Rationalisation de bases de croyances pour la fusion en logique propositionnelle

Sébastien Konieczny, Pierre Marquis, Nicolas Schwind

CRIL - CNRS
Université d'Artois
Lens, France
{konieczny,marquis,schwind}@cril.fr

Résumé :
Les opérateurs de fusion de bases de croyances prennent typiquement en compte l'ensemble des modèles de chacune des bases, y compris ceux qui contredisent les contraintes d'intégrité. Dans cet article, nous montrons qu'un tel choix n'est pas adapté à toutes les applications. Nous introduisons la notion de « rationalisation » des bases par rapport aux contraintes d'intégrité. Nous définissons formellement une condition d'indépendance des opérateurs de fusion à différentes formes de rationalisation et nous montrons comment ces conditions interagissent avec les postulats IC standard pour la fusion de croyances. En particulier, nous donnons une caractérisation axiomatique d'un opérateur de fusion satisfaisant un critère d'indépendance à la rationalisation des bases et qui satisfait aussi l'ensemble des postulats IC.

1 Introduction

Les opérateurs de fusion de croyances (Konieczny & Pino Pérez, 2011; Revesz, 1997; Lin, 1996; Liberatore & Schaerf, 1998; Konieczny & Pino Pérez, 2002; Konieczny *et al.*, 2004) ont pour but de définir les croyances d'un groupe d'agents, étant données les croyances de chacun. Des contraintes d'intégrité, représentant des lois physiques ou des normes, sont souvent exploitées lors du processus de fusion. Fusionner des bases de croyances sous contraintes d'intégrité n'est pas trivial. Il existe en effet plusieurs manières de procéder, plus ou moins « rationnelles ». Une caractérisation logique des opérateurs de fusion « raisonnables », exprimée sous la forme d'un ensemble de postulats de rationalité, a été proposée dans la littérature (Konieczny & Pino Pérez, 2002) : les postulats IC. Ces postulats décrivent un ensemble de propriétés logiques que les opérateurs de fusion devraient satisfaire. De tels opérateurs sont appelés opérateurs de fusion IC.

Les opérateurs de fusion de bases de croyances existants prennent typiquement en compte l'ensemble des modèles de chacune des bases, y compris ceux qui contredisent les contraintes d'intégrité. Un tel choix n'est cependant pas adapté à toutes les applications. En particulier, lorsque les contraintes d'intégrité représentent une connaissance

certaine et indéniable à propos du monde (par exemple, des lois physiques), l'utilisation dans le processus de fusion de modèles « incorrects » (i.e., ne satisfaisant pas les contraintes d'intégrité) doit être remise en question. Par exemple, Condotta *et al.* (2009) ont récemment proposé un cadre de fusion d'informations spatiales ou temporelles qualitatives exprimées en logique propositionnelle, dans lequel les contraintes d'intégrité sont utilisées pour encoder les lois spatiales ou temporelles. Ainsi, les modèles « non réalisables » (par exemple, un modèle représentant un ensemble de trois instants t_1, t_2, t_3 de la droite et tel que $t_1 < t_2 < t_3 < t_1$) ne doivent pas être considérés dans le processus de fusion, au sens où ils ne doivent avoir aucun impact sur la base spatiale ou temporelle résultante.

Illustrons le problème à travers un exemple simple. Considérons la situation suivante, où une pièce est munie d'une ampoule électrique et de deux interrupteurs. L'ampoule électrique est allumée uniquement lorsque que les deux interrupteurs sont dans la même position (soit « on », soit « off »). L'ampoule est actuellement allumée. La position de chacun des interrupteurs est inconnue, et l'information disponible à leur sujet est contradictoire : une source d'information prétend que le premier interrupteur est en position « off », alors qu'une autre source d'information prétend que les deux interrupteurs sont en position « on ». Que peut-on déduire de ces informations ?

La réponse à cette question dépend de l'opérateur de fusion utilisé. Considérons par exemple l'opérateur de fusion IC basé sur la distance de Hamming et la somme comme fonction d'agrégation ($\Delta^{d_H,\Sigma}$) ; selon cet opérateur, les modèles de la base fusionnée représentant les croyances du groupe correspondent aux modèles des contraintes d'intégrité les plus proches du profil formé des deux sources d'information, où la distance entre deux modèles est égale au nombre de propositions atomiques sur lesquels ils diffèrent. Deux modèles sont compatibles avec les contraintes d'intégrité, 00 (les deux interrupteurs sont en position « off ») et 11 (les deux interrupteurs sont en position « on »). 00 est à une distance de 0 de la première source (c'est un modèle de la base de croyances correspondante) et à une distance de 2 de la deuxième source. 11 est à une distance de 1 de la première source (puisque pour ce modèle, seul le fait que le deuxième interrupteur est en position « on » contredit l'information fournie par la première source) et à une distance de 0 de la deuxième source. En utilisant la somme comme fonction d'agrégation, seul le deuxième modèle (11) résulte du processus de fusion. Ainsi, les croyances du groupe correspondent au fait que les deux interrupteurs sont en position « on ».

Cependant, le fait que le modèle 11 est à une distance de 1 de la première source provient seulement du fait qu'il est à une distance 1 du modèle 01 de cette source, alors que 01 ne correspond pas à un monde réalisable étant donné les contraintes d'intégrité. Il est alors raisonnable de disqualifier un tel modèle. Si l'on considère à présent que la première source d'information a prétendu que les deux interrupteurs sont en position « off » (l'unique modèle compatible avec ses croyances et les contraintes d'intégrité), alors en utilisant le même opérateur de fusion, il résulte de la base fusionnée le fait que les deux interrupteurs sont soit tous les deux en position « on », soit tous les deux en position « off ». Ce résultat est plus satisfaisant puisqu'il n'y a pas de raison de donner plus de crédit au modèle 11 qu'au modèle 00 lorsqu'une source établit finalement 00 tandis que l'autre établit 11.

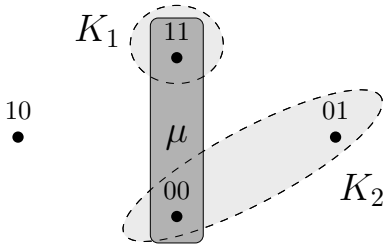

FIGURE 1 – Représentation graphique des contraintes d'intégrité μ et des deux sources (K_1 et K_2).

Cet exemple simple montre que certains opérateurs de fusion IC permettent aux mondes « impossibles » (i.e., ne satisfaisant pas les contraintes d'intégrité) de jouer un rôle dans le processus de fusion, autrement dit d'avoir un impact sur la base fusionnée résultante. Il convient donc de définir une nouvelle propriété pour les opérateurs de fusion, ayant pour but d'imposer à l'opérateur de retourner une base fusionnée équivalente à la base obtenue si chacune des bases initiales est préalablement « rationalisée » par rapport aux contraintes d'intégrité.

Dans la suite, nous proposons trois postulats d'indépendance correspondant à différents principes de rationalisation, et nous étudions la manière dont ces postulats interagissent avec les postulats IC standard pour la fusion de croyances.

Le reste de l'article est organisé comme suit. Dans la section 2, nous introduisons quelques notations et rappelons quelques définitions et résultats concernant les opérateurs de fusion IC. Dans la section 3, nous proposons une définition formelle des propriétés d'indépendance et donnons quelques résultats concernant ces propriétés. Dans la section 4, nous donnons une caractérisation axiomatique de l'opérateur de fusion basé sur la distance drastique et la fonction d'agrégation « somme » ($\Delta^{d_D,\Sigma}$), en termes d'indépendance à la rationalisation des bases. Enfin, nous concluons dans la section 5. Les preuves des propositions sont fournies en annexe.

2 Préliminaires

On considère un langage propositionnel $\mathcal{L}$ défini à partir d'un ensemble fini de variables propositionnelles $\mathcal{P}$ et des connecteurs logiques usuels. $\bot$ (respectivement, $\top$) est la constante booléenne faux (respectivement, vrai).

Une interprétation (ou monde) est une application de $\mathcal{P}$ dans $\{0, 1\}$. L'ensemble des interprétations est noté $\mathcal{W}$. Une interprétation I est un modèle d'une formule $\phi \in \mathcal{L}$, noté $I \models \phi$, si et seulement si elle rend la formule vraie. $mod(\phi)$ dénote l'ensemble des modèles d'une formule ϕ, i.e., $mod(\phi) = \{I \in \mathcal{W} \mid I \models \phi\}$. Soit M un ensemble d'interprétations ; φ_M dénote une formule de $\mathcal{L}$ dont l'ensemble des modèles est M.

Les *contraintes d'intégrité* μ sont représentées par une formule. Une *base* K dénote l'ensemble des croyances d'un agent, c'est un ensemble fini de formules propositionnelles interprétées conjonctivement, ainsi K est identifié à la conjonction de ses éléments.

Un *profil* $\overline{\mathcal{K}} = \langle 1, \ldots, n \rangle$ est un vecteur d'agents impliqués dans un processus de fusion. Un *profil de croyances* $\mathcal{K} = \langle K_1, \ldots, K_n \rangle$ est un vecteur de bases, la base K_i représentant les croyances de l'agent i. Lorsque cela n'est pas nécessaire, on ne fera pas de distinction entre les notions de profil et de profil de croyances, i.e., chaque base est identifiée comme l'agent fournissant cette base, et le terme « profil » sera préféré à « profil de croyances ».

Dans le cadre de ce papier, les agents jouent des rôles équivalents dans le processus de fusion, ainsi un profil $\mathcal{K} = \langle K_1, \ldots, K_n \rangle$ est vu de manière équivalente comme un multi-ensemble $\{K_1, \ldots, K_n\}$. Un profil est dit p-cohérent si toutes les bases du profil sont cohérentes (cette hypothèse est standard mais elle n'est pas admise de manière systématique dans cet article). $\sqcup$ dénote l'union multi-ensembliste et $\equiv$ l'équivalence entre les profils (deux profils de croyances sont équivalents lorsqu'il existe une bijection entre ces deux profils de telle sorte que chaque base du premier profil soit équivalente à son image dans le second profil). $\mathcal{K}^n$ dénote le multi-ensemble où $\mathcal{K}$ apparaît n fois, i.e., $\mathcal{K}^n = \underbrace{\mathcal{K} \sqcup \ldots \sqcup \mathcal{K}}_{n}$. $\bigwedge \mathcal{K}$ dénote la conjonction des bases de croyances de $\mathcal{K}$, i.e., $\bigwedge \mathcal{K} = \bigwedge \{K_i \mid K_i \in \mathcal{K}\}$. Enfin, on note $I \models \mathcal{K}$ lorsque $I \models \bigwedge \mathcal{K}$.

Exemple 1
L'exemple décrit dans l'introduction peut être formalisé de la manière suivante : on a $\mathcal{P} = \{on_s_1, on_s_2\}$ *(où* on_s_1 *(respectivement,* on_s_2*) représente le fait que « le premier interrupteur (respectivement, le second) est en position on ») ;* $\mathcal{K} = \langle K_1, K_2 \rangle$*, avec* $K_1 = \{\neg on_s_1\}$*,* $K_2 = \{on_s_1 \wedge on_s_2\}$ *;* $\mu = on_s_1 \leftrightarrow on_s_2$*.*

Un opérateur de fusion Δ est une application qui associe à une formule μ et un profil $\mathcal{K}$ une nouvelle base $\Delta_\mu(\mathcal{K})$. Nous rappelons à présent les propriétés logiques standard qui décrivent le comportement rationnel d'un opérateur de fusion (Konieczny & Pino Pérez, 2002) :

Définition 1 (Opérateur de fusion IC)
Un opérateur de fusion Δ *est un* opérateur de fusion IC *ssi pour toute formule* μ, μ_1, μ_2*, pour tout profil p-cohérent* $\mathcal{K}, \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ *et pour toute base de croyances cohérente* K_1*,* K_2*, il satisfait les postulats suivants :*

(IC0) $\Delta_\mu(\mathcal{K}) \models \mu$ *;*

(IC1) *Si* μ *est cohérente, alors* $\Delta_\mu(\mathcal{K})$ *est cohérente ;*

(IC2) *Si* $\bigwedge \mathcal{K} \wedge \mu$ *est cohérente, alors* $\Delta_\mu(\mathcal{K}) \equiv \bigwedge \mathcal{K} \wedge \mu$ *;*

(IC3) *Si* $\mathcal{K}_1 \equiv \mathcal{K}_2$ *et* $\mu_1 \equiv \mu_2$*, alors* $\Delta_{\mu_1}(\mathcal{K}_1) \equiv \Delta_{\mu_2}(\mathcal{K}_2)$ *;*

(IC4) *Si* $K_1 \models \mu$*,* $K_2 \models \mu$ *et* $\Delta_\mu(\{K_1, K_2\}) \wedge K_1$ *est cohérente, alors* $\Delta_\mu(\{K_1, K_2\}) \wedge K_2$ *est cohérente ;*

(IC5) $\Delta_\mu(\mathcal{K}_1) \wedge \Delta_\mu(\mathcal{K}_2) \models \Delta_\mu(\mathcal{K}_1 \sqcup \mathcal{K}_2)$ *;*

(IC6) *Si* $\Delta_\mu(\mathcal{K}_1) \wedge \Delta_\mu(\mathcal{K}_2)$ *est cohérente, alors* $\Delta_\mu(\mathcal{K}_1 \sqcup \mathcal{K}_2) \models \Delta_\mu(\mathcal{K}_1) \wedge \Delta_\mu(\mathcal{K}_2)$ *;*

(IC7) $\Delta_{\mu_1}(\mathcal{K}) \wedge \mu_2 \models \Delta_{\mu_1 \wedge \mu_2}(\mathcal{K})$ *;*

(IC8) *Si* $\Delta_{\mu_1}(\mathcal{K}) \wedge \mu_2$ *est cohérente, alors* $\Delta_{\mu_1 \wedge \mu_2}(\mathcal{K}) \models \Delta_{\mu_1}(\mathcal{K}) \wedge \mu_2$*.*

Remarquons que les opérateurs de fusion IC considèrent qu'une base incohérente ne fournit aucune information dans le processus de fusion (Konieczny & Pino Pérez, 2002), c'est pourquoi les profils considérés en entrée de tels opérateurs sont supposés p-cohérents.

Un opérateur de fusion IC correspond à un assignement syncrétique (Konieczny & Pino Pérez, 2002) :

Définition 2 (Assignement syncrétique)
Un assignement syncrétique *est une application qui associe à tout profil p-cohérent $\mathcal{K}$ un préordre $\leq_{\mathcal{K}}$ sur les interprétations*[1] *et telle que pour tout profil p-cohérent $\mathcal{K}, \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ et pour toute base de croyances cohérente $K_1, K_2, \leq_{\mathcal{K}}$ satisfait les conditions suivantes :*

(1) *Si $I \models \mathcal{K}$ et $J \models \mathcal{K}$, alors $I \simeq_{\mathcal{K}} J$;*

(2) *Si $I \models \mathcal{K}$ et $J \not\models \mathcal{K}$, alors $I <_{\mathcal{K}} J$;*

(3) *Si $\mathcal{K}_1 \equiv \mathcal{K}_2$, alors $\leq_{\mathcal{K}_1} = \leq_{\mathcal{K}_2}$;*

(4) *Si $\forall I \models K_1$, alors $\exists J \models K_2$ $J \leq_{\langle K_1, K_2 \rangle} I$;*

(5) *Si $I \leq_{\mathcal{K}_1} J$ et $I \leq_{\mathcal{K}_2} J$, alors $I \leq_{\mathcal{K}_1 \sqcup \mathcal{K}_2} J$;*

(6) *Si $I <_{\mathcal{K}_1} J$ et $I \leq_{\mathcal{K}_2} J$, alors $I <_{\mathcal{K}_1 \sqcup \mathcal{K}_2} J$.*

Théorème 1 (Konieczny & Pino Pérez (2002))
Un opérateur de fusion Δ est un opérateur de fusion IC ssi il existe un assignement syncrétique qui associe à tout profil p-cohérent $\mathcal{K}$ un préordre total $\leq_{\mathcal{K}}$ tel que pour toute formule μ, $mod(\Delta_\mu(\mathcal{K})) = \min(mod(\mu), \leq_{\mathcal{K}})$.

Plusieurs familles d'opérateurs de fusion peuvent être définies, en particuliers des opérateurs de fusion à base de distances, i.e., des opérateurs caractérisés par une distance entre interprétations et par une fonction d'agrégation f (une application qui associe à un vecteur de nombres réels positifs un nombre réel positif) (Konieczny *et al.*, 2004) :

Définition 3 (Opérateur de fusion à base de distances)
Soit d une distance entre interprétations et f une fonction d'agrégation. L'opérateur de fusion $\Delta^{d,f}$ est défini pour tout profil $\mathcal{K}$ et toute formule μ par $mod(\Delta^{d,f}_\mu(\mathcal{K})) = \min(mod(\mu), \leq_{\mathcal{K}})$ où le préordre $\leq_{\mathcal{K}}$ est défini par :

- *$I \leq_{\mathcal{K}} J$ si et seulement si $d(I, \mathcal{K}) \leq d(J, \mathcal{K})$,*
- *$d(I, \mathcal{K}) = f_{K \in \mathcal{K}}(d(I, K))$,*
- $d(I, K) = \begin{cases} min_{J \models K} d(I, J) & \text{Si } K \text{ est cohérente}^2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. Pour tout préordre $\leq_{\mathcal{K}}, \simeq_{\mathcal{K}}$ dénote la relation d'indifférence correspondante et $<_{\mathcal{K}}$ l'ordre strict correspondant. Lorsqu'un profil $\mathcal{K}$ n'est formé que d'une seule base K, on écrit $\leq_K$ plutôt que $\leq_{\langle K \rangle}$ pour des raisons de clarté de notation.

2. Typiquement, les opérateurs de fusion à base de distances sont appliqués à des profils p-cohérents, ainsi K est supposée cohérente. Ici, lorsque K est incohérente, on définit $d(I, K) = 0$.

Parmi les distances usuelles, on trouve d_D, la distance drastique ($d_D(I, J) = 0$ si $I = J$ et 1 sinon), et d_H la distance de Hamming ($d_D(I, J) = n$ si I et J diffèrent sur n variables). Notons que certains opérateurs à base de distances ne sont pas des opérateurs de fusion IC (pour assurer cela, certaines conditions doivent être vérifiées par f, voir (Konieczny *et al.*, 2004)). Néanmoins, le choix d'une fonction d'agrégation usuelle telle que Σ, $Gmax$ $(leximax)$, etc. induit un opérateur de fusion IC.

Les opérateurs de fusion de croyances sont étroitement liés aux opérateurs de révision de croyances (Alchourrón *et al.*, 1985). Si Δ est un opérateur de fusion IC, alors on peut l'associer à un opérateur de révision AGM $\circ_\Delta$:

Définition 4 ($\circ_\Delta$)
Soit Δ un opérateur de fusion. L'opérateur de révision qui lui correspond, noté $\circ_\Delta$, est défini par

$$K \circ_\Delta \mu = \Delta_\mu(\langle K \rangle).$$

Théorème 2 ((Konieczny & Pino Pérez, 2002))
Si Δ est un opérateur de fusion IC (i.e., il satisfait (IC0-IC8)), alors $\circ_\Delta$ est un opérateur de révision (i.e., il satisfait (R1-R6) (Katsuno & Mendelzon, 1991b)).

3 Indépendance à la rationalisation

Rationaliser une base de croyances par rapport à des contraintes d'intégrité consiste à modifier cette base de telle sorte à ce que ses modèles correspondent à des mondes « réalisables », i.e., à des modèles des contraintes d'intégrité. La première version de rationalisation d'une base que nous introduisons est la rationalisation par expansion. Elle induit le postulat d'indépendance suivant :

Définition 5 ((Ind))
Un opérateur de fusion Δ satisfait (Ind) ssi pour toute formule μ et pour tout profil $\langle K_1, \ldots, K_n \rangle$, $\Delta_\mu(\langle K_1, \ldots, K_n \rangle) \equiv \Delta_\mu(\langle K_1 \wedge \mu, \ldots, K_n \wedge \mu \rangle)$.

Ce postulat impose que la base résultant de la fusion d'un profil doit être équivalente à la base résultant de la fusion du profil obtenu en ayant retiré de chacune de ses bases tout modèle ne satisfaisant pas les contraintes d'intégrité (i.e., chaque base est interprétée en conjonction avec les contraintes d'intégrité).

L'exemple 1 montre que certains opérateurs de fusion IC ne satisfont pas ce postulat :

Exemple 1 (suite)
$\Delta^{d_H,\Sigma}$ ne satisfait pas (Ind). En effet, $\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}(\langle K_1, K_2 \rangle) \not\equiv \Delta_\mu^{d_H,\Sigma}(\langle K_1 \wedge \mu, K_2 \wedge \mu \rangle)$:
- $\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}(\langle K_1, K_2 \rangle) \equiv on_s_1 \wedge on_s_2$;
- $\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}(\langle K_1 \wedge \mu, K_2 \wedge \mu \rangle) \equiv on_s_1 \leftrightarrow on_s_2$.

(Ind) est proche de la condition d'indépendance aux alternatives non pertinentes (IIA) en théorie du choix social (Arrow, 1963; Arrow *et al.*, 2002) pour l'agrégation de relations de préférences. (IIA) impose que le choix (global) entre deux alternatives ne doit

dépendre que de la préférence de chacun des agents à propos de ces deux alternatives uniquement, indépendamment des autres alternatives. En termes de vote, (IIA) peut être exprimé comme le fait que deux profils de préférences qui coïncident lorsqu'ils sont projetés sur un agenda donné doivent conduire à l'élection du même candidat (Kelly, 1978). Dans notre cadre de fusion de croyances, l'ensemble des modèles des contraintes d'intégrité joue le rôle de l'agenda dans le cadre du vote. Par conséquent, la condition (IIA) peut être exprimée dans le cadre de la fusion de croyances comme suit :

Définition 6 (IIA)
Un opérateur de fusion Δ satisfait (IIA) ssi pour toute formule μ et pour tout profil $\langle K_1, \ldots, K_n \rangle, \langle K'_1, \ldots, K'_n \rangle$: si $\langle K_1 \wedge \mu, \ldots, K_n \wedge \mu \rangle \equiv \langle K'_1 \wedge \mu, \ldots, K'_n \wedge \mu \rangle$, alors $\Delta_\mu(\langle K_1, \ldots, K_n \rangle) \equiv \Delta_\mu(\langle K'_1, \ldots, K'_n \rangle)$.

Intuitivement, la condition (IIA) est proche de la condition (Ind). Formellement on montre qu'elles sont « presque équivalentes » :

Proposition 1
Δ satisfait (IIA) ssi Δ satisfait (Ind) et (IC3).

Lorsqu'une base de croyances est incohérente avec les contraintes d'intégrité, sa rationalisation par expansion produit une base incohérente, ce qui est problématique puisque les opérateurs de fusion IC ne considèrent que des profils p-cohérents en entrée. Pour pallier le problème, nous proposons d'étendre l'ensemble des postulats IC à un postulat supplémentaire :

Définition 7 (Opérateur de fusion EIC)
Un opérateur de fusion Δ est un opérateur de fusion EIC (pour opérateur de fusion IC Étendu) ssi pour toute formule μ, pour tout profil[3] $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ et pour toute base de croyances cohérente K_1, K_2, pour tout $n > 0$, les postulats (IC0)-(IC8) ainsi que le postulat suivant sont satisfaits :

(Inc) $\Delta_\mu(\langle \bot \rangle^n) \equiv \mu$.

Selon (Inc), de la fusion de profils « triviaux » formés de bases incohérentes doit résulter une base équivalente aux contraintes d'intégrité elles-mêmes. On peut facilement montrer que (Inc) est satisfait par tout opérateur de fusion à base de distances (cf. définition 3).

La condition (Inc) est donnée dans la définition 7 sous une forme canonique, au sens où elle décrit le comportement d'un opérateur de fusion pour les profils triviaux, mais elle ne dit rien explicitement lorsque certaines bases du profil considéré (et pas forcément toutes) sont incohérentes. Néanmoins, on peut montrer que les opérateurs de fusion vérifiant (Inc) et certains postulats (IC) (en particulier, les opérateurs de fusion (EIC) appliqués à tout profil) renvoient une base fusionnée équivalente à celle obtenue en retirant du profil les bases incohérentes. Formellement :

3. Notons que contrairement à ce qui est requis dans la définition des opérateurs de fusion IC usuels (définition 1), la p-cohérence des profils n'est pas exigée ici.

Proposition 2
Soit Δ un opérateur de fusion vérifiant (Inc), (IC0), (IC1), (IC5) et (IC6). Pour tout profil p-cohérent $\mathcal{K}$, pour toute formule μ et pour tout $m > 0$,

$$\Delta_\mu(\mathcal{K} \sqcup \langle\bot\rangle^m) \equiv \Delta_\mu(\mathcal{K}).$$

Afin de dériver un théorème de représentation pour les opérateurs EIC, nous définissons maintenant un nouveau type d'assignement :

Définition 8 (Assignement syncrétique étendu)

Un assignement syncrétique étendu *est une application qui associe à tout profil $\mathcal{K}$ un préordre $\leq_\mathcal{K}$ sur les interprétations qui satisfait les conditions (1) - (6) (cf. définition 2) et la condition supplémentaire suivante, pour tout $n > 0$:*

(0) $I \simeq_{\langle\bot\rangle^n} J$.

Ainsi, le théorème de représentation standard pour les opérateurs de fusion IC peut être étendu aux opérateurs de fusion EIC :

Proposition 3
Un opérateur de fusion Δ est un opérateur de fusion EIC ssi il existe un assignement syncrétique étendu qui associe à tout profil $\mathcal{K}$ un préordre total $\leq_\mathcal{K}$ tel que pour toute formule μ, $mod(\Delta_\mu(\mathcal{K})) = \min(mod(\mu), \leq_\mathcal{K})$.

On vérifie facilement que tout opérateur de fusion à base de distances qui est un opérateur de fusion IC est également un opérateur de fusion EIC.

Revenons maintenant au problème d'indépendance. Imposer (Ind) pour un opérateur de fusion peut être considéré comme trop restrictif, étant donné l'aspect relativement drastique du processus de rationalisation correspondant. En effet, d'après la proposition 2, fusionner un profil contenant une base de croyances dont aucun modèle ne satisfait les contraintes d'intégrité peut être réalisé en supprimant la base du profil en amont du processus de fusion. De manière plus parcimonieuse, plutôt que de retirer de telles bases du profil, on pourrait les « réparer ». Dans cette optique, certains opérateurs de changement de croyances peuvent être exploités dans le but de calculer, pour chaque base incohérente avec μ, la base la plus « proche » pleinement compatible avec μ.

Un choix naturel est d'utiliser un opérateur de révision (Alchourrón *et al.*, 1985; Katsuno & Mendelzon, 1991b) lorsque l'on veut « réparer » les bases de manière globale et un opérateur de mise à jour (Katsuno & Mendelzon, 1991a) lorsque l'on veut « réparer » les bases de manière locale, modèle par modèle. Les propriétés d'indépendance correspondantes sont données comme suit[4] :

Définition 9
(Ind-$\circ$) *Un opérateur de fusion Δ satisfait (Ind-$\circ$) ssi l'on peut associer à chaque agent i un opérateur de révision AGM $\circ_i$ (Katsuno & Mendelzon, 1991b) tel que pour toute*

4. Rappelons que chacune des bases K_i du profil correspond aux croyances de l'agent i.

formule μ et pour tout profil $\langle K_1, \ldots, K_n \rangle$,

$$\Delta_\mu(\langle K_1, \ldots, K_n \rangle) \equiv \Delta_\mu(\langle K_1 \circ_1 \mu, \ldots, K_n \circ_n \mu \rangle).$$

Définition 10
(Ind-$\diamond$) *Un opérateur de fusion Δ satisfait (Ind-$\diamond$) ssi l'on peut associer à chaque agent i un opérateur de mise à jour KM $\diamond_i$ (Katsuno & Mendelzon, 1991a) tel que pour toute formule μ et pour tout profil $\langle K_1, \ldots, K_n \rangle$,*

$$\Delta_\mu(\langle K_1, \ldots, K_n \rangle) \equiv \Delta_\mu(\langle K_1 \diamond_1 \mu, \ldots, K_n \diamond_n \mu \rangle).$$

Nous pouvons remarquer que dans les définitions 9 et 10, aucun lien n'est imposé entre les opérateurs « rationalisants » $\circ_i$ ou $\diamond_i$ et l'opérateur de fusion Δ en question. En outre, aucune condition d'homogénéïté n'est imposée, ainsi les agents fournissant les bases peuvent avoir des politiques de révision ou de mise à jour différentes. Ainsi, ces propriétés d'indépendance sont assez permissives.

Pourtant, il s'avère qu'il n'existe pas d'opérateur de fusion EIC qui satisfait (Ind-$\diamond$). En effet, la proposition suivante montre que pour les opérateurs de fusion EIC, la propriété d'indépendance à la rationalisation par mise à jour n'est pas compatible avec les postulats IC les plus fondamentaux.

Proposition 4
Il n'existe aucun opérateur de fusion vérifiant (IC0), (IC1), (IC2) et (Ind-$\diamond$).

D'autre part, les postulats (Ind) et (Ind-$\circ$) sont compatibles avec l'ensemble des postulats IC :

Proposition 5
Pour toute fonction d'agrégation f, $\Delta^{d_D,f}$ satisfait (Ind) et (Ind-$\circ$).

En particulier, puisque $\Delta^{d_D,\Sigma}$ est un opérateur de fusion IC (Konieczny & Pino Pérez, 2002) et puisqu'il vérifie (Inc), on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 1
$\Delta^{d_D,\Sigma}$ est un opérateur de fusion EIC vérifiant (Ind) et (Ind-$\circ$).

Une problématique intéressante consiste alors à déterminer l'ensemble des opérateurs de révision AGM « rationalisants » pouvant être choisis de sorte à ce que le postulat (Ind-$\circ$) soit satisfait. Il s'avère que ce choix se restreint à un seul opérateur de révision AGM :

Proposition 6
Soit Δ un opérateur de fusion EIC vérifiant (Ind-$\circ$). Tout opérateur de révision « rationalisant » $\circ_i$ considéré dans (Ind-$\circ$) est l'opérateur de révision $\circ_\Delta$ correspondant à Δ

au sens de la définition 4. De plus, $\circ_\Delta$ est $\circ^D$, l'opérateur de révision drastique, défini comme suit :

$$K \circ^D \mu = \begin{cases} K \wedge \mu & \text{si } K \wedge \mu \text{ est cohérent,} \\ \mu & \text{sinon.} \end{cases}$$

Une conséquence importante de cette proposition est le corollaire suivant :

Corollaire 2
Soit Δ un opérateur de fusion EIC. Δ satisfait (Ind) si et seulement si Δ satisfait (Ind-$\circ$).

Ce dernier résultat montre que pour les opérateurs de fusion EIC, les deux notions d'indépendance (Ind) et (Ind-$\circ$) coïncident. C'est pour cette raison que nous nous focalisons uniquement sur (Ind), dans le reste de l'article.

4 Une caractérisation de l'opérateur de fusion $\Delta^{d_D,\Sigma}$

Le corollaire 1 indique que l'ensemble des opérateurs EIC n'est pas vide puisqu'il contient l'opérateur $\Delta^{d_D,\Sigma}$.

La question qui se pose alors naturellement est la suivante : quels sont exactement les opérateurs EIC (pas forcément à base de distances) qui satisfont (Ind) ? Dans la suite, on donne un théorème de représentation qui répond à cette question.

Définition 11 (Assignement filtrant)
Un assignement filtrant *est un assignement syncrétique étendu vérifiant la condition suivante, pour toute base de croyances K_1, K_2 :*

(F) *Si $I <_{K_1} J$ et $J <_{K_2} I$, alors $I \simeq_{\langle K_1,K_2\rangle} J$.*

La condition (F) indique que si un monde est vu comme strictement plus plausible qu'un autre monde pour un profil singleton, et si l'ordre de plausibilité est inversé pour un autre profil singleton, alors ces deux mondes doivent avoir la même plausibilité pour l'union des deux profils. Autrement dit, lorsque la condition (F) est vérifiée en plus des conditions (1) et (2) (cf. définition 2), il suffit de comparer la plausibilité de deux mondes distincts I, J pour deux profils singletons $\langle K_1\rangle, \langle K_2\rangle$ indépendamment dans le but de déterminer la plausibilité relative de I et J pour le profil doubleton $\langle K_1, K_2\rangle$.

Remarquons que la condition (F) peut être vue comme une version plus restrictive de la condition (4) (cf. définition 2) en présence des conditions (1) et (2) :

Proposition 7
Tout assignement satisfaisant les conditions (1), (2) et (F) satisfait la condition (4).

Réciproquement, la contrainte exprimée par la condition (F) n'est pas une conséquence des conditions (1), (2) et (4), ce qui peut être illustré par l'exemple suivant. Considérons trois mondes distincts I, J, L et deux bases de croyances $K_1 \equiv \varphi_{\{I,J\}}$ et $K_2 \equiv \varphi_{\{I,L\}}$. En présence des conditions (1) et (2), on a $I \simeq_{K_1} J <_{K_1} L$ et $I \simeq_{K_2} L <_{K_2} J$. Bien que la condition (4) ait pour but de capturer un comportement d'équité, à elle

seule elle n'impose pas aux deux mondes J et L d'avoir la même plausibilité pour le profil $\langle K_1, K_2\rangle$: on pourrait avoir par exemple $J <_{\langle K_1,K_2\rangle} L$. La condition (F), elle, implique $J \simeq_{\langle K_1,K_2\rangle} L$.

La proposition suivante montre qu'à travers un assignement filtrant, tous les mondes sont ordonnés sur deux niveaux de plausibilité au plus, pour tout profil singleton $\langle K\rangle$:

Proposition 8
Tout assignement vérifiant les conditions (1), (2), (6) et (F) associe à tout profil singleton $\langle K\rangle$ un préordre total unique $\leq_K$ sur les interprétations tel que pour toute base de croyances K et pour toute interprétation I, J, $I <_K J$ ssi $I \models K$ et $J \not\models K$.

La proposition 8 est un résultat clé pour prouver la proposition suivante sur les assignements syncrétiques filtrants. Étant donnés une interprétation I et un profil $\mathcal{K}$, on note $|I(\mathcal{K})| = |\{K_i \in \mathcal{K} \mid I \models K_i\}|$, i.e., le nombre des bases de croyances dans $\mathcal{K}$ pour lesquelles I est un modèle. On a la proposition suivante :

Proposition 9
Soit $\leq_{\mathcal{K}}$ un préordre sur les interprétations qui associe à un profil $\mathcal{K}$ un assignement syncrétique filtrant. On a

$$I <_{\mathcal{K}} J \text{ ssi } |I(\mathcal{K})| > |J(\mathcal{K})|.$$

Une conséquence importante de la proposition 9 est le théorème de représentation suivant pour les opérateurs de fusion EIC vérifiant (Ind) :

Proposition 10
Un opérateur de fusion EIC Δ satisfait (Ind) ssi il existe un assignement syncrétique filtrant qui associe à tout profil $\mathcal{K}$ un préordre total $\leq_{\mathcal{K}}$ tel que pour toute formule μ, $mod(\Delta_\mu(\mathcal{K})) = \min(mod(\mu), \leq_{\mathcal{K}})$.

Une autre conséquence de la proposition 9 est donnée par le corollaire suivant :

Corollaire 3
Il existe un seul assignement syncrétique filtrant.

Une conséquence directe des corollaires 3 et 1 et de la proposition 10 est que :

Corollaire 4
$\Delta^{d_D,\Sigma}$ est l'unique opérateur de fusion EIC vérifiant (Ind).

Ce résultat fournit une caractérisation axiomatique complète de l'opérateur de fusion EIC à base de distances $\Delta^{d_D,\Sigma}$ en terme d'indépendance à la rationalisation des bases.

5 Conclusion

Dans cet article, nous avons étudié le cas où les bases de croyances sont « rationalisées » par rapport aux contraintes d'intégrité au cours d'un processus de fusion. Une telle « rationalisation » est souhaitée pour les applications dans lesquelles certains opérateurs de fusion IC pourraient renvoyer un résultat contre-intuitif parce qu'ils prennent en compte les mondes non « réalisables ». C'est le cas en particulier des applications pour lesquelles les contraintes d'intégrité encodent des contraintes très fortes comme des lois physiques. Par exemple, lorsque les formules propositionnelles sont obtenues via une traduction de représentations provenant d'un cadre plus expressif (comme les réseaux de contraintes qualitatives spatiales ou temporelles), les contraintes d'intégrité sont utilisées pour exclure les mondes non représentatifs d'une situation spatiale ou temporelle cohérente (de tels mondes sont créés durant le processus de traduction) (Condotta *et al.*, 2009).

Nous avons défini formellement plusieurs conditions d'indépendance pour les opérateurs de fusion et nous avons étudié l'interaction de ces conditions avec les postulats IC qui constituent un standard pour la fusion de croyances. En particulier :

- Puisque la rationalisation par expansion peut conduire à des bases incohérentes et donc à des profils non p-cohérents, nous avons étendu les postulats IC à un nouvel axiome (Inc) qui caractérise un comportement pour les opérateurs de fusion appliqués aux profils formés de bases incohérentes ; nous avons fourni un théorème de représentation pour le nouvel ensemble de postulats, appelés EIC, où la condition de p-cohérence sur les profils est relâchée.
- Nous avons montré que l'indépendance à la rationalisation par mise à jour est impossible pour les opérateurs de fusion EIC, puisque cette propriété d'indépendance est en conflit avec certains postulats IC fondamentaux. Nous avons également montré que l'indépendance à la rationalisation par révision est équivalente à l'indépendance à la rationalisation par expansion pour les opérateurs de fusion EIC.
- Enfin, nous avons prouvé qu'il existe un unique opérateur de fusion EIC qui satisfait la propriété d'indépendance à la rationalisation par expansion (ou, de manière équivalente, par révision), l'opérateur à base de distances $\Delta^{d_D,\Sigma}$, qui utilise la distance drastique d_D et la somme comme fonction d'agrégation. Á notre connaissance, il s'agit du premier opérateur de fusion IC pour lequel une caractérisation axiomatique complète est donnée.

Dans cet article nous avons montré qu'il existe un unique opérateur EIC vérifiant (Ind). Il est possible d'associer à n'importe quel opérateur de fusion EIC Δ et à n'importe quelle méthode de rationalisation R un opérateur de fusion « rationalisé » Δ^R, en effectuant tout d'abord l'opération de rationalisation de manière explicite en utilisant R, puis l'opération de fusion en utilisant Δ. Les résultats de cet article montrent que les opérateurs Δ et Δ^R sont distincts (sauf pour l'opérateur $\Delta^{d_D,\Sigma}$). Une perspective de recherche est d'étudier le comportement et les propriétés vérifiées par de tels opérateurs Δ^R. Étudier les liens logiques entre les propriétés d'indépendance (Ind), (Ind-$\circ$) et (Ind-$\diamond$) pour les opérateurs qui ne satisfont pas tous les postulats EIC est également un sujet pour des recherches futures.

Références

ALCHOURRÓN C. E., GÄRDENFORS P. & MAKINSON D. (1985). On the logic of theory change : Partial meet contraction and revision functions. *Journal of Symbolic Logic*, **50**, 510–530.

ARROW K. J. (1963). *Social choice and individual values*. New York : Wiley, second edition.

K. J. ARROW, A. K. SEN & K. SUZUMURA, Eds. (2002). *Handbook of Social Choice and Welfare*, volume 1. North-Holland.

CONDOTTA J.-F., KACI S., MARQUIS P. & SCHWIND N. (2009). Merging qualitative constraints networks using propositional logic. In *Proceedings of the European Conference on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty (ECSQARU'09)*, p. 347–358.

KATSUNO H. & MENDELZON A. O. (1991a). On the difference between updating a knowledge base and revising it. In *Proceedings of the Second International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning(KR'91)*, p. 387–394.

KATSUNO H. & MENDELZON A. O. (1991b). Propositional knowledge base revision and minimal change. *Artificial Intelligence*, **52**(3), 263–294.

KELLY J. S. (1978). *Arrow impossibility theorems*. Series in economic theory and mathematical economics. New York : Academic Press.

KONIECZNY S., LANG J. & MARQUIS P. (2004). DA^2 merging operators. *Artificial Intelligence*, **157**(1-2), 49–79.

KONIECZNY S. & PINO PÉREZ R. (2002). Merging information under constraints : a logical framework. *Journal of Logic and Computation*, **12**(5), 773–808.

KONIECZNY S. & PINO PÉREZ R. (2011). Logic based merging. *Journal of Philosophical Logic*, **40**, 239–270.

LIBERATORE P. & SCHAERF M. (1998). Arbitration (or how to merge knowledge bases). *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, **10**, 76–90.

LIN J. (1996). Integration of weighted knowledge bases. *Artificial Intelligence*, **83**, 363–378.

REVESZ P. Z. (1997). On the semantics of arbitration. *International Journal of Algebra and Computation*, **7**, 133–160.

Annexe : preuves

Proposition 1 : *(Seulement si)* Supposons que Δ vérifie (IIA). On a $\langle K_1 \wedge \mu, \ldots, K_n \wedge \mu\rangle \equiv \langle K_1 \wedge \mu \wedge \mu, \ldots, K_n \wedge \mu \wedge \mu\rangle$. Par (IIA) on obtient $\Delta_\mu(\langle K_1, \ldots, K_n\rangle) \equiv \Delta_\mu(\langle K_1 \wedge \mu, \ldots, K_n \wedge \mu\rangle)$. Par conséquent, Δ satisfait (Ind). (IC3) est évident. *(Si)* Supposons que Δ vérifie (Ind) et (IC3) et montrons que Δ satisfait (IIA). Soit $\langle K_1 \wedge \mu, \ldots, K_n \wedge \mu\rangle \equiv \langle K'_1 \wedge \mu, \ldots, K'_n \wedge \mu\rangle$. Par (IC3) on a $\Delta_\mu(\langle K_1 \wedge \mu, \ldots, K_n \wedge \mu\rangle) \equiv \Delta_\mu(\langle K'_1 \wedge \mu, \ldots, K'_n \wedge \mu\rangle)$. Or par (Ind) on a $\Delta_\mu(\langle K_1 \wedge \mu, \ldots, K_n \wedge \mu\rangle) \equiv \Delta_\mu(\langle K_1, \ldots, K_n\rangle)$ et $\Delta_\mu(\langle K'_1 \wedge \mu, \ldots, K'_n \wedge \mu\rangle) \equiv \Delta_\mu(\langle K'_1, \ldots, K'_n\rangle)$. Par conséquent,

$\Delta_\mu(\langle K_1, \ldots, K_n\rangle) \equiv \Delta_\mu(\langle K'_1, \ldots, K'_n\rangle)$. □

Proposition 2 : Soit Δ un opérateur de fusion vérifiant (Inc), (IC0), (IC1), (IC5) et (IC6). Supposons $\mu \not\models \bot$ (si $\mu \models \bot$, alors la conclusion s'obtient trivialement de (IC0)). Par (Inc) on a $\Delta_\mu(\langle\bot\rangle^m) \equiv \mu$. Or, par (IC0) on a $\Delta_\mu(\mathcal{K}) \models \mu$. Ainsi, $\Delta_\mu(\mathcal{K}) \wedge \Delta_\mu(\langle\bot\rangle^m) \equiv \Delta_\mu(\mathcal{K})$, qui est cohérente par (IC1). Donc par (IC5) et (IC6), on a $\Delta_\mu(\mathcal{K}) \wedge \Delta_\mu(\langle\bot\rangle^m) \equiv \Delta_\mu(\mathcal{K} \sqcup \langle\bot\rangle^m)$. Donc $\Delta_\mu(\mathcal{K} \sqcup \langle\bot\rangle^m) \equiv \Delta_\mu(\mathcal{K})$. □

Proposition 3 : *(Seulement si)* Soit Δ un opérateur de fusion EIC. On définit un assignement comme suit : $\forall I, J, I \leq_{\mathcal{K}} J$ ssi $I \models \Delta_{\varphi_{\{I,J\}}}(\mathcal{K})$. Cet assignement satisfait les conditions (1) à (6) (voir (Konieczny & Pino Pérez, 2002), théorème 11). Et par (Inc), $\forall I, J, \Delta_{\varphi_{\{I,J\}}}(\langle\bot\rangle^n) \equiv \varphi_{\{I,J\}}$, donc $I \simeq_{\langle\bot\rangle^n} J$. Ainsi, la condition (0) (cf. définition 8) est vérifiée.
(Si) Considérons un assignement syncrétique étendu. Définissons Δ par $mod(\Delta_\mu(\mathcal{K}))= \min(mod(\mu), \leq_{\mathcal{K}})$. Δ satisfait (IC0) - (IC8) (voir (Konieczny & Pino Pérez, 2002), théorème 11). Or par (IC0) on a $\Delta_\mu(\langle\bot\rangle^n) \models \mu$, et par la condition (0) et la définition de Δ, on a $\forall I \models \mu, I \models \Delta_\mu(\langle\bot\rangle^n)$. Par conséquent, Δ satisfait (Inc). □

Proposition 4 : On montre tout d'abord que tout opérateur de mise à jour rationalisant $\diamond_i$ est l'opérateur de mise à jour drastique $\diamond^D$, défini par $K \diamond^D \mu \equiv K$ si $K \models \mu$, μ sinon. $\diamond^D$ correspond à l'assignement fidèle (voir (Katsuno & Mendelzon, 1991b)) tel que $\forall I, J, L, I \simeq_{\varphi_{\{L\}}} J$. Par l'absurde, supposons qu'il existe $\diamond_j \neq \diamond^D$. Par (U1) et (U3), $\varphi_{\{L\}} \diamond_j \varphi_{\{I,J\}} \models \varphi_{\{I,J\}}$, donc $\forall I, J, L$ tels que $J <^{\diamond_j}_{\varphi_{\{L\}}} I, \varphi_{\{L\}} \diamond_j \varphi_{\{I,J\}} \equiv \varphi_{\{J\}}$. Donc par (U2) et (U8) on a (*) $\varphi_{\{I,L\}} \diamond_j \varphi_{\{I,J\}} \equiv \varphi_{\{I,J\}}$. Par ailleurs, de (Ind-$\diamond$) et (*) on obtient $\Delta_{\varphi_{\{I,J\}}}(\langle\varphi_{\{I,L\}}\rangle) \equiv \Delta_{\varphi_{\{I,J\}}}(\langle\varphi_{\{I,L\}} \diamond_j \varphi_{\{I,J\}}\rangle) \equiv \varphi_{\{I,J\}}$. Enfin, par (IC0), (IC1) et (IC2) on a $\Delta_{\varphi_{\{I,J\}}}(\langle\varphi_{\{I,L\}}\rangle) \equiv \varphi_{\{I\}}$. Contradiction. Maintenant, soit $K \not\models \mu, K \wedge \mu \not\models \bot$. Par définition de $\diamond^D$ et par (Ind-$\diamond$), $\Delta_\mu(\langle K\rangle) \equiv \mu$. Ceci contredit (IC2). □

Proposition 5 : Définissons tout opérateur de révision rationalisant $\circ_i$ comme étant l'opérateur de révision drastique $\circ^D$, défini par $K \circ^D \mu \equiv K \wedge \mu$ si $K \wedge \mu \not\models \bot$, μ sinon. Remarquons que $\forall K, \forall I \models \mu, d_D(I, K) = d_D(I, K \wedge \mu) = d_D(I, K \circ^D \mu)$, ce qui conclut la preuve. □

Proposition 6 :
• Soit K une base. Pour tout opérateur de révision rationalisant $\circ_i$, par (R1) et (R3) on a $(K \circ_i \mu) \models \mu$ et $(K \circ_i \mu) \not\models \bot$. Donc par (Ind-$\circ$) et (IC2), on a $\Delta_\mu(\langle K\rangle) \equiv \Delta_\mu(\langle K \circ_i \mu\rangle) \equiv K \circ_i \mu$. Donc pour tout $\circ_i$, $\circ_i = \circ_\Delta$.
• Par conséquent, l'assignement associé à $\circ_\Delta$ coïncide avec la restriction aux profils singletons de l'assignement associé à Δ. Puisque Δ est un opérateur de fusion IC, par le théorème 1 il correspond à un assignement vérifiant les conditions (1) à (6) (cf. définition 2). Par l'absurde, supposons maintenant que $\circ_\Delta \neq \circ^D$ avec $\circ^D$ l'opérateur de révision drastique (voir la preuve de la proposition 5). Alors $\exists I, J, L$ tels que (*) $I <_{\varphi_{\{I\}}} J <_{\varphi_{\{I\}}} L$, i.e., il existe un préordre total $<_{\varphi_{\{I\}}}$ à 3 niveaux distincts. Soit $K \equiv \varphi_{\{J,L\}}$. Par les conditions (1) et (2), on a (**) $J \simeq_K L <_K I$. Afin d'éviter une écriture trop lourde, notons plus simplement $<$ le préordre total $<_{\langle\varphi_{\{I\}},K\rangle}$. Maintenant,
  – Par (*), (**) et par la condition (6), on a $J < L$ *(i)* ;
  – Par (R2), $K \circ_\Delta \varphi_{\{I,J\}} \equiv \varphi_{\{J\}}$, et $\varphi_{\{I\}} \circ_\Delta \varphi_{\{I,J\}} \equiv \varphi_{\{J\}}$. Alors par (Ind-

$\circ$), $\Delta_{\varphi_{\{I,J\}}}(\langle K, \varphi_{\{I\}}\rangle) \equiv \Delta_{\varphi_{\{I,J\}}}(\langle \varphi_{\{J\}}, \varphi_{\{I\}}\rangle)$. Pa conséquent, par (IC0), (IC1) et (IC4), on obtient $\Delta_{\varphi_{\{I,J\}}}(\langle K, \varphi_{\{I\}}\rangle) \equiv \varphi_{\{I,J\}}$, ce qui signifie que $I \simeq J$ *(ii)* ;

– De manière similaire, on a $I \simeq L$ *(iii)*.

(i), (ii) et (iii) pris conjointement contredisent $\circ_\Delta \neq \circ^D$. □

Proposition 7 : Soient K, K' deux bases cohérentes, et soit $I \models K$. La condition (4) est trivialement vérifiée si $I \models K'$. Supposons donc $I \not\models K'$. Soit $J \models K'$. If $J \models K$, alors les conditions (1) et (2) impliquent que $J <_{\langle K,K'\rangle} I$, et la condition (4) est vérifiée. Supposons maintenant $J \not\models K$. Les conditions (1) et (2) impliquent $I <_K J$ et $J <_{K'} I$. Par la condition (F), on obtient $I \simeq_{\langle K,K'\rangle} J$ et la condition (4) est vérifiée. □

Proposition 8 : *(Si)* Trivial par la condition (2).
(Seulement si) Soit K une base.

– On montre tout d'abord que (*) si $I \not\models K$ et $J \not\models K$, alors $I \simeq_K J$: soit $I \not\models K$, $J \not\models K$ et supposons par l'absurde que $I <_K J$ (le cas où $J <_K I$ est symétrique et la preuve est similaire). Soit $L \models K$. En utilisant les conditions (2) et (F), on obtient $I \simeq_{\langle K,\varphi_{\{J\}}\rangle} L$. Alors par la condition (6), on a *(i)* $I <_{\varphi_{\{J\}}} L$. Or $I \simeq_{\varphi_{\{I,L\}}} L <_{\varphi_{\{I,L\}}} J$. Donc par la condition (F), on a *(ii)* $I \simeq_{\langle \varphi_{\{J\}},\varphi_{\{I,L\}}\rangle} L$. *(i)* et *(ii)* ensemble avec la condition (6) impliquent que $I <_{\langle \varphi_{\{J\}},\varphi_{\{I,L\}}\rangle} L$, ce qui contredit *(ii)*.

– Maintenant, supposons $I <_K J$. Par l'absurde, supposons $I \not\models K$ ou $J \models K$. Pour conclure la preuve, il suffit de considérer séparément les trois cas induits, chacun conduisant à une contradiction, en utilisant (*) ainsi que les conditions (1) et (2). □

Proposition 9 : – En premier lieu, on peut montrer que (*) si $I <_{\mathcal{K}} J$ alors $I \leq_{\mathcal{K}\sqcup\{K\}} J$, par induction sur le nombre de bases dans $\mathcal{K}$, et en utilisant les conditions (5) et (F).

– Ensuite, on montre la proposition par induction sur le nombre de bases dans $\mathcal{K}$. Le cas de base $|\mathcal{K}| = 1$ provient directement de la proposition 8. Le cas de base $|\mathcal{K}| = 2$, quant à lui, provient directement de la propriété suivante : $I <_{\langle K,K'\rangle} J$ ssi ($I \leq_K J$ et $I <_{K'} J$) ou ($I <_K J$ et $I \leq_{K'} J$), ce qui peut être montré en utilisant les conditions (5), (6) et (F). En utilisant l'hypothèse de récurrence, i.e., $\forall k \leq n$ avec $n \geq 2$, $I <_{\mathcal{K}} J$ ssi $|I(\mathcal{K})| > |J(\mathcal{K})|$, on peut prouver la propriété pour tout profil $\mathcal{K} \sqcup \{K'\}$ (c'est-à-dire, de taille $k+1$) en utilisant les conditions (5) et (F) pour la partie (Seulement si) de la propriété, la condition (6) pour la partie (Si) de la propriété. □

Proposition 10 : *(Seulement si)* Soit Δ un opérateur de fusion EIC vérifiant (Ind). Par le corollaire 2, Δ satisfait (Ind-$\circ$). Définissons un assignement syncrétique étendu comme dans la preuve de la proposition 3 et montrons que cet assignement satisfait la condition (F). Par la proposition 6, $\forall \circ_i$ considéré dans (Ind), $\circ_i = \circ^D$ (voir la preuve de la proposition 5) et $\forall K$, $<_K^{\circ^D} = <_K$. Soient $I <_K J$ et $J <_{K'} I$. Soit $K'' \equiv \varphi_{\{I,J\}}$. Alors $K \circ^D K'' \equiv \varphi_{\{I\}}$ et $K' \circ^D K'' \equiv \varphi_{\{J\}}$. Ainsi, par (Ind-$\circ$), (IC0), (IC1) et (IC4), $\Delta_{K''}(\langle K, K'\rangle) \equiv \Delta_{K''}(\langle \varphi_{\{I\}}, \varphi_{\{J\}}\rangle) \equiv K''$. Donc, $I \simeq_{\langle K,K'\rangle} J$.
(Si) Considérons un assignement syncrétique filtrant. Définissons Δ par $mod(\Delta_\mu(\mathcal{K}))= \min(mod(\mu), \leq_{\mathcal{K}})$. De la proposition 3, Δ satisfait (Inc), (IC0) - (IC8). Soit $\mathcal{K} = \langle K_1, \ldots, K_n\rangle$ un profil et $\mathcal{K}' \equiv \langle K_1 \wedge \varphi_{\{I,J\}}, \ldots, K_m \wedge \varphi_{\{I,J\}}\rangle$. En utilisant la proposition 9, on montre que $I <_{\mathcal{K}} J$ ssi $I <_{\mathcal{K}'} J$. Par conséquent, Δ satisfait (Ind). □