*, 2006] ou les segments épais [Buzer, 2005] sont aux courbes 0-connexes.

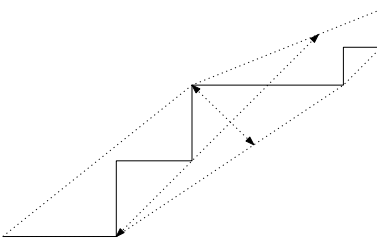


FIG. 4.23 – Cette partie est extraite du contour de la fig. 3.12. C'est une partie 0.5-linéaire, car le minimum des épaisseurs mesurées le long de l'une ou l'autre des diagonales est inférieure à  $2\sqrt{2}$ .

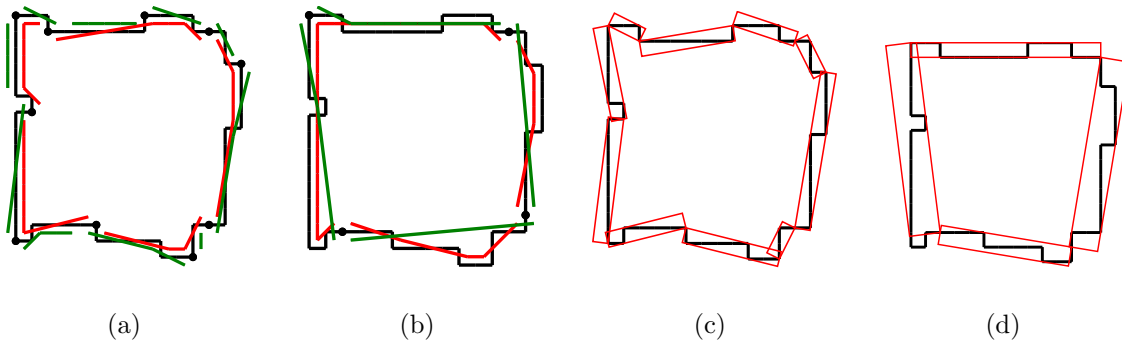


FIG. 4.24 – Décomposition d’un contour en parties 1-convexe&concave en (a) 0.95-convexe&concave (jusqu’à 8 points du fond autorisés dans les régions  $\mathcal{R}_g(X_{i|j})$  et  $\mathcal{R}_d(\bar{X}_{i|j})$ ) en (b), 1-linéaire en (c) et 0.5-linéaire (avec une épaisseur selon la première ou la seconde diagonale strictement inférieure à  $2\sqrt{2}$ ) en (d).

Quand la position du contour est incertaine, l’utilisation de ces modèles paramétrés permet d’obtenir une décomposition plus grossière, mais plus représentative du contour (fig. 4.24).

Les deux mesures proposées, très différentes, ont chacune des avantages et des inconvénients. La mesure par convexité demande la connaissance de tout le contour pour être normalisée, ce qui n’est pas le cas de la mesure par épaisseur. De plus, les parties  $\alpha$ -convexe&concaves ne fournissent pas directement de droite de meilleure approximation, alors que la droite centrée dans la bande d’épaisseur minimale englobant une partie  $\alpha$ -linéaire est la droite d’ajustement selon la norme de Chebychev.

En revanche, la comparaison des mesures de convexité et de concavité d’une partie  $\alpha$ -convexe&concave peut permettre de contrôler à la volée la “qualité” de sa détection. Par exemple, un grand arc de cercle a une mesure de convexité maximale, mais une mesure de concavité très basse. Si  $\alpha$  est suffisamment petit, cet arc peut être vu comme une partie  $\alpha$ -convexe&concave, alors que la disposition des points n’est pas linéaire. Repérer une différence significative et croissante entre les mesures de convexité et de concavité peut permettre d’arrêter la détection plus tôt pour éviter ce type de phénomène. Par contre, contrôler à la volée la “qualité” de la détection d’une partie  $\alpha$ -linéaire semble être moins évident.

Une comparaison approfondie des mesures et de leur application à la décomposition robuste de contours, ainsi qu’une étude de leur lien avec un modèle de bruit est une perspective de ce travail.

## 4.5 Conclusion

D’après nos définitions fondées sur la discrétisation de Gauss, un segment de droite est une partie à la fois convexe et concave. Sa détection peut ainsi être réalisée par les

algorithmes de reconnaissance de parties convexes et concaves introduits au chapitre 3. L'inconvénient de cette approche est qu'elle ne permet que la détection et non la reconnaissance.

Les points intérieurs (appartenant à l'objet) et extérieurs (appartenant au fond) qui se trouvent de part et d'autre d'un segment de droite sont linéairement séparables. Nous avons donc proposé un algorithme de reconnaissance de segment de droite reposant directement sur cette propriété de séparabilité. Notre algorithme, décrit dans le primal, s'avère être équivalent à l'algorithme de O'Rourke, décrit dans le dual. Il est linéaire en temps et calcule à la volée, sans aucune transformation, l'ensemble de la préimage. Cet algorithme géométrique est très général et peut être appliqué à des maillages irréguliers.

Par ailleurs, nous avons déduit de la propriété de séparabilité, une propriété d'épaisseur sur laquelle repose un deuxième algorithme de reconnaissance de segment de droite. Il réalise lui aussi tous ses traitements à la volée et est linéaire en temps. Contrairement aux travaux précédents, il fonctionne sans aucune hypothèse restrictive. Cet algorithme géométrique est très général et peut lui aussi être utilisé dans le cas de maillages irréguliers.

En outre, il existe un algorithme, fondé lui aussi sur cette propriété d'épaisseur, mais exploitant au mieux la structure arithmétique des points de  $\mathbb{Z}^2$ . C'est celui obtenant les meilleures performances. Comme il est complètement dynamique, avec un coût constant pour chaque opération, un seul balayage par une fenêtre correspondant à un segment maximal à l'avant ou à l'arrière suffit pour décomposer un contour en segments maximaux. Cette décomposition est unique et contient l'ensemble des segmentations, dont celle possédant le plus petit nombre de segments. Elle comporte l'information nécessaire à l'estimation de quantités géométriques, comme les tangentes, la courbure ou le périmètre. De plus, la pente des segments maximaux donne les parties convexes et concaves du contour. Elle sert à calculer, dans le chapitre 5, un polygone réversible, respectant les parties convexes et concaves.

Afin d'obtenir des décompositions robustes, nous avons introduit de nouveaux modèles de segments de droite, destinés à prendre en compte une incertitude sur la position exacte du contour. Ces modèles reposent sur deux types de mesure de linéarité. Le premier repose sur une propriété de convexité, tandis que le second repose sur une propriété d'épaisseur. Ces mesures peuvent toutes les deux être calculées à la volée et en temps linéaire à l'aide des algorithmes de reconnaissance précédents. Cependant, une comparaison approfondie, ainsi qu'une étude de leur comportement par rapport à des modèles de bruit, restent encore à mener.





*Polygone réversible respectant les parties convexes et concaves*

**Sommaire**

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>118</b>
5.1.1	Énoncé du problème	118
5.1.2	Enveloppe convexe et segments maximaux	120
<b>5.2</b>	<b>Extraction des sommets du polygone</b>	<b>121</b>
5.2.1	Cas des parties convexes	122
5.2.2	Jonctions entre parties convexes et parties concaves	124
5.2.3	Algorithme et résultats	125
5.2.3.1	Initialisation	125
5.2.3.2	Corps de l'algorithme	128
<b>5.3</b>	<b>Réversibilité</b>	<b>131</b>
5.3.1	Discrétisation d'une arête d'arc convexe ou concave	132
5.3.2	Discrétisation d'une arête de transition	133
<b>5.4</b>	<b>Applications</b>	<b>133</b>
5.4.1	Polygone de longueur minimale	134
5.4.2	Représentation hiérarchique	136
<b>5.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>140</b>

---

L’objectif de ce chapitre est l’élaboration d’un algorithme qui extrait, à partir d’un contour, un polygone réversible, qui respecte les parties convexes et concaves. Ce polygone peut être la donnée initiale d’une simplification polygonale. Les applications principales sont la représentation hiérarchique d’un contour, la mise en évidence des parties visuellement significatives et la suppression du bruit. La plupart des résultats de ce chapitre seront présentés, avec un objectif purement algorithmique, à *13-th International Workshop on Combinatorial Image Analysis (IWCIA’09)* [Roussillon *et al.*, 2009c].

## 5.1 Introduction

### 5.1.1 Énoncé du problème

Le problème posé est celui de l’extraction, à partir d’un contour  $C$ , d’un polygone noté  $\mathcal{P}(C)$ , réversible et qui respecte les parties convexes et concaves. La réversibilité implique l’existence d’un algorithme qui retrouve, uniquement à partir du polygone, décrit par ses sommets, le contour à partir duquel il a été extrait. La seconde condition est constituée des deux contraintes suivantes :

- $\mathcal{P}(C) = \mathcal{E}(C)$  si  $C$  est convexe.
- $\mathcal{P}(C)$  possède autant de parties convexes et concaves que  $C$  n’en possède lui-même.

Sur un polygone, une partie convexe ou une partie concave est une suite d’arêtes dont les pentes augmentent ou diminuent de manière monotone. Sur un contour, les parties convexes et les parties concaves ont été définies au paragraphe 1.3.3.

Dorksen-Reiter [2004]; Eckhardt et Dorksen-Reiter [2004]; Dorksen-Reiter et Debled-Rensson [2006b] ont les premiers énoncé ces contraintes et montré l’intérêt d’un tel polygone pour la représentation hiérarchique de courbes discrètes [Latecki et Lakämper, 1999]. Leur énoncé du problème diffère toutefois légèrement du nôtre. Étant donné un objet simple  $X$ , ils cherchent un polygone  $\mathcal{P}(X)$  qui représente  $X$  de la façon suivante :

- Les sommets de  $\mathcal{P}(X)$  sont des points du bord de  $X$ .
- $X$  est la discrétisation de Gauss de  $\mathcal{P}(X)$ .
- $\mathcal{P}(X)$  est “minimal” et respecte les parties convexes et concaves.

Satisfaire les deux premières conditions est trivial. Elles sont par exemple vérifiées si tous les points du bord de  $X$  sont des sommets de  $\mathcal{P}(X)$ . La difficulté vient de l’ajout de la troisième condition. D’ailleurs, il est impossible de les satisfaire toutes les trois en même temps [Dorksen-Reiter, 2004]. C’est pourquoi nous avons choisi de substituer aux deux premières conditions, la contrainte de réversibilité. Nous laissons libre le choix des sommets de  $\mathcal{P}(X)$  et du processus de discrétisation, pourvu qu’il assure la réversibilité.

L’algorithme de recouvrement par des parties convexes et concaves vu au chapitre 3 apporte un premier résultat concernant la contrainte du respect des parties convexes ou concaves. Les pentes des arêtes de l’enveloppe partielle à gauche (respectivement à droite) des points intérieurs (respectivement extérieurs) d’une partie convexe (respectivement concave) évoluent de manière monotone. Mais comment relier ces enveloppes au sein d’un même polygone ? Et comment garantir sa réversibilité ?

L'approche adoptée pour résoudre ces problèmes consiste à calculer des enveloppes partielles directement sur le contour au lieu de les calculer à partir de ses points intérieurs ou extérieurs. De plus, ces calculs sont réalisés au moyen des segments de droites discrètes, de leur formalisme analytique et de leur algorithme de reconnaissance dynamique (algorithmes 11 et 12).

Les raisons ayant motivées ce choix sont les suivantes :

- La réversibilité nécessite qu'un algorithme puisse tracer, à partir d'une arête, la portion de contour correspondante. Or le tracé est facilité par le formalisme analytique [Reveillès, 1991].
- La convexité peut être définie à l'aide des segments de droite [Kim et Rosenfeld, 1981, 1982; Kim, 1982b; Eckhardt, 2001]. De plus, les segments maximaux mettent en évidence les parties convexes et concaves [Feschet, 2005; Dorksen-Reiter et Debled-Rennesson, 2006a]. Enfin, les parties à la fois convexes et concaves, où les enveloppes convexes partielles se chevauchent, correspondent à des segments de droite maximaux.
- L'enveloppe convexe d'un contour  $C$  est très proche de celle de l'objet  $X$ . Il en va de même pour des parties de contour et de leur points intérieurs et extérieurs.

La fig. 5.1 illustre ce dernier point.

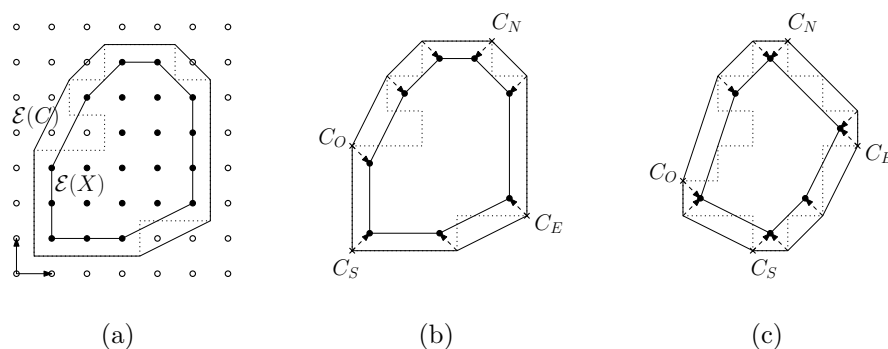


FIG. 5.1 – L'enveloppe convexe  $\mathcal{E}(C)$  d'un contour  $C$  est très proche de l'enveloppe convexe  $\mathcal{E}(X)$  de l'objet  $X$  (a). A chaque sommet de  $\mathcal{E}(C)$  est associé un sommet de  $\mathcal{E}(X)$  (b), mais  $\mathcal{E}(C)$  peut posséder jusqu'à 4 sommets (et 4 arêtes) de plus que  $\mathcal{E}(X)$  (c).

L'enveloppe convexe  $\mathcal{E}(X)$  d'un objet  $X$  ainsi que l'enveloppe convexe  $\mathcal{E}(C)$  de son contour (en pointillé) sont dessinées en noir. Le contour  $C$  est partitionné en quatre zones délimitées par quatre points particuliers :

- $C_O$  est le point d'abscisse minimale et d'ordonnée maximale.
- $C_N$  est le point d'ordonnée maximale et d'abscisse maximale.
- $C_E$  est le point d'abscisse maximale et d'ordonnée minimale.
- $C_S$  est le point d'abscisse minimale et d'ordonnée minimale.

Tous les sommets de  $\mathcal{E}(C)$  peuvent être déplacés de façon à ce qu'ils coïncident avec les sommets de  $\mathcal{E}(X)$ . Le vecteur déplacement d'un sommet dépend de la zone à laquelle appartient le sommet en question :

- Les sommets de  $\mathcal{E}(C)$  situés entre  $C_O$  (inclu) et  $C_N$  (exclu) coïncident avec des sommets de  $\mathcal{E}(X)$  s'ils sont déplacés par le vecteur  $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ .
- Les sommets de  $\mathcal{E}(C)$  situés entre  $C_N$  (inclu) et  $C_E$  (exclu) coïncident avec des sommets de  $\mathcal{E}(X)$  s'ils sont déplacés par le vecteur  $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ .
- Les sommets de  $\mathcal{E}(C)$  situés entre  $C_E$  (inclu) et  $C_S$  (exclu) coïncident avec des sommets de  $\mathcal{E}(X)$  s'ils sont déplacés par le vecteur  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .
- Les sommets de  $\mathcal{E}(C)$  situés entre  $C_S$  (inclu) et  $C_N$  (exclu) coïncident avec des sommets de  $\mathcal{E}(X)$  s'ils sont déplacés par le vecteur  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

L'enveloppe convexe  $\mathcal{E}(C)$  peut posséder jusqu'à 4 sommets de plus que  $\mathcal{E}(X)$  comme le montre la fig. 5.1.c. Ces propriétés sont valables aussi pour les enveloppes partielles de parties de contour.

### 5.1.2 Enveloppe convexe et segments maximaux

Le lemme 5.1 démontre l'existence d'une correspondance entre les points d'appui des segments maximaux et les sommets des enveloppes convexes partielles. Selon la définition 4.4, un segment maximal  $C_{k|l}$  est un segment de droite ne pouvant être agrandi ni à l'avant, ni à l'arrière. Ses points d'appui sont les premier et dernier points appartenant à  $C_{k|l}$  faiblement intérieurs à gauche et à droite de sa droite strictement englobante  $\mathcal{D}(C_{k|l})$  (section 4.3.1). L'extraction de  $\mathcal{P}(C)$  repose sur ce lemme.

**Lemme 5.1.** *Soit une partie  $C_{i|j}$  du contour  $C$ , supposée convexe (respectivement concave), contenant un segment maximal  $C_{k|l}$ . Les points d'appui à gauche (respectivement à droite) de  $C_{k|l}$  sont des sommets de  $\mathcal{E}_g(C_{i|j})$  (respectivement  $\mathcal{E}_d(C_{i|j})$ ).*

*Démonstration.*  $C_{i|j}$  est supposée convexe. Le cas où  $C_{i|j}$  est concave est symétrique.  $\mathcal{D}(C_{k|l})$ , la droite englobant strictement  $C_{k|l}$ , est de pente  $\frac{a}{b}$ . Comme  $C_{k|l}$  est un segment maximal et comme  $C_{i|j}$  est convexe, tous les points de  $C_{i|j}$  n'appartenant pas à  $C_{k|l}$  sont à droite de  $\mathcal{D}(C_{k|l})$  (fig. 5.2).  $\mathcal{L}$  est une droite de pente  $\frac{a}{b}$  se trouvant à gauche de  $\mathcal{D}(C_{k|l})$ . Les premiers points touchés par  $\mathcal{L}$ , quand  $\mathcal{L}$  se déplace vers  $\mathcal{D}(C_{k|l})$ , sont les points d'appui à gauche de  $C_{k|l}$ . Ainsi, les points d'appui à gauche de  $C_{k|l}$  sont des sommets de  $\mathcal{E}_g(C_{i|j})$ .  $\square$

De plus, le nombre de segments maximaux contenus dans un contour convexe est borné par trois fois le nombre d'arêtes de son enveloppe convexe [de Vieilleville *et al.*, 2007]. Parmi les segments maximaux ayant deux points d'appui à gauche, il y en a au plus un dont les points d'appui délimitent une arête de l'enveloppe. Parmi ceux n'ayant qu'un seul point d'appui à gauche, il y en a au plus deux dont le point d'appui est un sommet de l'enveloppe convexe. En revanche, il peut y avoir bien plus de sommets que de segments maximaux. Le nombre de sommets appartenant à un segment maximal dépend de la profondeur du développement en fractions continues de sa pente [de Vieilleville *et al.*, 2007].

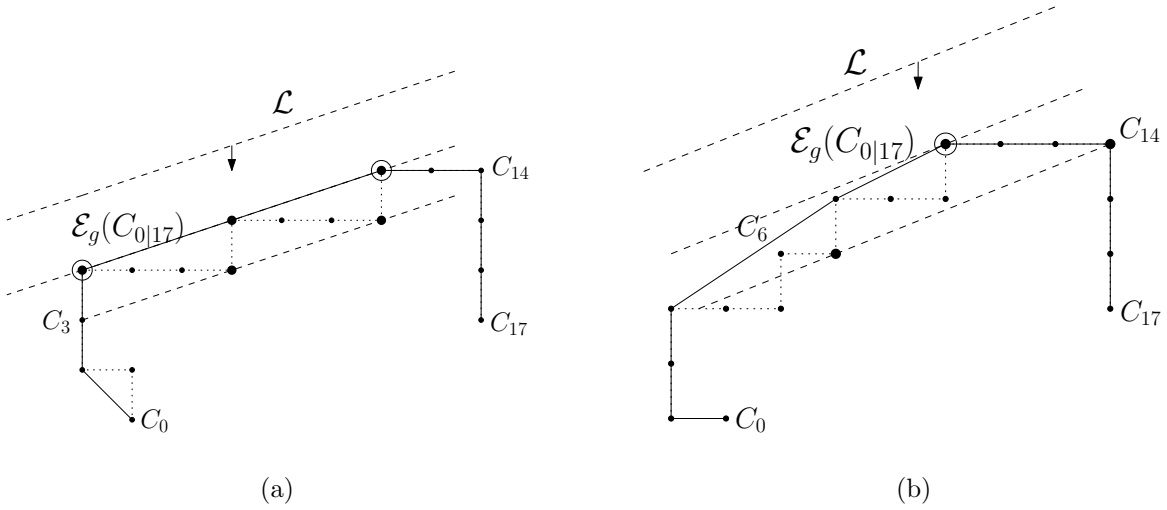


FIG. 5.2 – Les deux points d’appui à gauche du segment maximal  $C_{3|14}$  en (a), comme l’unique point d’appui à gauche du segment maximal  $C_{6|14}$  en (b), entourés, sont des sommets de  $\mathcal{E}_g(C_{0|17})$ , car  $C_{0|17}$  est convexe.

Il est bien connu que l’algorithme d’Euclide étendu permet de retrouver les sommets de l’enveloppe convexe des points de  $\mathbb{Z}^2$  situés en-dessous ou au-dessus d’un vecteur reliant deux points de  $\mathbb{Z}^2$  par le calcul des coefficients de son développement en fractions continues. Cette technique a été exploitée pour calculer l’enveloppe convexe de fonctions implicites [Har-Peled, 1998; Balza-Gomez *et al.*, 1999]. La croissance vers l’avant et l’érosion par l’arrière d’un segment sont très étroitement liés à l’algorithme d’Euclide étendu (section 2.4.1) : les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  entre les points d’appui et les points de Bézout, qui forment la base d’un réseau de points, de déterminant égal à  $\pm 1$ , se resserrent au cours de la reconnaissance pour donner une approximation de plus en plus précise de la pente de la droite strictement englobante [Debled-Rennesson et Reveillès, 1995].

En définitive, il n’est pas possible de retrouver l’intégralité des sommets de l’enveloppe convexe uniquement à partir des points d’appui à gauche des segments maximaux. Néanmoins, ils peuvent être extraits à la volée, au cours du calcul des segments maximaux. La description de cet algorithme fait l’objet de la section suivante.

## 5.2 Extraction des sommets du polygone

Le cas des parties convexes ou des parties concaves est étudié dans un premier temps. Le cas des parties ni convexes, ni concaves est analysé dans un second temps, de manière à gérer les jonctions entre parties convexes et parties concaves.

### 5.2.1 Cas des parties convexes

Soit une partie convexe  $C_{i|j}$  qui contient une partie  $C_{i|l}$  avec  $i < l < j$ . Le cas où  $C_{i|j}$  est concave est symétrique.

Le théorème 5.1 et le corollaire 5.1 définissent les deux événements qui, étant donné un sommet de  $\mathcal{E}(C_{i|j})$  connu, permettent de déterminer le sommet de  $\mathcal{E}(C_{i|j})$  suivant.

**Théorème 5.1.** *Soient  $C_{k|l}$  (avec  $i < k < l$ ) un segment de droite maximal à l'arrière et  $D(C_{k|l})$  sa droite strictement englobante. Le premier point d'appui à gauche de  $C_{k|l}$  est un sommet de  $\mathcal{E}(C_{i|j})$ . De plus, si le point  $C_{l+1}$  est extérieur à droite de  $D(C_{k|l})$ , alors le dernier point d'appui à gauche de  $C_{k|l}$ , qui est l'unique point d'appui à gauche de  $C_{k|l+1}$ , est aussi un sommet de  $\mathcal{E}(C_{i|j})$ .*

*Démonstration.* Comme  $C_{i|j}$  est convexe et comme  $C_{k|l}$  est maximal à l'arrière, l'extension vers l'avant de  $C_{k|l}$  rend  $C_{k|l}$  maximal. Si  $C_{l+1}$  est fortement extérieur à  $D(C_{k|l})$ , alors  $C_{k|l}$  est maximal et par le lemme 5.1, ses points d'appui à gauche sont des sommets de  $\mathcal{E}(C_{i|j})$ . De même, si l'extension n'implique aucun déplacement du premier point d'appui à gauche, par le lemme 5.1, ce point est un sommet de  $\mathcal{E}(C_{i|j})$ .

À l'inverse, si l'extension implique un déplacement du premier point d'appui à gauche, c'est que le segment  $C_{k|l}$  a été étendu par un point  $C_{l+1}$  se trouvant être faiblement extérieur à droite de  $D(C_{k|l})$  (algorithme 11). Or, dans ce cas,  $C_{l+1} + \vec{s}$  est faiblement intérieur à gauche de  $D(C_{k|l})$  (fig. 5.3). Toute droite qui sépare  $C_{l+1} + \vec{s}$  et les points d'appui à gauche de  $C_{k|l}$  a nécessairement une pente inférieure à  $\frac{a}{b}$ , la pente de  $D(C_{k|l})$  (comme les lignes discontinues noires de la fig. 5.3). Ainsi, non seulement le premier, mais aussi le dernier point d'appui à gauche de  $C_{k|l}$  sont des sommets consécutifs de  $\mathcal{E}(C_{i|j})$ .  $\square$

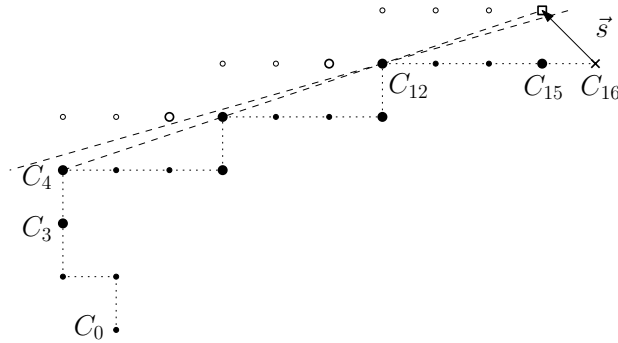


FIG. 5.3 –  $C_{16}$  est faiblement extérieur à  $D(C_{3|15})$ . Les premier et dernier points d'appui à gauche de  $D(C_{3|15})$ , c'est-à-dire  $C_4$  et  $C_{12}$ , sont colinéaires avec le point  $C_{16} + \vec{s}$ . Comme  $C_{3|15}$  est maximal à l'arrière par hypothèse,  $C_4$  et  $C_{12}$  sont deux sommets de  $\mathcal{E}_g(C_{0|16})$ .

**Corollaire 5.1.** *Soient  $C_{k|l}$  (avec  $i < k < l$ ) un segment de droite maximal à l'avant et  $D(C_{k|l})$  sa droite strictement englobante. Le dernier point d'appui à gauche de  $C_{k|l}$  est un sommet de  $\mathcal{E}(C_{i|j})$ .*

## 5.2. Extraction des sommets du polygone

---

La preuve de ce corollaire, illustré dans les fig. 5.4.a et 5.4.b, découle directement de celle du théorème 5.1.

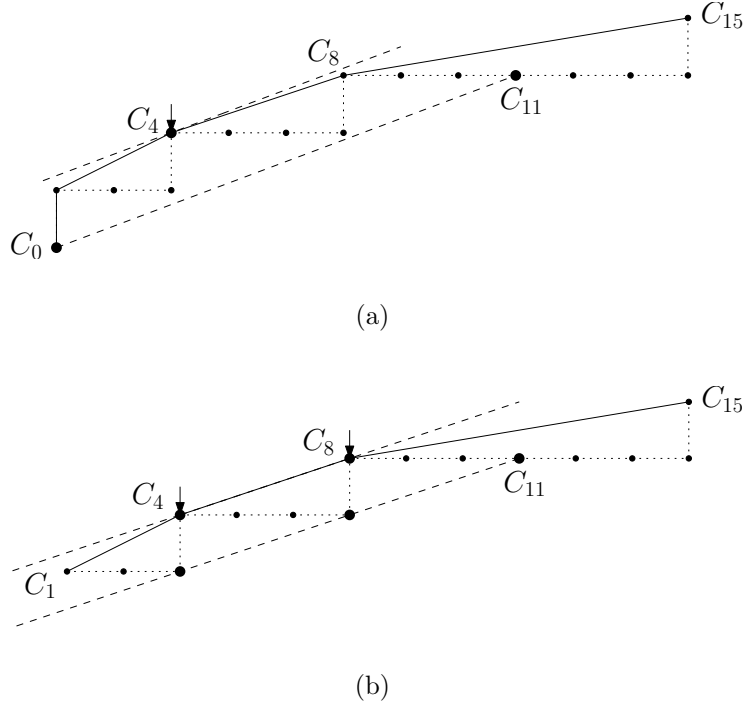


FIG. 5.4 –  $C_{0|11}$ , maximal à l'avant, possède un unique point d'appui à gauche,  $C_4$ , qui est un sommet de  $\mathcal{E}_g(C_{0|15})$  (a). Comme  $C_0$  est faiblement extérieur à droite de  $\mathcal{D}(C_{1|11})$ ,  $C_{1|11}$  possède deux points d'appui à gauche,  $C_4$  et  $C_8$ , donc  $C_8$  est aussi un sommet de  $\mathcal{E}_g(C_{0|15})$  (b).

Le théorème 5.1 et le corollaire 5.1 permettent d'extraire les sommets de l'enveloppe convexe  $\mathcal{E}(C)$  d'un contour  $C$  (de même que l'enveloppe convexe  $\mathcal{E}(X)$  de ses points intérieurs), au moyen du calcul de l'ensemble des segments maximaux par l'algorithme 16. Par le lemme 5.1, les points d'appui du premier segment maximal, sont des sommets de  $\mathcal{E}(C)$ . Le segment maximal suivant est obtenu après érosion à l'arrière, puis croissance vers l'avant du segment courant. Pendant la phase d'érosion, comme le segment est maximal à l'avant, le corollaire 5.1 s'applique. Quand les premier et dernier points d'appui du segment courant, confondus, se séparent, le premier est stocké en tant que sommet de  $\mathcal{E}(C)$ . Pendant la phase de croissance, comme le segment est maximal à l'arrière, c'est le théorème 5.1 qui s'applique. Quand les premier et dernier points d'appui du segment courant fusionnent, le dernier est stocké en tant que sommet de  $\mathcal{E}(C)$ . Au cours de ce processus, tous les sommets de  $\mathcal{E}(C)$  sont retrouvés, car le théorème 5.1 et le corollaire 5.1 garantissent que c'est le sommet suivant immédiatement un sommet déjà connu qui est extrait.

En revanche, certains sommets peuvent être repérés à deux reprises. Cela arrive pour un segment maximal ayant un unique point d'appui à gauche, déjà identifié comme sommet

(fig. 5.5.a). La phase d'érosion à l'arrière nécessaire à l'obtention du segment maximal suivant, implique forcément une diminution de la pente de la droite strictement englobante à cause de la convexité. A un certain degré d'érosion, le segment courant va posséder deux points d'appui, le premier étant sommet de  $\mathcal{E}(C)$  selon le corollaire 5.1 (fig. 5.5.b). Or, il est déjà identifié comme tel.

Cela n'arrive pas pour un segment maximal ayant deux points d'appui à gauche. En effet, seul le premier est d'abord identifié comme sommet avant la phase d'érosion. Il est supprimé pendant la phase d'érosion et seul le second est ensuite identifié comme sommet après la phase d'érosion.

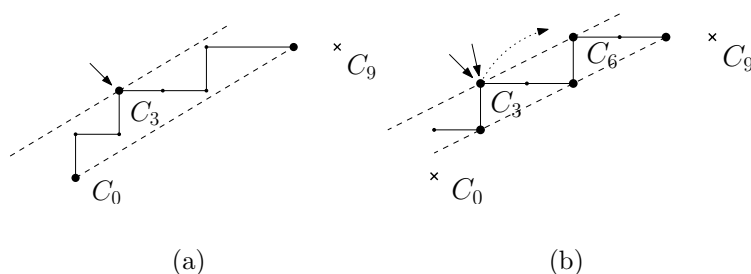


FIG. 5.5 –  $C_{0|8}$  est un segment maximal qui possède un point d'appui à gauche,  $C_3$ , déjà identifié comme sommet de  $\mathcal{E}_g(C_{0|9})$  et indiqué par une flèche noire (a).  $C_{1|8}$  possède deux points d'appui à gauche,  $C_3$  et  $C_6$ , donc  $C_3$  est à nouveau identifié comme sommet de  $\mathcal{E}_g(C_{0|9})$  et est marqué par une seconde flèche noire (b).

En définitive, pour un contour  $C$  convexe, les sommets extraits sont ceux de  $\mathcal{E}(C)$ . Cependant, pour que  $\mathcal{P}(C)$  respecte les parties convexes et concaves, il est aussi nécessaire que  $\mathcal{P}(C)$  possède autant de parties convexes et concaves que n'en possède  $C$ . Dans cette perspective, nous analysons maintenant comment s'opèrent les transitions entre parties convexes et concaves.

### 5.2.2 Jonctions entre parties convexes et parties concaves

Soit une partie  $C_{i|j}$  du contour contenant une partie  $C_{i|l}$  où  $i < l < j$  et supposée convexe. Le cas où elle est concave est symétrique. Le théorème 5.2 montre dans quel cas le point  $C_{l+1}$  implique la maximalité à l'avant de la partie convexe  $C_{i|l}$ . Un théorème similaire a été prouvé par Debled-Rennesson *et al.* [2003].

**Théorème 5.2.** *Soient  $C_{k|l}$  (avec  $i < k < l$ ) un segment de droite maximal à l'arrière et  $D(C_{k|l})$  sa droite strictement englobante. La partie  $C_{i|l+1}$  n'est pas convexe si et seulement si  $C_{k|l+1}$  n'est pas un segment de droite et  $C_{l+1}$  est extérieur à gauche de  $D(C_{k|l})$ .*

*Démonstration.* Si  $C_{k|l+1}$  n'est pas un segment de droite et  $C_{l+1}$  est extérieur à gauche de  $D(C_{k|l})$ , alors  $C_{k|l+1}$  n'est pas convexe. Par conséquent,  $C_{i|l+1}$ , qui contient  $C_{k|l+1}$ , n'est pas convexe non plus (fig. 5.6.a et fig. 5.6.b).



Dans le cas contraire la partie  $C_{k|l+1}$  est convexe (fig. 5.6.c et d). Comme  $C_{k|l}$  est maximal à l'arrière par hypothèse, si  $C_{k|l+1}$  est un segment de droite, il est maximal pour  $C_{i|l+1}$ , sinon le segment  $C_{k|l}$  est maximal pour  $C_{i|l+1}$ . Les points d'appui à gauche de l'un ou l'autre de ces segments maximaux sont des sommets de  $\mathcal{E}_g(C_{i|l})$ , comme de  $\mathcal{E}_g(C_{k|l+1})$  d'après le lemme 5.1.  $\mathcal{E}_g(C_{i|l})$  et  $\mathcal{E}_g(C_{k|l+1})$  partagent donc au moins un sommet (indiqué par une croix dans la fig. 5.6.e). Il en va de même pour  $\mathcal{E}_g(X_{i|l})$  et  $\mathcal{E}_g(X_{k|l+1})$  (fig. 5.6.f). En définitive,  $C_{i|l}$  est convexe,  $C_{k|l+1}$  est convexe,  $\mathcal{E}_g(X_{i|l})$  et  $\mathcal{E}_g(X_{k|l+1})$  possèdent au moins un sommet en commun, donc  $C_{i|l+1}$  est convexe.  $\square$

Le théorème 5.2 permet de repérer les transitions entre parties convexes et parties concaves. Il montre que si  $C_{k|l+1}$  n'est pas un segment de droite et si le point  $C_{l+1}$  est extérieur à gauche de  $D(C_{k|l})$ , alors  $C_{i|l+1}$  n'est pas convexe. De plus,  $C_{k|l}$  est un segment maximal. Or, d'après le lemme 5.1, le premier point d'appui à gauche de  $C_{k|l}$ , d'indice  $f$ , est un sommet de  $\mathcal{E}_g(C_{i|l})$  et le dernier point d'appui à droite de  $C_{k|l}$ , d'indice  $g$ , est un sommet de  $\mathcal{E}_d(C_{k|l+1})$  (fig. 5.7). La droite qui passe par le premier point d'appui à gauche et le dernier point d'appui à droite de  $C_{k|l}$  sépare les sommets de  $\mathcal{E}_g(C_{i|l})$ , des sommets de  $\mathcal{E}_d(C_{k|l+1})$  (fig. 5.7). Relier  $C_f$  et  $C_g$  permet donc de respecter les parties convexes et concaves.

### 5.2.3 Algorithme et résultats

L'algorithme qui stocke dans une liste tous les sommets de  $\mathcal{P}(C)$ , le polygone réversible qui respecte les parties convexes et concaves du contour  $C$ , est décomposé en deux parties. L'initialisation indique si le balayage du contour débute avec une partie convexe ou concave et détermine les premiers points du polygone. Dans la boucle principale, les sommets suivants sont obtenus grâce au balayage du contour par une fenêtre de taille variable correspondant à un segment qui est maximal à l'avant, à l'arrière ou les deux.

Le résultat de l'algorithme est illustré par la fig. 5.8. Ce contour sert d'exemple pour chacune des deux étapes.

#### 5.2.3.1 Initialisation

L'initialisation est effectuée par l'algorithme 17.

Un segment de droite est d'abord étendu jusqu'à ce qu'il devienne maximal à l'avant (l. 1-3). Si le point qui a stoppé la croissance du segment est extérieur à gauche de sa droite strictement englobante, le balayage démarre par une partie concave et les points d'appui à suivre se trouvent à droite (l. 5). S'il est extérieur à droite, le balayage commence par une partie convexe et les points d'appui à observer se trouvent à gauche (l. 7). Le premier sommet du polygone, avec lequel la liste est initialisée (l. 8) est le point de départ  $C_0$ , car il est, par définition, un sommet de  $\mathcal{E}(C)$  (section 1.2.3). Le sommet suivant est le premier point d'appui à gauche ou à droite du segment, selon que le balayage commence par une partie convexe ou concave, car le segment reconnu est maximal à l'avant (l. 9).

Dans la fig. 5.8, le point de départ,  $C_0$ , est par convention le point du contour le plus à gauche et le plus haut. Par convention, le parcours des points se fait dans le sens des aiguilles

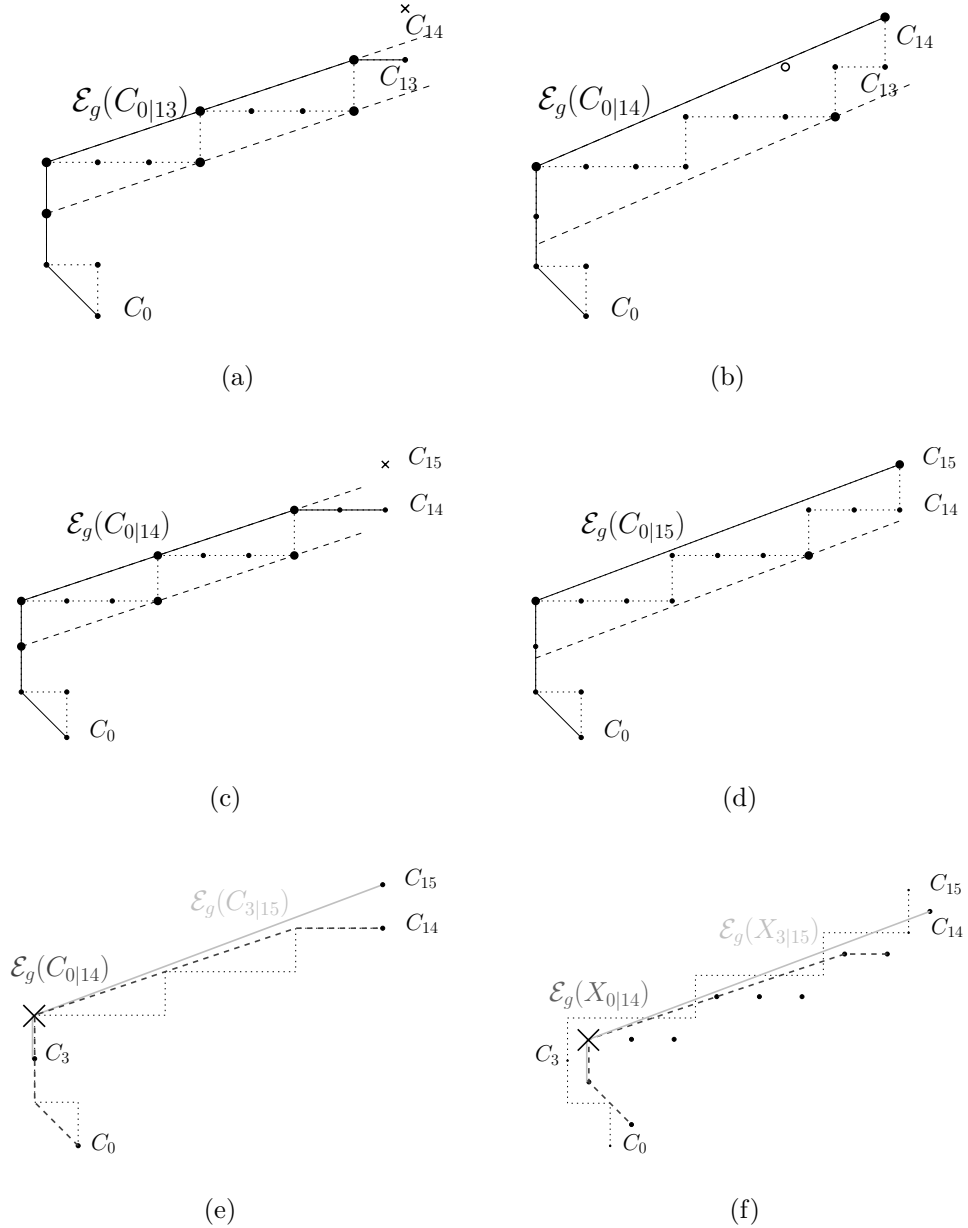


FIG. 5.6 – En (a) et (b),  $C_{14}$  implique la maximalité à l'avant de la partie convexe  $C_{0|13}$ , car  $C_{14}$  est fortement extérieur à gauche de  $D(C_{3|13})$ . En (c) et (d),  $C_{0|15}$  est convexe, car  $C_{15}$  n'est pas fortement extérieur à gauche de  $D(C_{3|14})$ . Ce résultat provient du fait que,  $C_{0|14}$  est convexe,  $C_{3|15}$  est convexe,  $\mathcal{E}_g(C_{0|14})$  et  $\mathcal{E}_g(C_{3|15})$  (e), donc  $\mathcal{E}_g(X_{0|14})$  et  $\mathcal{E}_g(X_{3|15})$  (f) ont un sommet en commun identifié par une croix.

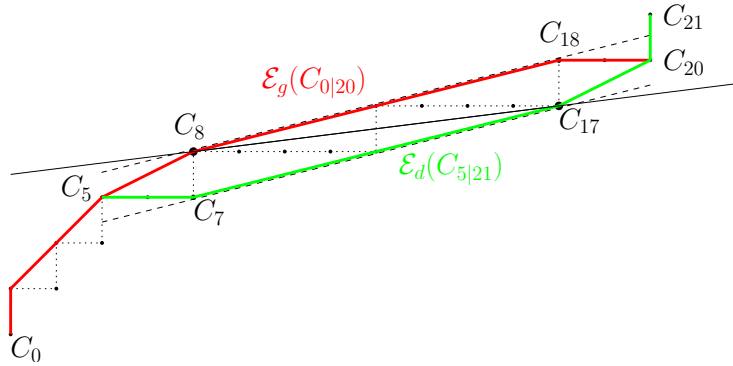


FIG. 5.7 –  $C_{0|20}$  est convexe tandis que  $C_{5|21}$  est concave. Au milieu,  $C_{5|20}$  est un segment maximal. La droite qui passe par  $C_8$  et  $C_{17}$  sépare les sommets de  $\mathcal{E}_g(C_{0|8})$ , des sommets de  $\mathcal{E}_d(C_{17|21})$ .

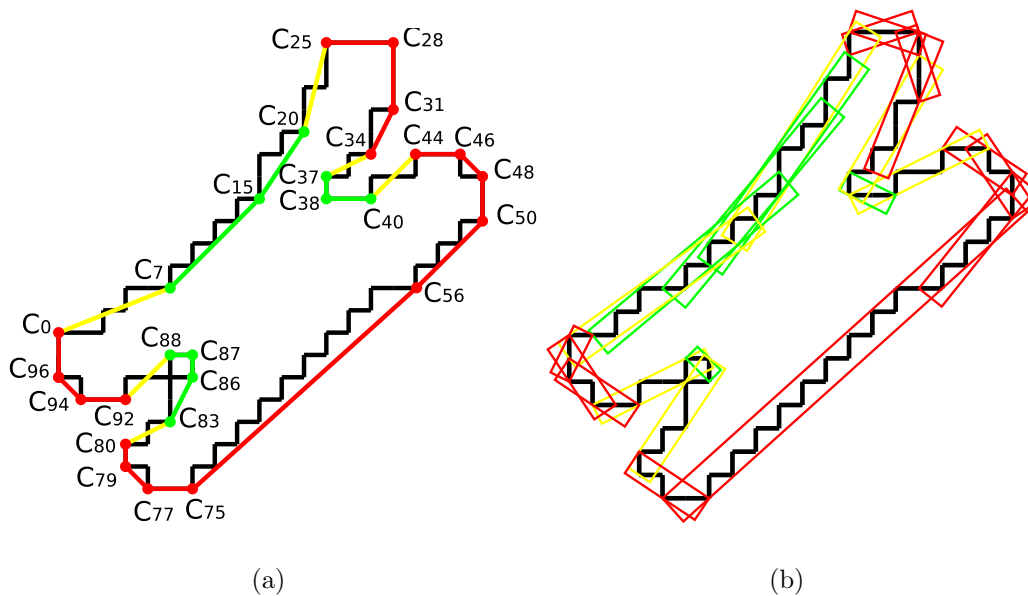


FIG. 5.8 – En (a) est représenté le polygone réversible du contour dessiné en noir (a). En (b) les parties convexes et concaves du contour sont mises en évidence à l'aide des segments maximaux afin de vérifier que le polygone obtenu en (a) respecte ses parties convexes et concaves.

**Algorithme 17** : Initialisation du calcul du polygone réversible  $\mathcal{P}(C)$

```

Entrées : Un contour  $C$ 
Sorties : Le premier segment  $C_{k|l}$ , l'orientation  $x$ , les premiers points de  $\mathcal{P}(C)$ 
            stockés dans liste
1  $k \leftarrow 0; l \leftarrow 1;$ 
   /* Premier segment maximal à l'avant */
2 tant que  $C_{k|l+1}$  est un segment de droite faire
3    $l \leftarrow l + 1;$  /* croissance vers l'avant */
4 si  $C_{l+1}$  est extérieur à gauche de  $D(C_{k|l})$  alors
5    $x \leftarrow droite;$  /* observation des points d'appui à droite */
6 sinon
7    $x \leftarrow gauche;$  /* observation des points d'appui à gauche */
8  $liste \leftarrow C_0;$  /* initialisation */
9  $liste \leftarrow liste +$  premier point d'appui à " $x$ " de  $C_{k|l};$ 

```

d'une montre de sorte que le premier segment maximal à l'avant s'étend jusqu'au point  $C_{13}$ . Ce premier segment, ainsi que sa droite strictement englobante, sont représentés fig. 5.9. Comme le point  $C_{14}$  est fortement extérieur à gauche de  $\mathcal{D}(C_{0|13})$ , le balayage démarre par une partie concave. Nous allons donc commencer par stocker les points d'appui à droite. Le premier d'entre eux est le point  $C_7$ . Dans la fig. 5.8, le segment reliant les points  $C_0$  et  $C_7$  est bien une arête du polygone.

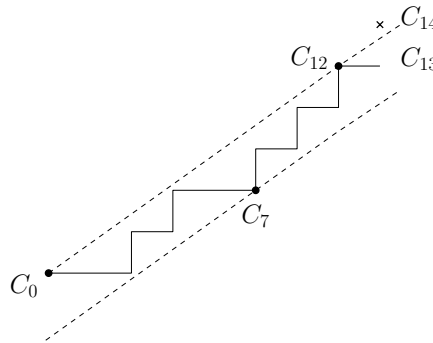


FIG. 5.9 – Initialisation de l'algorithme.

### 5.2.3.2 Corps de l'algorithme

L'algorithme 18 possède le même squelette que l'algorithme 16 qui énumère les segments maximaux. Toutefois, une opération supplémentaire, le stockage d'un point, est ajoutée. La réalisation de cette opération est déclenchée par deux événements différents :

- Les premier et dernier points d'appui du segment courant fusionnent lors de sa croissance à l'avant (théorème 5.1), lignes 4 et 5 de l'algorithme 18.

## 5.2. Extraction des sommets du polygone

---

- Les premier et dernier points d'appui du segment courant, confondus, se séparent lors de son érosion à l'arrière (corollaire 5.1), lignes 14 et 15 de l'algorithme 18.

---

### Algorithme 18 : Extraction des sommets du polygone réversible $\mathcal{P}(C)$

---

**Entrées :** Un contour  $C$ , le premier segment  $C_{k|l}$ , l'orientation  $x$

**Sorties :** La liste des sommets de  $\mathcal{P}(C)$

```

1 tant que le dernier sommet stocké est différent de  $C_0$  faire
2   si  $C_{k|l+1}$  est un segment de droite alors
3      $l \leftarrow l + 1$  ;                               /* croissance vers l'avant */
4     /* séparation des points d'appui */
5     si  $C_{k|l-1}$  ne possède qu'un point d'appui à " $x$ " alors que  $C_{k|l}$  en possède deux
6     alors
7        $liste \leftarrow liste +$  dernier point d'appui à " $x$ " de  $C_{k|l}$ ;
8   sinon
9     si  $C_{l+1}$  est fortement extérieur à " $x$ " de  $D(C_{k|l})$  alors
10       $x \leftarrow \neg x$  ; /* transition entre partie convexe et partie concave */
11    sinon
12      /* pour éviter les doublons */
13      si  $C_{k|l}$  a un seul point d'appui à " $x$ " alors
14        Retirer le dernier point ajouté dans  $liste$ ;
15      tant que  $C_{k|l+1}$  n'est pas un segment de droite faire
16         $k \leftarrow k + 1$  ;                               /* érosion à l'arrière */
17        /* fusion des points d'appui */
18        si  $C_{k|l}$  possède deux points d'appui à " $x$ " alors que  $C_{k-1|l}$  n'en possède
19        qu'un seul alors
20           $liste \leftarrow liste +$  premier point d'appui à " $x$ " de  $C_{k|l}$ ;
21  retourner  $liste$ 

```

---

Les transitions entre parties convexes et concaves sont naturellement traitées après permutation de l'orientation (lignes 7 et 8 de l'algorithme 18). Enfin, quand un segment maximal n'a qu'un point d'appui du côté gauche (respectivement droit) sur une partie convexe (respectivement concave), le dernier sommet stocké est retiré de la liste pour éviter les doublons (lignes 10 et 11 de l'algorithme 18).

Le déroulement de l'exemple de la fig. 5.8 se poursuit ligne 10 de l'algorithme 18. Comme  $C_{0|13}$  n'a qu'un seul point d'appui à droite,  $C_7$ , il est supprimé de la liste. Ensuite, l'érosion à l'arrière du segment supprime le point  $C_0$ . Or  $C_{1|14}$  est un segment de droite. Ce segment de droite est étendu jusqu'au point  $C_{16}$ .

Les différentes mises à jour (fig. 5.10.a, b et c) de la droite englobant strictement le segment courant n'entraînent aucun déplacement du point d'appui à droite. Ainsi, malgré ces changements, aucun nouveau point n'est ajouté dans la liste.

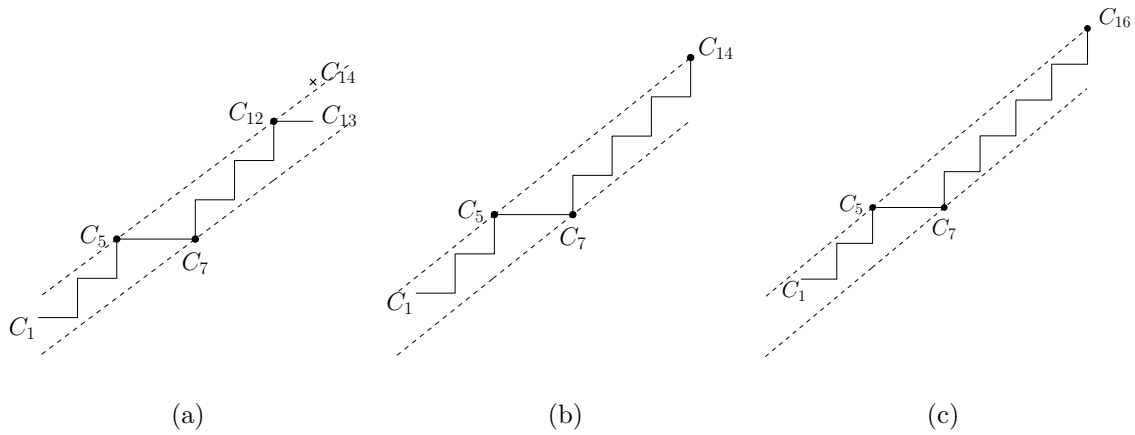


FIG. 5.10 – Droite englobant strictement les segments  $C_{1|13}$  en (a),  $C_{1|14}$  en (b) et  $C_{1|16}$  en (c).

Le segment  $C_{1|16}$  est maximal à l'avant car  $C_{1|17}$  n'est pas un segment de droite. L'érosion à l'arrière du segment élimine les points  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  et  $C_4$  sans aucune mise à jour (fig. 5.10.c et fig. 5.11.a). En revanche, la suppression du point  $C_5$  entraîne une augmentation de la pente du segment et un dédoublement du point d'appui à droite (fig. 5.11.b). Le premier, c'est-à-dire  $C_7$ , est ajouté à la liste (ligne 15 de l'algorithme 18). Le segment  $C_{6|16}$  est ensuite étendu au point  $C_{17}$  car  $C_{6|17}$  est un segment de droite. Or le point  $C_{17}$ , faiblement extérieur à gauche de  $\mathcal{D}(C_{6|16})$ , entraîne une fusion des points d'appui à droite (fig. 5.11.c). Le point  $C_{15}$  est donc ajouté à la liste (ligne 5 de l'algorithme 18).

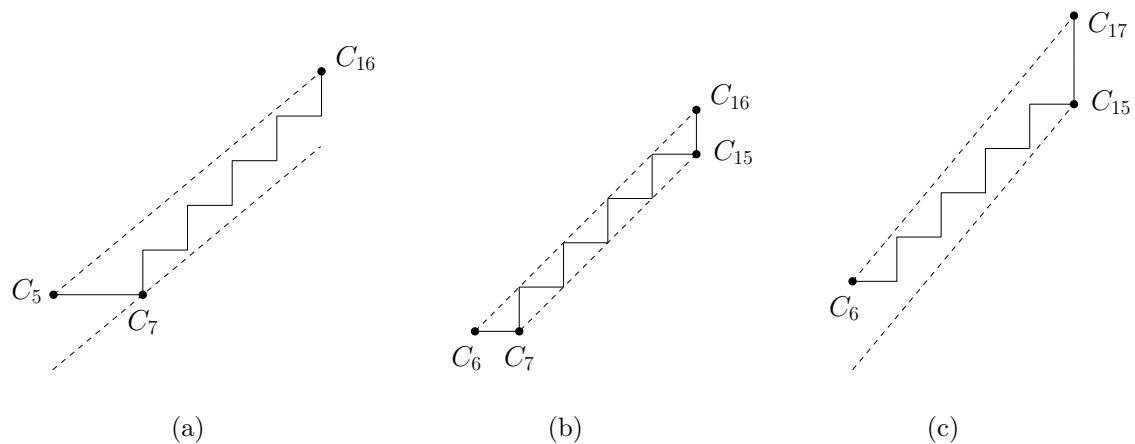


FIG. 5.11 – Identification des points  $C_7$  et  $C_{15}$  comme sommet du polygone après érosion à l'arrière (a)-(b) et croissance à l'avant (b)-(c) du segment courant.

Dans la fig. 5.8, le segment reliant les points  $C_7$  et  $C_{15}$  est bien une arête du polygone.

## 5.3 Réversibilité

Par construction, le polygone obtenu par l'algorithme précédent respecte les parties convexes et concaves. Ce polygone est de plus réversible. L'objet de cette section est de décrire comment retrouver le contour à partir du polygone. Comme tous les sommets du polygone sont des points du contour, il suffit de retrouver les points du contour localisés entre chacun de ses sommets pour assurer la réversibilité. Or, par construction, les points du contour situés entre deux sommets consécutifs forment un segment de droite discrète. Il serait aisé de retrouver ces points par tracé en connaissant les paramètres de la droite discrète. Ces paramètres sont inconnus, mais se déduisent facilement des paramètres de la droite euclidienne passant par les deux sommets consécutifs du polygone.

Cette déduction dépend du type d'arête considéré. Soient quatre sommets consécutifs, notés respectivement  $C_e$ ,  $C_f$ ,  $C_g$  et  $C_h$ . L'arête  $\vec{e} = C_g - C_f$  porte une droite désignée par  $\mathcal{L}$ . La droite  $\mathcal{L}$  est orientée dans le même sens que  $\vec{e}$  et sépare le plan en un côté gauche et un côté droit.

Pour déterminer quel est le type de l'arête  $\vec{e}$ , il suffit de considérer la position des deux sommets extrémités,  $C_e$  et  $C_h$ , par rapport à  $\mathcal{L}$ .

- Si  $C_e$  et  $C_h$  sont tous deux à droite de  $\mathcal{L}$ , alors  $\vec{e}$  est une *arête d'arc convexe* (fig. 5.12.a).
- Si  $C_e$  et  $C_h$  sont tous deux à gauche de  $\mathcal{L}$ , alors  $\vec{e}$  est une *arête d'arc concave* (fig. 5.12.b).
- Si  $C_e$  et  $C_h$  sont de part et d'autre de  $\mathcal{L}$ , alors  $\vec{e}$  est une *arête de transition*.
  - Si  $C_e$  est à droite de  $\mathcal{L}$ , tandis que  $C_h$  est à gauche de  $\mathcal{L}$ , la transition est dans le sens convexe-concave (fig. 5.12.c).
  - Si  $C_e$  est à gauche de  $\mathcal{L}$ , tandis que  $C_h$  est à droite de  $\mathcal{L}$ , la transition est dans le sens concave-convexe (fig. 5.12.d).

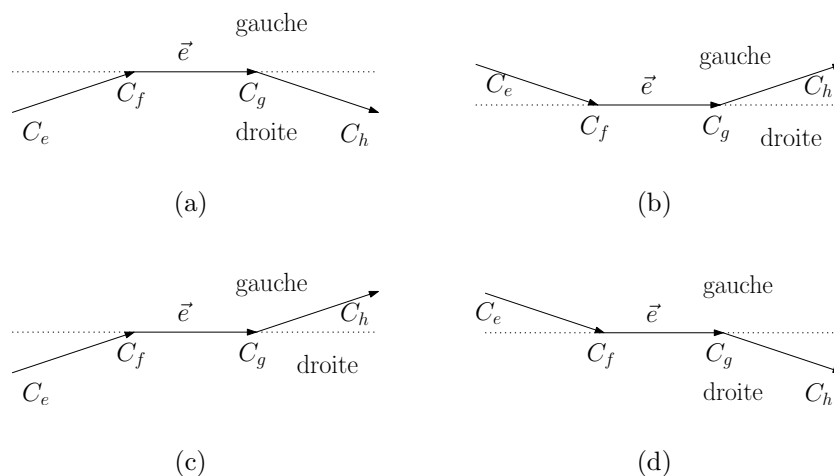


FIG. 5.12 – Définitions des arêtes d'arc convexe (a), d'arc concave (b), de transition dans le sens convexe-concave (c) et dans le sens concave-convexe (d).

### 5.3.1 Discrétisation d'une arête d'arc convexe ou concave

Pour discrétiser une arête d'arc convexe ou concave, l'algorithme 19 est utilisé. Ce n'est rien d'autre qu'un processus de discrétisation OBQ ou BBQ présenté sous le formalisme arithmétique [Reveillès, 1991].

---

**Algorithme 19** : Procédure  $\text{Tracer}(a,b,r,d_x,d_y,P,Q)$

---

**Entrées** : Deux points du contour  $P$  et  $Q$

**Sorties** : La pile des points du contour entre  $P$  et  $Q$

```

1 tant que  $P \neq Q$  faire
2   si  $r < b$  alors
3     |  $r \leftarrow r + a; P_x \leftarrow P_x + d_x;$            /* déplacement horizontal */
4   sinon
5     |  $r \leftarrow r - b; P_y \leftarrow P_y + d_y;$        /* déplacement vertical */
6   Empiler  $P;$                                            /* dessiner  $P$  */
7 retourner pile

```

---

Le fonctionnement de cet algorithme est illustré dans la fig. 5.13. Deux points du contour,  $P$  et  $Q$ , formant dans le premier quadrant une arête d'arc convexe (fig. 5.13.a) ou d'arc concave (fig. 5.13.b) sont à relier par une partie de contour correspondant à un segment de droite discrète. Le tracé dans les autres quadrants est symétrique (tableau 5.1).

quadrant	arête d'arc convexe	arête d'arc concave
# 1	$\text{Tracer}( a , b ,0,1,1,P,Q)$	$\text{Tracer}( a , b , a  +  b  - 1,1,1,P,Q)$
# 2	$\text{Tracer}( a , b , a  +  b  - 1,-1,1,P,Q)$	$\text{Tracer}( a , b ,0,-1,1,P,Q)$
# 3	$\text{Tracer}( a , b ,0,-1,-1,P,Q)$	$\text{Tracer}( a , b , a  +  b  - 1,-1,-1,P,Q)$
# 4	$\text{Tracer}( a , b , a  +  b  - 1,-1,-1,P,Q)$	$\text{Tracer}( a , b ,0,-1,1,P,Q)$

TAB. 5.1 – Appel de la fonction  $\text{Tracer}$  qui retrouve le segment de droite discrète délimité par les points  $P$  et  $Q$  du contour. Le quadrant dépend du signe de  $a$  et  $b$  où  $a = Q_y - P_y$  et  $b = Q_x - P_x$ .

La pente est calculée à partir des points  $P$  et  $Q$  :  $a = Q_y - P_y$  et  $b = Q_x - P_x$ .  $d_x$  et  $d_y$  sont calculées à partir du signe de  $a$  et  $b$ .  $d_x = 1$  si  $b \geq 0$  et  $d_x = -1$  sinon. De même,  $d_y = 1$  si  $a \geq 0$  et  $d_y = -1$  sinon. Il reste à initialiser la quantité  $r$ , affectée à  $P$ . Si  $[PQ]$  est une arête d'arc convexe,  $P$  et  $Q$  sont des points d'appui à gauche,  $r = 0$  pour obtenir une discrétisation OBQ (fig. 5.13.a). Par contre, si  $[PQ]$  est une arête d'arc concave,  $P$  et  $Q$  sont des points d'appui à droite,  $r = |a| + |b| - 1$  pour obtenir une discrétisation BBQ (fig. 5.13.b).

L'algorithme est ensuite très simple : si  $r < |b|$ ,  $r$  est augmenté de  $|a|$  et le point  $P$  est déplacé horizontalement, sinon  $r$  est diminué de  $|b|$  et  $P$  est déplacé verticalement, de sorte que  $r$  soit maintenu entre 0 et  $|a| + |b|$  (fig. 5.13). Le premier sommet,  $P$ , est exclu du résultat, car il est retrouvé lors du traitement de l'arête précédente.



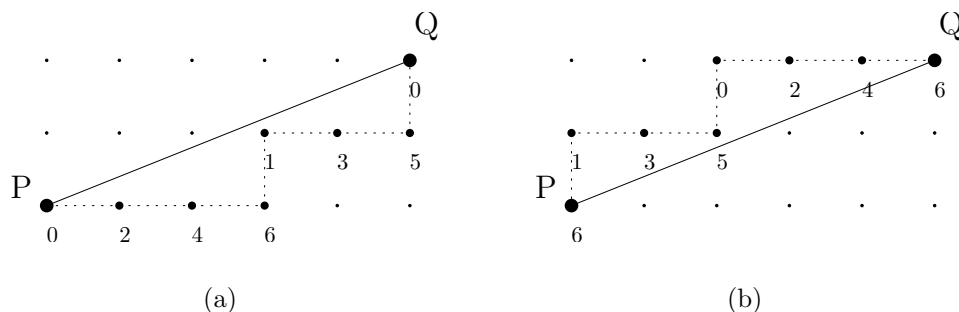


FIG. 5.13 – Tracé d'une arête d'arc convexe (a) et d'arc concave (b) dans le premier quadrant.

### 5.3.2 Discrétisation d'une arête de transition

La discrétisation d'une arête de transition semble plus difficile. Ses deux sommets ne sont pas deux points d'appui à gauche ou à droite d'un segment de droite. L'un est point d'appui à gauche et l'autre point d'appui à droite. Le premier des deux points de l'arête est un point d'appui à gauche si la transition est dans le sens convexe-concave, un point d'appui à droite si la transition est dans le sens concave-convexe.

Or les points d'appui à gauche (respectivement à droite) correspondent aux points faiblement extérieurs du côté opposé quand ils sont tranlatés par le vecteur  $\vec{s}$  (respectivement  $-\vec{s}$ ) qui dépend uniquement du quadrant dans lequel se trouve le segment de droite discrète. Les valeurs de  $\vec{s}$  sont données dans le tableau 4.2.

La discrétisation d'une arête de transition est illustrée dans la fig. 5.14. Deux points du contour,  $P$  et  $Q$ , formant dans le premier quadrant une arête de transition dans le sens convexe-concave (fig. 5.14.a) et concave-convexe (fig. 5.14.b) sont à relier par une partie de contour correspondant à un segment de droite discrète. La discrétisation de l'arête de transition n'est rien d'autre que la discrétisation OBQ ou BBQ du segment  $[P'Q]$  où  $P' = P - \vec{s}$  si la transition est convexe-concave et  $P' = P + \vec{s}$  si la transition est concave-convexe. L'algorithme 19 est donc encore utilisé dans le cas des arêtes de transition. Comme l'algorithme 19 exclut du résultat le premier sommet, débiter le tracé par le point  $P'$ , qui n'appartient pas au contour, ne pose aucun problème.

En définitive, chaque arête de  $\mathcal{P}(C)$  est discrétisée selon un processus qui dépend de son type et de son orientation. Cette discrétisation, réalisée par l'algorithme 19, permet de retrouver la partie de contour située entre deux sommets consécutifs de  $\mathcal{P}(C)$ , de sorte qu'une fois l'ensemble des arêtes traité,  $C$  est intégralement reconstitué (fig. 5.8).

## 5.4 Applications

Le polygone réversible respectant les parties convexes et concaves est potentiellement l'objet de nombreuses applications. Il est étroitement lié au polygone de longueur minimale

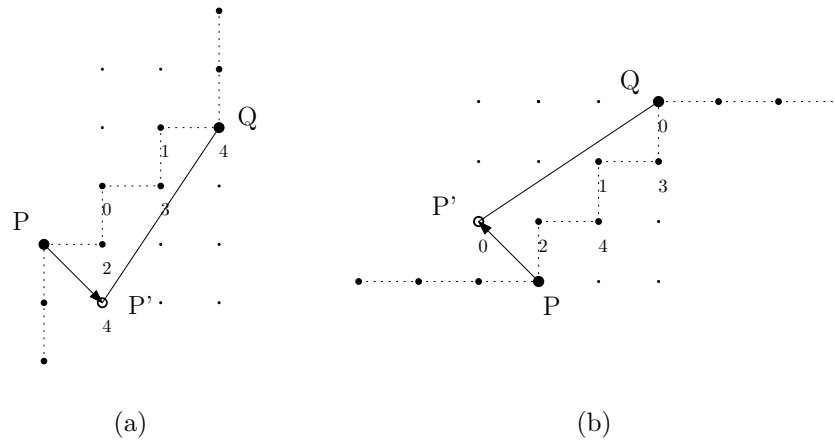


FIG. 5.14 – Tracé d’une arête de transition convexe-concave (a) et concave-convexe (b) dans le premier quadrant.

séparant l’objet  $X$  du fond  $\bar{X}$ . De plus, comme il respecte les parties convexes et concaves du contour, il est un bon point de départ pour une représentation hiérarchique du contour par simplification polygonale.

### 5.4.1 Polygone de longueur minimale

Le polygone réversible  $\mathcal{P}(C)$  respectant les parties convexes et concaves du contour  $C$  est constitué de sommets d’enveloppes convexes partielles calculées sur  $C$ , mais étroitement liés à leurs homologues calculées sur  $X$  (section 5.1.1). Il est donc tout à fait normal, de retrouver à partir de  $\mathcal{P}(C)$ , le polygone de longueur minimale séparant  $X$  de  $\bar{X}$  [Sklansky *et al.*, 1972; Sloboda *et al.*, 1998; Klette *et al.*, 1999; Provencal et Lachaud, 2009], parfois appelé enveloppe convexe relative. La fig. 5.15 met en parallèle le polygone réversible en (a) et le polygone de longueur minimale en (b).

Les sommets du polygone de longueur minimale s’obtiennent aisément à partir des sommets de  $\mathcal{P}(C)$ . Un sommet est déplacé par le vecteur  $(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$ , en fonction de ses deux voisins :

- les trois sommets sont orientés dans le sens des aiguilles d’une montre :

quadrant de la seconde arête	vecteur déplacement
# 1	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
# 2	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
# 3	$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
# 4	$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

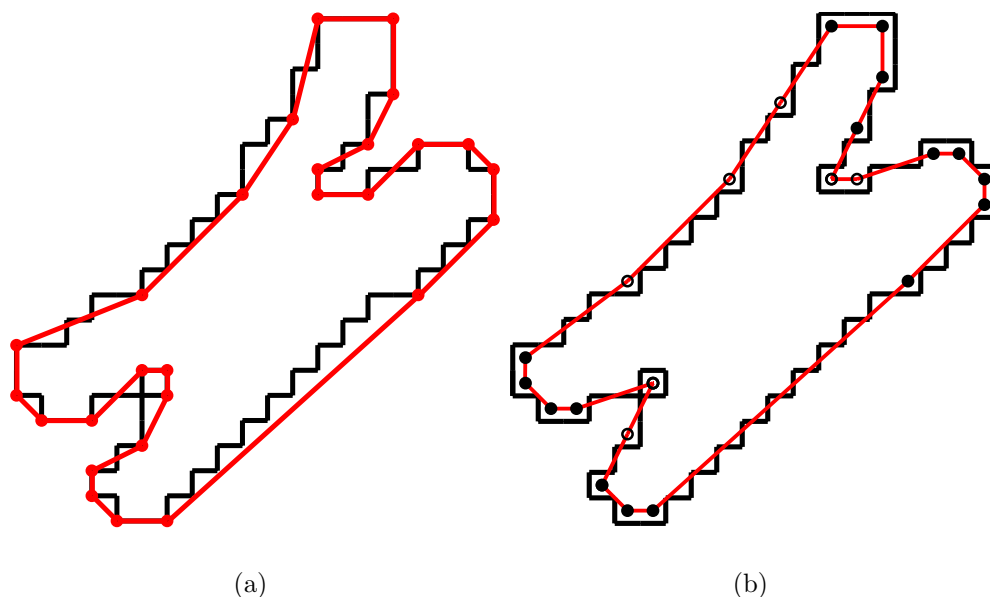


FIG. 5.15 – En (a) est représenté le polygone réversible du contour dessiné en noir (a). En (b) ses sommets sont translatés pour obtenir le polygone de longueur minimale séparant  $X$  de  $\bar{X}$ . Les disques noirs sont des points de  $X$ , tandis que les disques blancs sont des points de  $\bar{X}$ .

– les trois sommets sont orientés dans le sens inverse :

quadrant de la première arête	vecteur déplacement
# 1	$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
# 2	$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
# 3	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
# 4	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Le périmètre du polygone de longueur minimale séparant  $X$  de  $\bar{X}$  est une bonne estimation du périmètre d'un contour (voir par exemple [Coeurjolly et Klette, 2004]). De plus, comme il représente lui aussi fidèlement les parties convexes et concaves du contour, il peut jouer un rôle important dans la décomposition en arcs de cercle d'un contour suivant l'approche par séparation. Dans une partie convexe (respectivement concave), une partie de contour  $C_{i|j}$  est un arc de cercle discret si et seulement si un disque euclidien contient  $X_{i|j}$ , mais pas  $\bar{X}_{i|j}$  (respectivement  $\bar{X}_{i|j}$ , mais pas  $X_{i|j}$ ). En outre, un cercle, étant convexe, ne peut contenir les sommets de  $\mathcal{E}_g(X_{i|j})$  (respectivement  $\mathcal{E}_d(\bar{X}_{i|j})$ ) sans contenir tous les points de  $X_{i|j}$  (respectivement  $\bar{X}_{i|j}$ ). Le polygone de longueur minimale est composé d'enveloppes convexes partielles à gauche dans les parties convexes et d'enveloppes convexes partielles à droite dans les parties concaves. Ainsi, les sommets du polygone de longueur minimale sont les points à encercler dans une décomposition en arcs de cercle. Les points de  $\bar{X}$  les plus proches des arêtes du polygone de longueur minimale, en particulier ceux situés près de la médiatrice des arêtes sont les points à ne pas encercler. La fig. 5.16 montre

comment le polygone de longueur minimale en (a), fournit les points à encercler en (b) et (c). Pour chaque arête, parmi les points de  $\bar{X}$  les plus proches en (b), seuls ceux autour de la médiatrice sont les points à ne pas encercler en (c).

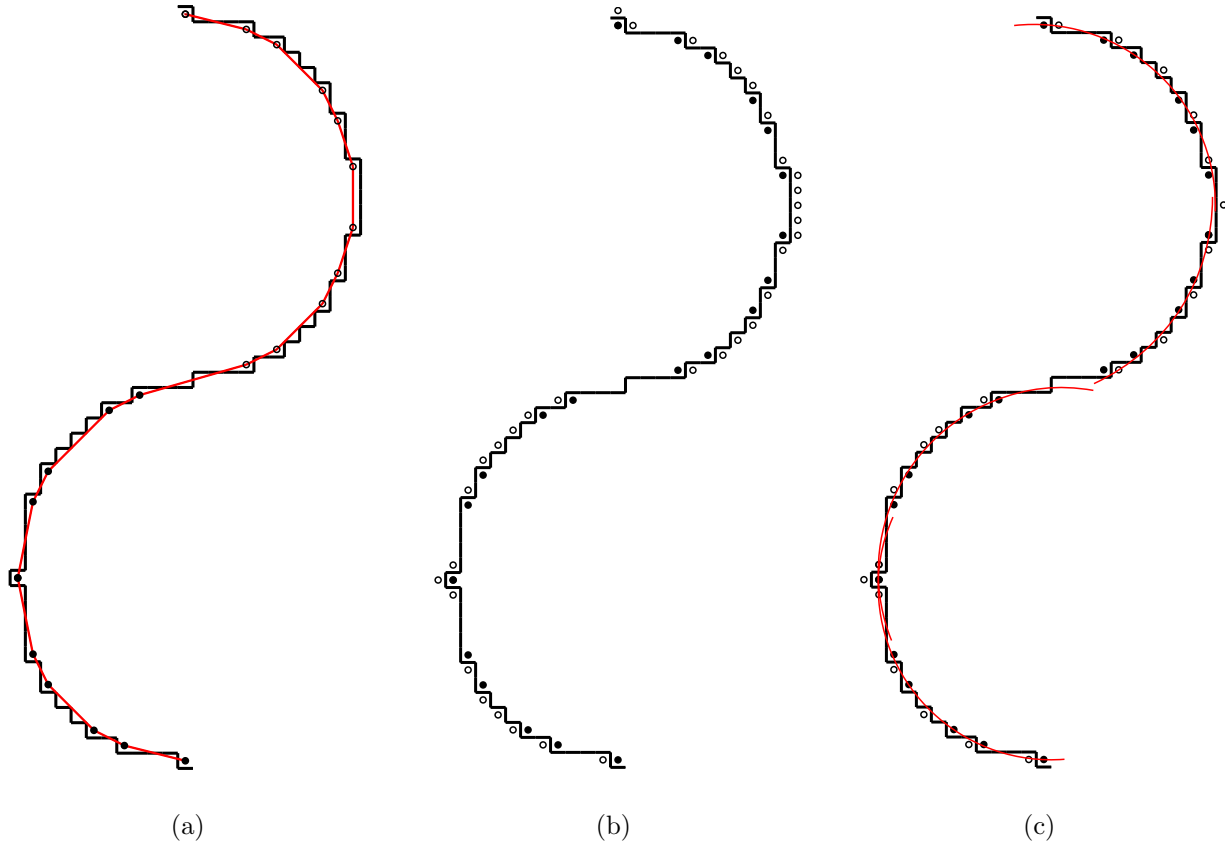


FIG. 5.16 – En (a), les sommets du polygone de longueur minimale (en rouge) sont des points de  $X$  (en noir) et des points de  $\bar{X}$  (en blanc). En (b), les sommets du polygone de longueur minimale sont représentés par des disques noirs, tandis que les points de  $\bar{X}$  les plus proches de chaque arête sont représentés par des disques blancs. En (c), les sommets du polygone de longueur minimale sont séparés des points de  $\bar{X}$  les plus proches de chaque arête et de leur médiatrice par des arcs de cercle rouges.

Les chapitres 6 et 7 sont consacrés à la reconnaissance et à l'extraction des arcs de cercle discret. Les points à retenir dans le calcul sont rigoureusement déterminés dans le chapitre 6.

### 5.4.2 Représentation hiérarchique

Latecki et Lakämper [1999] ont élaboré une méthode de simplification polygonale qui procède par linéarisations successives. Une linéarisation consiste à retirer un sommet du

polygone traité et à relier par un segment de droite les deux sommets voisins du sommet supprimé. Cette tâche est répétée jusqu'à ce que le polygone obtenu soit convexe ou jusqu'à ce qu'une distance avec le polygone de départ soit dépassée. L'important est de choisir l'ordre le plus pertinent avec lequel éliminer les sommets. Latecki et Lakämper [1999] ont proposé une règle qui fournit de bons résultats. Le sommet enlevé est celui incident aux arêtes  $e_i$  et  $e_j$  qui minimisent la quantité suivante :

$$\frac{\beta(e_i, e_j)l(e_i)l(e_j)}{l(e_i) + l(e_j)} \quad (5.1)$$

où  $l(e)$  est la longueur de l'arête  $e$  et  $\beta(e_i, e_j)$  est l'angle que forme  $e_j$  avec la droite portée par  $e_i$  dans le sens donné par l'orientation des sommets de  $e_i$  et  $e_j$  (fig. 5.17).

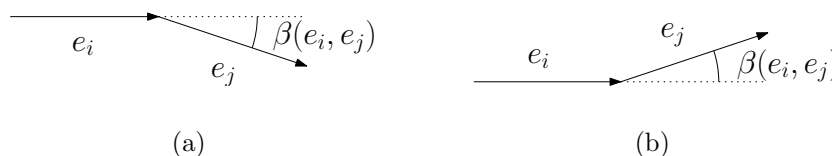


FIG. 5.17 – Définition de  $\beta(e_i, e_j)$ .

Le polygone réversible que nous avons défini dans ce chapitre est un bon point de départ sur lequel appliquer la méthode de Latecki et Lakämper [1999], puisqu'il respecte les parties convexes et concaves du contour.

La fig. 5.18 exhibe les polygones obtenus à différentes étapes de la simplification. Le polygone de départ est celui de l'étape 0, en (a). C'est le polygone réversible qui respecte les parties convexes et concaves du contour de la fig. 5.8.a. Le polygone de l'étape 5, en (b), possède 5 sommets de moins et le polygone de l'étape 10, en (c), possède 5 sommets de moins que celui de l'étape 5. Le polygone de l'étape 15, en (d), comporte autant de parties convexes et concaves que n'en comporte le contour noir, mais seuls les traits les plus caractéristiques de la forme générale restent. A l'étape suivante, en (e), il ne reste plus que deux parties convexes, ce qui met en évidence les deux parties du chromosome. A l'étape 20, en (f), un polygone de seulement 6 sommets décrit les caractéristiques les plus importantes de la forme générale du contour.

Cette méthode de simplification possède de nombreux avantages :

- la hiérarchie de polygones obtenus offrent la possibilité de choisir celui le plus adapté à un contexte et un objectif donné pour représenter un contour.
- les sommets de tous les polygones de la hiérarchie sont des sommets du polygone de départ.
- le résultat est robuste au bruit, puisque le bruit est éliminé durant les premières étapes de la simplification.
- les caractéristiques les plus importantes sont conservées dans les étapes les plus avancées de la simplification.
- l'implémentation est aisée.

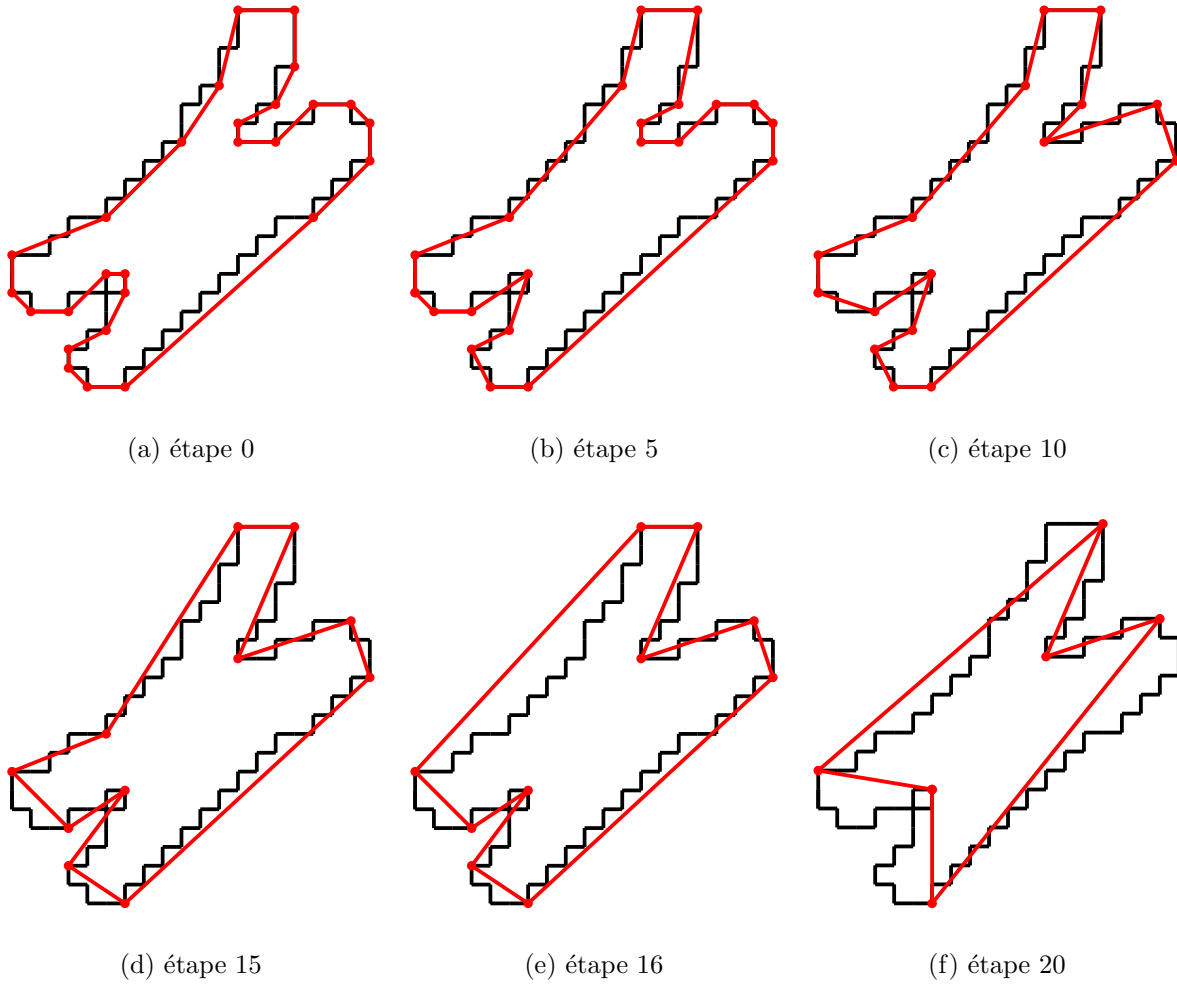


FIG. 5.18 – Simplification par la méthode de Latecki et Lakämper [1999] du polygone réversible qui respecte les parties convexes et concaves du contour dessiné en noir.

Cette méthode peut être utilisée pour décomposer de manière robuste un contour en parties convexes et concaves. Un certain nombre de sommets sont supprimés de sorte que le polygone de départ soit simplifié. Les parties convexes et concaves du polygone obtenu sont des successions d'arêtes dont la pente varie de façon monotone. Comme le premier et le dernier sommet d'une suite d'arêtes sont des points du contour, les parties convexes et concaves robustes du contour sont les points encadrés par deux sommets du polygone simplifié. Dans la fig. 5.19.a, le polygone issu de l'étape numéro 20 possède deux parties convexes et deux parties concaves. Transposer ce résultat sur le contour met en évidence deux moitiés (fig. 5.19.b), alors qu'il y a au sens strict trois parties convexes (fig. 5.8.b).

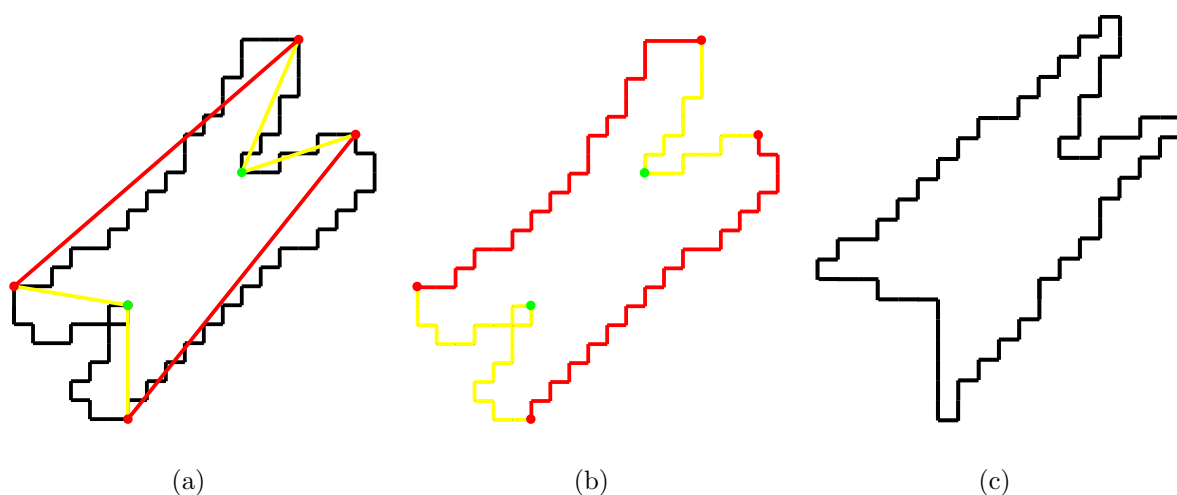


FIG. 5.19 – Les arcs convexes et concaves d'un polygone issu de l'étape 20 de la simplification (a) décomposent de manière robuste les parties convexes et concaves du contour (b). La discrétisation d'un tel polygone fournit un contour simplifié (c).

Dans le même ordre d'idée, le contour lui-même peut être simplifié en discrétisant le polygone obtenu, comme le montre la fig. 5.19.c.

Cependant, plusieurs problèmes restent à résoudre :

- il manque un critère qui arrête la simplification à l'étape la plus adaptée au contexte et à l'objectif de l'application.
- la réversibilité n'est pas assurée sur les polygones donnés par la simplification. Si le polygone  $\mathcal{P}_i(C)$  issu de l'étape  $i$  de la simplification ( $i \neq 0$ ) est discrétisé, le polygone réversible calculé sur le contour obtenu est en général différent de  $\mathcal{P}_i(C)$ .
- la règle de simplification de l'équation 5.1 n'est pas évaluée en nombre entiers, ce qui est source d'imprécisions.
- Un sommet est supprimé après avoir passé en revue tous les sommets du polygone courant, c'est-à-dire en  $\mathcal{O}(n)$ . Au plus  $n - 3$  sommets sont retirés. Ainsi le calcul de l'ensemble de la hiérarchie polygonale est quadratique, c'est-à-dire en  $\mathcal{O}(n^2)$ . Comme à chaque étape la quantité 5.1 n'est recalculée que pour les deux sommets voisins à celui supprimé, l'utilisation d'une file de priorité peut abaisser la complexité à

$\mathcal{O}(n \log n)$ . Pour accélérer encore ce processus, plusieurs sommets pourraient être enlevés en même temps. La complexité serait linéaire si une fraction constante de sommets était supprimée à chaque étape.

## 5.5 Conclusion

Nous avons consacré ce chapitre à l'extraction d'un polygone réversible qui respecte les parties convexes et concaves d'un contour. La réversibilité implique l'existence d'un algorithme qui retrouve, uniquement à partir du polygone, décrit par ses sommets, le contour à partir duquel il a été extrait. La seconde condition suppose que le polygone possède autant de parties convexes et concaves que n'en possède le contour.

Ce problème a été soulevé par Eckhardt et Dorksen-Reiter, mais dans leur formulation, il ne possédait pas de solution satisfaisante. Nous avons montré que si les sommets sont des points du contour, et non du bord, et si le processus de discrétisation varie selon la configuration locale, au lieu d'être fixe et déterminé à l'avance, les contraintes de réversibilité et de respect des parties convexes et concaves peuvent être toutes les deux vérifiées.

L'algorithme qui calcule ce polygone est relativement simple, dans le sens où il ne repose que sur deux algorithmes bien connus : l'un réalise la croissance vers l'avant d'un segment de droite et l'autre son érosion à l'arrière. La combinaison de ces deux algorithmes permet d'énumérer l'ensemble des segments maximaux recouvrant un contour. Le polygone est calculé suivant le même principe. Toutefois, une opération supplémentaire, le stockage d'un nouveau sommet, est déclenchée quand les premier et dernier points d'appui du segment courant fusionnent lors de sa croissance à l'avant ou quand les premier et dernier points d'appui du segment courant, confondus, se séparent lors de son érosion à l'arrière. L'algorithme est linéaire en la taille du contour, exact et rapide, car le formalisme arithmétique employé n'implique que des calculs en nombres entiers.

Le polygone est potentiellement l'objet de nombreuses applications. On peut en déduire aisément le polygone de longueur minimale séparant l'objet du fond, dont le périmètre est une bonne estimation du périmètre du contour. Comme il respecte les parties convexes et concaves du contour, il peut être utilisé pour forcer une décomposition en arcs de cercle à représenter fidèlement la physionomie d'un contour. Il est un bon point de départ pour une représentation hiérarchique du contour par simplification polygonale, ce qui est de première importance pour la mise en évidence des traits visuellement significatifs d'un contour ou la suppression du bruit. Une perspective intéressante serait de chercher un processus d'évolution purement discret permettant d'obtenir en temps linéaire une hiérarchie de polygones réversibles.



**Troisième partie**

**Modèles circulaires**



# *Reconnaissance d'arcs de cercle et mesure de circularité*

## Sommaire

---

<b>6.1 Étude de l'existant . . . . .</b>	<b>144</b>
6.1.1 Définitions du cercle discret . . . . .	144
6.1.2 Problème de séparation par un cercle . . . . .	145
6.1.2.1 Problème de programmation linéaire 3D . . . . .	145
6.1.2.2 Problème de programmation linéaire 2D . . . . .	147
6.1.2.3 Problème de séparation linéaire 3D . . . . .	148
<b>6.2 Reconnaissance d'arcs de cercle . . . . .</b>	<b>149</b>
6.2.1 Calcul de $\mathcal{E}^3(\mathcal{S}')$ et $\mathcal{E}^3(\mathcal{T}')$ . . . . .	150
6.2.2 Calcul de la hauteur entre $\mathcal{E}^3(\mathcal{S}')$ et $\mathcal{E}^3(\mathcal{T}')$ . . . . .	151
6.2.3 Algorithme et complexité . . . . .	152
<b>6.3 Optimisation . . . . .</b>	<b>153</b>
6.3.1 Calcul de $\hat{\mathcal{S}}$ . . . . .	153
6.3.2 Calcul de $\hat{\mathcal{T}}$ . . . . .	153
6.3.3 Algorithme et complexité . . . . .	158
<b>6.4 Mesure de circularité . . . . .</b>	<b>160</b>
6.4.1 Inconvénients des mesures existantes . . . . .	160
6.4.2 Définition de la mesure . . . . .	163
6.4.3 Résultats expérimentaux . . . . .	164
6.4.3.1 Polygones réguliers . . . . .	166
6.4.3.2 Ellipses . . . . .	166
6.4.3.3 Cercles bruités . . . . .	167
<b>6.5 Conclusion . . . . .</b>	<b>168</b>

---

Ce chapitre est consacré à la reconnaissance d'arcs de cercle ainsi qu'à la définition et au calcul d'une mesure de circularité. Après un état de l'art complet des différents algorithmes existants, un algorithme original de reconnaissance d'arcs de cercle est présenté. Une mesure de circularité se calcule sans surcoût à l'aide du même algorithme. Ce travail a d'abord été présenté à *The 2008 International Conference on Image Processing, Computer Vision, and Pattern Recognition (IPCV'08)* [Roussillon *et al.*, 2008b]. Une version étendue est publiée dans *Pattern Recognition* [Roussillon *et al.*, 2010].

## 6.1 Étude de l'existant

### 6.1.1 Définitions du cercle discret

Les cercles discrets ont été d'abord définis par discrétisation. Bresenham [1977] considère une discrétisation de type GIQ. Kim [1984]; Kim et Anderson [1984] travaillent avec le bord de disques discrets définis par discrétisation de Gauss (fig. 6.1.a). Selon la définition 1.19, une partie  $C_{ij}$  d'un contour  $C$  est un arc de cercle discret si et seulement s'il existe un cercle euclidien qui sépare  $X_{ij}$  de  $\bar{X}_{ij}$ . C'est l'adaptation au contour de la définition par discrétisation de Gauss (fig. 6.1.b). Cette définition est équivalente à celle de Kovalevsky [1990].

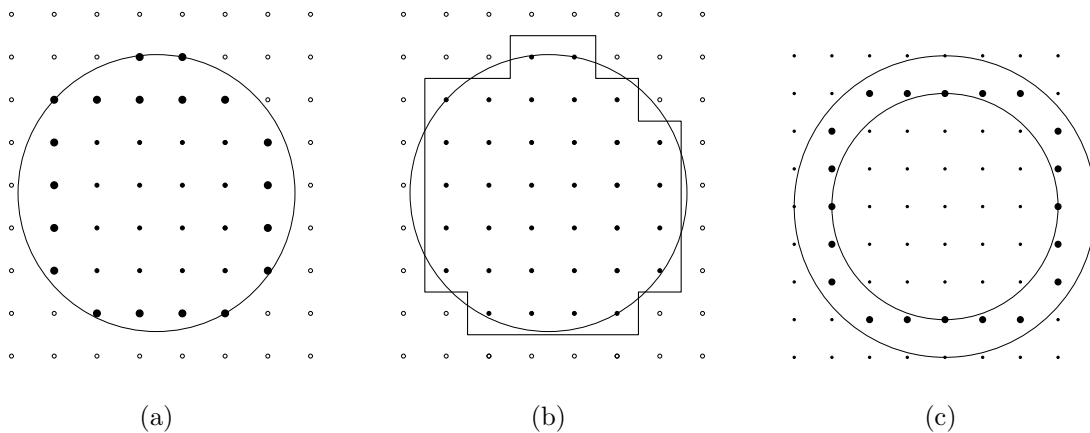


FIG. 6.1 – Différentes définitions du cercles discrets. Bord (a) et contour (b) de la discrétisation de Gauss d'un cercle. Cercle arithmétique (c).

Andres [1994] a été le premier à proposer une définition analytique du style de celle proposée pour les droites discrètes [Reveillès, 1991]. Les *cercles arithmétiques* de centre  $\omega$  et de rayon  $r$  (où  $\omega \in \mathbb{Z}^2$  et  $r \in \mathbb{Z}$ ) sont définis comme l'ensemble des points  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  vérifiant la double inégalité suivante :  $(r - \frac{1}{2}) \leq (x - \omega_x)^2 + (y - \omega_y)^2 < (r + \frac{1}{2})$  (fig. 6.1.c).

Le formalisme analytique offre la possibilité de tester directement si un point donné appartient ou non à un cercle arithmétique donné. De plus, les cercles arithmétiques ont la propriété de paver le plan, ce qui peut être utile dans certaines applications. En revanche,

ils ne sont ni strictement 0-connexes, ni strictement 1-connexes. Pour dépasser ces problèmes, Fiorio *et al.* [2006]; Fiorio et Toutant [2006] ont proposé une définition analytique des cercles discrets comprenant une fonction d'épaisseur non constante.

Cependant, la définition par discrétisation de Gauss est celle qui semble la plus adaptée aux données réelles et celle qui rend le problème de reconnaissance traitable par des outils issus de la géométrie algorithmique. En effet, le problème de reconnaissance de cercles discrets définis par discrétisation de Gauss revient à un problème de séparation de deux ensembles de points, ceux de l'objet et ceux du fond, par un cercle. Cette approche a été largement adoptée [Kim, 1984; Kim et Anderson, 1984; O'Rourke *et al.*, 1986; Fisk, 1986; Kovalevsky, 1990; Sauer, 1993; Efrat et Gotsman, 1994; Coeurjolly *et al.*, 2004].

### 6.1.2 Problème de séparation par un cercle

Étant donnés deux ensembles de points, le problème de séparation par un cercle consiste à trouver les cercles qui englobent les points de l'un des deux ensembles, sans englober les points de l'autre.

Soient  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{T}$  deux ensembles de points de  $\mathbb{R}^2$ . Sans perte de généralité,  $\mathcal{S}$  est supposé être l'ensemble des points à encercler et  $\mathcal{T}$ , l'ensemble des points à ne pas encercler. Le problème revient à chercher les cercles  $\mathcal{C}(\omega, r)$  tels que les points de  $\mathcal{S}$  sont à l'intérieur de  $\mathcal{C}$ , tandis que les points de  $\mathcal{T}$  sont strictement à l'extérieur de  $\mathcal{C}$  :

$$\begin{cases} \forall s \in \mathcal{S}, (s_x - \omega_x)^2 + (s_y - \omega_y)^2 \leq r^2 \\ \forall t \in \mathcal{T}, (t_x - \omega_x)^2 + (t_y - \omega_y)^2 > r^2 \end{cases} \quad (6.1)$$

Ce problème de séparation peut être reformulé comme un problème de programmation linéaire (section 2.1). En effet, l'équation 6.1 peut être développée ainsi :

$$\begin{cases} \forall s \in \mathcal{S}, -2as_x - 2bs_y + f(s_x, s_y) + c \leq 0 \\ \forall t \in \mathcal{T}, -2at_x - 2bt_y + f(t_x, t_y) + c > 0 \end{cases} \quad (6.2)$$

où  $\begin{cases} a = \omega_x, & b = \omega_y, \\ c = (a^2 + b^2 - r^2) \\ f(x, y) = x^2 + y^2 \end{cases}$

En outre, le programme linéaire associé à ce problème s'interprète géométriquement dans l'espace des paramètres  $abc$  comme dans son espace dual  $xyz$  (section 2.2.2). Le tableau 6.1 récapitule les principales interprétations géométriques de ce problème et sert de support visuel à l'état de l'art suivant.

#### 6.1.2.1 Problème de programmation linéaire 3D

Dans l'espace des paramètres  $abc$ , le fait qu'un point de  $\mathcal{S}$  (respectivement  $\mathcal{T}$ ) soit à l'intérieur (respectivement à l'extérieur) d'un cercle, écrit sous la forme d'une inégalité dans l'équation 6.2, est une contrainte. Les paramètres respectant une contrainte sont les coordonnées d'un point qui appartient à un demi-espace délimité par un plan tangent au paraboloïde d'équation  $c = a^2 + b^2$ , lieu des cercles de rayon nul.

espace $abc$		espace $xyz$	
domaine non vide		$\mathcal{S}'$ et $\mathcal{T}'$ linéairement séparables	
$\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$	domaine	$\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$	$\mathcal{E}^3(\mathcal{S}')$ et $\mathcal{E}^3(\mathcal{T}')$
plan $ab$		plan $xy$	
$( \mathcal{S}  - 1) - V(\mathcal{S})$	moitié sup.	$( \mathcal{S}  - 1) - T(\mathcal{S})$	$\mathcal{E}_{sup}^3(\mathcal{S}')$
$1 - V(\mathcal{T})$	moitié inf.	$1 - T(\mathcal{T})$	$\mathcal{E}_{inf}^3(\mathcal{T}')$

TAB. 6.1 – Interprétation géométrique du problème de séparation de deux ensembles de points par un cercle dans l'espace  $abc$  et  $xyz$ .

Le *domaine* est défini comme l'ensemble des points appartenant à l'intersection des  $|\mathcal{S}| + |\mathcal{T}|$  demi-espaces. C'est un polyèdre convexe (tableau 6.1). Ses points représentent les cercles séparants de centre  $\omega(a, b)$  et de rayon  $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$ .

Résoudre le problème de séparation par un cercle revient donc à construire le domaine ou à trouver un de ses points. Comme le domaine provient de l'intersection de  $|\mathcal{S}| + |\mathcal{T}|$  demi-espaces, sa construction est réalisée par dualité [Preparata et Shamos, 1985] en  $\mathcal{O}(|\mathcal{S}| + |\mathcal{T}| \log(|\mathcal{S}| + |\mathcal{T}|))$  [Efrat et Gotsman, 1994]. En revanche, un seul point est trouvé à l'aide de l'algorithme de Megiddo [1984] (section 2.1.3) en  $\mathcal{O}(|\mathcal{S}| + |\mathcal{T}|)$  [O'Rourke *et al.*, 1986; Sauer, 1993; Damaschke, 1995].

### 6.1.2.2 Problème de programmation linéaire 2D

La surface du domaine peut être divisée en trois parties :

- la moitié supérieure qui délimite l'intersection des  $|\mathcal{S}|$  demi-espaces orientés vers le bas (en bleu dans le tableau 6.1),
- la moitié inférieure qui délimite l'intersection des  $|\mathcal{T}|$  demi-espaces orientés vers le haut (en vert dans le tableau 6.1),
- *l'équateur*, défini comme le cycle d'arêtes appartenant à la fois à la moitié supérieure et à la moitié inférieure (en rouge dans le tableau 6.1).

La projection sur le plan  $ab$  du domaine est exactement le *domaine des centres* (ou *arc center domain* en anglais) calculé dans les travaux de Fisk [1986], Kovalevsky [1990], Pham [1992], Worring et Smeulders [1995] et Coeurjolly *et al.* [2004]. Le bord du domaine des centres est la projection sur le plan  $ab$  de l'équateur.

De plus, comme l'illustrent les deux premières colonnes du tableau 6.1, la projection sur le plan  $ab$  de la moitié supérieure du domaine est la partie du diagramme de Voronoï de  $\mathcal{S}$  d'ordre  $|\mathcal{S}| - 1$ , noté  $(|\mathcal{S}| - 1)\text{-}V(\mathcal{S})$ , qui est située à l'intérieur du domaine des centres. De même, la projection sur le plan  $ab$  de la moitié inférieure du domaine est la partie du diagramme de Voronoï de  $\mathcal{T}$  d'ordre 1, noté  $1\text{-}V(\mathcal{T})$ , qui est située à l'intérieur du domaine des centres. Fisk [1986] a montré comment obtenir le domaine des centres à partir de l'intersection de ces deux diagrammes.

Cependant le calcul de ces diagrammes n'est pas nécessaire. En effet, le domaine associé à un point de  $\mathcal{S}$  et un point de  $\mathcal{T}$  est l'intersection d'un demi-espace orienté vers le bas et d'un demi-espace orienté vers le haut. Sa projection sur le plan  $ab$  est un demi-plan. Résoudre le problème de séparation par un cercle revient donc, dans le plan  $ab$ , à calculer l'intersection de  $|\mathcal{S}| \cdot |\mathcal{T}|$  demi-plans. Cette approche, appréciée pour sa simplicité, est cependant coûteuse en temps de calcul. Coeurjolly *et al.* [2004] l'évalue en  $\mathcal{O}(|\mathcal{S}| \cdot |\mathcal{T}| \log(|\mathcal{S}| \cdot |\mathcal{T}|))$ . C'est pourquoi certains auteurs ont cherché à ne pas prendre en compte toutes les contraintes. Kovalevsky [1990] supprime certaines contraintes au cours du calcul (à la manière de l'algorithme de Megiddo) mais aucune borne de complexité n'est donnée. Coeurjolly *et al.* [2004] proposent un prétraitement qui extrait d'une courbe discrète les points les plus contraignants. Le nombre de points retenus est borné supérieurement par  $\mathcal{O}(n^{\frac{2}{3}})$ , où  $n$  est la taille de la courbe discrète. D'où une complexité en  $\mathcal{O}(n^{4/3} \log n)$ .

### 6.1.2.3 Problème de séparation linéaire 3D

Soit  $\mathcal{S}' = \{s'(s'_x, s'_y, s'^2_x + s'^2_y)\}$  (respectivement  $\mathcal{T}' = \{t'(t'_x, t'_y, t'^2_x + t'^2_y)\}$ ) l'ensemble des points de  $\mathcal{S}$  (respectivement  $\mathcal{T}$ ) projetés sur le paraboloidé d'équation  $z = x^2 + y^2$ . Le problème de séparation de  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{T}$  par un cercle devient dans l'espace  $xyz$  un problème de séparation de  $\mathcal{S}'$  et  $\mathcal{T}'$  par un plan (section 2.2.2). Cette transformation mène à un algorithme en  $\mathcal{O}(|\mathcal{S}| + |\mathcal{T}| \log(|\mathcal{S}| + |\mathcal{T}|))$  proposé par O'Rourke *et al.* [1986]. Cet algorithme calcule l'enveloppe convexe des points de  $\mathcal{S}'$ , notée  $\mathcal{E}^3(\mathcal{S}')$ , et des points de  $\mathcal{T}'$ , notée  $\mathcal{E}^3(\mathcal{T}')$ . Le numéro 3 placé en exposant rappelle que cette enveloppe convexe est calculée dans un espace à trois dimensions. Pour supprimer toute ambiguïté, le numéro 2 sera aussi placé en exposant lorsqu'une enveloppe convexe est calculée dans un espace à deux dimensions.

Comme l'illustrent les deux dernières colonnes du tableau 6.1, la projection sur le plan  $xy$  de l'enveloppe convexe supérieure de  $\mathcal{S}'$ , notée  $\mathcal{E}^3_{sup}(\mathcal{S}')$ , est la triangulation de Delaunay de  $\mathcal{S}$  d'ordre  $|\mathcal{S}| - 1$ , notée  $(|\mathcal{S}| - 1)\text{-}T(\mathcal{S})$ . De même, la projection sur le plan  $xy$  de l'enveloppe convexe inférieure de  $\mathcal{T}'$ , notée  $\mathcal{E}^3_{inf}(\mathcal{T}')$ , est la triangulation de Delaunay de  $\mathcal{T}$  d'ordre 1, notée  $1\text{-}T(\mathcal{T})$ .

[Kim, 1984] a proposé un algorithme géométrique très simple qui s'interprète directement dans l'espace  $xyz$ . Il part de l'observation que si  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{T}$  sont séparables par un cercle, il existe toujours un cercle séparant passant par deux points de  $\mathcal{S}$ , ces deux points étant forcément sommets de  $\mathcal{E}^2(\mathcal{S})$ . Dans l'espace  $xyz$ , cela signifie que si  $\mathcal{S}'$  et  $\mathcal{T}'$  sont séparables par un plan, il existe toujours un plan séparant passant par deux points de  $\mathcal{S}'$ . Ces deux points sont forcément sommets de  $\mathcal{E}^3_{sup}(\mathcal{S}')$ . Or, les sommets de  $\mathcal{E}^3_{sup}(\mathcal{S}')$  projetés sur le plan  $xy$  correspondent exactement aux sommets de  $\mathcal{E}^2(\mathcal{S})$ .

Le cœur de l'algorithme de Kim [1984] consiste à décider si un cercle passant par deux points  $s_1, s_2 \in \mathcal{S}$  est séparant ou non. La décision est prise à la suite de considérations sur les angles que forment les points de  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{T}$  par rapport à  $s_1$  et  $s_2$ . Soient deux points  $s \in \mathcal{S}$  et  $t \in \mathcal{T}$  se trouvant du même côté de la droite  $(s_1 s_2)$ . Les points  $s, s_1, s_2$  sont circulairement séparables du point  $t$  si et seulement si l'angle  $\widehat{s_1 s s_2}$  est plus grand que l'angle  $\widehat{s_1 t s_2}$ . Dans l'espace  $xyz$ ,  $s'_1, s'_2, s', t'$  sont respectivement les projetés de  $s_1, s_2, s, t$  sur le paraboloidé d'équation  $z = x^2 + y^2$ . Soit  $\Pi$  le plan perpendiculaire au plan  $xy$  et passant par  $s'_1$  et  $s'_2$  (fig. 6.2). Les points  $s', s'_1, s'_2$  sont linéairement séparables du points  $t'$  si et seulement si l'angle diédral que forme le plan passant par  $s'_1, s'_2$  et  $s'$  avec  $\Pi$  est inférieur à celui que forme le plan passant par  $s'_1, s'_2$  et  $t'$  avec  $\Pi$  (fig. 6.2).

L'algorithme de [Kim, 1984] ne requiert pas de structure de données sophistiquée. Deux listes de points suffisent. Il procède par balayages des listes et calcul de prédicats pouvant être évalués en nombres entiers et de manière exacte. Malgré sa complexité en temps quadratique [Kim et Anderson, 1984], il mérite une attention particulière car il représente un bon compromis entre rapidité d'exécution et facilité d'implémentation.

Nous proposons ci-après un nouvel algorithme de reconnaissance d'arcs de cercle. Lui aussi traduit dans l'espace  $xyz$ , le problème de séparation de  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{T}$  par un cercle en un problème de séparation de  $\mathcal{S}'$  et  $\mathcal{T}'$  par un plan. Ce choix s'explique par élimination. D'une part, les approches par programmation linéaire 3D [O'Rourke *et al.*, 1986; Sauer, 1993; Damaschke, 1995] font appel à l'algorithme de Megiddo [1984] qui n'est pas utilisable en



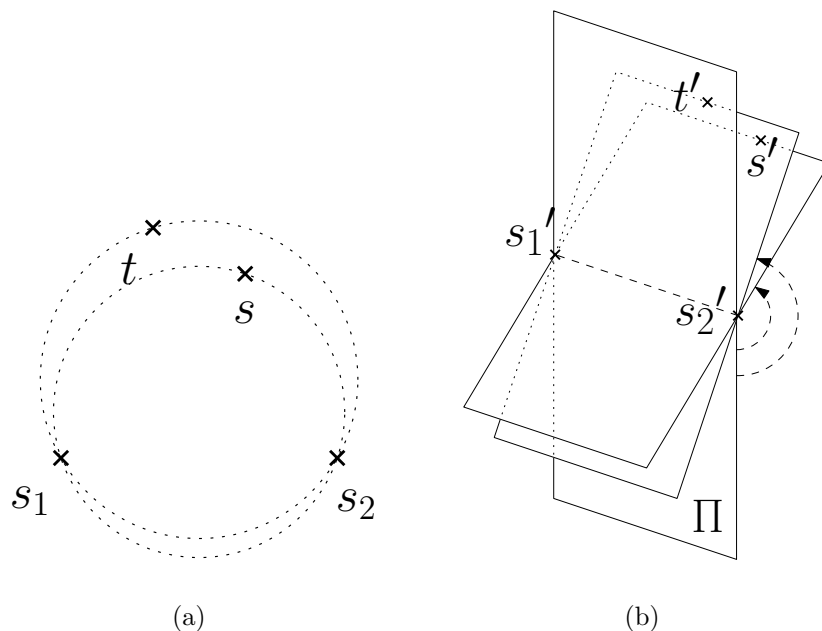


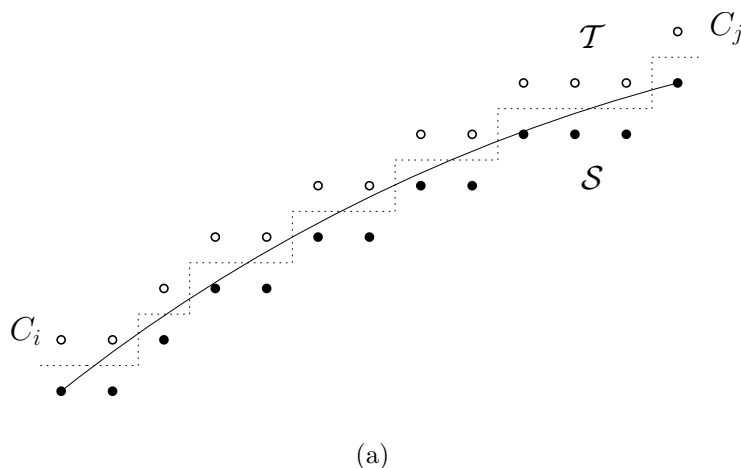
FIG. 6.2 – Interprétation géométrique du test des angles dans l'algorithme de Kim [1984]; Kim et Anderson [1984].

pratique (section 2.1.3) et d'autre part, les approches par programmation linéaire 2D [Fisk, 1986; Kovalevsky, 1990; Pham, 1992; Worring et Smeulders, 1995; Coeurjolly *et al.*, 2004] sont algorithmiquement trop coûteuses. Nous proposons un algorithme qui utilise des outils classiques de géométrie algorithmique (section 6.2) et qui peut être optimisé de façon à atteindre une complexité en temps linéaire (section 6.3).

## 6.2 Reconnaissance d'arcs de cercle

Soit une partie de contour  $C_{i|j}$  supposée convexe. Le cas où elle est concave est symétrique. D'après la définition 1.19, une partie  $C_{i|j}$  est un arc de cercle discret si et seulement si les points de  $X_{i|j}$  et ceux de  $\bar{X}_{i|j}$  sont séparables par un cercle euclidien. Soit  $\mathcal{S}$  l'ensemble des points à encercler et  $\mathcal{T}$  l'ensemble des points à ne pas encercler. Comme  $C_{i|j}$  est convexe par hypothèse,  $\mathcal{S} = X_{i|j}$  et  $\mathcal{T} = \bar{X}_{i|j}$  (fig. 6.3). Ainsi,  $|\mathcal{S}|$  et  $|\mathcal{T}|$  sont de l'ordre de  $\mathcal{O}(n)$ ,  $n$  étant la taille de la partie  $C_{i|j}$ .

Dans la suite de cette section, un algorithme qui résout le problème de séparation de  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{T}$  par un cercle est détaillé. Comme les algorithmes de la section 6.1.2.3, le problème de séparation de  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{T}$  par un cercle est traduit dans l'espace  $xyz$  en un problème de séparation de  $\mathcal{S}'$  et  $\mathcal{T}'$  par un plan.


 FIG. 6.3 – Une partie  $C_{ij}$  convexe qui s'avère être un arc de cercle.

### 6.2.1 Calcul de $\mathcal{E}^3(\mathcal{S}')$ et $\mathcal{E}^3(\mathcal{T}')$

Décider si  $\mathcal{S}'$  et  $\mathcal{T}'$  sont oui ou non séparables par un plan est équivalent à décider si leur enveloppe convexe,  $\mathcal{E}^3(\mathcal{S}')$  et  $\mathcal{E}^3(\mathcal{T}')$ , sont oui ou non séparables par un plan.

Pour calculer  $\mathcal{E}^3(\mathcal{S}')$  et  $\mathcal{E}^3(\mathcal{T}')$  à partir de  $\mathcal{S}'$  et  $\mathcal{T}'$ , différentes méthodes existent (section 2.3.1). Les techniques “gift-wrapping”, “quickhull”, “divide-and-conquer”, etc. [Preparata et Shamos, 1985] fonctionnent en dimension quelconque. En dimension trois, l'approche incrémentale avec graphe de conflit [de Berg *et al.*, 2000] est plus simple. Quelle que soit la méthode parmi celles citées, le calcul de  $\mathcal{E}^3(\mathcal{S}')$  et  $\mathcal{E}^3(\mathcal{T}')$  est en  $\mathcal{O}(n \log n)$ .

En outre, il n'est pas nécessaire de calculer complètement les enveloppes convexes  $\mathcal{E}^3(\mathcal{S}')$  et  $\mathcal{E}^3(\mathcal{T}')$ . Seules la partie supérieure de l'enveloppe convexe de  $\mathcal{S}'$ ,  $\mathcal{E}_{sup}^3(\mathcal{S}')$ , et la partie inférieure de l'enveloppe convexe de  $\mathcal{T}'$ ,  $\mathcal{E}_{inf}^3(\mathcal{T}')$ , suffisent.

Les projections de  $\mathcal{E}_{sup}^3(\mathcal{S}')$  et  $\mathcal{E}_{inf}^3(\mathcal{T}')$  sur le plan  $xy$  sont respectivement la triangulation de Delaunay de  $\mathcal{S}$  d'ordre  $|\mathcal{S}| - 1$  et la triangulation de Delaunay de  $\mathcal{T}$  d'ordre 1. Dans le cas général, le calcul de  $(|\mathcal{S}| - 1)-T(\mathcal{S})$  et  $1-T(\mathcal{T})$  est en  $\mathcal{O}(n \log n)$  [Preparata et Shamos, 1985; de Berg *et al.*, 2000].

L'ordre intrinsèque des points de  $\mathcal{S}$ , qui correspondent aux points intérieurs d'une partie de contour, entraîne une diminution de la complexité du calcul de  $(|\mathcal{S}| - 1)-T(\mathcal{S})$ . Cette amélioration exploite le fait que les sommets de  $(|\mathcal{S}| - 1)-T(\mathcal{S})$  sont exactement ceux de  $\mathcal{E}^2(\mathcal{S})$ . Or,  $\mathcal{E}^2(\mathcal{S})$  est calculé en  $\mathcal{O}(n)$  grâce à l'algorithme de Melkman [1987] et  $(|\mathcal{S}| - 1)-T(\mathcal{S})$  est déduit de  $\mathcal{E}^2(\mathcal{S})$  en  $\mathcal{O}(n)$  à l'aide d'un algorithme relativement complexe [Aggarwal *et al.*, 1989].

De plus, on peut remarquer que les points de  $\mathcal{S}$  (respectivement  $\mathcal{T}$ ) forment une ligne polygonale dont les segments sont des arêtes de  $(|\mathcal{S}| - 1)-T(\mathcal{S})$  (respectivement  $1-T(\mathcal{T})$ ). Les triangulations de Delaunay  $(|\mathcal{S}| - 1)-T(\mathcal{S})$  et  $1-T(\mathcal{T})$  peuvent donc être calculées, en exploitant ces contraintes, en  $\mathcal{O}(n)$  [Chin et Wang, 1999].

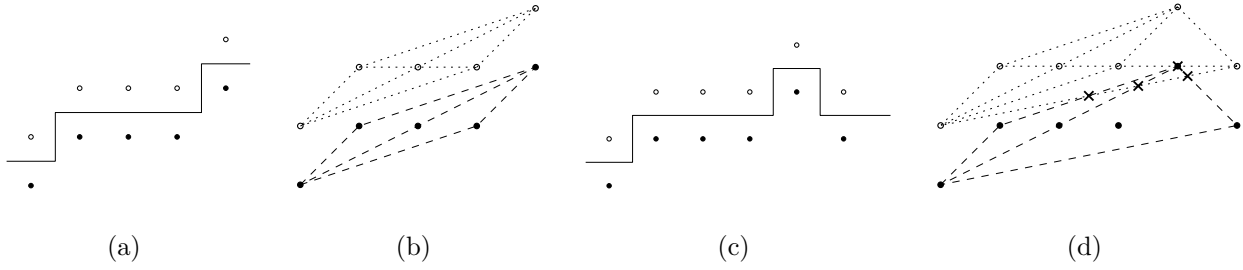


FIG. 6.4 –  $\mathcal{S}$  (en noir) and  $\mathcal{T}$  (en blanc) sont séparables par une droite en (a) et (b) et par un cercle en (c) et (d).  $\mathcal{G}$ , qui est l'intersection entre  $(|\mathcal{S}| - 1)\text{-}T(\mathcal{S})$  (tirets) et  $1\text{-}T(\mathcal{T})$  (pointillé), a 0 sommet en (b), mais 4 en (d).

### 6.2.2 Calcul de la hauteur entre $\mathcal{E}^3(\mathcal{S}')$ et $\mathcal{E}^3(\mathcal{T}')$

La *fonction de hauteur* entre deux polyèdres convexes renvoie la distance verticale signée (mesurée le long de l'axe  $z$ ) entre les deux polyèdres convexes aux points appartenant à l'intersection de la projection sur le plan  $xy$  des deux polyèdres.

Le minimum de la fonction de hauteur entre  $\mathcal{E}^3(\mathcal{S}')$  et  $\mathcal{E}^3(\mathcal{T}')$  est noté  $h$ . Pour calculer  $h$ , l'algorithme naïf consiste à calculer le graphe planaire  $\mathcal{G}$  qui est l'intersection entre  $(|\mathcal{S}| - 1)\text{-}T(\mathcal{S})$  et  $1\text{-}T(\mathcal{T})$  (fig. 6.4). If  $|\mathcal{G}| = 0$ , alors  $\mathcal{E}^2(\mathcal{S}) \cap \mathcal{E}^2(\mathcal{T}) = \emptyset$ . Dans ce cas dégénéré où la fonction de hauteur n'est définie nulle part,  $\mathcal{S}'$  et  $\mathcal{T}'$  sont séparables par un plan qui est orthogonal au plan  $xy$ . Cela signifie que  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{T}$  sont séparables par un cercle de rayon infini, c'est-à-dire une droite (fig. 6.4.a et fig. 6.4.b). Si  $|\mathcal{G}| > 0$ , il reste à calculer la fonction de hauteur en chaque sommet de  $\mathcal{G}$  et à déterminer le minimum (fig. 6.4.c et fig. 6.4.d).

Si  $h > 0$ , alors  $\mathcal{E}^3(\mathcal{S}')$  et  $\mathcal{E}^3(\mathcal{T}')$ , donc  $\mathcal{S}'$  et  $\mathcal{T}'$ , sont séparables par un plan. Il en résulte que  $\mathcal{S}$  and  $\mathcal{T}$  sont séparables par un cercle. En revanche, si  $h \leq 0$ , alors  $\mathcal{E}^3(\mathcal{S}')$  et  $\mathcal{E}^3(\mathcal{T}')$  s'intersectent et  $\mathcal{S}'$  et  $\mathcal{T}'$  ne sont pas séparables par un plan. Il en résulte que  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{T}$  ne sont pas séparables par un cercle.

Si  $\mathcal{S}$  and  $\mathcal{T}$  sont circulairement séparables, les paramètres d'un cercle séparant peuvent être calculés. La fonction de hauteur atteint un minimum positif en un sommet  $s_h$  de  $\mathcal{G}$ . La droite normale au plan  $xy$  passant par  $s_h$  traverse :

- soit une arête de  $\mathcal{E}^3(\mathcal{S}')$  et une arête  $\mathcal{E}^3(\mathcal{T}')$  (fig. 6.5.a),
- soit un sommet de  $\mathcal{E}^3(\mathcal{S}')$  et une face de  $\mathcal{E}^3(\mathcal{T}')$  (fig. 6.5.c).

Ces quatre points définissent deux plans parallèles de support (en tireté dans les fig. 6.5.a et c). Leur intersection avec le paraboloidé d'équation  $z = x^2 + y^2$  se projette dans le plan  $xy$  en un anneau (en tireté dans les fig. 6.5.b et d). Des coefficients  $a$ ,  $b$  et  $c$  d'un troisième plan parallèle (en pointillé dans les fig. 6.5.a et c), encadré par les deux plans parallèles de support, se déduisent les paramètres d'un cercle séparant de centre  $(a, b)$  et de rayon  $r^2 = a^2 + b^2 - c$ . Ce troisième plan se projette sur le plan  $xy$  en un cercle de même centre que l'anneau, mais de rayon intermédiaire, compris entre le plus petit et le plus grand rayon de l'anneau (en pointillé dans les fig. 6.5.b et d).

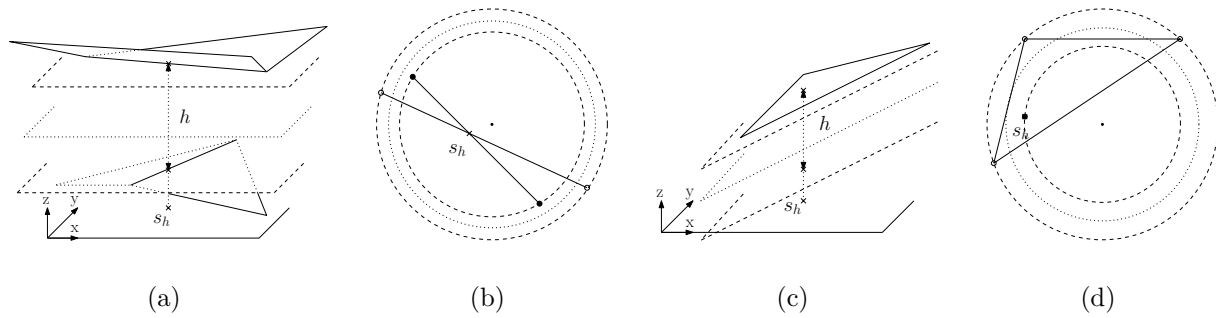


FIG. 6.5 – Calcul des paramètres d'un cercle séparable à partir des plans parallèles de support passant par une arête de  $\mathcal{E}^3(\mathcal{S}')$  et une arête de  $\mathcal{E}^3(\mathcal{T}')$  en (a) et (b), un sommet de  $\mathcal{E}^3(\mathcal{S}')$  et une face de  $\mathcal{E}^3(\mathcal{T}')$  en (c) et (d).

La complexité de cet algorithme est  $\mathcal{O}(n^2)$  car  $\mathcal{G}$  a au plus  $n^2$  sommets. Cependant, il est possible de tirer parti de la convexité de la fonction de hauteur pour concevoir un algorithme en  $\mathcal{O}(n \log n)$  (voir [Preparata et Shamos, 1985, pages 310-315] pour une description complète).

### 6.2.3 Algorithme et complexité

L'algorithme 20 résume les résultats de la section.

---

**Algorithme 20** : Reconnaissance d'arcs de cercle

---

**Entrées** :  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{T}$

**Sorties** : Un cercle  $\mathcal{C}$  séparant  $\mathcal{S}$  de  $\mathcal{T}$  s'il existe

- 1 Calculer  $\mathcal{S}'$  et  $\mathcal{T}'$ , ensemble des projections des points de  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{T}$  sur le paraboloïde d'équation  $z = x^2 + y^2$  ;
  - 2 Calculer  $\mathcal{E}^3(\mathcal{S}')$  et  $\mathcal{E}^3(\mathcal{T}')$  [de Berg *et al.*, 2000];
  - 3 Calculer la hauteur  $h$  entre  $\mathcal{E}^3(\mathcal{S}')$  et  $\mathcal{E}^3(\mathcal{T}')$  [Preparata et Shamos, 1985, pages 310-315];
  - 4 **si**  $h > 0$  **alors**
  - 5     Calculer les coefficients  $a$ ,  $b$  et  $c$ , d'un plan parallèle et entre les deux plans parallèles de support de  $\mathcal{E}^3(\mathcal{S}')$  et  $\mathcal{E}^3(\mathcal{T}')$ ;
  - 6     **retourner**  $\mathcal{C}$  de centre  $(a, b)$  et de rayon  $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$ ;
  - 7 **sinon**
  - 8     **retourner** vide;
- 

La complexité en  $\mathcal{O}(n \log n)$  de cet algorithme de reconnaissance d'arcs de cercle est meilleure que la complexité quadratique des méthodes précédentes [Fisk, 1986; Kovalevsky, 1990; Coeurjolly *et al.*, 2004] qui ne traitent que des projections bidimensionnelles du domaine tridimensionnel. De plus, un prétraitement inspiré de Coeurjolly *et al.* [2004] borne

la taille des ensembles à séparer de façon à atteindre une complexité en  $\mathcal{O}(n)$ , comme nous le voyons dans la section suivante.

## 6.3 Optimisation

Soit une partie  $C_{ij}$  d'un contour  $C$  supposée convexe. Le cas où elle est concave est symétrique. Le problème de séparation par un cercle consiste donc à englober les points intérieurs  $\mathcal{S} = X_{i|j}$ , mais pas les points extérieurs  $\mathcal{T} = \bar{X}_{i|j}$  (fig. 6.6.a). Le coût algorithmique du test de séparation dépend de la taille des ensembles à séparer, en l'occurrence  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{T}$ . L'objectif de cette section est de déterminer deux nouveaux ensembles  $\hat{\mathcal{S}}$  et  $\hat{\mathcal{T}}$  tels que :

- $\hat{\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{S}$ ,  $\hat{\mathcal{T}} \subseteq \mathcal{T}$ ,
- $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{T}$  sont circulairement séparables si et seulement si  $\hat{\mathcal{S}}$  et  $\hat{\mathcal{T}}$  sont circulairement séparables.

### 6.3.1 Calcul de $\hat{\mathcal{S}}$

Un cercle, étant convexe, ne peut cerner les sommets de l'enveloppe convexe de  $X_{i|j}$  sans cerner tous les points de  $X_{i|j}$ . Ainsi,  $\hat{\mathcal{S}}$  est défini comme étant l'ensemble des sommets de  $\mathcal{E}_g(X_{i|j})$  (fig. 6.6.b).

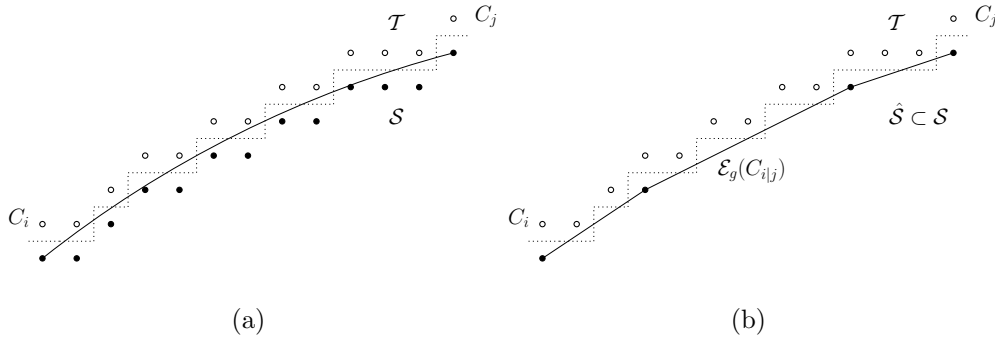


FIG. 6.6 – Un arc de cercle  $C_{ij}$  (a). Les points de  $\hat{\mathcal{S}}$  sont les sommets de  $\mathcal{E}_g(X_{i|j})$  (b).

### 6.3.2 Calcul de $\hat{\mathcal{T}}$

L'ensemble  $\hat{\mathcal{T}}$  peut ne contenir que quelques points de  $\bar{X}_{i|j}$ . Ces points sont caractérisés indépendamment pour chaque arête  $e$  de  $\mathcal{E}_g(X_{i|j})$  supposée être, sans perte de généralité, dans le premier octant. Le premier point de  $e$  est désigné par  $X_g$ , le second, par  $X_d$ . Comme  $e$  est dans le premier octant, les points qui se trouvent au-dessus de la droite  $(X_g X_d)$ , appelés commodément *points extérieurs*, comme les points de  $\bar{X}_{i|j}$ , sont des points du fond, appartenant à  $\bar{X}$  (fig. 6.7.a). Soit  $\vec{u} = (a, b)$  où  $a, b \in \mathbb{Z}$  et  $\text{pgcd}(a, b) = 1$ , tel que  $(X_d - X_g) = g \cdot \vec{u}$  où  $g \in \mathbb{Z}$  (fig. 6.7.a).

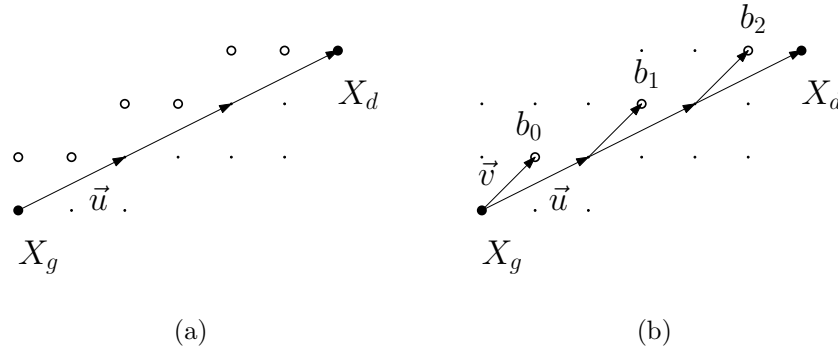


FIG. 6.7 – Le segment  $[X_g X_d]$ , ses points extérieurs en (a) et ses points de Bézout, numérotés, en (b).

Les points de Bézout sont les points extérieurs les plus proches du segment  $[X_g X_d]$  (fig. 6.7.b) :

**Définition 6.1.** Un point de Bézout  $b_q$  d'un segment  $[X_g X_d]$  est défini comme un point de  $\mathbb{Z}^2$  tel que  $X_g \vec{b}_q = \vec{v} + q\vec{u}$  où  $q \in [0, g]$ ,  $\vec{v} = (c, d)^T$  et  $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 1$ .

Grâce à la convexité des cercles,  $\hat{\mathcal{T}}$  peut ne contenir que les points de Bézout des arêtes de  $\mathcal{E}_g(X_{ij})$  [Coeurjolly *et al.*, 2004] :

**Lemme 6.1.** Une courbe continue fermée convexe  $\Lambda$  qui contient  $[X_g X_d]$  mais aucun de ses points de Bézout, ne contient aucun autre point extérieur.

*Démonstration.* Soit une courbe continue fermée convexe  $\Lambda$  qui contient à la fois  $X_g$ ,  $X_d$  et un point extérieur, noté  $E$ . Le triangle formé par les points  $X_g$ ,  $X_d$  et  $E$ , contient au moins un point de Bézout (voir le paragraphe 2.4 et la fig. 6.8). Étant convexe,  $\Lambda$  ne peut contenir un triangle sans contenir tous les points se trouvant à l'intérieur de ce triangle. Par conséquent,  $\Lambda$  ne peut contenir  $X_g$ ,  $X_d$  et  $E$ , sans contenir au moins un point de Bézout du segment  $[X_g X_d]$ , ce qui prouve le lemme.  $\square$

Le lemme 6.1 montre que  $\hat{\mathcal{T}}$  peut ne contenir que les points de Bézout de  $[X_g X_d]$ . Ceux-ci sont au nombre de  $g$ . Or ce nombre peut être arbitrairement grand. Pour ne retenir qu'un nombre de points constant par segment, Coeurjolly *et al.* [2004] choisissent le point de Bézout le plus proche de la médiatrice de  $[X_g X_d]$  (définition 1 [Coeurjolly *et al.*, 2004]). Cette proposition n'est pas motivée. Tous les points de Bézout contribuent au domaine des centres des cercles qui séparent  $[X_g X_d]$  de ses points de Bézout (fig. 6.9.a). Ainsi, considérer uniquement le point de Bézout le plus proche de la médiatrice de  $[X_g X_d]$  n'est pas suffisant en l'état.

L'astuce est d'introduire deux points supplémentaires à ne pas encercler dont il est certain qu'ils appartiennent à  $\bar{X}$ . Comme le segment  $[X_g X_d]$  est une arête de  $\mathcal{E}_g(X_{ij})$ , les points  $p_g$  and  $p_d$  tels que  $p_g = X_g - \vec{u}$  and  $p_d = X_d + \vec{u}$  appartiennent à  $\bar{X}$  (fig. 6.9.b).

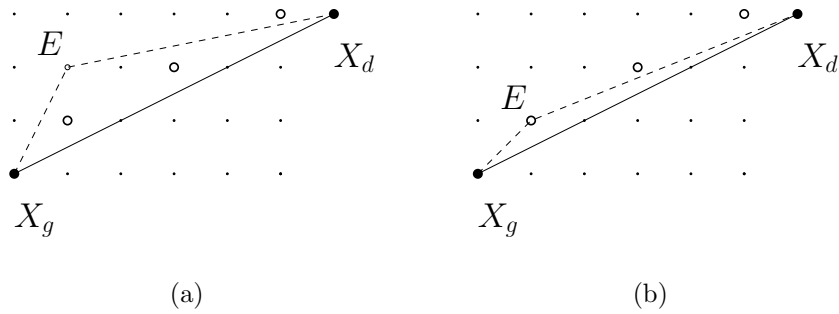


FIG. 6.8 – Illustration du lemme 6.1 : une forme euclidienne convexe ne peut contenir  $X_g$ ,  $X_d$  et  $E$ , sans contenir au moins un point de Bézout du segment  $[X_g X_d]$ .

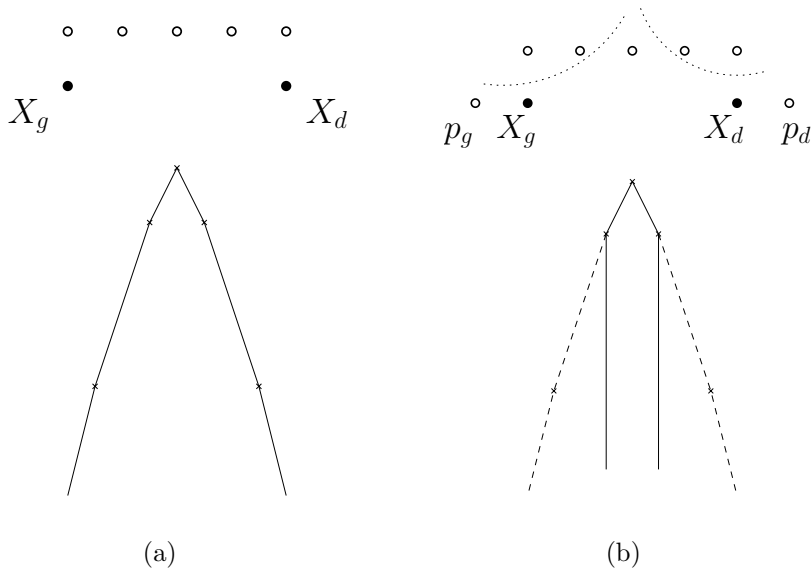


FIG. 6.9 – (a) Le domaine des centres des cercles qui séparent  $[X_g X_d]$  de ses points de Bézout possède autant d'arêtes que le segment possède de points de Bézout. (b) En revanche, le domaine des centres des cercles qui séparent  $[X_g X_d]$  de ses points de Bézout, ainsi que de  $p_g$  et  $p_d$ , possède un nombre constant d'arêtes.

Ces points apportent des contraintes supplémentaires de sorte que les points de Bézout du segment  $[X_g X_d]$  qui ne se trouvent pas au milieu ne contribuent pas au domaine des centres des cercles qui séparent  $[X_g X_d]$  de ses points de Bézout, de  $p_g$  et de  $p_d$  (fig. 6.9.b)

Le théorème 6.1 formalise ces observations :

**Théorème 6.1.** *Le domaine des centres des cercles contenant  $[X_g X_d]$ , mais ne contenant ni  $p_g$ , ni  $p_d$ , ni ses points de Bézout, possède au plus quatre sommets.*

*Démonstration.* Le domaine des centres est un polygone convexe. Ses sommets sont les centres de cercles passant (section 6.1.2.2) :

- soit par deux points devant être encerclés et un point ne devant pas être encerclé (cas 2-1),
- soit par un point devant être encerclé et deux points ne devant pas être encerclés (cas 1-2).

Comme seuls  $X_g$  et  $X_d$  doivent être encerclés, tous les cercles du cas 2-1 passent par  $X_g$  et  $X_d$ . S'il y a  $k$  points de Bézout, il n'y a que  $k$  cercles du cas 2-1 potentiellement séparants. Parmi eux, seul celui qui passe par le point de Bézout le plus proche de la médiatrice de  $[X_g X_d]$ , noté  $b_m$  est séparant. Le centre de ce cercle est un sommet du domaine des centres (fig. 6.10.a).

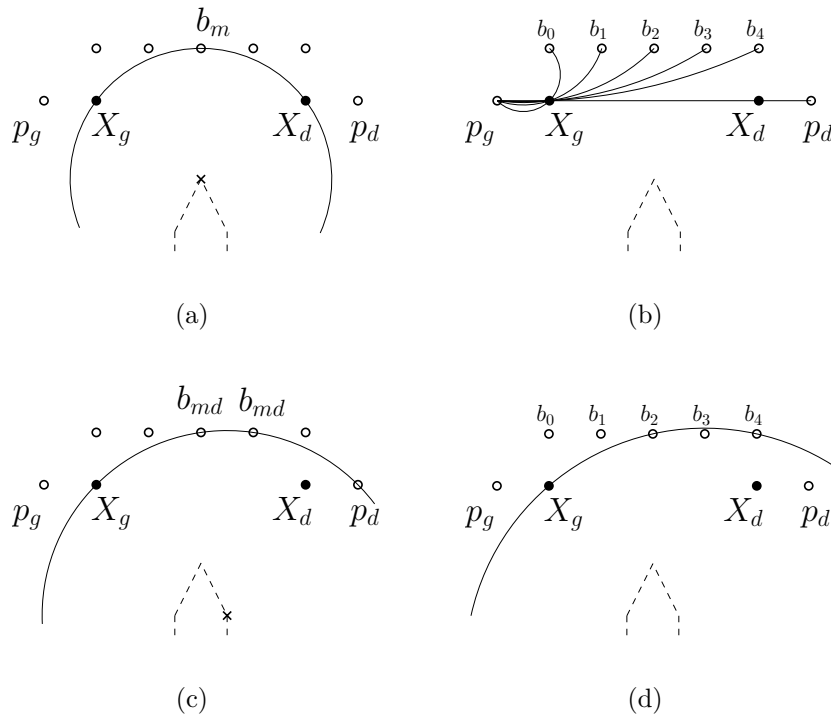


FIG. 6.10 – Détermination des cercles séparants et non séparants passant par  $X_g$  (théorème 6.1).



Il reste à considérer les cercles du cas 1-2. Soit ils passent par  $X_g$ , soit ils passent par  $X_d$ . S'il y a  $k$  points de Bézout, il y a  $C_{k+2}^2$  cercles passant par  $X_g$  et deux points à ne pas encercler. Le cas où ils passent par  $X_d$ , parfaitement symétrique, n'est pas traité.

Il y a  $k + 1$  cercles passant  $X_g$  et  $p_g$ . L'un est dégénéré et les autres ne contiennent pas  $X_d$  (fig. 6.10.b). De même, il y a  $k + 1$  cercles passant  $X_g$  et  $p_d$ . Mais parmi ceux-ci, seul celui qui passe par  $X_g$ ,  $p_d$  et le ou les points de Bézout les plus proches de la médiatrice de  $[X_g p_d]$ , notés  $b_{md}$  est séparant. Le centre de ce cercle est aussi un sommet du domaine des centres (fig. 6.10.c).

Il y a  $C_k^2$  cercles passant par  $X_g$  et deux points de Bézout. Cependant, les cercles qui passent par deux points de Bézout non consécutifs,  $b_q$  et  $b_q + \Delta$  avec  $\Delta > 1$ , ne sont pas séparants car ils contiennent les points de Bézout dont l'indice est compris entre  $q$  et  $q + \Delta$  (fig. 6.10.d).

Il reste donc  $k$  cercles, désignés par  $C_q$ , passant par  $X_g$  et deux points de Bézout consécutifs  $b_q$  et  $b_{q+1}$  et potentiellement séparants. Ils ne contiennent ni  $p_g$ , ni aucun autre point de Bézout. La question est de savoir lesquels contiennent  $X_d$  mais ne contiennent pas  $p_d$ .

Les points d'intersection  $i_q$  entre les cercles  $C_q$  et la droite  $(X_g X_d)$  sont ordonnés le long de la droite  $(X_g X_d)$ .  $C_q$  est séparant si  $i_q$  se trouve entre  $X_d$  et  $p_d$  (fig. 6.11).

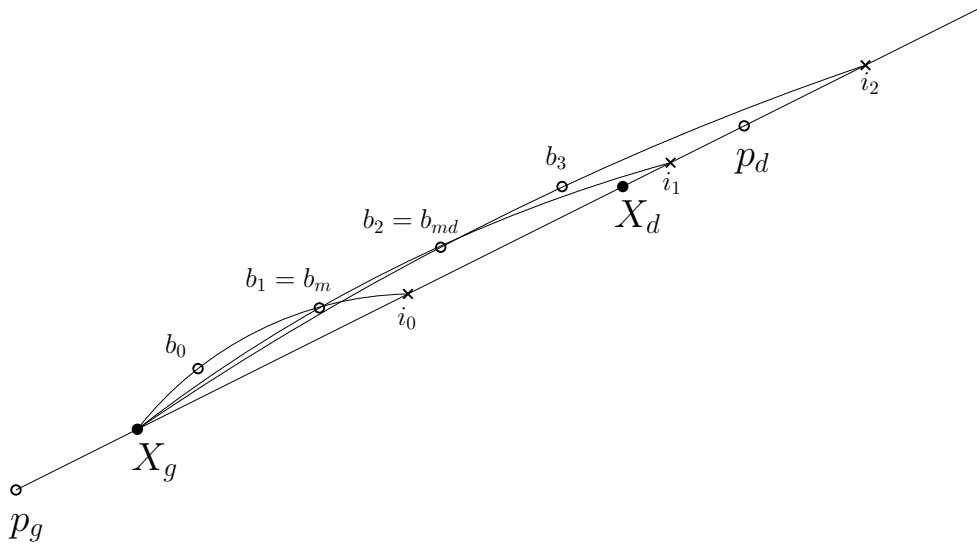


FIG. 6.11 – Les cercles séparants passent par les points de Bézout centraux (théorème 6.1).

Si  $q < m$ ,  $C_q$  ne contient pas  $X_d$ , tandis que si  $q \geq m$ ,  $C_q$  contient  $X_d$ . De même, si  $q < md$ ,  $C_q$  ne contient pas  $p_d$ , tandis que si  $q \geq md$ ,  $C_q$  contient  $p_d$ . Il est résulte que si  $m \leq q \leq md$ ,  $C_q$  est séparant (fig. 6.11). Or, étant donné la position des points  $X_g$ ,  $X_d$  et  $p_d$ ,  $md = m$  ou  $md = m + 1$ . Dans le premier cas, il n'y pas de cercle du cas 2-1 passant par  $X_g$  et deux points de Bézout qui soit séparant. Dans le second cas, parmi les cercles du cas 2-1 passant par  $X_g$  et deux points de Bézout, seul celui passant par  $X_g$ ,  $b_m$  et  $b_{md}$  est séparant. Le centre de ce cercle est encore un sommet du domaine des centres.

Comme tous les cercles possibles ont été énumérés, il s'avère que le nombre de sommets du domaine des centres est indépendant du nombre  $k$  de points de Bézout. Il est égal à 3 ou 4. De plus, parmi les points de Bézout, seuls ceux les plus proches de la médiatrice du segment  $[X_g X_d]$  contribuent au domaine des centres.  $\square$

Le théorème 6.1 signifie qu'un cercle qui contient  $[X_g X_d]$  mais ne contient ni les points de Bézout du segment  $[X_g X_d]$  les plus proches de sa médiatrice, ni les points  $p_g$  et  $p_d$ , ne contient aucun autre point de Bézout.

Ainsi, pour une arête  $[X_g X_d]$  de  $\mathcal{E}_g(X_{i|j})$ , quatre points extérieurs au plus doivent être ajoutés à  $\hat{\mathcal{T}}$ .

Si le segment  $[X_g X_d]$  n'a qu'un point de Bézout, seul ce point est ajouté à  $\hat{\mathcal{T}}$ . Si le segment  $[X_g X_d]$  a plus d'un point de Bézout et si parmi eux il y en a un qui se trouve exactement sur la médiatrice du segment, alors ce dernier est ajouté à  $\hat{\mathcal{T}}$ . Enfin, si le segment  $[X_g X_d]$  a plus d'un point de Bézout et si aucun ne se trouve exactement sur la médiatrice du segment, les deux points de Bézout les plus proches de la médiatrice du segment sont ajoutés à  $\hat{\mathcal{T}}$ . Les points supplémentaires  $p_g$  et  $p_d$  sont inutiles, car redondants avec les points de Bézout retenus de l'arête de  $\mathcal{E}_g(X_{i|j})$  précédente ou suivante (fig. 6.12).

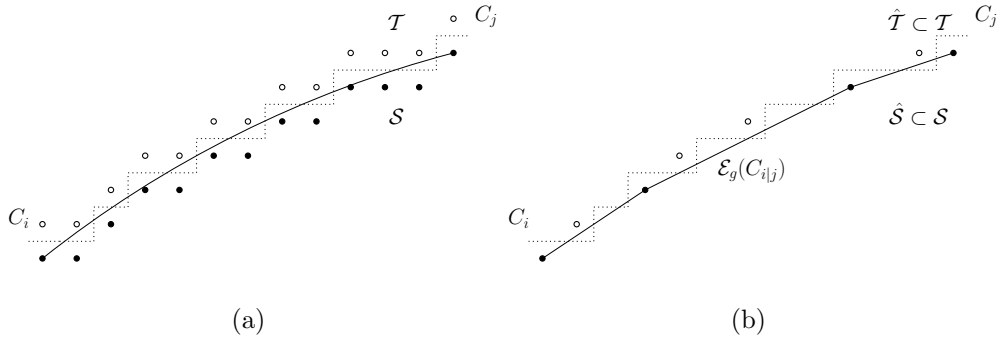


FIG. 6.12 – Un arc de cercle  $C_{ij}$  (a). Les points de  $\hat{\mathcal{S}}$  et  $\hat{\mathcal{T}}$  sont ceux à séparer par un cercle pour la reconnaissance (b).

### 6.3.3 Algorithme et complexité

L'algorithme 21 calcule  $\hat{\mathcal{S}}$  et  $\hat{\mathcal{T}}$ . La première étape, ligne 2, est le calcul de  $\mathcal{E}_g(X_{i|j})$ . Cela s'effectue en  $\mathcal{O}(n)$ , grâce à l'algorithme de Melkman [1987] par exemple. La seconde étape, lignes 4 à 13, est le calcul des points de Bézout de chaque arête de  $\mathcal{E}_g(X_{i|j})$  et le stockage de certains d'entre eux. Leurs coordonnées sont déterminées à partir des vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et de l'entier  $g$ . Ces calculs sont réalisés en  $\mathcal{O}(\log(\max(|a|, |b|)))$  en appliquant l'algorithme d'Euclide étendu à la pente des arêtes (algorithme 5, section 2.4.1). Une fois  $g$ ,  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  connus, trouver les points de Bézout les plus proches de la médiatrice de l'arête est effectué séquentiellement en  $\mathcal{O}(g)$ . En définitive, l'ensemble de l'algorithme s'exécute en  $\mathcal{O}(n)$ .

Le lemme 6.2 borne la taille de  $\hat{\mathcal{S}}$  et  $\hat{\mathcal{T}}$ .

---

**Algorithme 21** : Calcul de  $\hat{\mathcal{S}}$  et  $\hat{\mathcal{T}}$ , ensembles réduits pour la reconnaissance d'arcs de cercle

---

**Entrées** :  $C_{i|j}$

**Sorties** :  $\hat{\mathcal{S}}$  and  $\hat{\mathcal{T}}$

- 1  $\hat{\mathcal{S}} = \hat{\mathcal{T}} = \emptyset$ ;
  - 2 Calculer  $\mathcal{E}_g(X_{i|j})$ ;
  - 3 Ajouter à  $\hat{\mathcal{S}}$  le premier sommet de  $\mathcal{E}_g(X_{i|j})$ ;
  - 4 **pour chaque** arête  $e$  de  $\mathcal{E}_g(X_{i|j})$  **faire**
  - 5     Soient  $X_g$  et  $X_d$  les sommets de  $e$ ;
  - 6     Ajouter  $X_d$  à  $\hat{\mathcal{S}}$ ;
  - 7     **si** le segment  $[X_g X_d]$  n'a qu'un point de Bézout **alors**
  - 8         Ajouter ce point de Bézout à  $\hat{\mathcal{T}}$  ;
  - 9     **sinon**
  - 10         **si** le segment  $[X_g X_d]$  a un point de Bézout qui se trouve exactement sur sa médiatrice **alors**
  - 11             Ajouter ce point de Bézout à  $\hat{\mathcal{T}}$ ;
  - 12         **sinon**
  - 13             Ajouter à  $\hat{\mathcal{T}}$  les deux points de Bézout les plus proches de la médiatrice du segment  $[X_g X_d]$ ;
  - 14 **retourner**  $\hat{\mathcal{S}}$  et  $\hat{\mathcal{T}}$ ;
-

**Lemme 6.2.** *Soit un polygone convexe dont les sommets sont des points de  $\mathbb{Z}^2$  localisés dans un carré de taille  $N \times N$ . Le nombre de ses sommets est borné par  $\mathcal{O}(N^{2/3})$ .*

Une preuve simple de ce lemme se trouve dans Har-Peled [1998] (lemme 3.1, p. 359). Des résultats similaires se trouvent dans Acketa et Zunić [1995].

Ce lemme implique que  $|\hat{\mathcal{S}}|$  est borné par  $\mathcal{O}(n^{2/3})$ . Or,  $|\hat{\mathcal{T}}|$  est du même ordre que  $|\hat{\mathcal{S}}|$  selon le lemme 6.1 et le théorème 6.1. Par conséquent,  $m = |\hat{\mathcal{S}}| + |\hat{\mathcal{T}}|$  est borné par  $\mathcal{O}(n^{2/3})$ . Ainsi, le problème de séparation de  $|\hat{\mathcal{S}}|$  et  $|\hat{\mathcal{T}}|$  par un cercle est résolu par l'algorithme 20 en  $\mathcal{O}(m \log m)$ , ce qui mène à une borne au pire cas de  $\mathcal{O}(n)$ .

En outre,  $\hat{\mathcal{S}}$  et  $\hat{\mathcal{T}}$  peuvent être calculés de manière plus élégante. Quand  $C_{i|j}$  est convexe (respectivement concave), les points de  $\hat{\mathcal{S}}$ , à encercler, sont les sommets de  $\mathcal{E}_g(X_{i|j})$  (respectivement  $\mathcal{E}_d(\bar{X}_{i|j})$ ). Or, nous avons vu au chapitre 5 que les sommets de  $\mathcal{E}_g(X_{i|j})$  (respectivement  $\mathcal{E}_d(\bar{X}_{i|j})$ ) peuvent être retrouvés à partir des points d'appui à gauche (respectivement à droite) des segments maximaux à l'avant et/ou à l'arrière, servant au calcul du polygone réversible respectant les parties convexes et concaves. De la même manière, les points de Bézout associés à une arête de  $\mathcal{E}_g(X_{i|j})$  (respectivement  $\mathcal{E}_d(\bar{X}_{i|j})$ ) peuvent être retrouvés à partir des points d'appui à droite (respectivement à gauche) (section 4.3).

Quand  $C_{i|j}$  n'est ni convexe, ni concave, les points de  $\hat{\mathcal{S}}$ , à encercler, sont alternativement des sommets de  $\mathcal{E}_g(X_{i|j})$  dans les parties convexes et des sommets de  $\mathcal{E}_d(\bar{X}_{i|j})$  dans les parties concaves, c'est-à-dire les sommets du polygone de longueur minimale (section 5.4.1). Les points de  $\hat{\mathcal{T}}$ , à ne pas encercler, sont les points de Bézout les plus proches de la médiatrice de chaque arête de ce polygone et peuvent donc être trouvés en même temps que  $\hat{\mathcal{S}}$ . C'est ainsi que  $\hat{\mathcal{S}}$  et  $\hat{\mathcal{T}}$  peuvent être calculés en un seul balayage de  $C_{i|j}$  par un segment de droite maximal à l'avant et/ou à l'arrière.

## 6.4 Mesure de circularité

Une mesure de circularité doit quantifier la similarité entre une partie de contour et le modèle de l'arc de cercle. En anglais, des termes variés recouvrent la même idée : “compactness” [Haralick, 1974; Kim et Anderson, 1984], “roundness” [Roy et Zhang, 1992; Swanson *et al.*, 1995; de Berg *et al.*, 1998; Agarwal *et al.*, 2000; Chen, 2002; Bose et Morin, 2004], “out-of-roundness” [Le et Lee, 1991; Swanson *et al.*, 1995; Gass *et al.*, 1998] et “circularity” [Rivlin, 1979; Pegna et Guo, 1998]. Le terme *circularité* semble le plus approprié car il rappelle le modèle avec lequel les données sont comparées.

### 6.4.1 Inconvénients des mesures existantes

Une mesure de circularité classique est  $4\pi A/P^2$  où  $A$  est l'aire de l'objet et  $P$  son périmètre. Elle est égale au rapport entre l'aire de l'objet et l'aire du cercle de même périmètre que l'objet. L'équivalent discret de cette mesure a été introduit par Haralick [1974]. Depuis, elle a été largement utilisée, sous des formes variées et dans de nombreuses applications (voir [Ritter et Cooper, 2009] pour une revue de la littérature sur cette mesure).

Un premier problème soulevé par le calcul de cette mesure est l'estimation de l'aire et du périmètre de l'objet discret. L'aire peut être estimée par le nombre de points appartenant à l'objet. Cette estimation est convergente [Klette et Žunić, 2000] et précise en pratique [Ritter et Cooper, 2009]. En revanche, si le périmètre est approché par le nombre de points du bord ou la longueur du contour, le rapport obtenu quantifie la similarité avec un octogone au lieu de quantifier une ressemblance au cercle [Bottema, 2000; Ritter et Cooper, 2009]. Même si ce biais est réduit grâce à une estimation convergente du périmètre [Coeurjolly et Klette, 2004], cette mesure de circularité présente de nombreuses limitations :

- elle n'est pas comprise entre 0 et 1, 1 pour tous les cercles discrets,
- elle est dépendante de la résolution,
- elle n'est pas calculable sur des parties de contour,
- elle n'est pas capable de fournir les paramètres d'un cercle proche du contour.

Par sa simplicité, cette mesure peut être utilisée comme une approximation rapide et grossière de la circularité d'un contour, mais dans le cas général, une autre mesure est nécessaire.

Les techniques basées sur un ajustement statistique ne souffrent pas de toutes ces limitations. En vision par ordinateur [Landau, 1987; Thomas et Chan, 1989; Berman, 1989], un cercle est en général ajusté à un ensemble de pixels par la méthode des moindres carrés, que ce soit dans un but de localisation, de détection ou de reconnaissance de cercles. En métrologie [Le et Lee, 1991; Roy et Zhang, 1992; Swanson *et al.*, 1995; Pegna et Guo, 1998; Gass *et al.*, 1998; Shakarji et Clement, 2004], un échantillon de points est prélevé sur le bord d'une pièce circulaire par une CMM (Coordinate Measurement Machine). Pour décider si sa qualité est satisfaisante, un cercle est ajusté à l'échantillon de points. La norme généralement utilisée et recommandée par le American National Standards Institute (ANSI standard, B89.3.1-1972, R2002) est celle de Chebyshev, même si la norme euclidienne est parfois utilisée [Drezner *et al.*, 2002]. Étant donnée une certaine norme, la circularité de l'échantillon de points est définie à partir du coût de l'ajustement. Pour la norme de Chebyshev, comme pour la norme euclidienne, la quantité minimisée est exprimée soit en terme de rayon, soit en terme d'aire (pour plus de précisions, lire [Pegna et Guo, 1998]). Comme l'illustre le tableau 6.2, ces quatre instances du problème de l'ajustement d'un cercle à un ensemble de points sont étudiées depuis longtemps.

Les techniques d'ajustement ont l'avantage de pouvoir être appliquées sur des parties de contour et de pouvoir fournir les paramètres d'un cercle proche des données. De plus, le coût d'ajustement peut être normalisé par l'aire ou le rayon du cercle obtenu afin d'avoir une mesure indépendante de la résolution. Ces techniques semblent intéressantes pour toutes ces raisons. En revanche, elles ne sont pas exactes, car le maximum n'est pas atteint pour tous les cercles ou arcs de cercle discret.

Satisfaire cette propriété n'est pas aisé. Les techniques naïves qui consistent à trouver, par un calcul simple, un point supposé être centre d'un cercle séparant l'objet et le fond ne sont pas valides. Par exemple, le centre de gravité des points de l'objet est parfois supposé être le centre d'un cercle séparant [Bottema, 2000]. Mais la fig. 6.13 montre que certains points du fond sont plus près du centre de gravité des points de l'objet que certains points de l'objet, même si l'objet en question est un disque discret.

	norme euclidienne	norme de Chebyshev
rayons	<i>mean square error</i> [Landau, 1987; Berman, 1989] [Drezner <i>et al.</i> , 2002]	<i>minimum width annulus</i> [Le et Lee, 1991; Roy et Zhang, 1992] [Swanson <i>et al.</i> , 1995; Pegna et Guo, 1998] [Agarwal <i>et al.</i> , 2000; Chen, 2002] [Shakarji et Clement, 2004]
aires	<i>modified mean square error</i> [Thomas et Chan, 1989]	<i>minimum area annulus</i> [Le et Lee, 1991; Gass <i>et al.</i> , 1998]

TAB. 6.2 – Articles principaux dans lesquels est traité le problème de l'ajustement d'un cercle à un ensemble de points.

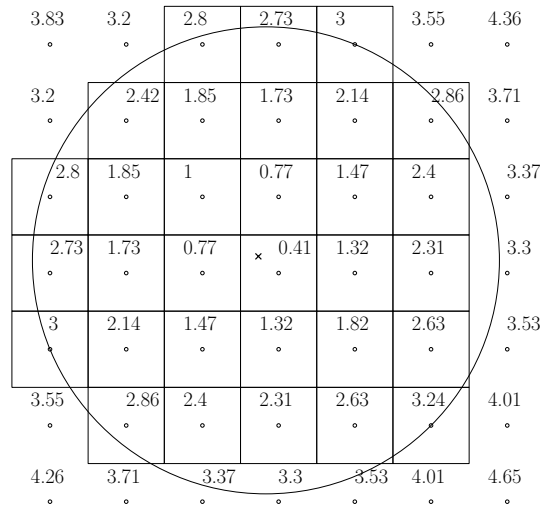


FIG. 6.13 – Dans chaque pixel est indiquée la distance de son centre au centre de gravité (localisé par une croix) d'un disque discret. Certains pixels du fond sont plus proches (3.2) du centre de gravité que certains pixels du disque (3.24).

De même, le cercle euclidien englobant les points de l'objet est parfois supposé être un cercle séparant [Chaudhuri et Rosenfeld, 1998], ce qui n'est pas vrai en général [Kim et Anderson, 1984].

Cependant, les algorithmes de reconnaissance (décrits au paragraphe 6.1) calculent les paramètres d'un cercle proche des données lorsque la partie de contour traitée est un arc de cercle. Ainsi, la conception et le calcul d'une mesure de circularité dont le maximum est atteint pour tous les arcs de cercles devrait s'inspirer de ces algorithmes de reconnaissance.

La mesure proposée dans la section suivante relie donc les algorithmes de reconnaissance basés sur le problème de séparation par un cercle et les techniques d'ajustement afin de combiner tous les avantages.

### 6.4.2 Définition de la mesure

Une mesure de circularité doit vérifier les propriétés suivantes :

1. être indépendante aux transformations rigides,
2. avoir une valeur comprise entre 0 et 1, 1 pour un arc de cercle discret,
3. être intuitive. Par exemple, elle doit augmenter à mesure que le nombre de côtés des polygones réguliers augmente. Elle doit augmenter à mesure que l'élongation des ellipses diminue. Elle doit augmenter à mesure que le bruit diminue. La mesure doit aussi être robuste. Par exemple, la circularité d'un cercle bruité doit être plus élevée que la mesure d'un triangle ou d'un carré, si le bruit est limité et n'affecte pas l'objet entier.

Une partie de contour  $C_{ij}$  est supposée sans perte de généralité convexe. L'objectif est de définir et calculer une mesure de circularité sur  $C_{ij}$  qui respecte les propriétés énoncées ci-dessus.

Ajuster un cercle aux points de  $C_{ij}$  à l'aide des techniques d'ajustement ne mène pas à une mesure correcte car la propriété 2 n'est pas vérifiée. Dans le but de concevoir une mesure satisfaisant la propriété 2, deux ensembles de points, notés  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{T}$ , sont extraits de  $C_{ij}$ , de telle sorte que  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{T}$  sont séparables par un cercle si et seulement si  $C_{ij}$  est un arc de cercle. Sans perte de généralité,  $\mathcal{S}$  est supposé être l'ensemble à encercler tandis que  $\mathcal{T}$  est celui à ne pas encercler.

Soit l'anneau  $\mathbf{A}$  de centre  $\omega$ , de rayon interne  $r_1$  et de rayon externe  $r_2$ , tel que le cercle externe englobe tous les points de  $\mathcal{S}$  et tel que le cercle interne n'englobe aucun point de  $\mathcal{T}$  :

$$\begin{aligned} & \text{Chercher } \mathbf{A} \text{ qui minimise } (r_2^2 - r_1^2) \\ & \text{sujet aux contraintes suivantes} \\ & \left\{ \begin{array}{l} \forall S \in \mathcal{S}, (S_x - \omega_x)^2 + (S_y - \omega_y)^2 \leq r_2^2 \\ \forall T \in \mathcal{T}, (T_x - \omega_x)^2 + (T_y - \omega_y)^2 > r_1^2 \end{array} \right. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Ce problème est plus général, mais peut être réduit au problème classique de calcul du plus petit anneau englobant un ensemble de points (case située en bas à droite du

tableau 6.2). C'est pourquoi la méthode proposée relie les techniques de reconnaissance basées sur le problème de séparation par un cercle et les techniques d'ajustement.

Dans l'espace  $xyz$ , les cercles internes et externes d'un anneau correspondent à deux plans parallèles. L'aire signée d'un anneau est donnée par la distance, mesurée le long de l'axe  $z$ , entre les deux plans parallèles. L'anneau d'aire minimale tel que le cercle externe englobe tous les points de  $\mathcal{S}$  et tel que le cercle interne n'englobe aucun point de  $\mathcal{T}$  correspond à la paire de plans parallèles séparés par une distance, mesurée le long de l'axe  $z$ , égale à la hauteur entre  $\mathcal{E}(\mathcal{S}')$  et  $\mathcal{E}(\mathcal{T}')$ . Si  $\mathcal{E}(\mathcal{S}')$  et  $\mathcal{E}(\mathcal{T}')$  sont disjoints,  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{T}$  sont séparables par un cercle, l'aire de l'anneau est négative. Si, au contraire,  $\mathcal{E}(\mathcal{S}')$  et  $\mathcal{E}(\mathcal{T}')$  s'intersectent,  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{T}$  ne sont pas séparables par un cercle, l'aire de l'anneau est positive et égale à la hauteur de l'imbrication. Ce calcul de hauteur est étudié et résolu au paragraphe 6.2.2 (algorithme 20).

La mesure de circularité de  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{T}$  est le rapport des aires des cercles interne et externe :

$$circ(\mathcal{S}, \mathcal{T}) = \frac{r_1^2}{r_2^2} \quad (6.4)$$

La mesure de circularité de  $C_{i|j}$  est définie à l'aide de la mesure de circularité de  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{T}$ . Comme  $C_{i|j}$  est supposé être convexe,  $\mathcal{S} = X_{i|j}$  et  $\mathcal{T} = \bar{X}_{i|j}$ .

$$\begin{cases} circ(C_{i|j}) = circ(\mathcal{S}, \mathcal{T}) & \text{si } (circ(\mathcal{S}, \mathcal{T}) < 1) \\ circ(C_{i|j}) = 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.5)$$

Si l'aire signée  $\pi(r_2^2 - r_1^2)$  de  $\mathbf{A}$  est strictement inférieure à 0,  $X_{i|j}$  et  $\bar{X}_{i|j}$  sont séparables par un cercle et  $circ(X_{i|j}, \bar{X}_{i|j}) > 1$ , mais si  $\pi(r_2^2 - r_1^2) \geq 0$ ,  $X_{i|j}$  et  $\bar{X}_{i|j}$  ne sont pas séparables par un cercle et  $circ(X_{i|j}, \bar{X}_{i|j}) \leq 1$  (fig. 6.14). Par conséquent, la mesure de circularité définie par l'équation 6.5 satisfait la propriété 2. Elle est aussi, par définition, robuste aux transformations rigides (propriété 1). La section suivante présente plusieurs résultats expérimentaux indiquant que les valeurs obtenues pour différents contours sont en adéquation avec l'intuition que l'on peut avoir d'une mesure de circularité (propriété 3).

### 6.4.3 Résultats expérimentaux

Par définition, la mesure de circularité proposée est d'une part, robuste aux transformations rigides et d'autre part, maximale et égale à 1 pour tout arc de cercle discret, quels que soient son centre et son rayon. Dans cette section, nous mesurons la circularité de différentes classes de contours : des polygones réguliers, des ellipses et des cercles bruités. Ces contours sont ceux d'objets discrets. Ces objets discrets ont été générés à partir de la discrétisation de Gauss d'objets euclidiens (fig. 6.15).

Le bruit, quand il est ajouté, suit le modèle de Kanungo *et al.* [2000] (section 1.3.4). La fig. 6.15 donne deux exemples de résultats de ce modèle appliqué à un objet discret issu de la discrétisation d'un cercle.

Les polygones, ellipses, cercles euclidiens sont générés implicitement à partir de leurs paramètres. En outre, de ces paramètres se déduit le plus petit anneau englobant à par-



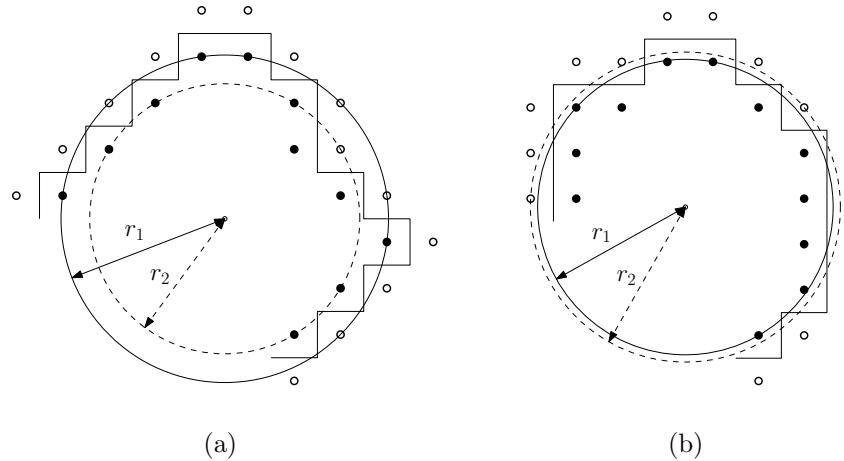


FIG. 6.14 – Deux parties de contour sont dessinées.  $\mathcal{S}$  (respectivement  $\mathcal{T}$ ) est l'ensemble de ronds noirs (respectivement de ronds blancs). En (a), l'anneau d'aire minimale a une aire positive et la mesure de circularité égale  $8.5/12.5 = 0.68$ . En revanche, en (b), il a une aire négative et la mesure de circularité est égale à 1, car la partie de contour représentée est un arc de cercle.


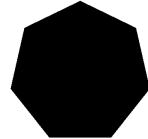


			
ellipse $a = 25, b = 50$	heptagone régulier $p = 1325$	cercle bruité $r = 30, \alpha = 1$	cercle bruité $r = 30, \alpha = 15$

FIG. 6.15 – Discrétisation de Gauss d'une ellipse, d'un heptagone régulier et de deux cercles. La taille visuelle des figures ne reflète pas leur taille réelle. La quantité de bruit ajoutée aux deux dernières figures selon le modèle de Kanungo *et al.* [2000] dépend du paramètre  $\alpha$ . Les contours utilisés dans le calcul de la circularité sont les contours de ces objets.

tir duquel une circularité de référence est calculée. Cette vérité-terrain sert à étudier la précision de la circularité mesurée sur les contours des objets discrets.

### 6.4.3.1 Polygones réguliers

Une centaine de polygones discrets a été générée. Ils sont obtenus par discrétisation de Gauss de polygones réguliers euclidiens de périmètre fixe. Leur nombre de côtés varie de 3 à 103, tandis que leur périmètre est approximativement égal à 1325 unités. Un périmètre si grand permet d'observer des polygones ayant un grand nombre de côtés. La fig. 6.16 montre que les valeurs obtenues sont proches de la vérité-terrain. La circularité augmente à mesure que le nombre de côtés augmente. Elle converge vers 1 pour des polygones ayant un nombre important de côtés et ressemblant à des cercles. La circularité des polygones réguliers ayant entre 30 et 85 côtés est alternativement égale à 1 et à une valeur légèrement inférieure à 1 (environ 0.99). En outre, les polygones réguliers ayant plus de 85 côtés ont été discrétisés en un même objet discret, qui s'avère être un cercle discret de circularité 1.

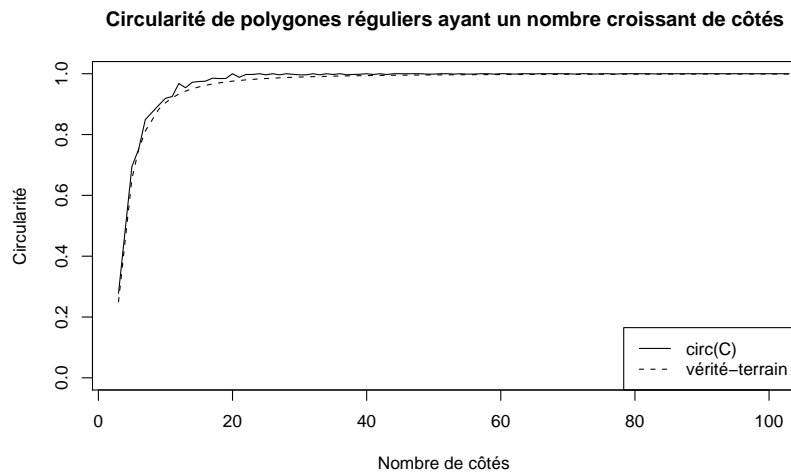


FIG. 6.16 – Évolution de la circularité en fonction du nombre de côtés de polygones réguliers.

### 6.4.3.2 Ellipses

Une centaine d'ellipses discrètes ont été générées. Elles sont obtenues par discrétisation de Gauss d'ellipses euclidiennes. Les paramètres  $a$  et  $b$  représentent respectivement les petit et grand demi-axes des ellipses. La circularité a été mesurée pour des ellipses d'élongation  $a/b$  croissante. La fig. 6.17 montre que la courbe obtenue est presque confondue avec la vérité-terrain.

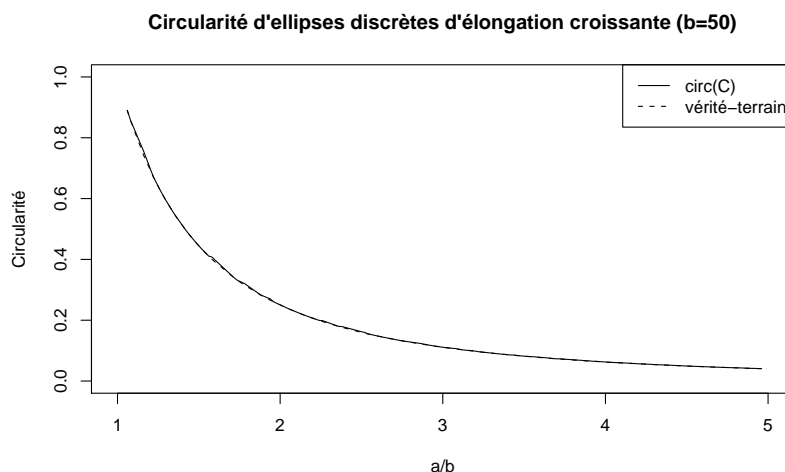


FIG. 6.17 – Évolution de la circularité en fonction de l'élongation  $a/b$  des ellipses. Les ellipses sont centrées en l'origine et leurs axes sont parallèles à ceux du plan.  $b = 50$  et  $a$  est compris entre 10 et 50, de sorte que l'élongation varie entre 1 et 5.

### 6.4.3.3 Cercles bruités

Une centaine de cercles discrets bruités a été générée. Ces contours sont obtenus par discrétisation de Gauss de cercles de rayon 30, puis par ajout de bruit selon le modèle de Kanungo *et al.* [2000].

La fig. 6.18 montre que la circularité diminue à mesure que le bruit augmente. Cette évolution n'est pas régulière, mais en dents de scie, parce que les points basculent de l'objet au fond et inversement de manière aléatoire. Même avec un bruit important ( $\alpha = 15$ ), la circularité est supérieure à 0,8, ce qui correspond approximativement à la circularité d'un heptagone. Ainsi, la mesure proposée est suffisamment robuste pour différencier les cercles bruités obtenus par le modèle de Kanungo *et al.* [2000] à  $\alpha = 15$ , des polygones réguliers ayant un nombre de côtés inférieur à 7, tels que les triangles ou les carrés. La comparaison est sensée malgré la différence de périmètre car la mesure ne dépend pas de la taille.

La mesure proposée peut être appliquée en l'état à des parties de contours, à la place du contour entier. La mesure est exacte pour tous les arcs de cercle issus d'un même cercle. Mais plus le cercle est bruité, plus la circularité des petits arcs de cercle s'écarte de celle du contour entier.

Pour se donner une idée de la précision de la circularité des arcs de cercles bruités en fonction de leur longueur, environ 7500 arcs de cercle sont générés. Cinquante cercles bruités sont d'abord générés ( $r = 30$ ,  $\alpha = 15$ ) (fig. 6.15). Ensuite, pour chaque cercle et pour chaque longueur entre 20 et 180 points environ, un arc de cercle est extrait aléatoirement. La fig. 6.19 montre que les valeurs obtenues sur des arcs de cercle de 20 à 45 points ( $< 90$  degrés) ne peuvent être considérées comme précises, car l'intervalle de confiance à 95% est large (jusqu'à 0.1 point de circularité). Cependant il rétrécit à mesure que la longueur

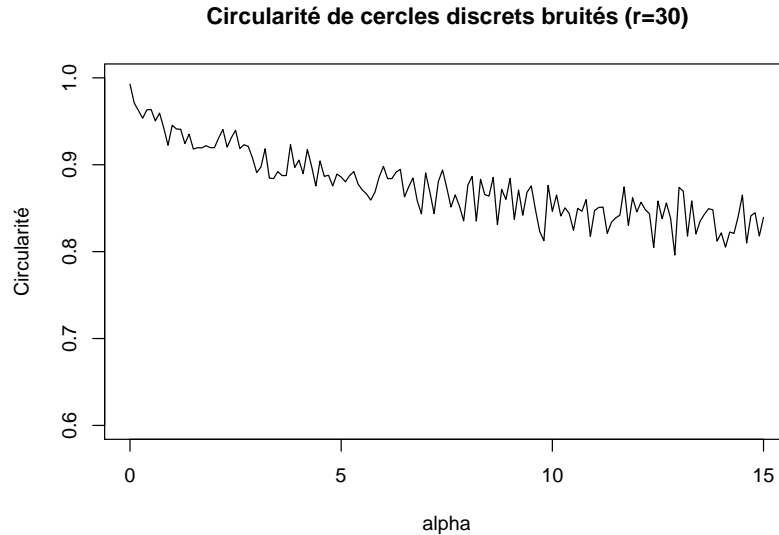


FIG. 6.18 – Évolution de la mesure de circularité en fonction de la quantité de bruit ajoutée (contrôlée par le paramètre  $\alpha$ ) à des cercles discrets de rayon 30.

de l'arc augmente. Les valeurs obtenues sur des arcs de cercle de plus de 45 points ( $> 90$  degrés) peuvent être considérées comme précises, car l'intervalle de confiance à 95% est réduit (environ 0.01 point de circularité).

## 6.5 Conclusion

Dans la définition que nous avons adoptée, les points intérieurs et extérieurs d'un arc de cercle sont séparables par un cercle. Ce choix permet d'exploiter des résultats de géométrie algorithmique connus, pour le test, la reconnaissance ou la description par mesure de circularité.

Nous avons proposé un algorithme original de reconnaissance d'arcs de cercle. Il procède par séparation des points intérieurs et extérieurs par un cercle. En projetant verticalement ces points sur un paraboloïde elliptique, ce problème de séparation circulaire dans un espace à deux dimensions est transformé en un problème de séparation linéaire dans un espace à trois dimensions. Ce problème est résolu en deux étapes. La première consiste à calculer les enveloppes convexes tridimensionnelles de ces deux ensembles de points. La seconde consiste à calculer la hauteur entre ces enveloppes de façon à savoir si elles s'intersectent ou non. Ces opérations sont réalisées par des algorithmes classiques de géométrie algorithmique. De plus, la taille des deux ensembles de points à séparer peut être réduite de façon à obtenir un algorithme linéaire en temps.

En revanche, l'algorithme proposé n'est pas incrémental. Pour considérer une donnée supplémentaire, il est nécessaire de reprendre tout le calcul. A cause de cet inconvénient,

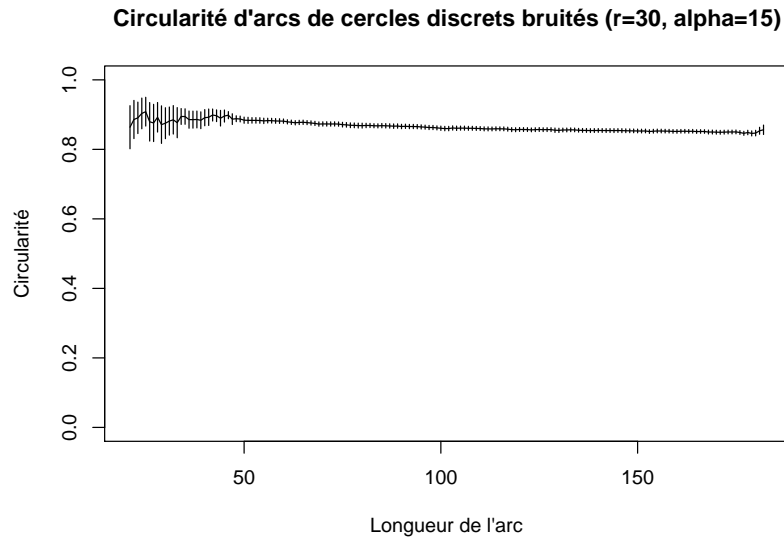


FIG. 6.19 – Cinquante cercles bruités sont générés ( $r = 30$ ,  $\alpha = 15$ ) (fig. 6.15). Pour chaque cercle et pour chaque longueur entre 20 et 180 points, un arc de cercle est extrait aléatoirement. La moyenne des mesures de circularité, ainsi que les barres d’erreur à 95%, sont représentées en fonction de la longueur des arcs de cercle.

décomposer un contour en arcs de cercle maximaux s’avère algorithmiquement coûteux. Dans le chapitre 7, ce problème est contourné grâce à l’analyse d’une version contrainte du problème de reconnaissance pour lequel une solution incrémentale et rapide à calculer existe.

Nous avons adapté aux parties de contour une mesure de circularité d’un ensemble de points utilisée en métrologie. Le plus petit anneau dont le cercle externe englobe les points intérieurs et dont le cercle interne n’englobe aucun point extérieur (ou inversement) est calculé à l’aide des mêmes outils que ceux utilisés pour la reconnaissance des arcs de cercle. Notre mesure de circularité est définie alors comme le rapport des aires du cercle interne et externe de cet anneau. Contrairement aux mesures traditionnelles, elle possède les propriétés suivantes :

- elle s’applique aussi bien aux contours qu’à des parties de contours,
- elle est robuste aux transformations rigides,
- elle est facile à interpréter et à prévoir,
- elle est comprise entre 0 et 1, vaut 1 pour tous les arcs de cercle et uniquement ceux-ci,
- elle fournit les paramètres d’un cercle euclidien dont le contour de la discrétisation de Gauss est le cercle discret traité si la mesure de circularité vaut 1 et les paramètres d’un cercle de meilleure approximation sinon.



# *Version contrainte du problème de la reconnaissance d'arcs de cercle*

## Sommaire

---

<b>7.1</b>	<b>Définition et calcul des <math>P</math>-enveloppes . . . . .</b>	<b>172</b>
7.1.1	$P$ -disque et $\overline{P}$ -disque . . . . .	172
7.1.2	$P$ -enveloppes . . . . .	174
<b>7.2</b>	<b>Séparation par des cercles passant par un point donné . . . . .</b>	<b>177</b>
7.2.1	Points de support . . . . .	178
7.2.2	Algorithme de séparation . . . . .	179
7.2.3	Exemple de déroulement . . . . .	180
<b>7.3</b>	<b>Décomposition d'un contour en arcs de cercle . . . . .</b>	<b>183</b>
7.3.1	Principe de l'algorithme . . . . .	183
7.3.2	Exemple de déroulement . . . . .	185
7.3.3	Complexité et résultats expérimentaux . . . . .	187
<b>7.4</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>190</b>

---

Dans ce chapitre, une version contrainte du problème de la reconnaissance d'arcs de cercle est étudiée : la reconnaissance d'arcs de cercle passant par un point donné. Ce problème est une généralisation du problème de la reconnaissance de segments de droite. Nous montrons d'abord que l'algorithme de reconnaissance de segments de droite par séparation décrit au paragraphe 4.2.1 s'applique sans restriction aux arcs de cercle passant par un point donné. Nous utilisons ensuite ce résultat pour résoudre le problème plus complexe de la reconnaissance d'arcs de cercle. Ce chapitre est une description détaillée d'une partie du travail présenté à *15-th IAPR International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery* (DGCI'09) [Roussillon *et al.*, 2009b].

## 7.1 Définition et calcul des $P$ -enveloppes

Dans cette section, l'objectif est de poser les définitions nécessaires à l'application de notre algorithme de séparation de deux ensembles de points par une droite (section 4.2.1) à la séparation de deux ensembles de points par un cercle passant par un point donné. Pour cela, nous introduisons les notions de  $P$ -disque et  $\overline{P}$ -disque, pour imiter celle de demi-plan orienté (définition 1.14), puis nous proposons la notion de  $P$ -enveloppe, qui est une généralisation de l'enveloppe convexe (définition 1.12).

### 7.1.1 $P$ -disque et $\overline{P}$ -disque

Tout le travail de ce chapitre porte sur une classe de disques contraints composée de  $P$ -disques et  $\overline{P}$ -disques. Un  $P$ -disque est un disque passant par un point fixe  $P_0$ , donné *a priori*. Par deux points quelconques  $a$  et  $b$  (différents de  $P_0$  et non confondus) passe un et un seul  $P$ -disque (fig. 7.1.a). Le bord d'un  $P$ -disque est appelé naturellement  $P$ -cercle (un  $P$ -disque est fermé par convention, c'est-à-dire qu'il contient le  $P$ -cercle). Le complémentaire d'un  $P$ -disque est noté  $\overline{P}$ -disque (fig. 7.1.b).

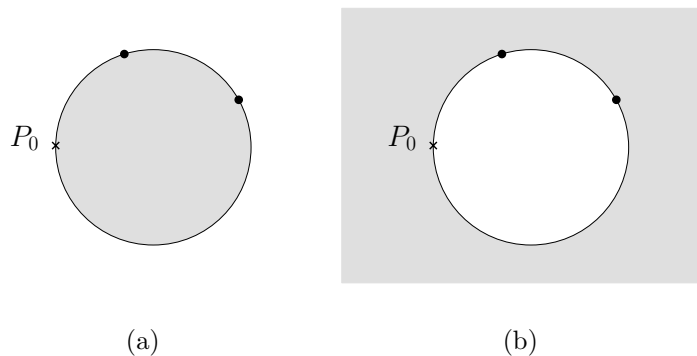


FIG. 7.1 – Étant donné un point fixe  $P_0$ , représenté par une croix, par deux points quelconques, non confondus et distincts de  $P_0$ , représentés par des ronds noirs, passe un  $P$ -disque et un  $\overline{P}$ -disque.



## 7.1. Définition et calcul des $P$ -enveloppes

Les  $P$ -disques et  $\overline{P}$ -disques s'interprètent directement dans l'espace  $xyz$  (section 2.2.2). Un  $P$ -disque (respectivement  $\overline{P}$ -disque) passant par deux points  $a$  et  $b$  est la projection sur le plan  $xy$  de l'intersection entre le parabolôide elliptique d'équation  $z = x^2 + y^2$  et le demi-espace qui se trouve au-dessous (respectivement au-dessus) du plan passant par  $a'$ ,  $b'$  et  $P_0'$ , les projetés sur le parabolôide des points  $a$ ,  $b$  et  $P_0$  (fig. 7.2).

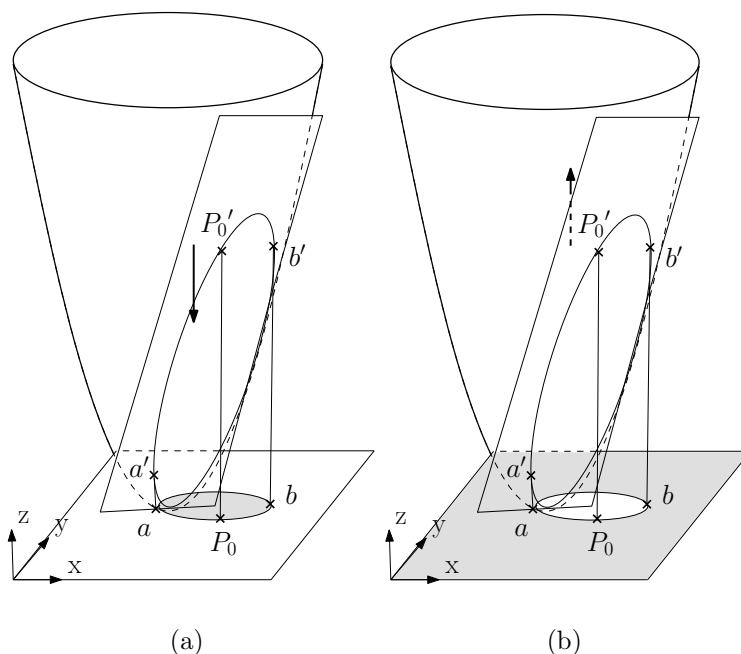


FIG. 7.2 – Un  $P$ -disque (respectivement  $\overline{P}$ -disque) est la projection sur le plan  $xy$  d'un demi-espace situé au-dessous (respectivement au-dessus) d'un plan intersectant le parabolôide elliptique d'équation  $z = x^2 + y^2$ .

En pratique, étant donnés trois points  $a$ ,  $b$  et  $c$  orientés dans le sens des aiguilles d'une montre, décider si  $c$  appartient au  $P$ -disque passant par  $a$  et  $b$  revient, dans l'espace  $xyz$  (section 2.2.2), à décider si le projeté  $c'$  du point  $c$  se trouve au-dessous du plan passant par les projetés  $P_0'$ ,  $a'$  et  $b'$  des points  $P_0$ ,  $a$  et  $b$ . Ceci est équivalent à évaluer l'expression de l'équation 7.1 :

$$\begin{vmatrix} P_{0x} & P_{0y} & P_{0x}^2 + P_{0y}^2 & 1 \\ a_x & a_y & a_x^2 + a_y^2 & 1 \\ b_x & b_y & b_x^2 + b_y^2 & 1 \\ c_x & c_y & c_x^2 + c_y^2 & 1 \end{vmatrix} \leq 0 \quad (7.1)$$

Or, le prédicat de l'équation 7.1 est équivalent à celui-ci, plus simple à calculer :

$$\left| \begin{array}{ccc} a_x - P_{0x} & b_x - P_{0x} & c_x - P_{0x} \\ a_y - P_{0y} & b_y - P_{0y} & c_y - P_{0y} \\ (a_x - P_{0x})^2 + (a_y - P_{0y})^2 & (b_x - P_{0x})^2 + (b_y - P_{0y})^2 & (c_x - P_{0x})^2 + (c_y - P_{0y})^2 \end{array} \right| \geq 0 \quad (7.2)$$

Dans l'espace  $xyz$ , quand le projeté du point  $P_0$  est rejeté à l'infini dans la direction  $O\vec{z}$ , le prédicat de l'équation 7.1 est équivalent au prédicat d'orientation classique de trois points dans le plan (section 2.3.1, équation 1.1) :

$$\left| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_x & a_y & a_x^2 + a_y^2 & 1 \\ b_x & b_y & b_x^2 + b_y^2 & 1 \\ c_x & c_y & c_x^2 + c_y^2 & 1 \end{array} \right| \leq 0 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{ccc} a_x & a_y & 1 \\ b_x & b_y & 1 \\ c_x & c_y & 1 \end{array} \right| \leq 0 \quad (7.3)$$

### 7.1.2 $P$ -enveloppes

A l'aide des notions précédentes de  $P$ -disque et  $\overline{P}$ -disque, nous proposons la définition suivante de  $P$ -enveloppe :

**Définition 7.1** ( $P$ -enveloppe). *La  $P$ -enveloppe d'un ensemble de points  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{R}^2$  est l'intersection de tous les  $P$ -disques et  $\overline{P}$ -disques contenant  $\mathcal{S}$ .*

Des exemples de  $P$ -enveloppes d'un ensemble de points sont dessinés dans la fig. 7.3. Quand le point fixe  $P_0$  est à l'intérieur de l'enveloppe convexe de l'ensemble  $\mathcal{S}$ , la  $P$ -enveloppe de  $\mathcal{S}$  n'est pas définie, car aucun  $P$ -disque, ni aucun  $\overline{P}$ -disque passant par  $P_0$  ne contient  $\mathcal{S}$  (fig. 7.3.c). En revanche, quand  $P_0$  est à l'extérieur de l'enveloppe convexe de l'ensemble  $\mathcal{S}$ , la  $P$ -enveloppe de  $\mathcal{S}$  n'a pour sommets que des points de  $\mathcal{S}$  (fig. 7.3.a et fig. 7.3.b). Dans l'espace  $xyz$ , quand le projeté  $P_0'$  du point  $P_0$  est rejeté à l'infini dans la direction  $O\vec{z}$ , tous les plans passant par  $P_0'$  sont perpendiculaires au plan  $xy$  et la  $P$ -enveloppe de  $\mathcal{S}$  est égale à l'enveloppe convexe de  $\mathcal{S}$  (fig. 7.3.d).

Dans l'espace  $xyz$  (section 2.2.2), l'intersection de tous les demi-espaces contenant  $\mathcal{S}'$  et dont le bord passe par  $P_0'$  donne un cône (fig. 7.4). Le bord d'une  $P$ -enveloppe est composée d'arcs de cercle qui sont la projection sur le plan  $xy$  de l'intersection entre le parabolöide elliptique et les plans portés par les faces du cône issu de  $P_0'$  (fig. 7.4).

Une extension du concept de  $P$ -enveloppe est nécessaire pour son utilisation dans un algorithme de séparation par des  $P$ -cercles.

Soit une séquence  $\mathcal{S}$  de points de  $\mathbb{R}^2$  formant une ligne polygonale simple, notée  $\Sigma(\mathcal{S})$ .

Les  $P$ -enveloppes interne et externe sont définies à l'image des enveloppes convexes partielles à gauche et à droite (définition 1.15).

**Définition 7.2** ( $P$ -enveloppe interne et externe). *Étant donné un point fixe  $P_0$ , la  $P$ -enveloppe externe (respectivement interne) de  $\mathcal{S}$  est une ligne composée d'arcs de cercle vérifiant les conditions suivantes :*

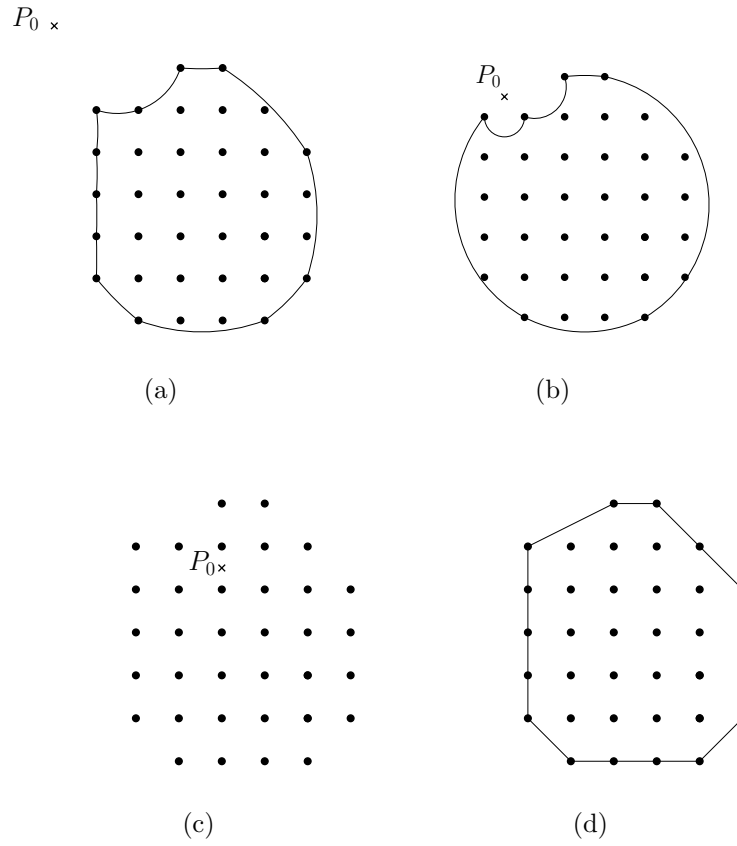


FIG. 7.3 – Quatre exemples de  $P$ -enveloppes.

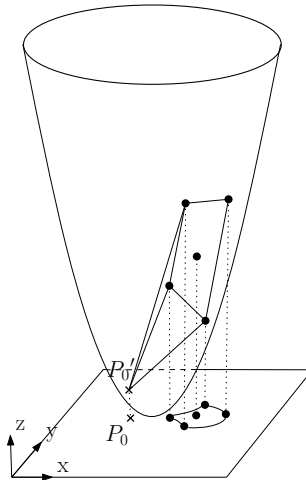


FIG. 7.4 – Interprétation de la  $P$ -enveloppe par un cône dans l'espace  $xyz$ .

- les points de discontinuité entre deux arcs de cercle, appelés sommets, sont des points de  $\mathcal{S}$  ; le premier et le dernier sommets étant le premier et le dernier point de  $\mathcal{S}$ ,
- ses arcs entre deux sommets  $s_k$  et  $s_l$  se trouvent sur le bord d'un :
  - $P$ -disque si le demi-plan à droite défini par  $s_k$  et  $s_l$  contient  $P_0$
  - $\overline{P}$ -disque si le demi-plan à droite défini par  $s_k$  et  $s_l$  ne contient pas  $P_0$
 contenant (respectivement ne contenant pas) les points de  $\mathcal{S}$  entre  $s_k$  et  $s_l$ , ainsi que le sommet suivant  $s_m$ .

Dans le plan  $xy$ , il est nécessaire de distinguer le cas des  $P$ -disques et celui des  $\overline{P}$ -disques, mais dans l'espace  $xyz$ , ces deux objets sont la projection de l'intersection d'un demi-espace avec le paraboloïde elliptique. Ainsi, étant donnés trois points  $a$ ,  $b$  et  $c$ , décider si  $c$  appartient ou non :

- au  $P$ -disque passant par  $a$  et  $b$  si le demi-plan à droite défini par  $a$  et  $b$  contient  $P_0$ ,
- au  $\overline{P}$ -disque passant par  $a$  et  $b$  si le demi-plan à droite défini par  $a$  et  $b$  ne contient pas  $P_0$ ,

revient à évaluer l'expression de l'équation 7.1.

La fig. 7.5 montre un exemple de  $P$ -enveloppe externe et interne sur une même séquence de points.

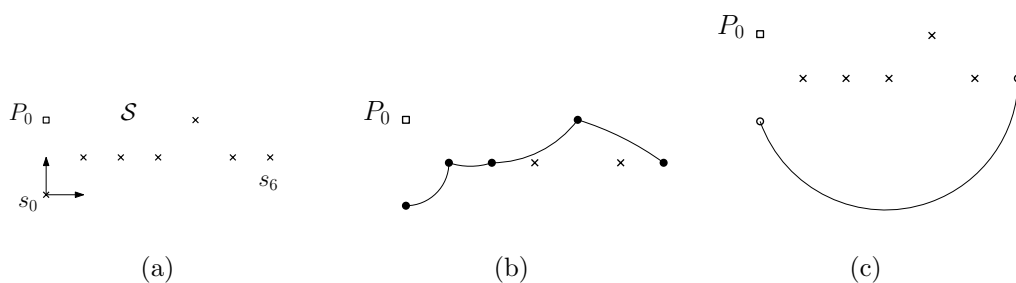


FIG. 7.5 –  $P$ -enveloppe externe (b) et interne (c) d'une séquence de points  $\mathcal{S}$  (a).

Les  $P$ -enveloppes externe et interne se calculent facilement par un algorithme semblable à celui du balayage de Graham (section 2.3.1). Seul le prédicat d'orientation change. L'algorithme 22 utilise le prédicat de l'équation 7.1 pour le calcul de la  $P$ -enveloppe externe d'une séquence de points (il suffit de remplacer "vrai" par "faux", ligne 6, pour le calcul de la  $P$ -enveloppe interne).

La fig. 7.6 illustre les premières étapes du calcul de la  $P$ -enveloppe externe des points de la fig. 7.5.a. La  $P$ -enveloppe externe est initialisée avec les deux premiers points. Le demi-plan à droite défini par  $s_0$  et  $s_1$  ne contient pas  $P_0$ . Or  $s_2$  appartient au  $\overline{P}$ -disque passant par  $s_0$  et  $s_1$  (fig. 7.6.a). Le prédicat de l'équation 7.1 renvoie vrai ( $-6 \leq 0$ ),  $s_1$  reste sommet de la  $P_0$ -enveloppe externe et  $s_2$  est ajouté à la  $P_0$ -enveloppe externe (fig. 7.6.b). Les mêmes événements se produisent pour  $s_3$  ( $-2 \leq 0$ ). Ils diffèrent en revanche pour  $s_4$ . Le demi-plan à droite défini par  $s_2$  et  $s_3$  ne contient pas  $P_0$ . Or  $s_4$  n'appartient pas au  $\overline{P}$ -disque passant par  $s_2$  et  $s_3$  (fig. 7.6.c). Le prédicat renvoie faux ( $4 \leq 0$ ),  $s_3$  ne reste pas sommet de la

---

**Algorithme 22** : Balayage de Graham étendu au calcul d'une  $P$ -enveloppe externe
 

---

**Entrées** :  $P_0$  et une séquence de points  $(s_0, s_1, \dots, s_n)$  de  $\mathbb{R}^2$ **Sorties** : La pile contenant les sommets de la  $P$ -enveloppe externe

```

1 si  $n > 3$  alors
2   Empiler  $s_0$ ;
3   Empiler  $s_1$ ;
4   Empiler  $s_2$ ;
5   pour  $i$  de 3 à  $n$  faire
6     tant que le prédicat de l'équation 7.1 évalué à partir de  $P_0$ , les 2 derniers
7       points du haut de la pile et  $s_i$  est faux faire
8       Dépiler;
9       Empiler  $s_i$ ;
9   retourner la pile;
  
```

---

$P$ -enveloppe externe (fig. 7.6.d). Le demi-plan à droite défini par  $s_1$  et  $s_2$  ne contient pas  $P_0$ . Or  $s_4$  appartient au  $P$ -disque passant par  $s_1$  et  $s_2$ , le prédicat renvoie vrai ( $-4 \leq 0$ ), donc le point  $s_2$  est conservé dans la  $P$ -enveloppe externe (fig. 7.6.d). Le point  $s_4$  est ajouté à la  $P$ -enveloppe externe et reste jusqu'à la fin du calcul comme le montre la fig. 7.5.b.

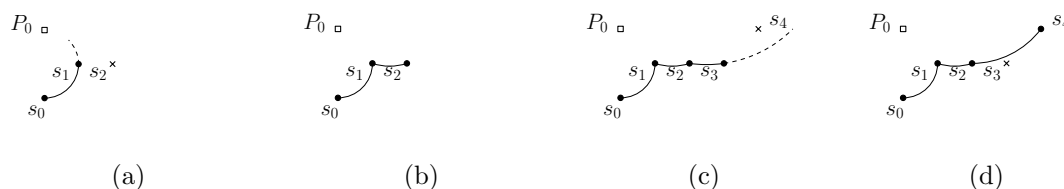


FIG. 7.6 – Déroulement du balayage permettant le calcul d'une  $P_0$ -enveloppe externe.

Comme précédemment, nous considérons que les points de l'ensemble  $X_{i|j}$  (respectivement  $\bar{X}_{i|j}$ ) sont naturellement triés selon l'ordre de parcours des points de la partie  $C_{i|j}$ . Pour résoudre le problème de séparation de  $X_{i|j}$  et  $\bar{X}_{i|j}$  par des cercles passant par un point donné, nous allons calculer les  $P$ -enveloppes partielles de  $X_{i|j}$  et  $\bar{X}_{i|j}$ .

## 7.2 Séparation par des cercles passant par un point donné

L'objectif est de déterminer, à partir d'une partie de contour  $C_{i|j}$  supposée convexe, s'il existe des  $P$ -cercles séparant les points intérieurs  $X_{i|j}$  des points extérieurs  $\bar{X}_{i|j}$ . Pour simplifier,  $C_{i|j}$  est supposée convexe, de sorte que les points intérieurs  $X_{i|j}$  sont les points à encercler, tandis que les points extérieurs  $\bar{X}_{i|j}$  sont ceux à ne pas encercler. Pour résoudre

ce problème, nous avons recours à la même approche que celle adoptée au paragraphe 4.2.1 pour la reconnaissance de segments de droite.

### 7.2.1 Points de support

Un point de  $X_{i|j}$  ou  $\bar{X}_{i|j}$  se trouvant sur un  $P$ -cercle séparant  $X_{i|j}$  de  $\bar{X}_{i|j}$  est appelé *point de support*. Pour appliquer à notre problème l'algorithme de séparation de  $X_{i|j}$  et  $\bar{X}_{i|j}$  par une droite, il est nécessaire que (1)  $X_{i|j}$  et  $\bar{X}_{i|j}$  possèdent chacun au moins un point de support s'ils sont séparables par un  $P$ -cercle et que (2), les points de support soient des sommets consécutifs de la  $P$ -enveloppe externe de  $X_{i|j}$  et de la  $P$ -enveloppe interne de  $\bar{X}_{i|j}$ . Il s'avère que ces conditions, énoncées dans les propositions 7.1 et 7.2, sont toujours vérifiées.

La proposition 7.1 relie l'existence d'un  $P$ -cercle séparant  $X_{i|j}$  de  $\bar{X}_{i|j}$  à l'existence d'un point de support appartenant à  $X_{i|j}$  et d'un point de support appartenant à  $\bar{X}_{i|j}$ .

**Proposition 7.1.** *Il existe un  $P$ -cercle séparant  $X_{i|j}$  de  $\bar{X}_{i|j}$  si et seulement si au moins un point de  $X_{i|j}$  et un point de  $\bar{X}_{i|j}$  sont des points de support.*

*Démonstration.* Par définition, si un point de  $X_{i|j}$  ou  $\bar{X}_{i|j}$  est un point de support, alors il existe un  $P$ -cercle passant par le point de support et contenant  $X_{i|j}$ , mais pas  $\bar{X}_{i|j}$ . L'inverse est également vrai. Supposons qu'il existe un  $P$ -cercle englobant  $X_{i|j}$ , mais pas  $\bar{X}_{i|j}$ , noté  $\mathcal{C}_0(\omega_0, r_0)$  (en pointillé sur la fig. 7.7). Le centre  $\omega_0$  peut toujours être déplacé en direction de  $P_0$  (respectivement en direction inverse) de façon à ce que  $\mathcal{C}_0$  se contracte (respectivement se dilate) et touche un point qu'il englobe (respectivement qu'il n'englobe pas), c'est-à-dire un point de  $X_{i|j}$  (respectivement  $\bar{X}_{i|j}$ ), tout en restant séparant (fig. 7.7). Le point touché par  $\mathcal{C}_0$  est par définition un point de support, puisque  $\mathcal{C}_0$  est séparant.  $\square$

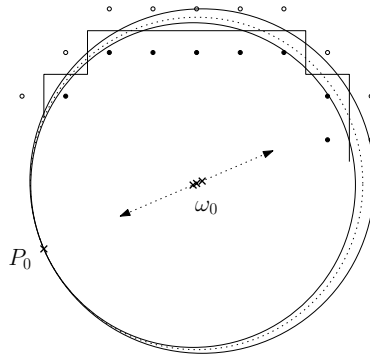


FIG. 7.7 – L'existence d'un  $P$ -disque qui contient  $X_{i|j}$ , mais pas  $\bar{X}_{i|j}$  implique l'existence d'un point de support appartenant à  $X_{i|j}$  et d'un point de support appartenant à  $\bar{X}_{i|j}$ .

La proposition 7.2 montre que les points de support sont des sommets consécutifs de la  $P$ -enveloppe externe de  $X_{i|j}$  ou de la  $P$ -enveloppe interne de  $\bar{X}_{i|j}$ .

**Proposition 7.2.** *Les points de support de  $X_{i|j}$  (respectivement  $\bar{X}_{i|j}$ ) sont des sommets consécutifs de la  $P$ -enveloppe externe de  $X_{i|j}$  (respectivement de la  $P$ -enveloppe interne de  $\bar{X}_{i|j}$ ).*

*Démonstration.* Considérons un point  $Q$  de  $X_{i|j}$  qui n'est pas un sommet de la  $P$ -enveloppe externe de  $X_{i|j}$ . Dans la liste des points intérieurs  $X_{i|j}$ ,  $Q$  est forcément entre deux points, notés  $E_{prev}$  et  $E_{next}$ , qui sont sommets de la  $P$ -enveloppe externe de  $X_{i|j}$ . Selon la définition 7.1,  $E_{next}$  n'appartient pas au  $P$ -disque passant par  $E_{prev}$  et  $Q$  (fig. 7.8). De même,  $E_{prev}$  n'appartient pas au  $P$ -disque passant par  $E_{next}$  et  $Q$  (fig. 7.8). Ainsi, aucun  $P$ -disque passant par  $Q$  ne peut contenir tous les points de  $X_{i|j}$ , ce qui est nécessaire pour être séparant. Par définition,  $Q$  ne peut être un point de support. Les points de support de  $X_{i|j}$ , s'ils existent, ne peuvent qu'être des sommets de la  $P$ -enveloppe externe de  $X_{i|j}$ . De manière similaire, les points de support de  $\bar{X}_{i|j}$  ne peuvent qu'être des sommets de la  $P$ -enveloppe interne de  $\bar{X}_{i|j}$ .

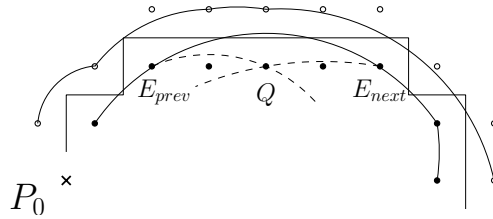


FIG. 7.8 – Les points de support de  $X_{i|j}$  (respectivement  $\bar{X}_{i|j}$ ) sont des sommets de la  $P$ -enveloppe externe de  $X_{i|j}$  (respectivement de la  $P$ -enveloppe interne de  $\bar{X}_{i|j}$ ).

De plus, les points de support sont des sommets consécutifs dans les  $P$ -enveloppes. Considérons un sommet  $E$  de la  $P$ -enveloppe externe de  $X_{i|j}$ . Les sommets précédent et suivant sont respectivement notés  $E_{prev}$  et  $E_{next}$ . Supposons maintenant que  $E_{prev}$  et  $E_{next}$  sont points de support. Il existe deux  $P$ -disques, notés  $\mathcal{D}_{prev}$  et  $\mathcal{D}_{next}$ , passant par  $E_{prev}$  et  $E_{next}$  et contenant  $X_{i|j}$ , mais pas  $\bar{X}_{i|j}$  (en tirets dans la fig. 7.9.a).  $\mathcal{D}_{prev} \cap \mathcal{D}_{next}$  contient tous les points de  $X_{i|j}$ , alors que  $\mathcal{D}_{prev} \cup \mathcal{D}_{next}$  ne contient aucun point de  $\bar{X}_{i|j}$ . Il existe toujours un  $P$ -disque, noté  $\mathcal{D}_0$ , passant par  $E$  et contenant tous les points de  $X_{i|j}$  sans contenir un seul point de  $\bar{X}_{i|j}$  (en pointillé sur la fig. 7.9). En effet,  $\mathcal{D}_0$  contient  $\mathcal{D}_{prev} \cap \mathcal{D}_{next}$  qui contient tous les points de  $X_{i|j}$ , tandis que  $\mathcal{D}_0$  est contenu par  $\mathcal{D}_{prev} \cup \mathcal{D}_{next}$ , qui ne contient aucun point de  $\bar{X}_{i|j}$  (fig. 7.9). Ainsi, un sommet de la  $P$ -enveloppe de  $X_{i|j}$  ne peut pas être encadré par deux sommets qui sont points de support sans être point de support lui-même. Les points de support de  $X_{i|j}$  sont donc des sommets consécutifs de la  $P$ -enveloppe externe de  $X_{i|j}$ . De même, les points de support de  $\bar{X}_{i|j}$  sont des sommets consécutifs de la  $P$ -enveloppe interne de  $\bar{X}_{i|j}$ .  $\square$

## 7.2.2 Algorithme de séparation

Les propositions 7.1 et 7.2 signifient que la connaissance de la  $P$ -enveloppe externe de  $X_{i|j}$  et de la  $P$ -enveloppe interne de  $\bar{X}_{i|j}$ , ainsi que des premier et dernier points de support

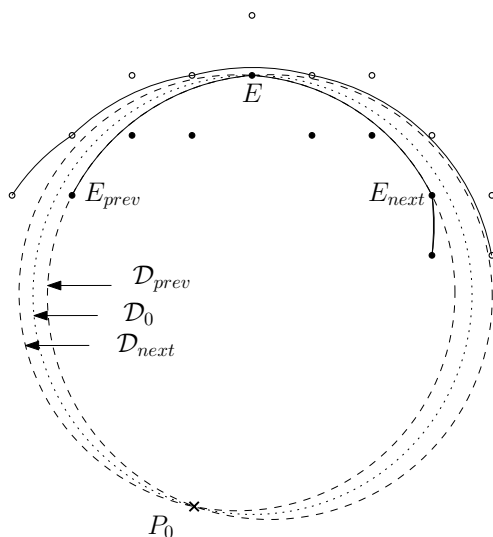


FIG. 7.9 – Les points de support sont des sommets consécutifs des  $P$ -envelopes car  $\mathcal{D}_0$  contient  $\mathcal{D}_{prev} \cap \mathcal{D}_{next}$ , tandis que  $\mathcal{D}_0$  est contenu dans  $\mathcal{D}_{prev} \cup \mathcal{D}_{next}$ .

de chacune des deux enveloppes, implique la connaissance de tous les points de support. Ce qui est exactement le cas pour la séparation de  $X_{i|j}$  et  $\bar{X}_{i|j}$  par des droites (section 4.2.1).

Les premier et dernier points de support de la  $P$ -enveloppe externe de  $X_{i|j}$  sont notés  $E_f$  et  $E_l$ , tandis que les premier et dernier points de support de la  $P$ -enveloppe interne de  $\bar{X}_{i|j}$  sont notés  $I_f$  et  $I_l$ . L'algorithme 8, appelé dans le cadre de la reconnaissance de segments de droite (section 4.2.1), peut tout à fait être appliqué à notre problème grâce aux propositions 7.1 et 7.2. Seul le prédicat change au niveau des lignes 2, 5, 8 et 10. Au lieu d'évaluer celui de l'équation 1.1, c'est celui de l'équation 7.1 qui est calculé. La fig. 7.10 compare la séparation par des  $P$ -cercles et celle par des droites. A chaque fois qu'un point est examiné, sa localisation par rapport aux différentes zones délimitées par les premier et dernier points d'appui de chaque enveloppe détermine l'action à entreprendre (fig. 7.10).

### 7.2.3 Exemple de déroulement

Voici un exemple du déroulement de l'algorithme sur la partie de contour  $C_{0|13}$  illustrée dans la fig. 7.11.a. Les  $P$ -envelopes et les premier et dernier points de support de chaque  $P$ -enveloppe sont initialisés à partir des deux premiers points de  $X_{0|13}$  et des deux premiers points de  $\bar{X}_{0|13}$  (fig. 7.11.b).

Un point intérieur est ensuite considéré (fig. 7.12.a). Ce point appartient au  $\overline{P}$ -disque défini par  $E_f$  et  $I_l$ ,  $P_0$  n'appartenant pas au demi-plan à droite défini par  $E_f$  et  $I_l$ . Le prédicat de l'équation 7.1 renvoie vrai ( $-8 \leq 0$ ). Il ne se trouve pas dans la zone 1, mais dans les zones 2 ou 3. Il existe encore un  $P$ -cercle séparant. De plus, il n'appartient pas au  $P$ -disque défini par  $I_f$  et  $E_l$ ,  $P_0$  appartenant au demi-plan à droite défini par  $I_f$  et  $E_l$ . Il ne se trouve donc pas dans la zone 3, mais dans la zone 2. Le prédicat renvoie faux ( $2 \leq 0$ ).



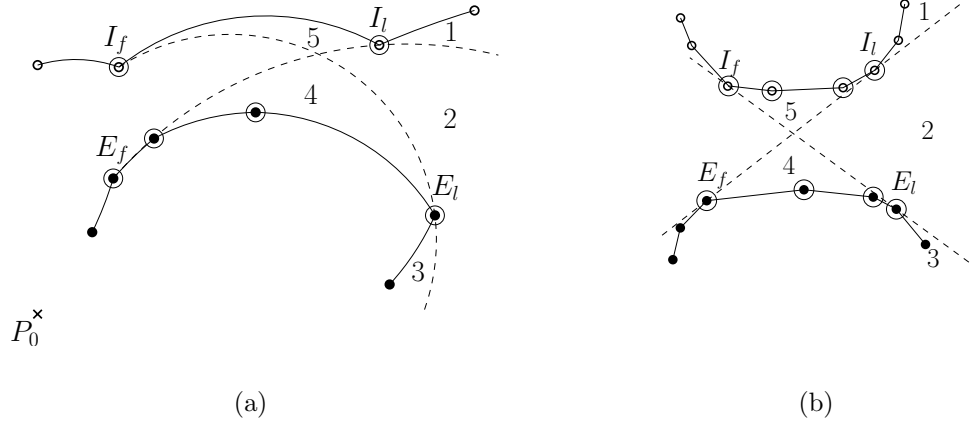


FIG. 7.10 – Comparaison de la séparation de deux ensembles de points par des  $P$ -disques en (a) et des demi-plans en (b). Les points de support sont entourés. Les premier et dernier points de support de chaque  $P$ -enveloppe délimitent 5 zones, numérotées de 1 à 5.

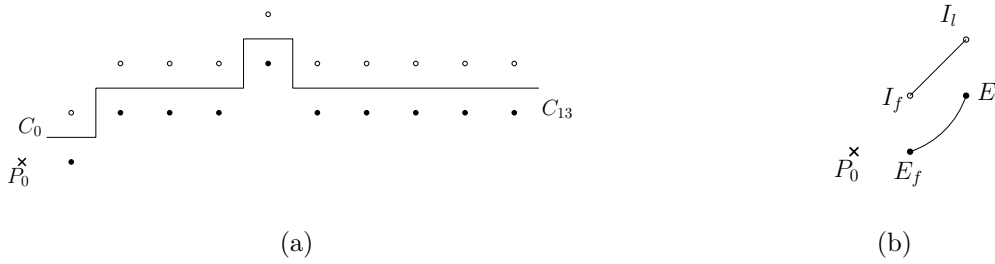


FIG. 7.11 – Initialisation.

Comme il se trouve dans la zone 2,  $E_l$  et la  $P$ -enveloppe externe de  $X_{0|4}$  sont mis à jour (fig. 7.12.b).



FIG. 7.12 – Ajout d'un point intérieur.

Un point extérieur est maintenant examiné (fig. 7.13.a). Ce point n'appartient pas au  $P$ -disque défini par  $I_f$  et  $E_l$ ,  $P_0$  appartenant au demi-plan à droite défini par  $I_f$  et  $E_l$ . Le prédicat de l'équation 7.1 renvoie vrai ( $-8 \leq 0$ ). Il ne se trouve pas dans la zone 1, mais dans les zones 2 ou 3. Il existe encore un  $P$ -cercle séparant. De plus, il appartient au  $P$ -disque défini par  $E_f$  et  $I_l$ ,  $P_0$  n'appartenant pas au demi-plan à droite défini par  $E_f$  et  $I_l$ . Le prédicat renvoie faux ( $6 \leq 0$ ). Il ne se trouve donc pas dans la zone 3, mais dans la zone 2. Comme il se trouve dans la zone 2,  $I_l$  et la  $P$ -enveloppe interne de  $\bar{X}_{0|4}$  sont mis à jour (fig. 7.13.b). Le point  $E_f$  est déplacé car  $I_l$  appartient au  $P$ -disque défini par les deux premiers points de support de la  $P$ -enveloppe externe de  $X_{0|4}$ ,  $P_0$  n'appartenant pas au demi-plan à droite défini par ces points (fig. 7.13.b).



FIG. 7.13 – Ajout d'un point extérieur.

A l'ajout du point intérieur associé à la dernière partie élémentaire  $C_{12|13}$ , il s'avère qu'il n'existe aucun  $P$ -disque qui contienne  $X_{0|13}$  sans contenir  $\bar{X}_{0|13}$ , car il appartient à la zone 1 (fig. 7.14).

Ainsi, il existe un algorithme similaire, mais plus général que celui utilisé pour la reconnaissance de segments de droite. Il fournit les  $P$ -disques contenant  $X_{i|j}$ , mais pas  $\bar{X}_{i|j}$ . Pour l'implémenter, il suffit de remplacer le prédicat d'orientation classique de l'équation 1.1 par celui de l'équation 7.1. Cet algorithme est la routine principale de la méthode de décomposition d'un contour en arcs de cercle que nous présentons ci-dessous.

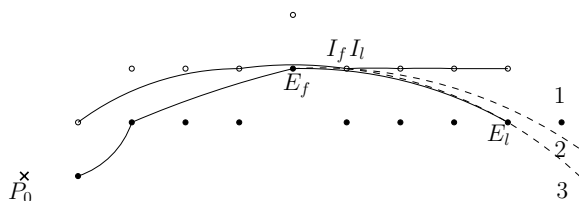


FIG. 7.14 – Fin de l'algorithme.

## 7.3 Décomposition d'un contour en arcs de cercle

Cette section traite de la décomposition d'un contour en une succession d'arcs de cercle discrets. Cette décomposition comprend un balayage du contour dans lequel chaque arc de cercle est étendu le plus possible vers l'avant.

**Définition 7.3** (Arc de cercle maximal). *Un arc de cercle  $C_{k|l}$  d'un contour  $C$  qui ne peut être étendu à l'avant, c'est-à-dire tel que  $C_{k|l+1}$  n'est pas un arc de cercle, est un arc de cercle maximal à l'avant.*

L'algorithme de reconnaissance d'arcs de cercle que nous avons proposé au paragraphe 6.2 effectue de l'ordre de  $\mathcal{O}(n \log n)$  opérations. Comme cet algorithme n'est pas incrémental, vérifier qu'un arc de cercle étendu d'un nouveau point est toujours un arc de cercle exige de reprendre le calcul de zéro en considérant tous les points déjà traités. Ainsi, décomposer un contour en arcs de cercle maximaux à l'avant requiert de l'ordre de  $\mathcal{O}(n^2 \log n)$  opérations.

Parmi les deux méthodes incrémentales de reconnaissance d'arcs de cercle existantes, celle de Kovalevsky [1990] et de Coeurjolly *et al.* [2004] sont évaluées en  $\mathcal{O}(n^2 \log n)$ , ce qui n'est pas mieux que notre méthode non incrémentale. A l'aide d'un prétraitement (section 6.3), Coeurjolly *et al.* [2004] abaissent la complexité de leur algorithme à  $\mathcal{O}(n^{\frac{4}{3}} \log n)$ .

Après un tel prétraitement, nous proposons dans cette section une solution en  $\mathcal{O}(n^{\frac{4}{3}})$ , linéaire en pratique, donc bien moins coûteuse que les solutions existantes. Notre méthode repose sur l'algorithme précédent, vu au paragraphe 7.2.

### 7.3.1 Principe de l'algorithme

Supposons sans perte de généralité que la partie  $C_{i|j}$  est convexe. Dans ce cas,  $C_{i|j}$  est un arc de cercle si et seulement s'il existe un disque contenant  $X_{i|j}$ , mais pas  $\bar{X}_{i|j}$ . Le principe est de calculer incrémentalement le disque de plus petit rayon contenant  $X_{i|j}$ , mais pas  $\bar{X}_{i|j}$ . Dans l'espace des paramètres  $abc$  (section 2.2.2), le disque de plus petit rayon contenant  $X_{i|j}$ , mais pas  $\bar{X}_{i|j}$  est le point du domaine le plus proche (en terme de distance verticale) du paraboloïde elliptique d'équation  $r^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2$ . La fig. 7.15.a illustre ce phénomène sur le plan de coupe  $ac$ . Si ce point est contenu dans le demi-espace résultant d'une nouvelle contrainte, il reste le disque de plus petit rayon (fig. 7.15.b). Mais si ce n'est pas le cas, soit il n'existe pas de disque contenant  $X_{i|j}$  et ne contenant pas  $\bar{X}_{i|j}$  (fig. 7.15.c),

soit le disque de plus petit rayon se trouve au bord du demi-espace (fig. 7.15.d). C'est un résultat classique de programmation convexe et de géométrie algorithmique [de Berg *et al.*, 2000].

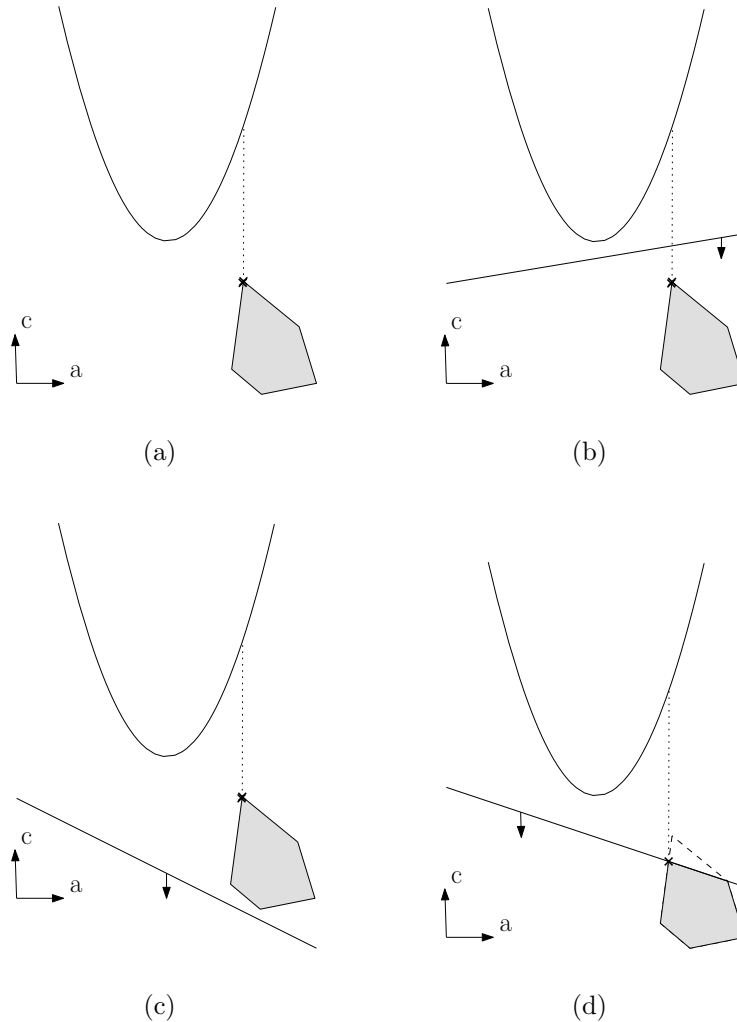


FIG. 7.15 – Si une nouvelle contrainte ne contient pas le disque de plus petit rayon (b) et si le nouveau domaine n'est pas vide (c), alors le nouveau disque de plus petit rayon se trouve sur cette contrainte (d) [de Berg *et al.*, 2000].

L'algorithme précédent, vu au paragraphe 7.2.2, est appliqué quand le disque de plus petit rayon n'est pas contenu dans le demi-espace résultant d'une nouvelle contrainte, c'est-à-dire quand le point intérieur (respectivement extérieur) de  $C_{k|k+1}$  ( $i \leq k < j$ ) se trouve à l'extérieur (respectivement intérieur) du disque. Quand ce point se présente, il est noté  $P_0$ . S'il n'existe aucun disque passant par  $P_0$  qui contienne  $X_{i|k}$  mais pas  $\bar{X}_{i|k}$ , alors il n'existe aucun disque qui contienne  $X_{i|k}$ , mais pas  $\bar{X}_{i|k}$ . Dans le cas contraire, parmi les disques qui passent par  $P_0$  et qui contiennent  $X_{i|k}$  mais pas  $\bar{X}_{i|k}$ , il reste à déterminer celui de rayon

minimal. Pour cela, il suffit de calculer le rayon de tous les disques contenant  $X_{i|k}$ , mais pas  $\bar{X}_{i|k}$ , caractérisés par les points de support de  $X_{i|k}$  et  $\bar{X}_{i|k}$ , puis de trouver celui de rayon minimal.

### 7.3.2 Exemple de déroulement

Voici un exemple du fonctionnement de notre méthode sur la partie de contour  $C_{0|19}$  illustrée dans la fig. 7.16.

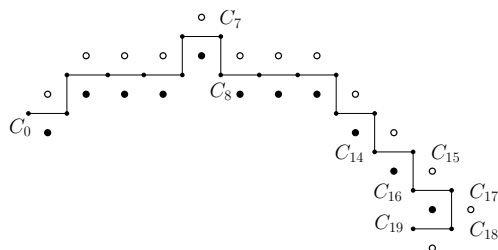


FIG. 7.16 – La partie de contour  $C_{0|19}$ .

Une reconnaissance de segments de droite sert à l'initialisation (fig. 7.17.a). Une description de cet algorithme est donnée au paragraphe 4.2.1. Le résultat de cet algorithme permet de déterminer, parmi l'ensemble de points intérieurs et l'ensemble de points extérieurs, lequel des deux ensembles est celui à encercler et lequel est celui à ne pas encercler. Si le premier point à faire échouer la reconnaissance est un point intérieur,  $X_{0|19}$  et  $\bar{X}_{0|19}$  sont circulairement séparables si et seulement s'il existe un disque contenant  $\bar{X}_{0|19}$  mais pas  $X_{0|19}$ . Inversement, si c'est un point extérieur comme c'est le cas ici,  $X_{0|19}$  et  $\bar{X}_{0|19}$  sont circulairement séparables si et seulement s'il existe un disque contenant  $X_{0|19}$  et non  $\bar{X}_{0|19}$ . En outre, ce point devient le premier point fixe  $P_0$ . Dans la fig. 7.17.b,  $P_0$  est le point extérieur de la partie élémentaire  $C_{7|8}$ . Le disque contenant  $X_{0|8}$  et non  $\bar{X}_{0|8}$ , passant par  $P_0$  et de plus petit rayon existe. Il est calculé à partir des points de support, encadrés, fournis par l'algorithme de la section 7.2. Il est dessiné dans la fig. 7.17.b en pointillé.

L'étape suivante consiste à tester la localisation des points intérieurs et extérieurs par rapport au disque obtenu. Les points de  $X_{8|14}$  se trouvent à l'intérieur du disque, tandis que les points de  $\bar{X}_{8|14}$  se trouvent à l'extérieur du disque (fig. 7.18.a). En revanche, le point intérieur de la partie élémentaire  $C_{14|15}$  n'est pas à l'intérieur du disque (fig. 7.18.a). Ce point devient le deuxième point fixe  $P_1$ . Le disque contenant  $X_{0|15}$  mais pas  $\bar{X}_{0|15}$ , passant par  $P_1$  et de plus petit rayon est calculé à l'aide de l'algorithme de la section 7.2.2. Il est dessiné dans la fig. 7.18.b en pointillé.

La localisation des points intérieurs et extérieurs est à nouveau testée par rapport au disque obtenu. Le point extérieur de la partie élémentaire  $C_{15|16}$  se trouve bien à l'extérieur du disque (fig. 7.19.a). En revanche, le point intérieur de la partie élémentaire  $C_{16|17}$  se trouve aussi à l'extérieur du disque (fig. 7.19.a). Ce point devient le troisième point fixe  $P_2$ . Le disque contenant  $X_{0|17}$  mais pas  $\bar{X}_{0|17}$ , passant par  $P_2$  et de plus petit rayon est calculé à l'aide de l'algorithme de la section 7.2.

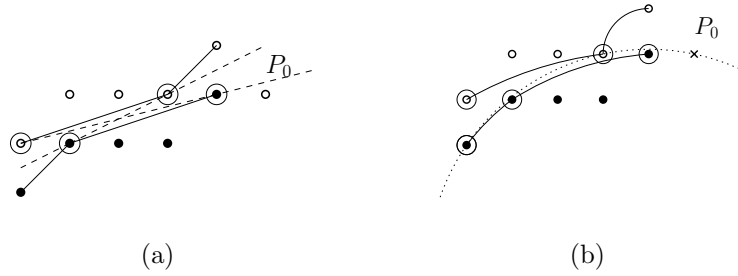


FIG. 7.17 – Le premier point fixe  $P_0$  est le premier point qui fait échouer la reconnaissance de segments de droite en (a). Le disque séparant de plus petit rayon, en pointillé, passe par  $P_0$  et deux points de support, encerclés, fournis par l'algorithme de la section 7.2.2 en (b).

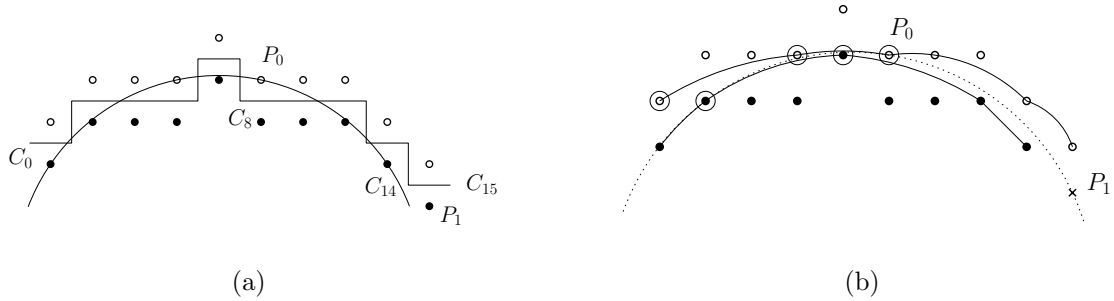


FIG. 7.18 – (a) Le point intérieur de la partie élémentaire  $C_{14|15}$  n'est pas à l'intérieur du disque séparant de plus petit rayon. Il devient le point fixe  $P_1$ . (b) Le disque contenant  $X_{0|15}$  mais pas  $\bar{X}_{0|15}$ , passant par  $P_1$  et de plus petit rayon est calculé à l'aide de l'algorithme de la section 7.2.

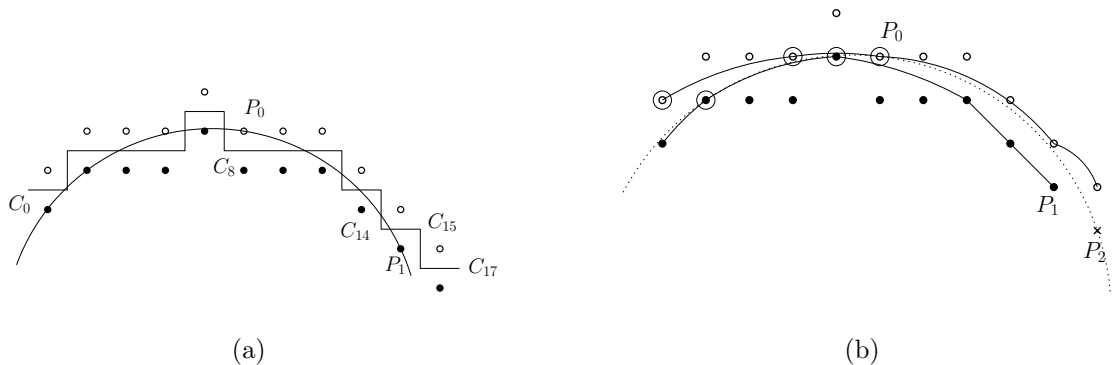


FIG. 7.19 – (a) Le point intérieur de la partie élémentaire  $C_{16|17}$  n'est pas à l'intérieur du disque séparant de plus petit rayon. Il devient le point fixe  $P_2$ . (b) Le disque contenant  $X_{0|17}$  mais pas  $\bar{X}_{0|17}$ , passant par  $P_2$  et de plus petit rayon est calculé à l'aide de l'algorithme de la section 7.2.

Le point extérieur de la partie élémentaire  $C_{17|18}$  se trouve bien à l'extérieur du disque obtenu (fig. 7.20). En revanche, le point extérieur de la partie élémentaire  $C_{18|19}$  se trouve à l'intérieur du disque (fig. 7.20). Or l'algorithme de la section 7.2 nous permet de savoir qu'aucun disque passant par ce point ne contient  $X_{0|19}$  sans contenir un point de  $\bar{X}_{0|19}$ . Ainsi,  $X_{0|19}$  et  $\bar{X}_{0|19}$  ne sont pas circulairement séparables et  $C_{0|19}$  n'est pas un arc de cercle.

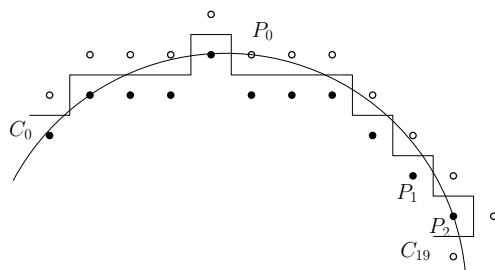


FIG. 7.20 – Fin de l'algorithme.

### 7.3.3 Complexité et résultats expérimentaux

L'exemple précédent montre que tous les points déjà traités, c'est-à-dire  $\mathcal{O}(n)$  points, sont examinés à chaque appel de l'algorithme du paragraphe 7.2. Or, cet algorithme est appelé au plus  $n$  fois. Ainsi, notre méthode est quadratique, c'est-à-dire en  $\mathcal{O}(n^2)$ . Cependant, le même type de prétraitement que celui proposé par Coeurjolly *et al.* [2004] et qui abaisse la complexité de la reconnaissance de cercle (section 6.3) peut être utilisé ici. Ce prétraitement élimine les points intérieurs et extérieurs inutiles. Les points à encercler sont les sommets du polygone de longueur minimale, tandis que les points à ne pas encercler sont les points de Bezout les plus proches de la médiatrice de chaque arête du polygone (section 5.4.1). Notre méthode s'applique parfaitement sur les points retenus, car les points à traiter sont toujours ordonnés. Il reste  $\mathcal{O}(n^{\frac{2}{3}})$  points après le prétraitement, pour des contours ayant un nombre de parties convexes et concaves indépendant de leur longueur  $n$ . La complexité de notre méthode tombe donc à  $\mathcal{O}(n^{\frac{4}{3}})$  dans ce cas.

La fig. 7.21 représente un cercle discret. En noir et blanc sont représentés respectivement les points intérieurs et extérieurs pris en compte dans le calcul. Ils sont au nombre de 91, alors que le contour est constitué de 289 points. Le cercle séparant de plus petit rayon est dessiné en rouge.

Nous avons compté le nombre de points retenus après le prétraitement pour un millier de cercles discrets dont le rayon varie entre 100 à 10000 (l'unité est le pixel). La fig. 7.22, montre qu'il y a, conformément aux résultats théoriques [Acketa et Zunić, 1995], de l'ordre de  $\mathcal{O}(n^{\frac{2}{3}})$  points retenus. D'après nos données expérimentales, la constante est évaluée par régression à environ 2.1, c'est-à-dire que  $m$ , le nombre de points retenus, est à peu près égal à  $2.1 \times n^{\frac{2}{3}}$ . La courbe de régression en pointillé est quasiment invisible car confondue avec les données.

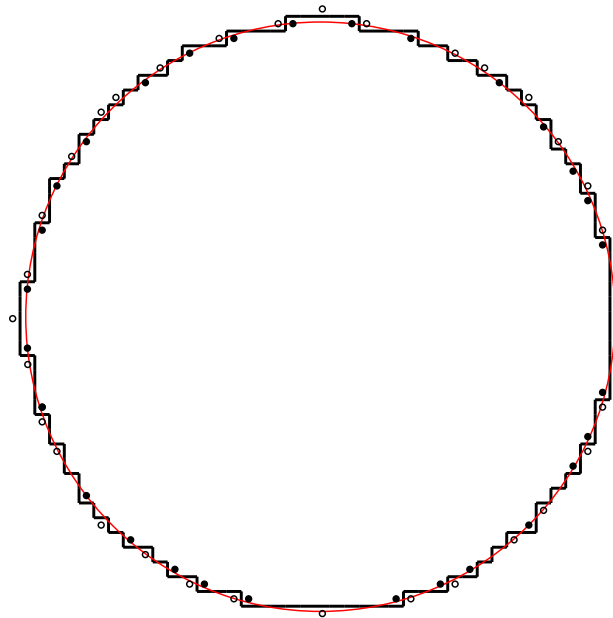


FIG. 7.21 – Reconnaissance d'un arc de cercle.

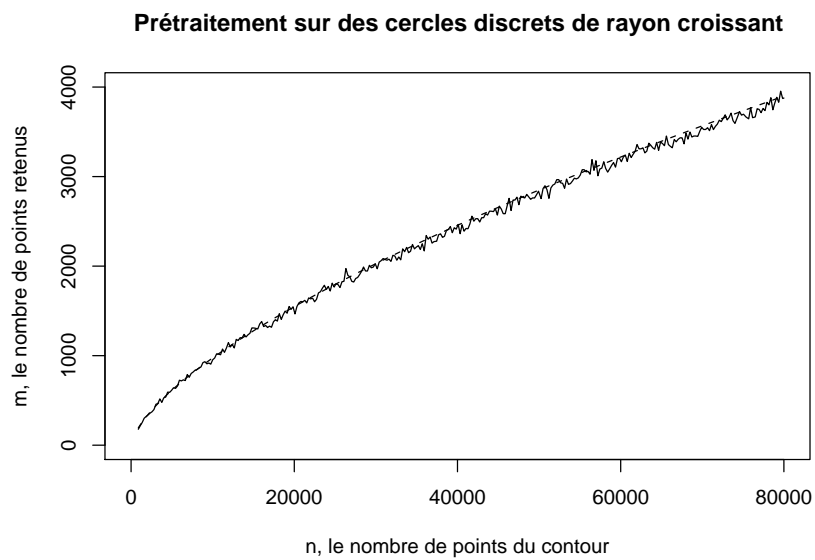


FIG. 7.22 – Nombre de points retenus pour la reconnaissance d'arcs de cercle.



### 7.3. Décomposition d'un contour en arcs de cercle

---

Nous avons aussi dénombré combien de fois ces points sont pris en compte dans l'algorithme (globalement et non rapporté à chaque point). Cette quantité est bien sûr plus importante que le nombre de points retenus, puisque chaque point peut être considéré plusieurs fois. Théoriquement, au plus  $n$  fois ; en pratique, bien moins. D'après la fig. 7.23, le nombre total de fois que sont considérés les points retenus au cours d'une reconnaissance varie linéairement avec la taille  $n$  des contours.

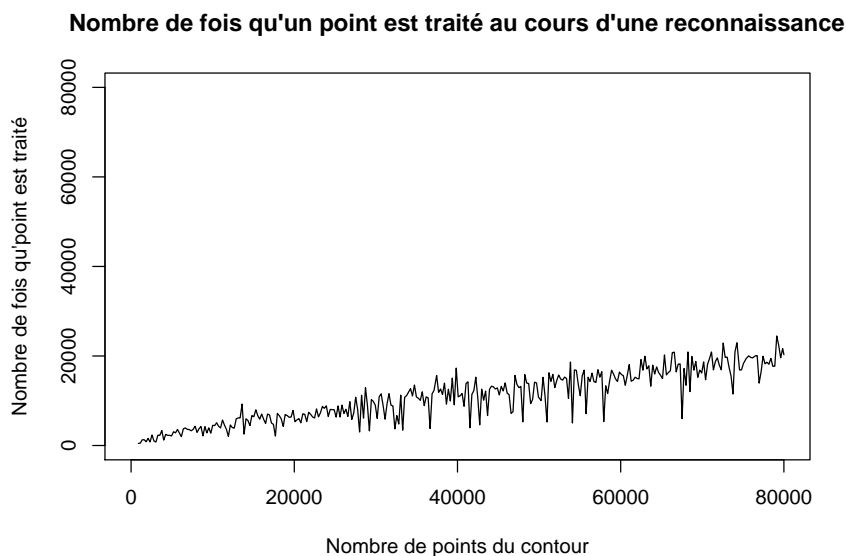


FIG. 7.23 – Nombre de fois qu'un point est pris en compte au cours d'une reconnaissance à la volée d'un arc de cercle.

Comme l'illustre la fig. 7.24, le temps d'exécution de notre méthode s'avère être particulièrement faible, puisqu'il est du même ordre de grandeur que celui des méthodes de reconnaissance de segments de droite (fig. 4.19). La complexité de notre méthode, théoriquement en  $\mathcal{O}(n^{\frac{4}{3}})$ , est linéaire en pratique. Cette rapidité tient d'une part au prétraitement qui réduit fortement le nombre de points à traiter pour un coût moindre et d'autre part à la simplicité de notre méthode (des listes de points, un prédicat évalué en nombres entiers, des retours en arrière peu fréquents).

La fig. 7.25.a représente une partie du contour de la discrétisation de Gauss d'une ellipse. En noir et blanc sont représentés respectivement les points intérieurs et extérieurs pris en compte dans le calcul. Les extrémités de chaque arc de cercle sont indiquées par les flèches noires. Leur cercle séparant de plus petit rayon est dessiné en rouge. Pour plus de lisibilité, la partie du cercle située à l'extérieur du contour a été effacée. L'arc de cercle de plus petit rayon est bien situé dans la zone la plus courbe du contour.

La fig. 7.25.b représente le contour de la discrétisation de Gauss d'une rosace. Les parties concaves, étant trop légèrement incurvées, sont assimilées à des segments de droite, tandis que les parties convexes sont décomposées en un ou deux arcs de cercle. Cette figure

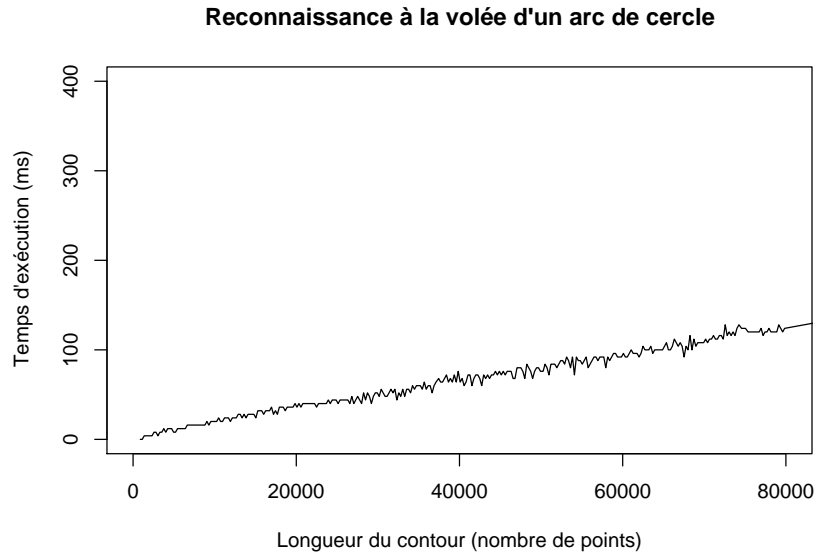


FIG. 7.24 – Temps d'exécution pour la reconnaissance à la volée d'arcs de cercle.

illustre un nouvel avantage de l'opération de prétraitement. Elle permet une distinction directe entre parties convexes, parties concaves et segments d'inflexion et une décomposition réalisée indépendamment sur chacune d'elles. Ainsi, la décomposition en arcs de cercle obtenue est une représentation particulièrement fidèle du contour.

## 7.4 Conclusion

Nous avons étudié une version contrainte du problème de la reconnaissance d'arcs de cercle : la reconnaissance d'arcs de cercle passant par un point donné. Pour résoudre ce problème, nous appliquons notre algorithme de reconnaissance de segments de droite par séparation en modifiant le prédicat utilisé. Au lieu de tester l'appartenance d'un point à un demi-plan, nous testons l'appartenance d'un point à un disque passant par un point donné. Ce prédicat s'évalue en nombres entiers, ce qui mène à un algorithme ne souffrant d'aucune imprécision.

Comme l'algorithme que nous avons proposé pour la reconnaissance d'arcs de cercle passant par un point donné est une généralisation de celui proposé pour la reconnaissance de segments de droite, il peut être un bon outil pour mettre en relief ce qui ressemble ou diffère de la reconnaissance de segments de droite. Par exemple, les programmes qui les implémentent peuvent être lancés pour compter le nombre de points de support. Sont-ils limités à quatre comme dans le cas des segments de droite ou à un nombre supérieur ?

D'autres versions contraintes de la reconnaissance d'arcs de cercle peuvent être étudiés dans ce but : la reconnaissance d'arcs de cercle de rayon donné ou d'arcs de cercle dont le centre appartient à une droite donnée.

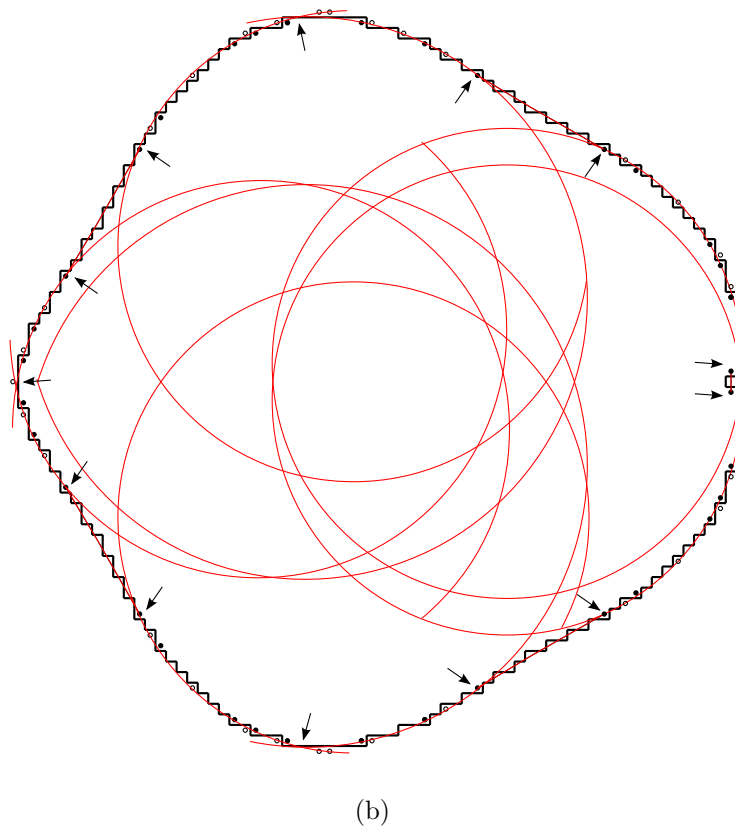
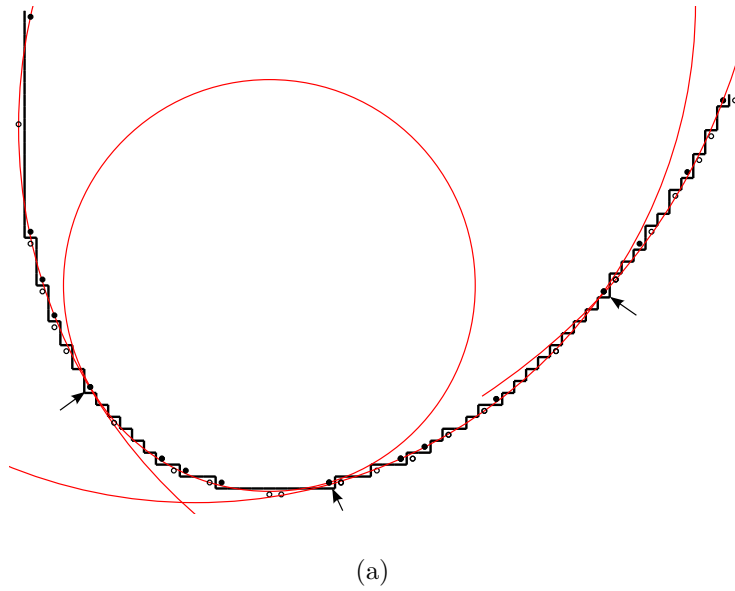


FIG. 7.25 – Décomposition du contour d'une ellipse (a) et d'une rosace (b) en arcs de cercle.

D'un point de vue pratique, nous avons montré que l'algorithme que nous avons proposé pour la reconnaissance d'arcs de cercle passant par un point donné peut être utilisé comme routine pour résoudre le problème plus général de la reconnaissance d'arcs de cercle. Notre approche consiste à calculer incrémentalement le plus petit cercle séparant les points intérieurs et extérieurs d'une partie d'un contour. A chaque fois qu'un nouveau point remet en cause le caractère séparant du cercle, nous calculons l'ensemble des cercles séparants passant par ce point pour trouver le nouveau plus petit cercle séparant. Grâce à un prétraitement rapide éliminant les points inutiles, la complexité de la méthode passe de  $\mathcal{O}(n^2)$  à  $\mathcal{O}(n^{\frac{4}{3}})$ , pour des contours présentant un nombre de parties convexes et concaves indépendant de leur longueur. Les résultats expérimentaux montrent que la décomposition en arcs de cercle, obtenue en un temps très court, est une représentation fidèle du contour.

**Quatrième partie**

**Traitement d'images en  
Géomorphologie**



## *Analyse de la forme des particules sédimentaires*

### Sommaire

---

<b>8.1</b>	<b>Objectifs du projet</b>	<b>196</b>
8.1.1	Du côté des géographes	196
8.1.2	Du côté des informaticiens	197
<b>8.2</b>	<b>Forme des particules sédimentaires</b>	<b>198</b>
8.2.1	Taille, forme et émoussé : définitions et intérêt	198
8.2.2	Description de la forme des particules	199
<b>8.3</b>	<b>Définition et calcul de paramètres</b>	<b>202</b>
8.3.1	Paramètre de taille	202
8.3.2	Paramètres de forme	202
8.3.3	Paramètres d'émoussé	203
<b>8.4</b>	<b>Évaluation des paramètres de forme</b>	<b>204</b>
8.4.1	Évaluation sur le diagramme de Krumbein	204
8.4.2	Évaluation longitudinale	206
<b>8.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>212</b>

---

Les travaux décrits dans ce chapitre prennent leur source dans notre volonté d’appliquer nos recherches à des problèmes pratiques, rencontrés en Sciences Humaines et Sociales, notamment en Géographie. Ils ont été menés en collaboration avec Hervé Piégay, géographe, directeur de recherche au CNRS à l’UMR 5600 Environnement-Ville-Société, d’abord lors de mon stage de Master recherche, puis au cours de ma thèse dans le cadre du projet PEPS TAIGE (Traitement Automatique de l’Image pour la Géographie Environnementale). Un article issu de ce projet est paru dans la revue pluridisciplinaire *Computers & Geosciences* [Roussillon *et al.*, 2009a].

## 8.1 Objectifs du projet

Les objectifs sont multiples, puisque nos propres objectifs se superposent à ceux des géographes.

### 8.1.1 Du côté des géographes

L’objectif des géographes est d’établir la *carte d’identité* de galets déposés dans le lit d’un cours d’eau. Un *galet* est un caillou, plus ou moins poli et arrondi sous l’action de l’eau et qui se trouve le plus souvent sur le rivage des mers et des océans ou dans le lit des cours d’eau. Pour ne pas perdre en généralité, nous emploierons aussi l’expression générique “particules sédimentaires” qui recouvre l’ensemble des particules déposées, quelle que soit leur taille : sable, gravier, galets, etc. Cette carte d’identité est un ensemble de variables quantitatives caractérisant la taille et la forme d’un galet.

Les mesures sont encore souvent prises manuellement. Par exemple, pour déterminer la taille d’une particule, on essaie de lui faire traverser un tamis à mailles carrées de grosseur croissante. Pour évaluer l’émoussé d’une particule, c’est-à-dire le degré auquel elle a été arrondie, on la compare visuellement à des images de particules standards et on lui affecte la valeur du modèle le plus similaire.

Toutes ces opérations prennent énormément de temps, ce qui contraint les géographes à n’étudier que de petits tronçons de cours d’eau. Pour pouvoir mener des études à l’échelle d’un bassin-versant, les géographes souhaitent automatiser le calcul de ces mesures à partir de l’analyse d’images numériques acquises selon un protocole rapide.

Ce protocole est répété pour un certain nombre de lots d’une centaine de galets, prélevés le long du lit d’un cours d’eau et de ses affluents : pour chaque lot, les galets sont posés selon leur plan de projection maximale sur un support de couleur rouge et un opérateur prend en photo la planche de galets du dessus, à l’aide d’un appareil photo numérique (fig. 8.1).

Un effet de bord de l’automatisation est la minimisation de la variabilité intra- et inter-observateur concomitante aux mesures manuelles.





FIG. 8.1 – Photo à traiter pour l’analyse de la forme des galets

### 8.1.2 Du côté des informaticiens

Un projet complet tel que celui-là, fondé sur l’analyse d’images, est pour nous une source intarissable de problèmes géométriques et de données. Nous avons discuté avec les géographes des problèmes d’acquisition, de compression et de résolution. Mais nous n’avons pas travaillé ensemble assez tôt et nous avons souvent dû traiter le mieux possible des images existantes.

La géométrie intervient largement dans ce projet. Au cours de la tâche de segmentation, nous devons détecter, filtrer, dissocier des objets caractérisés aux moyens de propriétés géométriques. Au cours de la tâche de description, nous devons estimer des quantités géométriques, comme l’aire, le périmètre, la courbure, et calculer des mesures comme la convexité, la circularité, l’élongation, l’émoussé, pour établir la carte d’identité des objets d’intérêt, correspondant à la silhouette des galets.

Nous avons l’objectif de réaliser tous ces calculs au moyen d’algorithmes les plus efficaces possibles. Pour cela, la géométrie discrète est un cadre de travail formidable où l’utilisation exclusive de nombres entiers élimine les erreurs d’approximation et simplifie les calculs.

Nous avons aussi l’objectif d’étudier les limitations des mesures existantes, d’en proposer de nouvelles, cohérentes avec la nature discrète des données, et d’étudier la meilleure façon de les calculer.

## 8.2 Forme des particules sédimentaires

### 8.2.1 Taille, forme et émoussé : définitions et intérêt

Une particule est observée à partir de critères de taille, de forme, d'orientation (par rapport à l'axe du cours d'eau) et de lithologie [Diepenbroek *et al.*, 1992]. Par la suite, nous ne nous intéressons qu'aux caractéristiques géométriques que sont la taille et la forme.

La taille d'une particule correspond à la largeur de la plus petite maille carrée par laquelle la particule peut passer. Cette définition de la taille comme "taille du tamis" est héritée des analyses granulométriques. Elles étaient effectuées à l'aide de tamis à mailles carrées d'ouvertures croissantes, de sorte que les particules soient classées selon leur taille.

La forme (*shape* en anglais) est caractérisée par sa forme globale ou sphéricité (*form* ou *sphericity*), l'émoussé (*roundness*) et la texture de surface (*surface texture*) [Diepenbroek *et al.*, 1992; Drevin et Vincent, 2002] (fig. 8.2).

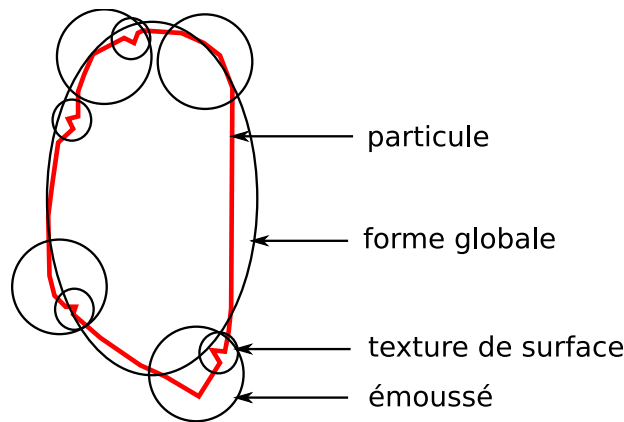


FIG. 8.2 – Sphéricité, émoussé et texture de surface.

La forme globale d'une particule est généralement évaluée en comparaison avec une forme standard. C'est la sphère qui est la plupart du temps cette forme standard, car elle est la forme pour laquelle, *mutatis mutandis*, la durée entre la mise en mouvement de la particule par le cours d'eau et son dépôt est minimale [Wadell, 1932].

Le terme *émoussé* désigne ce qui est devenu moins anguleux sous une action érosive. C'est une mesure du degré d'érosion des arêtes et des angles d'une particule. Dans l'expression "une particule émoussée", il est synonyme du terme *arrondi*. Mais ce terme est inadapté, car il contient le mot *rond* qui est souvent associé au cercle ou à la sphère. Bien qu'une sphère soit émoussée, une particule peut être émoussée sans être une sphère et inversement [Wadell, 1932].

Enfin, la texture de surface correspond à la rugosité de la surface d'une particule. Par la suite, nous ne nous intéressons pas à la texture de surface qui ne peut être perçue qu'avec des images à très haute résolution.

La forme d'une particule est un caractère très étudié parce qu'il est expliqué par la lithologie et un ensemble de conditions environnementales [Krumbein, 1941]. A mesure que

les forces de frottement liées à la rugosité du lit et à la charge deviennent plus importantes que la force de gravité, à mesure que la compétence du cours d'eau diminue, les particules sont triées vers l'aval selon leur taille et leur densité. Dès qu'une particule est mise en mouvement, elle commence à sédimenter, c'est-à-dire à se déposer sous l'action de la pesanteur. A taille et densité égales, une particule sphérique sédimente plus vite qu'une particule non sphérique [Wadell, 1932]. En effet, elle est plus facilement déplacée par le cours d'eau (par roulage ou par suspension) et par conséquent, elle est déplacée loin, mais peu longtemps et donc rapidement déposée. On comprend donc qu'un changement dans les conditions de transport (débit, charge, etc.), comme c'est le cas lors d'une crue par exemple, peut entraîner un changement en taille, densité et sphéricité des dépôts [Krumbein, 1941].

Étant augmentée principalement par l'abrasion et l'usure, la valeur d'émoissé est quant à elle un indicateur de la distance de transport d'une particule avant son dépôt [Krumbein, 1941]. L'étude de l'émoissé de particules prélevées dans le lit d'un cours d'eau permet donc de déterminer l'existence d'entrées sédimentaires d'origine naturelle (sapement d'une terrasse alluviale) ou anthropique (rejet de résidus miniers) ou de discontinuité dans les processus d'entrées et de transfert de la charge sédimentaire. Ce type d'information est très important pour les géographes censés guider les gestionnaires dans la mise en place d'une politique de gestion durable de la ressource sédimentaire. En effet, les conséquences possibles de telles entrées sédimentaires posent de nombreux problèmes : élargissement du lit, augmentation du risque d'inondation à l'aval, engravement des ouvrages, érosion des berges, etc. Hervé Piégay, géographe, directeur de recherche au CNRS à l'UMR 5600 Environnement-Ville-Société, avec qui nous travaillons, a déjà mené plusieurs recherches portant sur cette thématique. Elles ont été conduites sur les bassins versants de la Drôme, de l'Eygues et du Roubion et plus récemment sur l'Ouvèze et le Progo en Indonésie. Elles ont été financées par l'Europe, l'Etat français, l'Office National des Forêts (ONF) et l'Agence de l'Eau.

### 8.2.2 Description de la forme des particules

A l'origine, tous les calculs de forme ne pouvaient être réalisés que manuellement. Aux indices complexes, voire impossibles à calculer, étaient donc souvent substitués des indices plus simples à mettre en œuvre.

La sphéricité d'une particule a été définie initialement par Wadell [1932], comme étant le rapport entre la surface de la particule et la surface de la sphère de même volume, puis par Krumbein [1941], comme étant le rapport du volume de la particule au volume de la sphère circonscrite. Dans cette dernière définition, pour simplifier le calcul du volume de la particule, celle-ci est supposée être une ellipsoïde et par conséquent est complètement caractérisée par le rapport entre l'axe intermédiaire et le grand axe, et le rapport entre le petit axe et l'axe intermédiaire. La longueur des axes est mesurée à partir d'un calibre à barre coulissante [Krumbein, 1941].

L'émoissé d'une particule a été défini initialement par [Wadell, 1932]. Cette mesure d'émoissé, pourtant reconnue comme la plus précise de toutes, a été rarement utilisée car elle nécessite un temps très long de calcul [Pissart *et al.*, 1998]. Pour chaque particule, il

s'agit de mesurer, dans les trois plans orthogonaux ou seulement dans le plan de projection maximale, le rayon de courbure de chaque angle. Un angle est une partie du contour dont le rayon de courbure est inférieur au rayon du plus grand cercle inscrit. Le rayon de courbure moyen des angles rapporté au rayon du plus grand cercle inscrit donne l'émoissé de la particule [Wadell, 1932] (fig. 8.3). Notons qu'aucune définition de la courbure n'est donnée dans le texte original. Afin de raccourcir le temps nécessaire aux mesures, Krumbein [1941] créa le diagramme qui porte son nom (fig. 8.4). Ce diagramme associe des imagerie de galets à leur émoissé mesuré par la méthode de Wadell. Ainsi, pour déterminer l'émoissé d'un galet, il suffit de le comparer visuellement aux imagerie standard de galets d'émoissé connu.

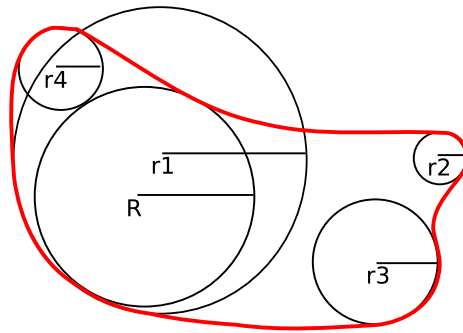


FIG. 8.3 – L'indice d'émoissé de Wadell [1932]. Les rayons  $r_2$ ,  $r_3$  et  $r_4$  étant inférieurs au rayon  $R$  du plus grand cercle inscrit, définissent et mesurent des angles. En revanche, le cercle de rayon  $r_1$ , étant plus grand que le plus grand cercle inscrit, ne définit et ne mesure aucun angle.

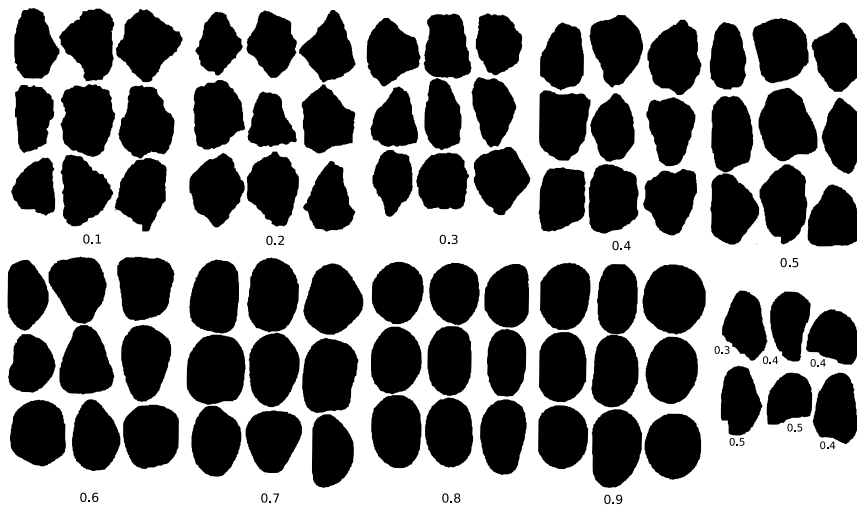


FIG. 8.4 – Diagramme de Krumbein [1941].

D'autres mesures d'émoissé ont été proposées ensuite. Dans les pays francophones, l'indice d'émoissé de A. Cailleux s'est imposé : c'est le rapport entre le plus petit rayon de courbure et la distance maximale entre deux points du contour du galet, le tout multiplié par 2000 [Pissart *et al.*, 1998]. Les mesures d'émoissé de Cailleux sont au moins 5 fois plus longues à déterminer et sont plus dispersées que les mesures d'émoissé issues du diagramme de Krumbein. La mesure du plus petit rayon de courbure implique une plus grande variabilité inter-observateur que la comparaison visuelle que nécessite la méthode de Krumbein [Pissart *et al.*, 1998].

Aujourd'hui, avec le développement des techniques d'analyse d'image, nous pouvons nous affranchir de ces contraintes par l'automatisation du calcul de l'indice d'émoissé de A. Cailleux et de l'indice d'émoissé de Wadell (qui permettrait aussi de simuler la méthode de Krumbein). A notre connaissance et selon Hervé Piégay, spécialiste du domaine, personne n'a encore implémenté ces indices d'émoissé. En revanche, plusieurs méthodes produisent un indice d'émoissé linéairement corrélé aux valeurs du diagramme de Krumbein, utilisées comme une "vérité-terrain".

La majorité des méthodes de détermination de l'émoissé utilise la transformée de Fourier. La méthode de Diepenbroek *et al.* [1992] est la plus récente et la plus aboutie. Cette méthode considère un échantillon de 64 points du contour de la particule. La transformée de Fourier est appliquée à la distance au centre de gravité de ces 64 points. Aux 24 premiers coefficients de Fourier, divisés par le coefficient 0 pour éliminer l'information de taille, est retranché le spectre de l'ellipse du meilleur ajustement, obtenue à partir des coefficients 1 et 2, pour éliminer l'information de forme globale. Enfin, une somme des coefficients obtenus pondérée empiriquement donne la mesure d'émoissé. Cette mesure est linéairement corrélée aux valeurs du diagramme de Krumbein à 94%.

Deux méthodes alternatives, utilisant l'ouverture morphologique, ont été proposées par Drevin et Vincent [2002]. Dans la première méthode, orientée région, une ouverture morphologique est appliquée à une image binaire 2D. L'ouverture morphologique consiste en l'application successive des opérations d'érosion et de dilatation avec un même élément structurant, de sorte que les détails de la forme, comme les "caps" ou les "isthmes" sont supprimés sans rétrécissement général de la forme. Le rapport entre l'aire de la particule avant et après ouverture morphologique donne une première mesure d'émoissé. Avec un élément structurant circulaire dont le rayon représente 42% du rayon du plus grand cercle inscrit, cette mesure est linéairement corrélée aux valeurs du diagramme de Krumbein à 96%. La seconde méthode, orientée contour, considère un échantillon de 1024 points du contour de la particule. Une ouverture morphologique est appliquée à l'histogramme 1D qui associe à chacun des 1024 points du contour, sa distance au centre de gravité. Le rapport entre l'aire de l'histogramme après et avant ouverture morphologique donne une seconde mesure d'émoissé. Avec un élément structurant linéaire de 512 points de long, cette mesure est linéairement corrélée aux valeurs du diagramme de Krumbein à 93%.

Dans un article assez récent de Hayakawa et Oguchi [2005], plusieurs indices de sphéricité (dont ceux de [Wadell, 1932] et de [Krumbein, 1941]) ont été calculés à partir de modèles 3D de particules obtenus à l'aide d'un scanner laser (13500 dollars américains en Décembre 2004). Ce scanner a la forme d'une boîte dans laquelle on place la particule (dimen-

sions maximales : 254mm de diamètre et 406mm de hauteur). Des infrarouges (680nm de longueur d'onde) sont envoyés sur la particule et un capteur détecte la lumière renvoyée par l'objet, puis produit un signal converti en données numériques.

Pour les géographes, l'approche 3D est séduisante à condition que sa mise en œuvre soit raisonnablement simple et rapide. Dans l'exemple précédent, cette condition n'est pas remplie, puisque les graviers ont dû être préalablement emportés et lavés et que chaque gravier est ensuite scanné pendant environ 20 minutes [Hayakawa et Oguchi, 2005]. En outre, si la sphéricité est avant tout une définition 3D, il est possible et non sans intérêt d'appréhender la forme globale et l'émoissé d'une forme bidimensionnelle.

## 8.3 Définition et calcul de paramètres

La forme des particules est appréhendée à travers la forme de leur silhouette. La silhouette est l'étendue maximale du plan couverte par la projection de la particule. Sur cette silhouette sont calculés des paramètres de taille, de forme et d'émoissé, définis en étroite collaboration avec les géographes.

### 8.3.1 Paramètre de taille

En géomorphologie, les paramètres de taille les plus fréquemment utilisés sont les longueurs des trois axes principaux :  $a$  (le grand axe),  $b$  (l'axe intermédiaire),  $c$  (le petit axe). La méthode des "rotating calipers" (section 2.3.2) fournit une estimation de  $a$  et  $b$  à partir de la silhouette. Nous considérons que  $b$  est représentatif de la taille de la particule [Bunte et Abt, 2001] puisqu'il donne une bonne approximation de la "taille du tamis" (section 8.2.1).

### 8.3.2 Paramètres de forme

Pour les géographes, la **circularité** est le rapport entre le périmètre de la silhouette et le périmètre de la silhouette du disque de même aire, car c'est l'équivalent bidimensionnel de la sphéricité de Wadell [1932].

Si  $P_S$  et  $A_S$  représentent respectivement le périmètre et l'aire de la silhouette, la formule est :

$$\text{circularité} = \frac{P_S}{2\sqrt{A_S\pi}} \quad (8.1)$$

Ce paramètre est une variante du descripteur classique de compacité [Haralick, 1974] en analyse d'images. Bien qu'il possède de nombreux inconvénients, il offre une approximation rapide de la circularité, adaptée au contexte de notre application :

- la mesure n'est pas comprise dans l'intervalle  $]0; 1]$  et ne vaut pas 1 pour tous les cercles discrets, mais ce comportement est négligeable car aucune silhouette n'est

parfaitement circulaire. De plus, le bruit de mesure disparaît dans la variabilité statistique des silhouettes.

- la mesure est dépendante de la résolution, mais celle-ci est contrôlée et stable dans l’application.
- la mesure n’est pas calculable sur une partie d’une silhouette, mais toute la silhouette est disponible.

Ce travail a été source de motivations pour définir une mesure de circularité qui convienne à la nature discrète des données et qui dépassent ces limitations (section 6.4.1).

La circularité confond l’information de taille, d’élongation, de convexité et d’émoussé. Nous proposons d’étudier ces caractères indépendamment grâce aux paramètres suivants :

L’**élongation** est égale au rapport entre  $b$ , l’axe intermédiaire, et  $a$ , le grand axe, calculés par la méthode des “rotating calipers” (section 2.3.2) :

$$\text{élongation} = \frac{b}{a} \quad (8.2)$$

La **convexité** est définie comme le rapport entre l’aire de la silhouette ( $A_S$ ) et l’aire de son enveloppe convexe ( $A_{CH}$ ) :

$$\text{convexité} = \frac{A_S}{A_{CH}} \quad (8.3)$$

Cette mesure vérifie un ensemble de propriétés fondamentales quand l’aire est quantifiée par dénombrement de points (section 3.3).

#### 8.3.3 Paramètres d’émoussé

Wadell [1932] a défini son indice d’émoussé comme suit :

$$rW = \frac{1}{k.R} \sum_{i=1}^k r_i \quad (8.4)$$

où  $r_i$  est le  $i$ ème rayon de courbure inférieur ou égal au rayon de courbure  $R$  du plus grand disque inscrit et  $k$  est le nombre de tels rayons (section 8.2.2).

Le calcul de  $rW$  suit trois étapes :

1. Le rayon de courbure est estimé en chaque point en utilisant l’algorithme de Nguyen et Debled-Rennesson [2007]. Pour être robuste, cette méthode repose sur le calcul de *segments flous*, ou selon la terminologie du chapitre 4, de parties  $\alpha$ -linéaires avec  $\alpha = 0.5$  ;
2. Le rayon du plus grand disque inscrit est déterminé à l’aide de la transformée en distance de la silhouette [Hirata, 1996] ;
3.  $rW$  est calculé en appliquant l’équation 8.4. Seuls les points dont le rayon de courbure est inférieur ou égal au rayon de courbure du plus grand cercle inscrit est pris en compte.

Pour comparaison, nous avons aussi calculé la mesure d'émoussé proposé par Drevin et Vincent [2002]. Cette mesure repose sur des opérations morphologiques :

$$rD = \frac{A_{S \oplus C(o,r_c) \ominus C(o,r_c)}}{A_S} \quad (8.5)$$

où  $A_{S \oplus C(o,r_c) \ominus C(o,r_c)}$  est l'aire de la silhouette après ouverture morphologique avec un élément structurant circulaire  $C$  de centre  $o$  et rayon  $r_c$ . Les opérateurs  $\oplus$  et  $\ominus$  représentent respectivement l'addition de Minkowski (dilatation) et la soustraction de Minkowski (érosion). Le rayon  $r_c$  est fixé à 75% du rayon  $R$  du plus grand disque inscrit, car c'est le pourcentage pour lequel  $rD$  a la meilleure corrélation avec le diagramme de Krumbein (section 8.4.1).

Enfin, nous avons aussi calculé, sur la demande des géographes, le rapport entre le périmètre de la silhouette ( $P_S$ ) et celui de l'ellipse de meilleure approximation ( $P_e$ ) :

$$rP = \frac{P_S}{P_e} \quad (8.6)$$

Puisque la circularité consiste à comparer la silhouette avec un cercle, ce qui mélange l'information d'élongation et d'émoussé, l'idée est de comparer la silhouette avec une ellipse, à la place d'un cercle, afin de supprimer l'impact de l'élongation et de ne conserver que l'émoussé [Cotted, 2006].

## 8.4 Évaluation des paramètres de forme

Les paramètres de forme définis dans la section précédente sont évalués sur les imageries artificielles du diagramme de Krumbein qui sert de "vérité-terrain", puis sur des données réelles acquises sur le terrain.

### 8.4.1 Évaluation sur le diagramme de Krumbein

Nous avons calculé nos paramètres sur l'ensemble des imageries du diagramme de Krumbein (fig. 8.4). Une image scannée du diagramme a été acquise par les géographes qui voulaient tester leur propre prototype de mesure automatique d'émoussé. L'image obtenue, de format jpeg, est de dimensions  $3528 \times 2148$  (soit plus de 7 millions et demi de pixels). Elle comporte 81 silhouettes de galets, réparties en 9 classes d'émoussé de valeur 0.1, 0.2, ..., 0.9.

Nous arrivons assez bien à classer les imageries du diagramme de Krumbein en calculant automatiquement leur émoussé. Plusieurs paramètres permettent ce classement. Le tableau 8.1 montre que notre implémentation de l'indice d'émoussé de Wadell ( $rW$ ) est le paramètre le mieux corrélé aux valeurs du diagramme de Krumbein (à 92%). Ce résultat est rassurant car Krumbein a utilisé la méthode de Wadell pour classer ses imageries de galets standards (section 8.2).



#### 8.4. Évaluation des paramètres de forme

---

paramètres	coefficient de corrélation	
	valeurs individuelles ( $n = 81$ )	valeurs moyennes ( $n = 9$ )
$b$	0.065	0.153
$b/a$	0.057	0.199
$rD$	0.847	0.967
$rW$	<b>0.919</b>	<b>0.992</b>
$rP$	0.899	0.979
circularité	-0.844	-0.984
convexité	0.895	0.972

TAB. 8.1 – Corrélation entre les valeurs données par le diagramme de Krumbein et celles que nous avons calculées ( $b$ : taille,  $b/a$ : élongation,  $rD$ : émoussé de Drevin,  $rW$ : émoussé de Wadell,  $rP$ : rapport entre les périmètres de la particule et de l’ellipse de meilleure approximation).

Les coefficients de corrélation que nous avons calculés sont inférieurs à ceux donnés dans la littérature (section 8.2). En particulier, notre implémentation de la méthode de Drevin *et al.* mène à une corrélation de 85% (contre 96% dans l’article de référence [Drevin et Vincent, 2002]). Pourtant, notre implémentation est fondée sur une distance euclidienne exacte. Outre ces différences d’implémentation, nous pensons que c’est davantage une différence dans la qualité des images utilisées qui explique la différence de résultat. Une comparaison n’est valable que pour des mesures calculées sur une même image. Par ailleurs, si la méthode de G. R. Drevin *et al.* donne de meilleurs résultats en étant appliquée sur une autre image du diagramme de Krumbein, alors nous pouvons raisonnablement croire en une augmentation du coefficient de corrélation obtenu à l’aide de notre implémentation de la méthode de Wadell. Cependant, nous ne pourrions jamais expliquer complètement les valeurs du diagramme de Krumbein, à cause de la perte d’information résultant de la discrétisation des valeurs. Pour les neuf imageries de galets appartenant à une même classe, les valeurs d’émoussé obtenues par Krumbein à l’aide la méthode de Wadell sont sans doute distribuées autour de l’unique valeur donnée par le diagramme. Mais nous ne savons plus rien sur la distribution de ces valeurs.

En outre, les valeurs calculées à l’aide de notre implémentation de la méthode de Wadell sont différentes des valeurs données par le diagramme, pourtant *a priori* calculées par la même méthode, mais manuellement (fig. 8.5). Les valeurs provenant de notre implémentation de la méthode Wadell sont égales à 0,5, pour les imageries de galets les moins émoussés et sont égales à 0,8, pour les imageries de galets les plus émoussés. Si cela est surprenant, cela s’explique simplement. A notre connaissance et selon Hervé Piégay, personne n’a défini la courbure et personne n’a déterminé la taille à partir de laquelle une aspérité du galet doit être prise en compte dans le calcul. Ce vide méthodologique explique aussi la forte variabilité inter-observateur de l’indice d’émoussé de Cailleux mise en évidence dans [Pissart *et al.*, 1998] (section 8.2). D’ailleurs, il n’est pas sûr qu’un expert appliquant la méthode de Wadell aux imageries du diagramme de Krumbein trouve les valeurs indiquées sur le

diagramme. Cette question, dont on comprend qu'elle soit importante dans le cas d'un calcul "à la main", reste posée dans le cas d'un calcul automatique effectué sur l'image numérique d'un galet. En effet, la subjectivité de l'observateur est remplacée par la résolution de l'appareil utilisé et la distance à laquelle est prise la photographie. Une aspérité du galet ne sera pas prise en compte dans le calcul de l'indice d'émoissé de Wadell, si elle est inférieure à un pixel de l'image. En revanche, une aspérité invisible à l'oeil nu, ou trop petite pour être prise en compte pour un calcul "à la main", peut correspondre à une zone de plusieurs pixels dans l'image et par conséquent être prise en compte dans le calcul automatique effectué sur l'image numérique du galet.

Pour prédire les valeurs du diagramme de Krumbein, on peut multiplier les valeurs de notre implémentation de l'indice d'émoissé de Wadell par le coefficient directeur de la droite de régression (2,4462) (fig. 8.5.a) et leur ajouter son ordonnée à l'origine (-1,0798). Comme les hypothèses structurelles et stochastiques du modèle linéaire général (dont la normalité des résidus) sont vérifiées, nous pouvons mesurer la confiance à accorder à cette prédiction. Pour une valeur de  $rW$ , nous pouvons prédire la valeur du diagramme de Krumbein à plus ou moins 0,1933 avec une certitude de 95% (fig. 8.5.a). Pour 100 valeurs de  $rW$ , nous pouvons prédire la valeur du diagramme de Krumbein à plus ou moins 0,0193 avec une certitude de 95%, ce qui devient intéressant.

Nous avons aussi étudié la corrélation des concepts théoriquement indépendants de taille, d'élongation et d'émoissé. Quel que soit le paramètre utilisé pour estimer l'émoissé, ces études montrent une absence de corrélation entre chacun de ses paramètres, la taille et l'élongation.

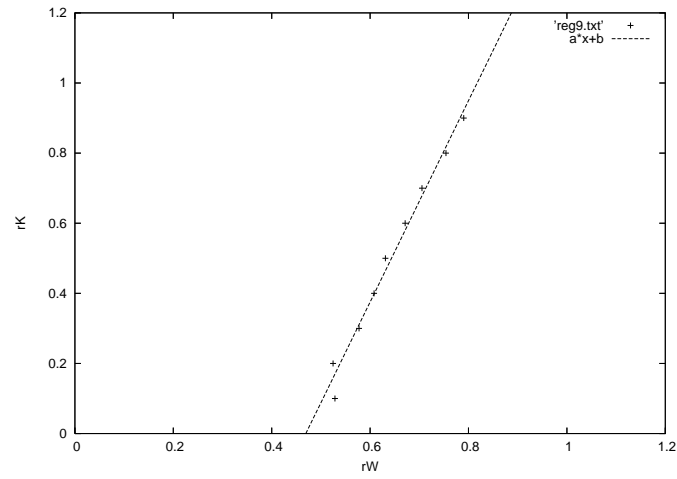
## 8.4.2 Évaluation longitudinale

Nos mesures ont été appliquées à l'analyse de la forme de galets prélevés dans le lit du Progo, un fleuve indonésien localisé sur l'île de Java, près de Yogyakarta (fig. 8.6). Le cours d'eau est long de 135 kilomètres, a un bassin-versant de 2400 kilomètres carrés et draine plusieurs volcans. A l'est se trouve le Merapi (2900 mètres d'altitude), tandis qu'à l'ouest se trouve le Sumbing et le Sundoro (3200 et 3100 mètres d'altitude respectivement). La source du fleuve se trouve sur le côté nord du Sundoro à 2500 mètres d'altitude. Environ 2500 galets d'andésite ont été aléatoirement échantillonnés le long du cours d'eau. L'intérêt du Progo est qu'il transporte des galets de même lithologie : l'andésite. L'étude de l'émoissé des galets, qui doit être menée pour des galets de même nature pour être interprétée est donc possible. Entre 2 et 5 photos ont été prises sur 25 stations distantes en moyenne de 5 kilomètres. Ces images sont stockées dans des fichiers de format jpeg (compressé) de dimensions  $1600 \times 1200$  (soit presque 2 millions de pixels). Chaque image comprend la silhouette d'une cinquantaine de galets de sorte que 105 galets en moyenne par station sont analysés (min = 73; max = 154).

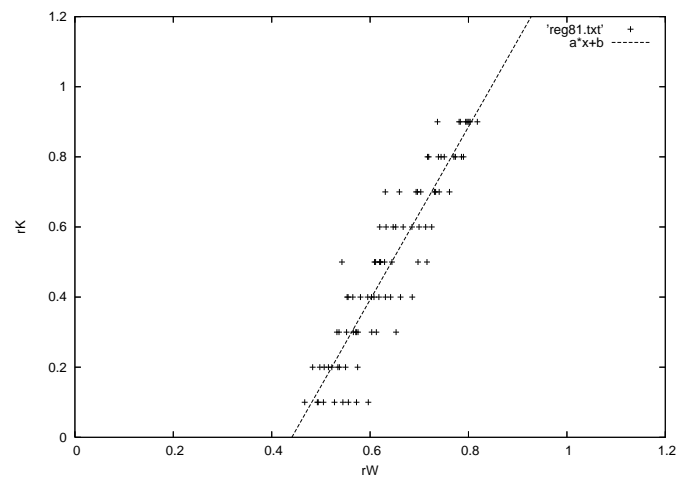
Pour obtenir le contour des galets, une étape préalable qui sert à dissocier les silhouettes de galets de tout le reste est nécessaire. Cette tâche est rendue possible grâce au caractère contrôlé des images acquises. Les galets sont en effet tous photographiés sur un support de couleur rouge. Néanmoins un seuillage dans le canal rouge ne permet pas de binariser

## 8.4. Évaluation des paramètres de forme

---



(a)



(b)

FIG. 8.5 – Corrélation entre  $rW$  et les valeurs du diagramme de Krumbein  $rK$  calculée sur les valeurs individuelles en (a) et sur les moyennes par classes en (b).

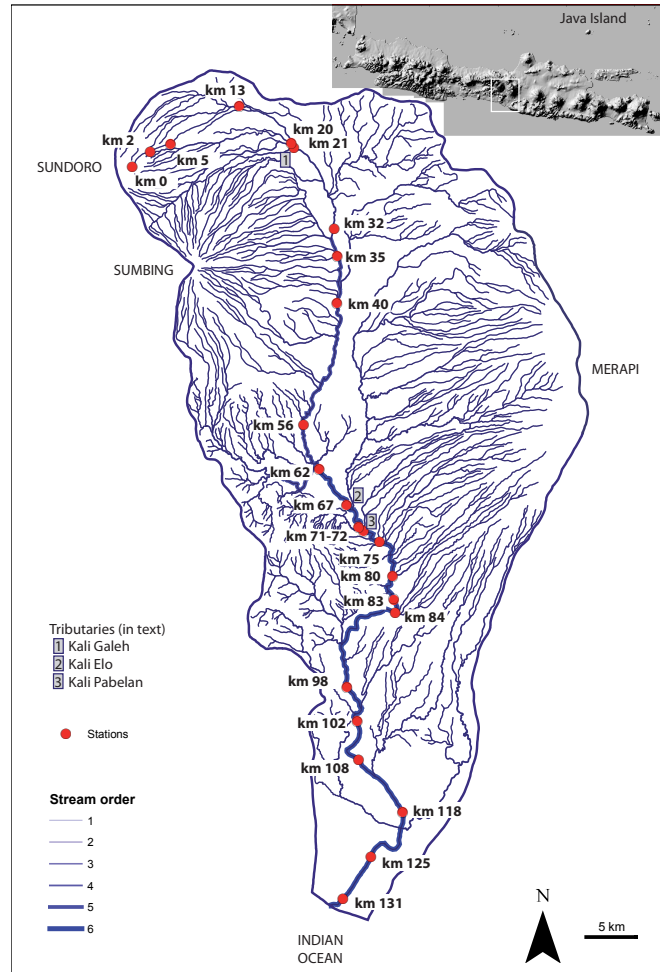


FIG. 8.6 – Bassin-versant du fleuve Progo, Ile de Java, Indonésie. La structure du réseau hydrographique est fortement contrôlée par les volcans. Les 25 stations se trouvent le long du cours d'eau principal du volcan Sundoro (en haut) à l'Océan Indien (en bas). Leur distance à la source (en km) est indiquée.

#### 8.4. Évaluation des paramètres de forme

---

correctement les images, car les conditions d'éclairage varient. Par exemple, des zones d'ombre peuvent apparaître sur le bord des galets. Pour que la binarisation soit insensible à ces variations, elle est effectuée par apprentissage non supervisé (k-moyennes). A partir de ces images binaires, les contours sont extraits par suivi après un étiquetage en composantes connexes. Le résultat de la binarisation est suffisamment correct (fig. 8.7) pour que nous n'ayons pas eu le besoin d'implémenter de méthode plus sophistiquée. Cependant, certains problèmes demeurent : impuretés (fig. 8.8.a), galets collés (fig. 8.8.b), galets mouillés (fig. 8.8.c). Ces contours dégradés sont éliminés manuellement ou automatiquement.



FIG. 8.7 – ZOOMS sur deux photographies.

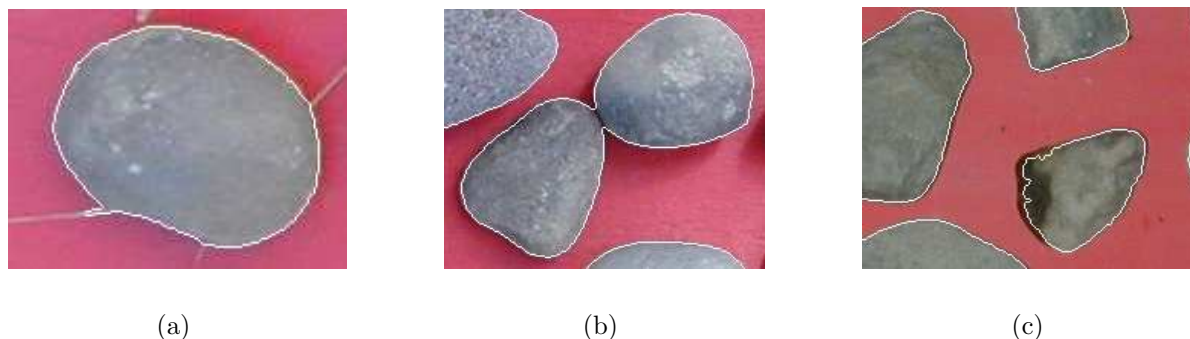


FIG. 8.8 – Silhouettes de galets dégradées.

Ces images nous ont posé de nombreux problèmes géométriques et fourni de nombreux contours sur lesquels tester nos solutions. Par exemple, nous avons utilisé notre algorithme de décomposition robuste en parties convexes et concaves (section 3.3.3) pour dissocier les contours de deux galets collés (fig. 8.8.b), ou pour éliminer des excroissances anormales (fig. 8.8.a). Ces opérations aboutissent à découper un contour en parties. Pour minimiser le nombre de contours rejetés, nous avons cherché à définir des mesures applicables aux parties de contour obtenues. La mesure de circularité classique [Haralick, 1974] que nous avons commencé par utiliser dans cette application ne le permet pas, tandis que la mesure

que nous avons défini au paragraphe 6.4 le permet. Ces applications sont décrites dans deux de nos articles [Roussillon *et al.*, 2008a, 2010].

Pour comparer les stations le long du cours d'eau, il est nécessaire que les galets soient de taille similaire [Bunte et Abt, 2001]. Les premier et dernier déciles sont respectivement 51 et 87 millimètres de largeur (axe intermédiaire  $b$ ). Les valeurs moyennes de largeur ne sont statistiquement pas différentes d'une station à l'autre. Les données étudiées peuvent donc être interprétées, car elles concernent des galets de même taille (et de même lithologie).

Pour chaque échantillon de galets, caractérisé par sa distance à la source, nous avons calculé la valeur moyenne de chaque paramètre, ainsi que son intervalle de confiance à 95%, puisque les galets sont supposés être tirés aléatoirement. La fig. 8.9 décrit le motif longitudinal de chaque paramètre le long du cours d'eau.

L'évolution des valeurs des différents paramètres ne suit pas de tendance linéaire claire, ce qui indique que l'origine des particules du cours d'eau principal est multiple. La tendance longitudinale la plus évidente est celle obtenue par la convexité (le coefficient de détermination  $r^2$  vaut 0.035). Chaque paramètre possède un motif unique. Cependant,  $rP$  et la circularité sont hautement corrélés ( $r^2 = 0.928$ ). De même, la convexité et la circularité sont aussi fortement corrélés ( $r^2 = 0.899$ ). L'indice d'éroulé de Wadell  $rW$  est le paramètre qui est le moins corrélé avec les autres. La meilleure corrélation est observée avec  $rD$  ( $r^2 = 0.76$ ) et le coefficient de détermination est inférieur à 0.63 avec les autres paramètres. Un motif général similaire peut être observé pour la plupart des paramètres :

- Les particules les plus anguleuses se trouvent surtout à l'amont, notamment dans la station située à la source du fleuve. Dans les stations suivantes, une tendance nette à l'arrondi se dessine jusqu'au kilomètre 20 pour  $rP$ ,  $rD$ , la convexité et la circularité et jusqu'au kilomètre 50 pour  $rW$ .
- Pour tous les paramètres, une diminution significative de l'arrondi est observée entre les kilomètres 60 et 80.
- A l'aval, tous les paramètres indiquent une augmentation significative de l'arrondi entre les kilomètres 80 et 100. Ensuite, les valeurs sont plutôt stables jusqu'au kilomètre 130. A l'exception de  $rW$ , les valeurs obtenues sont égales ou supérieures ( $rP$ , convexité) à celles observées entre les kilomètres 25 et 50. Les particules les plus rondes sont celles de la station aval, ou proches de celle-ci ( $rP$ , circularité, convexité).

D'un point de vue thématique, l'accroissement de l'éroulé observé dans la partie amont du bassin-versant est net, car aucune entrée de particules plus anguleuses ne provoque de discontinuité dans le processus d'abrasion. Seul le Kali Galeh amène de nouvelles particules au kilomètre 21. Ce phénomène est détecté par certains paramètres, mais ne brise pas la tendance. Ajuster les valeurs de  $rW$  ou  $rP$  permet de prévoir l'évolution de l'éroulé dans un environnement d'andésite :  $rW = 0.002km + 0.69$  avec  $r^2 = 0.87$  et  $Log(rP) = 0.009Log(km) + 0.69$  avec  $r^2 = 0.90$ . Ces résultats soulignent que deux de nos paramètres mettent en relief un accroissement d'éroulé sur une assez longue distance (de 20 à 50 kilomètres). Les travaux précédents montraient que l'accroissement d'éroulé n'était visible que sur les particules relevées près de la source (de 0 à 20 kilomètres) [Pisart *et al.*, 1998]. Nos paramètres sont aussi assez robustes pour mettre en évidence, dans la partie intermédiaire du tracé, une entrée sédimentaire majeure, due au Merapi, volcan

## 8.4. Évaluation des paramètres de forme

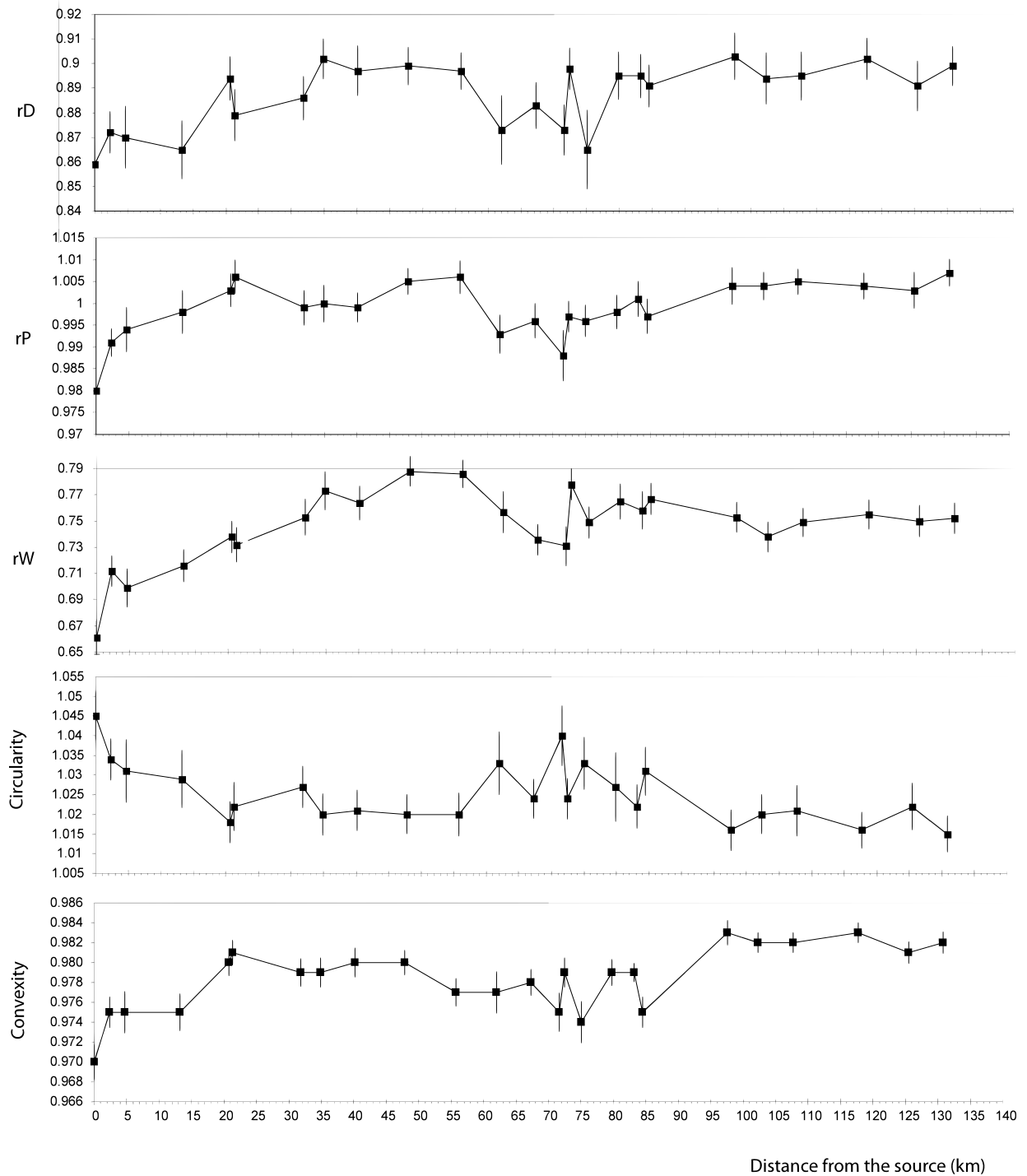


FIG. 8.9 – Motif longitudinal de notre implémentation de la méthode de Wadell  $rW$ , de la méthode de Drevin  $rD$ , du rapport des périmètres  $rP$ , de la circularité et de la convexité, de la source du fleuve Progo (kilomètre 0) à l’Océan Indien (kilomètre 130).

actif situé sur le côté est du fleuve. Ce volcan est une source de particules anguleuses qui perturbent la tendance longitudinale. La distance qui sépare le sommet du Merapi du cours d'eau principal est environ de 25-30 kilomètres seulement. Les valeurs atteintes par les paramètres d'éroulé  $rW$  et  $rD$  entre les kilomètres 60 et 80 sont similaires à celles observées entre les kilomètres 25 et 30 du cours d'eau principal. Ainsi, le processus d'abrasion sur les pentes du Merapi est similaire à celui observé sur le Sandoro. La diminution de l'arrondi apparaît dès les stations des kilomètres 62 et 67, c'est-à-dire avant la confluence avec le Kali Elo et le Kali Pabelan qui drainent le Merapi. Ceci indique que les entrées sédimentaires ne sont pas seulement liées au réseau hydrographique. Elles proviennent aussi du matériel fourni par le Merapi, stocké dans des nappes alluviales et déversé par sapement.

Les tendances observées à l'aval, au-delà du kilomètre 85, sont difficiles à interpréter car les différents indicateurs ont des motifs contrastés. Une combinaison des paramètres dans une analyse multivariée pourrait caractériser le processus d'abrasion sur une plus longue distance et mettre en évidence un éventuel changement d'échelle dans l'évolution de la forme des particules. Nous pouvons supposer que les zones anguleuses des particules s'arrondissent dans un premier temps ( $rW$  est alors le paramètre le plus adapté pour saisir ces changements), et que la forme générale des particules évolue dans un second temps ( $rP$ , la convexité et la circularité sont alors les paramètres les plus adaptés pour étudier ces modifications).

## 8.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons décrit le principal projet auquel nous avons participé et qui a été à la fois source de motivations et source de données sur lesquelles nous avons pu tester certains algorithmes développés durant cette thèse. Ce travail a été mené en collaboration avec des géographes qui souhaitaient établir la carte d'identité des galets déposés dans le lit d'un cours d'eau. Ces informations peuvent guider les décideurs dans la mise en place d'une politique de gestion durable de la ressource sédimentaire afin de prévenir les risques d'inondations, d'élargissement du lit, d'engrèvement des ouvrages, d'érosion des berges, etc. L'automatisation des mesures par analyse d'images minimise la variabilité intra- et inter-observateur et minimise le temps passé sur le terrain, ce qui rend possible des études à l'échelle de tout un bassin-versant.

Nous avons défini un certain nombre de paramètres décrivant la forme des galets. A la différence des travaux précédents, dans lesquels des techniques d'analyse d'images classiques étaient utilisées (transformée de Fourier ou morphologie mathématique), nous avons choisi de travailler dans le cadre de la géométrie discrète. Cela nous a permis d'implémenter certaines méthodes non automatiques, réputées être précises, mais difficiles à mettre en œuvre manuellement. En outre, de nouveaux problèmes fondamentaux ont été soulevés, comme la définition et le calcul de mesures vérifiant des propriétés en adéquation avec la nature discrète des données.

Nos paramètres ont été évalués sur des données artificielles ainsi que sur des données issues de photos numériques de planches de galets prélevés dans le lit du Progo, fleuve d'In-



## 8.5. Conclusion

---

donésie. Les résultats obtenus confirment et complètent les travaux précédents et ouvrent des perspectives nouvelles pour les géographes, grâce à l'automatisation des calculs.



# *Conclusion et perspectives*

Dans cette thèse, nous avons manipulé des contours, avec l’objectif de les représenter et de les décrire. Nous nous sommes concentrés sur trois modèles géométriques discrets définis à partir de la discrétisation de Gauss : la partie convexe ou concave, l’arc de cercle discret et le segment de droite discrète. Pour chacun, nous avons cherché à les détecter ou à les reconnaître. Ces algorithmes permettent de décomposer un contour, éventuellement de manière robuste par le biais de mesures de similarité, ou de le représenter à l’aide d’un polygone respectant le plus fidèlement possible sa physionomie.

## **Décompositions exactes**

Dans le chapitre 3, nous avons proposé deux algorithmes originaux de reconnaissance de parties convexes et concaves. L’un maintient une droite de support à la manière des “rotating calipers”, tandis que l’autre procède par dénombrement de points en utilisant la formule de Pick. Les deux opèrent à la volée et sont linéaires en temps. Ces qualités sont essentielles pour décomposer rapidement un contour en parties convexes et concaves.

Dans le chapitre 4, nous avons décrit quatre algorithmes de reconnaissance de segments de droite. Le premier repose sur les algorithmes de reconnaissance de parties convexes et concaves introduits au chapitre 3. Le second calcule à la volée, en temps linéaire, sans aucune transformation, l’ensemble de la préimage. Le troisième et le dernier reposent sur un calcul d’épaisseur. Toutefois, tandis que le troisième est géométrique, le dernier exploite au mieux la structure arithmétique des points de  $\mathbb{Z}^2$ . Comme il est complètement dynamique, avec un coût constant pour chaque opération, un seul balayage par une fenêtre correspondant à un segment maximal à l’avant ou à l’arrière suffit pour décomposer un contour en segments de droite maximaux.

Dans le chapitre 6, nous avons présenté un nouvel algorithme de reconnaissance d’arcs de cercle. Il résout le problème géométrique de la séparation des points de l’objet et du fond par un cercle. Cependant, comme il n’est pas incrémental, décomposer un contour en arcs de cercle maximaux à l’aide de cet algorithme est coûteux.

Dans le chapitre 7, nous avons étudié la reconnaissance d’arcs de cercle passant par un point donné. Il s’avère que nous pouvons appliquer à ce problème notre algorithme de

reconnaissance de segments de droite par séparation, décrit dans le chapitre 4, en modifiant le prédicat utilisé. Au lieu de tester l'appartenance d'un point à un demi-plan, nous testons l'appartenance d'un point à un disque passant par un point donné. Nous nous sommes servi de cet algorithme comme une routine pour résoudre le problème plus général de la reconnaissance d'arcs de cercle et décomposer un contour en arcs de cercle.

Les algorithmes de reconnaissance d'une partie convexe, concave, ou d'un segment de droite des chapitres 3 et 4 sont très performants. Les propriétés mises en jeu sont bien établies. Cependant, les résultats récents sur la convexité discrète abordée selon une approche combinatoire [Brelk *et al.*, 2009], suggèrent qu'il est possible de détecter un segment de droite en traitant directement le code de Freeman au moyen de comparaisons de symboles, quasiment sans aucune opération arithmétique. Comme le code de Freeman est périodique, il s'agirait d'observer le code en deux endroits espacés d'une période. Cette fenêtre se déplacerait tant que le code vu aux deux endroits coïncide. Une différence signifierait, selon la position à laquelle elle apparaîtrait, soit que le code ne représente pas un segment de droite, soit que la période a besoin d'être allongée.

Néanmoins, c'est autour de l'arc de cercle que l'intérêt de nouvelles recherches est le plus important. Pour la reconnaissance, l'approche de Kovalevsky [1990], pourtant ancienne, semble prometteuse au vu de nos résultats. Sa complexité a été évaluée en  $\mathcal{O}(n^2 \log n)$  [Coeurjolly *et al.*, 2004], où  $n$  est le nombre de points traités. Mais l'algorithme conçu au chapitre 7, qui calcule la préimage des arcs de cercle passant par un point donné, suggère que cette méthode peut être optimisée en  $\mathcal{O}(n.h)$ , où  $h$  est le nombre de sommets du domaine des centres des arcs. L'idée est de décrire à la volée le domaine des centres des arcs et de ne conserver dans le calcul que les points qui contribuent encore au domaine, c'est-à-dire  $\mathcal{O}(h)$  points. A l'ajout de la contrainte d'un nouveau point, le domaine est mis à jour en temps linéaire, donc en  $\mathcal{O}(h)$ , grâce à l'algorithme du chapitre 7. D'après les expérimentations menées par Kovalevsky [1990],  $h$  ne dépasserait pas 20, ce qui donne une idée de la performance que pourrait avoir une telle méthode.

### Décompositions robustes

Dans le chapitre 3, nous avons introduit une mesure de convexité basée sur un rapport d'aires discrètes. Ces quantités, définies en terme de nombre de points, sont cohérentes avec notre définition de convexité discrète et sont de bonnes estimations d'aire. Ainsi, des propriétés fondamentales sont vérifiées. A partir de cette mesure, nous avons imaginé de nouveaux modèles de parties convexes et concaves, dotés d'un paramètre variant entre 0 et 1. Le paramètre est fixé à 1 quand on est sûr de la position du contour, mais fixé à une valeur inférieure quand le contour est susceptible d'avoir été déplacé par un bruit d'acquisition. Cette approche pragmatique permet de décomposer de manière robuste et rapide un contour en parties convexes et concaves.

Dans le chapitre 4, nous avons aussi abouti, en suivant la même démarche, à des décompositions robustes, composées de nouveaux modèles de segments de droite, définis par

la comparaison à un paramètre d'une mesure de linéarité. Nous avons proposé deux types de mesures qui se calculent à l'aide des mêmes outils que ceux utilisés pour la reconnaissance de segments de droite ou de parties convexes : le premier repose sur une propriété d'épaisseur, tandis que le second repose sur une propriété de convexité.

Dans le chapitre 6, nous avons adapté aux parties de contour une mesure de circularité utilisée en métrologie. Le plus petit anneau dont le cercle externe englobe les points de l'objet et dont le cercle interne n'englobe aucun point du fond est calculé à l'aide des mêmes outils que ceux utilisés pour la reconnaissance des arcs de cercle. Notre mesure de circularité est définie alors comme le rapport des aires des disques interne et externe de cet anneau.

Le principal frein à l'utilisation d'une telle mesure de circularité pour une décomposition robuste en arcs de cercle est la difficulté de la calculer à la volée. Malgré la complexité du problème, son intérêt en fait une piste de recherche séduisante.

Plusieurs études expérimentales représentent autant d'autres perspectives à ce travail. La première est une comparaison approfondie de nos deux types de mesures de linéarité. Une autre est une comparaison des différentes stratégies possibles de décomposition, que ce soit en segments de droite ou en parties convexes et concaves. Enfin, une application des méthodes développées sur différents modèles de bruit semble indispensable pour les valider et apporter des précisions sur le réglage de leur paramètre.

### **Polygone réversible respectant les parties convexes et concaves**

La synthèse des résultats obtenus aux chapitres 3 et 4 aboutit, au chapitre 5, à l'extraction d'un polygone réversible qui respecte les parties convexes et concaves d'un contour. Ce problème a été soulevé par Eckhardt et Dorksen-Reiter, mais dans leur formulation, il ne possédait pas de solution satisfaisante. Nous avons montré que si les sommets sont des points du contour, et non du bord, et si le processus de discrétisation varie selon la configuration locale, au lieu d'être fixe et déterminé à l'avance, les contraintes de réversibilité et de respect des parties convexes et concaves peuvent être toutes les deux vérifiées.

Le spectre d'applications est large. On peut déduire aisément du polygone obtenu, le polygone de longueur minimale séparant l'objet du fond, dont le périmètre est une bonne estimation du périmètre du contour. On peut calculer, à partir du polygone de longueur minimale, une décomposition en arcs de cercle qui représente fidèlement les parties convexes et concaves d'un contour, comme l'illustre le chapitre 7. En outre, un polygone réversible qui respecte les parties convexes et concaves d'un contour est un bon point de départ pour une représentation hiérarchique du contour par simplification polygonale, ce qui est de première importance pour la mise en évidence des traits caractéristiques d'un contour ou pour la suppression du bruit. Ce travail prend donc à contre-pied les travaux précédents dans le sens où si le bruit peut être supprimé, la robustesse des décompositions cesse d'être un objectif.

Par ailleurs, si on peut calculer un polygone réversible sur tout contour, le chemin inverse, c'est-à-dire discrétiser en contour réversible n'importe quel polygone n'est pas possible. Tous les polygones provenant de la simplification polygonale ne sont donc pas réversibles. Une perspective importante de ce travail consiste à caractériser les polygones réversibles afin de trouver un processus d'évolution purement discret qui aboutisse à une hiérarchie complète de polygones réversibles.

# Bibliographie

---

## Géométrie discrète et algorithmique

---

- ACKETA, D. et ZUNIĆ, J. (1995). On the maximal number of edges of convex digital polygons included into a  $m \times m$ -grid. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 69(2): 358–368.
- AGARWAL, P. K., ARONOV, B., HAR-PELED, S. et SHARIR, M. (2000). Approximation and exact algorithms for minimum-width annuli and shells. *Discrete & Computational Geometry*, 24(4):687–705.
- AGGARWAL, A., GUIBAS, L. J., SAXE, J. et SHOR, P. W. (1989). A linear-time algorithm for computing the voronoi diagram of a convex polygon. *Discrete Computational Geometry*, 4(6):591–604.
- ANDERSON, T. A. et KIM, C. E. (1985). Representation of digital line segments and their preimages. *Computer vision, graphics, and image processing*, 30(3):279–288.
- ANDRES, E. (1994). *Cercles discrets et rotations discrètes*. Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur.
- ANDRES, E. (2000). *Modélisation Analytique Discrète d'Objets Géométriques*. Habilitation à diriger des recherches, Université de Poitiers.
- ANDRES, E. (2003). Discrete linear objects in dimension  $n$ : the standard model. *Graphical Models*, 65(1-3):92–111.
- ANDREW, A. M. (1979). Another efficient algorithm for convex hulls in two dimensions. *Information Processing Letters*, 9(5):216–219.
- BALZA-GOMEZ, H., MOREAU, J.-M. et MICHELUCCI, D. (1999). Convex hull of grid points below a line or a convex curve. In *8-th International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery*, volume 1568 de *Lecture Notes on Computer Science*, pages 361–374. Springer.

- BERMAN, M. (1989). Large sample bias in least squares estimators of a circular arc center and its radius. *Computer Vision Graphics and Image Processing*, 45(1):126–128.
- BOSE, P. et MORIN, P. (2004). Testing the quality of manufactured disks and balls. *Algorithmica*, 38(11):161–177.
- BOTTEMA, M. J. (2000). Circularity of objects in images. *In International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, pages 2247–2250.
- BRESENHAM, J. (1977). A linear algorithm for incremental digital display of circular arcs. *Communications of the ACM*, 20(2):100–106.
- BRLEK, S., LACHAUD, J. O., PROVENÇAL, X. et REUTENAUER, C. (2009). Lyndon + christoffel = digitally convex. *Pattern Recognition*, 42(10):2239–2246.
- BROWN, K. Q. (1979). Voronoi Diagrams from Convex Hulls. *Information Processing Letters*, 9:223–228.
- BRUCKSTEIN, A. M. (1991). Self-similarity properties of digitized straight lines. *In* MELTER, R. A., ROSENFELD, A. et BHATTACHARYA, P., éditeurs : *Vision Geometry*, volume 119 de *Contemporary Mathematics*, pages 1–20. American Mathematical Society.
- BUZER, L. (2005). An elementary algorithm for digital line recognition in the general case. *In 12-th International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery*, volume 3429 de *Lecture Notes on Computer Science*, pages 299–310. Springer.
- BUZER, L. (2007). Computing multiple convex hulls of a simple polygonal chain in linear time. *In 23rd European Workshop on Computational Geometry*, pages 114–117.
- CHAN, T. M. (1996). Optimal Output-Sensitive Convex Hull Algorithms in Two and Three Dimensions. *Discrete & Computational Geometry*, 16(4):361–368.
- CHASSERY, J. (1983). Discrete convexity: Definition, parametrization, and compatibility with continuous convexity. *Computer Vision Graphics and Image Processing*, 21(3):326–344.
- CHAUDHURI, B. et ROSENFELD, A. (1998). On the computation of the digital convex hull and circular hull of a digital region. *Pattern Recognition*, 31(12):2007–2016.
- CHEN, M.-C. (2002). Roundness measurements for discontinuous perimeters via machine visions. *Computers in Industry*, 47:185–197.
- CHIN, F. et WANG, C. A. (1999). Finding the constrained delaunay triangulation and constrained voronoi diagram of a simple polygon in linear time. *SIAM Journal on Computing*, 28(2):471–486.
- COEURJOLLY, D., GÉRARD, Y., REVEILLÈS, J.-P. et TOUGNE, L. (2004). An elementary algorithm for digital arc segmentation. *Discrete Applied Mathematics*, 139(1-3):31–50.



## BIBLIOGRAPHIE

---

- COEURJOLLY, D. et KLETTE, R. (2004). A comparative evaluation of length estimators of digital curves. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 26(2):252–257.
- COEURJOLLY, D., MIGUET, S. et TOUGNE, L. (2001). Discrete curvature based on osculating circle estimation. In *4th International Workshop on Visual Form*, pages 303–312.
- COEURJOLLY, D., MONTANVERT, A. et CHASSERY, J.-M. (2007). Géométrie discrète et images numériques. Ouvrage collectif, *Traité IC2*, Hermès, pp-416.
- CREUTZBURG, E., HÜBLER, A. et SÝKORA, O. (1988). Geometric methods for on-line recognition of digital straight-line segments. *Computers and Artificial Intelligence*, 7(3): 253–276.
- CREUTZBURG, E., HÜBLER, A. et WEDLER, V. (1982). On-line recognition of digital straight line segments. In *Second International Conference on AI and Information Control Systems of Robots*, pages 42–46.
- DAMASCHKE, P. (1995). The linear time recognition of digital arcs. *Pattern Recognition Letters*, 16(5):543–548.
- de BERG, M., BOSE, P., BREMNER, D., RAMASWAMI, S. et WILFONG, G. (1998). Computing constrained minimum-width annuli of points sets. *Computers-Aided Design*, 30(4):267–275.
- de BERG, M., van KREVELD, M., OVERMARS, M. et SCHARZKOPF, O. (2000). *Computation geometry, algorithms and applications*. Springer.
- de VIEILLEVILLE, F., LACHAUD, J.-O. et FESCHET, F. (2007). Maximal digital straight segments and convergence of discrete geometric estimators. *Journal of Mathematical Image and Vision*, 27(2):471–502.
- DEBLED-RENNESON, I., FESCHET, F. et ROUYER-DEGLI, J. (2006). Optimal blurred segments decomposition of noisy shapes in linear time. *Computers and Graphics*, 30(1): 30–36.
- DEBLED-RENNESON, I., RÉMY, J.-L. et ROUYER-DEGLI, J. (2003). Detection of the discrete convexity of polyominoes. *Discrete Applied Mathematics*, 125(1):115–133.
- DEBLED-RENNESON, I. et REVEILLÈS, J.-P. (1995). A linear algorithm for segmentation of digital curves. *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 9(4):635–662.
- DORKSEN-REITER, H. (2004). *Shape Representations of Digital Sets based on Convexity Properties*. Dissertation, Universität Hamburg.

- DORKSEN-REITER, H. et DEBLED-RENNESON, I. (2006a). Convex and concave parts of digital curves. *In* KLETTE, R., KOZERA, R., NOAKES, L. et WEICKERT, J., éditeurs : *Geometric Properties from Incomplete Data*, volume 31 de *Computational Imaging and Vision*, pages 145–159. Springer.
- DORKSEN-REITER, H. et DEBLED-RENNESON, I. (2006b). A linear algorithm for polygonal representations of digital sets. *In* *International Workshop in Combinatorial Image Analysis*, pages 307–319.
- DORST, L. et SMEULDERS, A. W. M. (1984). Discrete representation of straight lines. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 6(4):450–463.
- DREZNER, Z., STEINER, S. et WESOLOWSKY, G. O. (2002). On the circle closest to a set of point. *Computers and operations research*, 29(6):637–650.
- ECKHARDT, U. (2001). Digital lines and digital convexity. *In* *Digital and image geometry: advanced lectures*, volume 2243 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 209–228. Springer.
- ECKHARDT, U. et DORKSEN-REITER, H. (2004). Polygonal representations of digital sets. *Algorithmica*, 38(1):5–23.
- EFRAT, A. et GOTSMAN, C. (1994). Subpixel image registration using circular fiducials. *International Journal of Computational Geometry & Applications*, 4(4):403–422.
- FESCHET, F. (2004). *Méthodes de géométrie discrète pour la caractérisation, la représentation et la reconstruction d'objets discrets*. Habilitation à diriger des recherches, Université Blaise Pascal.
- FESCHET, F. (2005). Canonical representations of discrete curves. *Pattern Analysis and Applications*, 8(1):84–94.
- FESCHET, F. et TOUGNE, L. (1999). Optimal time computation of the tangent of a discrete curve: Application to the curvature. *In* *8-th International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery*, volume 1568 de *Lecture Notes on Computer Science*, pages 31–40. Springer.
- FESCHET, F. et TOUGNE, L. (2005). On the Min DSS problem of closed discrete curves. *Discrete Applied Mathematics*, 151(1-3):138–153.
- FIORIO, C., JAMET, D. et TOUTANT, J.-L. (2006). Discrete circles: an arithmetical approach with non-constant thickness. *In* *Vision Geometry XIV, Electronic Imaging, SPIE*, volume 6066, pages 60660C.1–60660C.12.
- FIORIO, C. et TOUTANT, J.-L. (2006). Arithmetic discrete hyperspheres and separatingness. *In* *13-th International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery*, volume 4245 de *Lecture Notes on Computer Science*, pages 425–436. Springer.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- FISK, S. (1986). Separating points sets by circles, and the recognition of digital disks. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 8(4):554–556.
- FREEMAN, H. (1961). On the encoding of arbitrary geometric configurations. *IEEE Transaction on Electronic Computers*, 10(2):260–268.
- FREEMAN, H. (1970). Boundary encoding and processing. *In Picture Processing and Psychopictorics*, pages 241–266.
- FREEMAN, H. (1974). Computer processing of line drawing images. *Surveys*, 6(1):57–97.
- GASS, S. I., WITZGALL, C. et HARARY, H. H. (1998). Fitting circles and spheres to coordinate measuring machine data. *The International Journal in Flexible Manufacturing Systems*, 10(1):5–25.
- GRAHAM, R. L. (1972). An efficient algorithm for determining the convex hull of a finite planar set. *Information Processing Letters*, 1(4):132–133.
- GROEN, F. et VERBEEK, P. (1978). Freeman-code probabilities of object boundary quantized contours. *Computer Graphics Image Processing*, 7(3):391–402.
- HAR-PELED, S. (1998). An output sensitive algorithm for discrete convex hulls. *Computational Geometry : Theory and Applications*, 10(2):125–138.
- HARALICK, R. M. (1974). A measure for circularity of digital figures. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 4:394–396.
- HARDY, G. H. et WRIGHT, E. M. (1978). *An introduction to the theory of numbers*. Oxford science publications.
- HIRATA, T. (1996). A unified linear-time algorithm for computing distance maps. *Information Processing Letters*, 58(3):129–133.
- HOULE, M. E. et TOUSSAINT, G. T. (1988). Computing the width of a set. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 10(5):761–765.
- HÜBLER, A., KLETTE, R. et VOSS, K. (1981). Determination of the convex hull of a finite set of planar points within linear time. *In Elektronische Informationsverarbeitung Kybernetik*, volume 17, pages 121–139.
- JARVIS, R. (1973). On the identification of the convex hull of a finite set of points in the plane. *Information Processing Letters*, 2:18–21.
- KANUNGO, T., HARALICK, R. M., BAIRD, H. S., STUEZLE, W. et MADIGAN, D. (2000). A statistical, nonparametric methodology for document degradation model validation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 22(11):1209–1223.

- KERAUTRET, B. et LACHAUD, J.-O. (2009). Curvature estimation along noisy digital contours by approximate global optimization. *Pattern Recognition*, 42(10):2265–2278.
- KIM, C. (1982a). On cellular straight line segments. *Computer Graphics Image Processing*, 18(4):369–381.
- KIM, C. E. (1981). On the cellular convexity of complexes. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 3(6):617–625.
- KIM, C. E. (1982b). Digital convexity, straightness, and convex polygons. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 4(6):618–626.
- KIM, C. E. (1984). Digital disks. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 6(3):372–374.
- KIM, C. E. et ANDERSON, T. A. (1984). Digital disks and a digital compactness measure. *In Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, pages 117–124.
- KIM, C. E. et ROSENFELD, A. (1981). Digital straightness and convexity. *In Thirteenth annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 80–89.
- KIM, C. E. et ROSENFELD, A. (1982). Digital straight lines and convexity of digital regions. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 4(2):149–153.
- KIM, C. E. et SKLANSKY, J. (1982). Digital and cellular convexity. *Pattern Recognition*, 15(5):359–367.
- KLETTE, R., KOVALEVSKY, V. et YIP, B. (1999). On the length estimation of digital curves. *In Vision geometry, VIII, Electronic Imaging, SPIE*, volume 3811, pages 117–128.
- KLETTE, R. et ROSENFELD, A. (2004). Digital straightness – a review. *Discrete Applied Mathematics*, 139(1-3):197–230.
- KLETTE, R. et ŽUNIĆ, J. (2000). Multigrid convergence of calculated features in image analysis. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 13(3):173–191.
- KOPLOWITZ, J. (1981). On the performance of chain codes for quantization of line drawings. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 3(2):180–185.
- KOVALEVSKY, V. A. (1989). Finite topology as applied to image analysis. *Computer, Vision, Graphics and Image Processing*, 46(2):141–161.
- KOVALEVSKY, V. A. (1990). New definition and fast recognition of digital straight segments and arcs. *In Tenth International Conference on Pattern Analysis and Pattern Recognition*, pages 31–34.

- KOVALEVSKY, V. A. (2001). Algorithms and data structures for computer topology. *In Digital and image geometry: advanced lectures*, volume 2243 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 38–58. Springer.
- LACHAUD, J.-O., VIALARD, A. et de VIEILLEVILLE, F. (2007). Fast, accurate and convergent tangent estimation on digital contours. *Image and Vision Computing*, 25(10):1572–1587.
- LANDAU, U. M. (1987). Estimation of a circular arc center and its radius. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 38(3):317–326.
- LATECKI, L. J. et LAKÄMPER, R. (1999). Convexity rule for shape decomposition based on discrete contour evolution. *Computer Vision and Image Understanding*, 73(3):441–454.
- LE, V.-B. et LEE, D. T. (1991). Out-of-roundness problem revisited. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 13(3):217–223.
- LI, S. X. et LOEW, M. H. (1988). Analysis and modeling of digitized straight-line segments. *In Ninth International Conference on Pattern Recognition*, pages 294–296.
- LINDENBAUM, M. et BRUCKSTEIN, A. (1993). On recursive,  $\mathcal{O}(n)$  partitioning of a digitized curve into digital straight segments. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 15(9):949–953.
- MCILROY, M. D. (1984). A note on discrete representation of lines. *AT&T Bell Laboratories technical journal*, 64(2):481–490.
- MEGIDDO, N. (1984). Linear programming in linear time when the dimension is fixed. *SIAM Journal on Computing*, 31(1):114–127.
- MELKMAN, A. A. (1987). On-line construction of the convex hull of a simple polyline. *Information Processing Letters*, 25(1):11–12.
- MINSKY, M. et PAPERT, S. (1968). *Perceptions*. MIT Press, Cambridge, MA.
- NGUYEN, T. et DEBLED-RENNESON, I. (2007). Curvature estimation in noisy curves. *In 12th International Conference on Computer Analysis of Images and Patterns*, pages 474–481.
- O’ROURKE, J. (1981). An on-line algorithm for fitting straight lines between data ranges. *Communications of the ACM*, 24(9):574–578.
- O’ROURKE, J., KOSARAJU, S. R. et MEGGIDO, N. (1986). Computing circular separability. *Discrete and Computational Geometry*, 1:105–113.
- OVERMARS, M. et VAN LEEUWEN, J. (1981). Maintenance of configurations in the plane. *Journal of Computer and System Sciences*, 23(2):166–204.

- PEGNA, J. et GUO, C. (1998). Computational metrology of the circle. *In Computer graphics international*, pages 350–363.
- PHAM, S. (1992). Digital circles with non-lattice point centers. *The Visual Computer*, 9(1):1–24.
- PIRZADEH, H. (1999). Computational geometry with the rotating calipers. Mémoire de D.E.A., McGill University.
- PREPARATA, F. P. (1979). An optimal real-time algorithm for planar convex hulls. *Communications of the ACM*, 22(7):402–405.
- PREPARATA, F. P. et SHAMOS, M. I. (1985). *Computational geometry : an introduction*. Springer.
- PROVENCAL, X. et LACHAUD, J.-O. (2009). Two linear-time algorithms for computing the minimum length polygon of a digital contour. *In 15-th IAPR International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery*, volume 5810 de *Lecture Notes on Computer Science*, pages 104–117. Springer.
- REVEILLÈS, J.-P. (1991). *Géométrie Discrète, calculs en nombres entiers et algorithmique*. Thèse d'état, Université Louis Pasteur.
- RITTER, N. et COOPER, J. (2009). New resolution independent measures of circularity. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 35(3):117–127.
- RIVLIN, T. J. (1979). Approximation by circles. *Computing*, 21:93–104.
- RONSE, C. (1985). Definition of convexity and convex hulls in digital images. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society*, 37(2):71–85.
- RONSE, C. (1989). A bibliography on digital and computational convexity (1961-1988). *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11(2):181–190.
- ROSENFELD, A. (1970). Connectivity in digital pictures. *Journal of the ACM*, 17(1):146–160.
- ROSENFELD, A. (1974). Digital straight line segments. *IEEE Transactions on Computers*, 23(12):1264–1269.
- ROY, U. et ZHANG, X. (1992). Establishment of a pair of concentric circles with the minimum radial separation for assessing roundness error. *Computer Aided Design*, 24(3):161–168.
- SAUER, P. (1993). On the recognition of digital circles in linear time. *Computational Geometry*, 2(5):287–302.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- SCHRIJVER, A. (1986). *Theory of linear and integer programming*. John Wiley & Sons, Inc.
- SHAKARJI, C. M. et CLEMENT, A. (2004). Reference algorithms for chebyshev and one-sided data fitting for coordinate metrology. *CIRP Annals - Manufacturing Technology*, 53(1):439–442.
- SHAMOS, M. I. (1978). *Computational Geometry*. Thèse de doctorat, Yale University.
- SHLIEN, S. (1983). Segmentation of digital curves using linguistic techniques. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 22(2):277–286.
- SKLANSKY, J. (1970). Recognition of convex blobs. *Pattern Recognition*, 2(1):3–10.
- SKLANSKY, J. (1972). Measuring concavity on a rectangular mosaic. *IEEE Transactions on Computers*, 21(12):1355–1364.
- SKLANSKY, J., CHAZIN, R. L. et HANSEN, B. J. (1972). Minimum-perimeter polygons of digitized silhouettes. *IEEE Transactions on Computers*, 21(3):260–268.
- SLOBODA, F., ZATKO, B. et STOER, J. (1998). On Approximation of planar one-dimensional continua. In KLETTE, R., ROSENFELD, A. et SLOBODA, F., éditeurs : *Advances in digital and computational geometry*, pages 113–160. Springer.
- SWANSON, K., LEE, D. T. et WU, V.-C. L. (1995). An optimal algorithm for roundness determination on convex polygons. *Computational Geometry*, 5(4):225–235.
- THOMAS, S. M. et CHAN, Y. T. (1989). A simple approach to the estimation of circular arc center and its radius. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 45(3):362–370.
- TOUSSAINT, G. T. (1983). Solving geometric problems with the rotating calipers. In *Second Mediterranean Electrotechnical Conference*, pages A10.02/1–4.
- TOUSSAINT, G. T. (1985). A simple linear algorithm for intersecting convex polygons. *The Visual Computer*, 1(2):118–123.
- TROESCH, A. (1993). Interprétation géométrique de l’algorithme d’euclide et reconnaissance de segments. *Theoretical Computer Science*, 115(2):291–319.
- VEELAERT, P. (1999). Geometric constructions in the digital plane. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 11(2):99–118.
- VOSS, K. (1991). Coding of digital straight lines by continued fractions. *Computers and Artificial Intelligence*, 10(1):75–80.
- WORRING, M. et SMEULDERS, A. W. M. (1995). Digitized circular arcs: characterization and parameter estimation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 17(6):554–556.

WU, L.-D. (1982). On the chain code of a line. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 4(3):347–353.

YUAN, J. et SUEN, C. Y. (1995). An optimal  $\mathcal{O}(n)$  algorithm for identifying line segments from a sequence of chain codes. *Pattern Recognition*, 28(5):635–646.

---

## Forme des particules sédimentaires

---

BUNTE, K. et ABT, S. (2001). Sampling surface and subsurface particle-size distributions in wadable gravel- and cobble-bed streams for analyses of sediment transport, hydraulics, and streambed monitoring. Rapport technique, Fort Collins, CO: U.S. Department of Agriculture, Forest Service, Rocky Mountain Research Station.

COTTED, M. L. (2006). Mesure et structures spatiales et temporelles de l'émoissé des galets dans le réseau hydrographique du bez. Rapport technique, Université Jean Moulin Lyon 3.

DIEPENBROEK, M., BARTHOLOMÄ, A. et IBBEKEN, H. (1992). How round is round? a new approach to the topic 'roundness' by fourier grain shape analysis. *Sedimentology*, 39(3):411–422.

DREVIN, G. R. et VINCENT, L. (2002). Granulometric determination of sedimentary rock particle roundness. In *International Symposium on Mathematical Morphology*, pages 315–325.

HAYAKAWA, Y. et OGUCHI, T. (2005). Evaluation of gravel sphericity and roundness based on surface-area measurement with a laser scanner. *Computers Geosciences*, 31(5):735–741.

KRUMBEIN, W. C. (1941). Measurement and geological significance of shape and roundness of sedimentary particles. *Journal of Sedimentary Petrology*, 11(2):64–72.

PISSART, A., DUCHESNE, F. et VANBRABANT, C. (1998). La détermination pratique des intervalles de confiance des comptages de cailloux et des mesures d'émoissé. Comparaison des mesures d'émoissé de Cailleux et de Krumbein. *Géomorphologie : relief, processus, environnement*, 3:195–214.

WADELL, H. (1932). Volume, shape, and roundness of rock particles. *Journal of Geology*, 40:443–451.



---

## Publications

---

- ROUSSILLON, T., PIÉGAY, H., SIVIGNON, I., TOUGNE, L. et LAVIGNE, F. (2009a). Automatic computation of pebble roundness using digital imagery and discrete geometry. *Computers & Geosciences*, 35:1992–2000.
- ROUSSILLON, T., SIVIGNON, I. et TOUGNE, L. (2007). Computation of binary objects sides number using discrete geometry, application to automatic pebbles shape analysis. *In 14-th IEEE International Conference on Image Analysis and Processing (ICIAP 2007)*, pages 763–768. IEEE Computer Society.
- ROUSSILLON, T., SIVIGNON, I. et TOUGNE, L. (2008a). Robust decomposition of a digital curve into convex and concave parts. *In 19-th IAPR International Conference on Pattern Recognition (ICPR'08)*.
- ROUSSILLON, T., SIVIGNON, I. et TOUGNE, L. (2008b). Test and measure of circularity for digital curves. *In The 2008 International Conference on Image Processing, Computer Vision, and Pattern Recognition (ICCV'08)*.
- ROUSSILLON, T., SIVIGNON, I. et TOUGNE, L. (2009b). On three constrained versions of the digital circular arc recognition problem. *In 15-th IAPR International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI'09)*, LNCS. Springer.
- ROUSSILLON, T., SIVIGNON, I. et TOUGNE, L. (2009c). What does digital straightness tell about digital convexity. *In 13-th International Workshop on Combinatorial Image Analysis (IWCIA'09)*, LNCS. Springer.
- ROUSSILLON, T., SIVIGNON, I. et TOUGNE, L. (2010). A measure of circularity for parts of digital boundary and its fast computation. *Pattern Recognition*, 43(1):37–46.