Vers une version possibiliste de la théorie des fonctions de croyance

Henri Prade[1], Agnès Rico[2]

[1] Institut de Recherche en Informatique de Toulouse - IRIT
Université de Toulouse, 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex 09, France
prade@irit.fr

[2] Equipe de Recherche en Ingénierie des Connaissances - ERIC
Université Claude Bernard Lyon 1, 43 bld du 11 novembre 69100 Villeurbanne, France
agnes.rico@univ-lyon1.fr

Résumé : Cet article propose une contrepartie qualitative à la théorie des fonctions de croyance de Shafer. La fonction de masse est remplacée par une affectation possibiliste. La somme des poids ne fait plus 1, mais c'est le maximum des poids qui fait 1. Des fonctions d'ensemble, contreparties de celles existant en théorie des fonctions de croyance, sont définies, où l'addition est remplacée par le maximum. Ce nouveau cadre permet de représenter des possibilités imprécises. Nous étudions en particulier le lien entre cette construction et la transformée de Möbius qualitative. Les affectations possibilistes peuvent être vues comme des ensembles généralisés, entre lesquels une relation d'inclusion peut être définie. Les règles de combinaison de l'information dans ce cadre sont également définies.

Mots-clés : théorie des fonctions de croyance, théorie des possibilités, information imprécise, fusion d'informations

1 Introduction

De nombreux travaux concernant la représentation de l'incertitude ou la modélisation des préférences utilisent des données quantitatives et des structures additives. Elles sont à la base des approches les plus classiques et de leurs généralisations comme la théorie des probabilités et la théorie des fonctions de croyance (Shafer, 1976) pour l'incertain, ou l'agrégation multicritère où on trouve des sommes pondérées et plus généralement des intégrales de Choquet dans le cas des préférences. Les informations à traiter sont cependant souvent d'origine qualitative. Ainsi, en théorie des possibilités (Zadeh, 1978), ou dans l'intégrale de Sugeno (Sugeno, 1977), le maximum remplace l'addition, ce qui les rend compatibles avec de telles données.

La théorie des fonctions de croyance, qui inclut la théorie des probabilités et la théorie des possibilités comme des cas particuliers, fournit un cadre approprié pour représenter des informations imprécises et incertaines au moyen d'une densité de probabilité sur les

sous-ensembles du référentiel. Cette théorie constitue aussi un système remarquable de probabilités imprécises. Nous nous intéressons dans cet article à une contrepartie qualitative de la théorie des fonctions de croyance où la structure additive est remplacée par une structure maxitive.[1] Plus précisément, nous partons d'une affectation possibiliste qui remplace la fonction de masse, et l'addition est remplacée par le maximum. Dans ce cas, la somme des poids attribués par l'affectation possibiliste ne vaut plus 1, mais c'est le maximum des poids attribués qui est égal à 1. Quoique l'idée d'affectation possibiliste soit déjà ancienne (Dubois & Prade, 1984, 1985), et qu'elle ait retenu assez tôt l'attention de quelques auteurs (Tsiporkova & Baets, 1998), et qu'elle ait été etudiée à nouveau plus récemment au travers de la transformée de Möbius qualitative (Grabisch, 2004; Dubois & Fargier, 2009), ce cadre qualitatif de représentation de l'incertitude n'a jamais fait l'objet d'études systématiques.

Cet article, qui constitue une version révisée de (Prade & Rico, 2011), est organisé de la manière suivante : La section 2 présente les définitions et les notations. La section 3 montre l'évidence possibiliste comme une possibilité imprécise. La section 4 présente une différence majeure entre le cas classique et le cas qualitatif : pour une fonction de croyance possibiliste donnée, l'affectation possibiliste n'est pas unique. La section 5 concerne l'implication entre affectations possibilistes et les relations avec le comportement des éléments focaux. La section 6 est dédiée aux règles de combinaison, tandis que la section 7 conclut sur quelques perpectives.

2 Définitions et notations

Dans la théorie des fonctions de croyance, le référentiel $\Omega = \{1, \cdots, N\}$ est constitué par un ensemble d'éléments représentant des états mutuellement exclusifs du monde. Un état de connaissance est représenté par une fonction de masse m, qui associe à tout sous-ensemble $A \subseteq \Omega$, un poids $m(A)$ qui constitue la *part* de croyance associée à A exactement. Notons que si A n'est pas un singleton, l'énoncé "l'état réel du monde est dans A" est imprécis. Plus précisément une fonction de masse est une fonction $m : 2^{\Omega} \to [0, 1]$ telle que $\sum_{A \subseteq \Omega} m(A) = 1$. Tout $A \subseteq \Omega$ tel que $m(A) > 0$ est appelé élément focal de m. Si $m(\emptyset) = 0$ l'information est dite cohérente.

A une fonction de masse m sont associées les fonctions d'ensemble suivantes :

$$\forall A \subseteq \Omega, \quad Bel(A) = \sum_{\emptyset \neq B \subseteq A} m(B)\,; \quad \forall A \subseteq \Omega, \quad Pl(A) = \sum_{B \cap A \neq \emptyset} m(B)\,;$$
$$\forall A \subseteq \Omega, \quad Q(A) = \sum_{A \subseteq B} m(B)\,; \qquad \forall A \subseteq \Omega, \quad \eth(A) = \sum_{A \cup B \neq \Omega} m(B).$$

Bel est la fonction de croyance, Pl est la plausibilité, et Q est la communalité. $\eth(A) = 1 - Q(\overline{A})$ où $\bar{A}$ est le complémentraire de A est rarement utilisée. Commençons par rappeler les principaux résultats présentés dans (Prade & Rico, 2011).

[1] Le cadre qualitatif, maxitif, décrit dans cet article ne doit pas être confondu avec quelques propositions faites par certains auteurs pour rendre plus qualitatif le cadre des fonctions de croyance (Parsons & Mamdani, 1993), ou des cadres apparentés de fusion d'informations (Dezert & Smarandache, 2006), tout en conservant une structure "additive" appliquée respectivement à $\{0, +\}$ (ou à un partitionnement plus général de l'intervalle $[0, 1]$) et à une échelle finie de niveaux symboliques.

2.1 Les fonctions d'ensemble de la contrepartie qualitative

Dans ce qu'on peut appeler la théorie possibiliste de l'évidence l'addition est remplacée par le maximum et la fonction de masse m est remplacée par une fonction d'ensemble $\sigma : 2^\Omega \to [0,1]$ telle que $\max_{A\subseteq\Omega} \sigma(A) = 1$. Cette fonction s'appellera affectation possibiliste. Comme dans la théorie des fonctions de croyance, $\mathcal{F}_\sigma = \{A \subseteq \Omega | \, \sigma(A) > 0\}$ est l'ensemble des éléments focaux de σ. σ peut être considérée comme une distribution de possibilité sur 2^Ω tout comme m peut être considérée comme une distribution de probabilité sur 2^Ω. Si $\sigma(\emptyset) = 0$ alors σ est dite normale. Dans la suite de l'article nous ne considérons que des affectations possibilistes normales. Comme dans le cas quantitatif une affectation possibiliste σ définit les fonctions d'ensemble suivantes :

Définition 1
$\forall A \subseteq \Omega,\ Bel^{pos}(A) = \max_{B\subseteq A} \sigma(B)$, $Bel^{pos}(\emptyset) = 0$, $Bel^{pos}(\Omega) = 1$;
$\forall A \subseteq \Omega,\ Pl^{pos}(A) = \max_{\emptyset\neq A\cap B} \sigma(B)$, $Pl^{pos}(\emptyset) = 0$, $Pl^{pos}(\Omega) = 1$;
$\forall A \subseteq \Omega,\ Q^{pos}(A) = \max_{A\subseteq B} \sigma(B)$, $Q^{pos}(\emptyset) = 1$, $Q^{pos}(\Omega) = \sigma(\Omega)$;
$\forall A \subseteq \Omega$, $\eth^{pos}(A) = \max_{A\cup B\neq\Omega} \sigma(B)$, $\eth^{pos}(\emptyset) = \max_{B\neq\Omega} \sigma(B)$, $\eth^{pos}(\Omega) = 0$.

Dans le cadre additif[2] la fonction de croyance Bel et la plausibilité Pl vérifie $\forall A \subseteq \Omega,\ Bel(A) \leq Pl(A)$. De plus elles sont reliées par la relation de dualité : $\forall A \subseteq \Omega,\ Pl(A) + Bel(\bar{A}) = 1 - m(\emptyset)$.

Les fonctions Bel^{pos} et Pl^{pos} sont croissantes et vérifient $\forall A$, $Bel^{pos}(A) \leq Pl^{pos}(A)$. Les fonctions Q^{pos} et $\eth^{pos}$ sont quand à elles décroissantes. La relation $\forall A$, $Q^{pos}(A) \leq \eth^{pos}(A)$ est vraie si $\sigma(\Omega) = 0$. Par ailleurs, il existe une forme de relation de dualité entre Bel^{pos} et Pl^{pos} et entre Q^{pos} et $\eth^{pos}$:

Proposition 1
$\forall A \subseteq \Omega$, $\max(Pl^{pos}(A), Bel^{pos}(\bar{A})) = 1$ *et* $\max(Q^{pos}(A), \eth^{pos}(\bar{A})) = 1$.

2.2 Quelques cas particuliers

Regardons de plus près quelques cas particuliers.

L'imprécision totale : $\sigma(\Omega) = 1$ et σ vaut 0 ailleurs. Dans ce cas, $\forall A \neq \Omega$, $Bel^{pos}(A) = 0$, $\forall A \neq \emptyset$, $Pl^{pos}(A) = 1$. De plus on a $\forall A$, $Q^{pos}(A) = 1$; $\forall A$, $\eth^{pos}(A) = 0$.

L'imprécision partielle : il existe un unique ensemble $A \subseteq \Omega$ tel que $\sigma(A) = 1$ et cet ensemble A est tel que $|A| > 1$, où $||$ est la cardinalité. Dans ce cas on a
$Bel^{pos}(B) = 1$ si $A \subseteq B$ et 0 si $A \not\subseteq B$;
$Pl^{pos}(B) = 1$ si $A \cap B \neq \emptyset$ et 0 si $A \cap B = \emptyset$;
$Q^{pos}(B) = 1$ $B \subseteq A$ et 0 si $B \not\subseteq A$;
$\eth^{pos}(B) = 1$ si $B \cup A \neq \Omega$.

[2] Il faut comprendre ici, et dans la suite du papier, que ce "cadre additif" réfère à la théorie des fonctions de croyance de Shafer, sans pour autant suggérer que ces fonctions seraient additives !

Connaissance totale : Il existe un unique $\omega \in \Omega$ tel que $\sigma(\{\omega\}) = 1$ et σ vaut 0 ailleurs. Dans ce cas on a $\forall A$, $Bel^{pos}(A) = Pl^{pos}(A) = 1$ si $\omega \in A$ et 0 si $\omega \notin A$. $Q^{pos}(A) = 1$ si $A = \{\omega\}$ et 0 $\forall A \neq \{\omega\}$; $Q^{pos}(A) = 1$ si $A \neq \{\Omega\}, \neq \overline{\{\omega\}}$.

L'incertain précis : σ est une affectation possibiliste incertaine si $\sigma(A) > 0$ implique que A est un singleton. Dans ce cas $Bel^{pos}(A) = Pl^{pos}(A) = \max_{\omega \in A} \sigma(\omega)$ est une mesure de possibilité au sens classique. $Q^{pos}(A) = 0$ pour tout A tel que $|A| > 1$ et $Q^{pos}(\{\omega\})) = \sigma(\{\omega\})$.

L'incertain possibiliste : Dans ce cas σ est non nulle seulement pour certains ensembles A_i qui sont inclus les uns dans les autres $A_1 \subseteq \cdots \subseteq A_n$. Dans cette situation, dans le cas de la théorie des fonctions de croyance, Pl est une possibilité et Bel est une nécessité. Dans la contrepartie qualitative cette propriété reste vraie. Plus précisément nous avons le résultat suivant :

Proposition 2
Si σ est non nulle seulement pour certains ensembles A_i qui sont inclus les uns dans les autres ($A_1 \subseteq \cdots \subseteq A_n$), alors
Bel^{pos} *est une nécessité, i.e.* $Bel^{pos}(A \cap B) = \min(Bel^{pos}(A), Bel^{pos}(B))$,
Pl^{pos} *est une possibilité, i.e.* $Pl^{pos}(A \cup B) = \max(Pl^{pos}(A), Pl^{pos}(B))$,
$Q^{pos}(A \cup B) = \min(Q^{pos}(A), Q^{pos}(B))$,
$\eth^{pos}(A \cap B) = \max(\eth^{pos}(A), \eth^{pos}(B))$.

3 L'évidence possibiliste vue comme une possibilité imprécise

En supposant Ω fini, une fonction de masse m, en théorie des fonctions de croyance de Shafer, définit une probabilité imprécise car m est compatible avec toute distribution de probabilité p obtenue en partageant la masse $m(A)$ entre tous les éléménts ω appartenant à A :
$\forall A \in 2^{\Omega}, \exists k_A \in [0,1]^A$ tel que $m(A) = \sum_{\omega \in A} k_A(\omega)$ et $p(\omega) = \sum_{A \ni \omega} k_A(\omega)$.

$\sum_{A \neq \emptyset} m(A) = 1$ assure que $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$. Alors $m(A)$ vue comme une masse peut être répartie entre les éléments de A. m est alors associée à une famille de distributions de probabilités dites compatibles. Dans ce cas m représente un ensemble de probabilités imprécises particulières. En posant $P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$, on montre que

$$Bel(A) = \sum_{\emptyset \neq B \subseteq A} m(B) \leq P(A) \leq Pl(A) = \sum_{B \cap A \neq \emptyset} m(B).$$

De même dans notre cas on peut définir une structure possibiliste imprécise, mais la situation est un peu plus compliquée : Considérons une affectation possibiliste σ et $\mathcal{U}_\sigma = \bigcup_{i|\sigma(A_i)>0} A_i$. Si nous voulons interpréter les valeurs $\sigma(A)$ comme provenant d'une possibilité imprécise il existerait une distribution de possibilités π et des applications

$\kappa_A \in [0,1]^A$ telles que $\sigma(A) = \max_{\omega \in A} \kappa_A(\omega)$ et $\pi(\omega) = \max_{B \ni \omega} \kappa_B(\omega)$.

Remarquons que $\Pi(A) = \max_{\omega \in A} \pi(\omega) = \max_{\omega \in A} \max_{B \ni \omega} \kappa_B(\omega) \geq \sigma(A)$; et que $\forall \omega \in \Omega - \mathcal{U}_\sigma, \pi(\omega) = 0$. On a $\max_{A \neq \emptyset} \sigma(A) = 1$ qui entraine que $\max_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) = 1$. Alors, $\sigma(A)$ peut être interprété comme une contribution à la possibilité de A. Nous pouvons de plus montrer que

$$Bel^{pos}(A) \leq \Pi(A) \leq Pl^{pos}(A).$$

Exemple. $\mathcal{F}_\sigma = \{A, \Omega\}$. Supposons que $\sigma(A) \geq \sigma(\Omega)$. Alors $\sigma(A) = \max_{\omega \in A} \kappa_A(\omega)$, $\sigma(\Omega) = \max_{\omega \in \Omega} \kappa_\Omega(\omega)$ et $\pi(\omega) = \max(\kappa_A(\omega), \kappa_\Omega(\omega))$. Par convention, $\kappa_A(\omega) = 0$ si $\omega \notin A$. Alors $\Pi(A) = max(\sigma(A), \max_{\omega \in A} \kappa_\Omega(\omega)) = \sigma(A)$. Mais, $\Pi(\Omega) = max(\max_{\omega \in \Omega} \kappa_A(\omega), \sigma(\Omega)) = \sigma(A)$. Si $\sigma(A) < \sigma(\Omega)$, $\sigma(A) \leq \Pi(A) \leq \sigma(\Omega) = \Pi(\Omega) = 1$.

Une mesure de possibilité Π permet de définir une mesure de nécessité associée en posant $N(A) = 1 - \Pi(\overline{A})$. Donc par dualité, les inégalités $Bel^{pos}(A) = \max_{B \subseteq A} \sigma(B) \leq \Pi(A) \leq Pl^{pos}(A) = \max_{B \cap A \neq \emptyset} \sigma(B)$ entrainent les inégalités

$$\min_{B \subseteq \overline{A}} 1 - \sigma(B) \geq N(A) \geq \min_{B \cap \overline{A} \neq \emptyset} 1 - \sigma(B),$$

faisant ainsi apparaitre une structure minitive associée.

On retrouve la logique possibiliste (Dubois & Prade, 2004) quand la borne supérieure de $N(A)$ est 1, i.e., quand $\min_{B \subseteq \overline{A}} 1 - \sigma(B) = 1$, ce qui est équivalent à $\forall B \subseteq \overline{A}, \sigma(B) = 0$. Cela exprime que rien de ce qui est dans $\overline{A}$ n'est possible de manière sûre, ce qui est intuitivement satisfaisant (dans le cas contraire, $N(A)$ ne pourrait pas atteindre 1). Cela montre que comme la logique possibiliste correspond à une famille de mesures de possibilité ayant un unique élément maximal (correspondant à la distribution de possibilité la moins spécifique compatible avec des contraintes de la forme $N(A) \geq \alpha$), l'évidence possibiliste nous permet de représenter des familles plus générales de mesures de possibilité, correspondant à des valeurs de possibilités et de nécessités imprécises. Ce qui rejoint des préoccupations récentes en logique possibiliste (Benferhat *et al.*, 2011).

4 Non unicité de l'affectation possibiliste

Dans le cas classique, la fonction de croyance Bel (ou sa duale Pl) est associée à une unique fonction de masse m. Dans le cadre qualitatif cette propriété est fausse

	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
σ_1	1	0	1	0	0	0	1
σ_2	1	0	1	1	1	1	0
$Bel_1^{pos} = Bel_2^{pos}$	1	0	1	1	1	1	1

De plus l'équivalence $\forall A \subseteq \Omega$, $Bel_1(A) \leq Bel_2(A) \Leftrightarrow Pl_2(A) \leq Pl_1(A)$ n'est pas satisfaite par les fonctions Bel^{pos} et Pl^{pos}. Par exemple si on considère

	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
σ_1	0	1	0
σ_2	1	1	1

on a $Bel_1^{pos} \leq Bel_2^{pos}$ et $Pl_1^{pos} \leq Pl_2^{pos}$.

On peut seulement affirmer que si les fonctions Bel_1^{pos} et Bel_2^{pos} sont associées à σ_1 et σ_2, on a que $Bel_1^{pos} = Bel_2^{pos}$ entraine que σ_1 et σ_2 sont égales sur les singletons.

L'information d'une fonction de croyance possibiliste ne représente donc pas toute l'information contenue dans l'affectation possibiliste qui la définit. En effet, deux affectations possibilistes peuvent ne pas contenir la même information et définir la même fonction de croyance possibiliste.

Dans la théorie des fonctions de croyance, la fonction de masse associée à une fonction de croyance est calculée à l'aide de la transformée de Möbius. Dans le cas qualitatif, la transformée de Möbius (Grabisch, 2003, 2004; Dubois & Fargier, 2009) associe à une fonction de croyance possibiliste Bel^{pos} un intervalle d'affectations possibilistes :

Définition 2
La transformée de Möbius qualitative d'une fonction d'ensemble croissante v est
$\{\sigma | \forall A \subseteq \Omega \ v(A) = \max_{B \subseteq A} \sigma(B)\} = \{\sigma | \sigma \in [\sigma_*, \sigma^*]\}$
où σ_* et σ^* sont les affectations possibilistes définies par :
$\forall A \subseteq \Omega$, $\sigma^*(A) = v(A)$,
$\forall A \subseteq \Omega$, $\sigma_*(A) = 0$ *si* $\exists B \subset A$ *tel que* $v(B) = v(A)$ *et* $\sigma_*(A) = v(A)$ *sinon.*

L'application de cette définition à la fonction de croyance possibiliste Bel^{pos} donne un intervalle $[\sigma_*^B, \sigma^{B*}]$.

Exemple

	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
Bel^{pos}	1	0	1	1	1	1	1
σ^*	1	0	1	1	1	1	1
σ_*	1	0	1	0	0	0	0

De la même façon la fonction Pl^{pos} correspond à l'intervalle $[\sigma_*^P, \sigma^{P*}]$.

On a l'inégalité $\sigma_*^B \leq \sigma_*^P \leq \sigma^{B*} \leq \sigma^{P*}$. Donc si les fonctions Bel^{pos} et Pl^{pos} sont connues partout, σ est déterminée de manière unique si et seulement si $\sigma_*^P = \sigma^{B*}$.

La fonction Q^{pos} est décroissante, mais nous pouvons définir aussi un intervalle d'affectations possibilistes comme cela a été fait avec la fonction d'ensemble $\min_{A \subseteq B} \sigma(B)$ dans (Dubois & Fargier, 2009).

Définition 3
Soit $v : 2^\Omega \to [0,1]$ une fonction d'ensemble décroissante alors
$\{\sigma | \forall A \subseteq \Omega \ v(A) = \max_{A \subseteq B} \sigma(B)\} = \{\sigma | \sigma \in [\sigma_*, \sigma^*]\}$
où σ_* et σ^* sont les affectations possibilistes définies par :
$\forall A \subseteq \Omega$, $\sigma^*(A) = v(A)$,
$\forall A \subseteq \Omega$, $\sigma_*(A) = 0$ *si* $\exists B$ *tel que* $A \subset B$ *et* $v(B) = v(A)$; $\sigma_*(A) = v(A)$ *sinon.*

Les fonctions Q^{pos} et $\mathfrak{d}^{pos}$ définissent donc les intervalles $[\sigma_*^Q, \sigma^{Q*}]$ et $[\sigma_*^{\mathfrak{d}}, \sigma^{\mathfrak{d}*}]$.

Quand les quatre fonctions Bel^{pos}, Pl^{pos}, Q^{pos} et $\mathfrak{d}^{pos}$ sont connues partout, σ est définie de manière unique si et seulement si l'intersection des quatre intervalles construits par la transformée de Möbius qualitative est réduit à un point. Ce n'est pas toujours le cas. Par exemple si nous considérons $\Omega = \{1, 2, 3\}$ et les affectations possibilistes σ_1 et σ_2 définies par :

σ_1 vaut 1 sur $\{1\}$, $\{3\}$ $\{1, 2, 3\}$ et 0 sur les autres ensembles ;

σ_2 vaut 0 sur $\{2\}$ et 1 sur les autres ensembles ;

mais nous avons $Bel_1^{pos} = Bel_2^{pos}$, $Pl_1^{pos} = Pl_2^{pos}$, $Q_1^{pos} = Q_2^{pos}$ et $\mathfrak{d}_1^{pos} = \mathfrak{d}_2^{pos}$.

5 Implication entre affectations possibilistes

D'après la section précédente, même si nous connaissons les quatre fonctions d'ensemble Bel^{pos}, Pl^{pos}, Q^{pos} et $\mathfrak{d}^{pos}$, σ peut ne pas être connue de manière unique. Il est donc difficile de faire jouer à σ le même rôle que la fonction de masse m dans le cas classique. Par contre dans (Dubois, 2011) il est montré que ce rôle peut être joué par la borne inférieure de la transformée de Möbius de la fonction de croyance possibiliste Bel^{pos} associée à σ. Les éléments focaux pris en compte sont alors ceux de cette borne inférieure. Il est alors possible de généraliser au cas qualitatif certains résultats présentés dans (Dubois & Prade, 1986) pour le cadre additif.

Soient σ une affectation possibiliste qui définit une fonction de croyance possibiliste Bel^{pos} et σ_* la borne inférieure de la transformée de Möbius de Bel^{pos}. Dans cette partie on note A_i les éléments focaux de σ_* : $\sigma_*(A_i) \neq 0$. Leur ensemble est $\mathcal{F}_{\sigma_*} = \{A_i\}_{i \in I}$ où I est un ensemble fini d'indices. Il est alors possible de définir le core et le support d'une affectation possibiliste comme dans le cas des fonctions de croyance de Shafer (Dubois & Prade, 1986).

5.1 Noyau et Support d'une affectation possibiliste

Définition 4

Le noyau de σ est $\mathcal{C}(\mathcal{F}_{\sigma_*}) = \cap_{i \in I} A_i$,

Le support de σ est $\mathcal{S}(\mathcal{F}_{\sigma_*}) = \cup_{i \in I} A_i$.

Soient deux affectations possibilistes σ et σ' qui définissent deux fonctions de croyance possibilistes Bel^{pos} et $Bel^{pos\prime}$ qui permettent de définir deux affectations possibilistes σ_* et σ'_*. On a alors deux ensembles $\mathcal{F}_{\sigma_*}$ et $\mathcal{F}_{\sigma'_*}$. On note $\{A_i\}_{i \in I}$ l'ensemble des éléments focaux de $\mathcal{F}_{\sigma_*}$ et $\{A'_j\}_{j \in J}$ l'ensemble des éléments focaux de $\mathcal{F}_{\sigma'_*}$, avec I et J deux ensembles finis d'indices. Avec σ_* (resp. σ'_*) on définit Q^{pos} (resp. $Q^{pos\prime}$).

L'inclusion de $\mathcal{F}_{\sigma_*}$ dans $\mathcal{F}_{\sigma'_*}$ peut être vue de deux manières différentes :

- La première correspond à : tout élement A' de $\mathcal{F}_{\sigma'_*}$ contient un élément A de $\mathcal{F}_{\sigma_*}$ tel que $\sigma'_*(A') \leq \sigma(A)$.
- La seconde correspond à : tout élément A de $\mathcal{F}_{\sigma_*}$ est inclus dans un élément A' de $\mathcal{F}_{\sigma'_*}$ tel que $\sigma(A) \leq \sigma'(A')$.

On va donc définir deux inclusions qui reprennent les notations du cas classique.

Définition 5
$\mathcal{F}_{\sigma_*} \subseteq \mathcal{F}_{\sigma'_*}$ si et seulement si $Bel^{pos\prime} \leq Bel^{pos}$.

Cette première définition est équivalente à $\forall A,\ \max_{A'_j \subseteq A} \sigma'_*(A'_j) \leq \max_{A_i \subseteq A} \sigma_*(A_i)$.

Proposition 3
Si $\mathcal{F}_{\sigma_*} \subseteq \mathcal{F}_{\sigma'_*}$ alors $\mathcal{C}(\mathcal{F}_{\sigma_*}) \subseteq \mathcal{C}(\mathcal{F}_{\sigma'_*})$.

Preuve: $\forall A'_j$, $\sigma'_*(A'_j) \neq 0 \leq \max_{A_i \subseteq A'_j} \sigma_*(A_i)$ donc $\exists A_i$ tel que $A_i \subseteq A'_j$. Donc $\forall A'_j$, $\cap_i A_i \subseteq A'_j$ ce qui implique $\cap_i A_i \subseteq \cap_j A'_j$. ■

Remarque : Dans le cas additif on a la définition $\mathcal{F}_{\sigma_*} \subseteq \mathcal{F}_{\sigma'_*}$ si et seulement si $[Bel^{pos}, Pl^{pos}] \subseteq [Bel^{pos\prime}, Pl^{pos\prime}]$. Dans le cas qualitatif la situation est différente car nous n'avons pas l'équivalence entre $Bel^{pos\prime} \leq Bel^{pos}$ et $Pl^{pos} \leq Pl^{pos\prime}$.

Pour conserver la définition avec inclusion d'intervalle comme dans le cas additif on devrait rajouter la condition $\forall A,\ \max_{A \cap A_i \neq \emptyset} \sigma_*(A_i) \leq \max_{A \cap A'_j \neq \emptyset} \sigma'_*(A'_j)$. On aurait alors que l'inclusion implique $\mathcal{S}(\mathcal{F}_{\sigma_*}) \cap \mathcal{S}(\mathcal{F}_{\sigma'_*}) \neq \emptyset$. En effet on aurait $\forall A_i$, $\sigma_*(A_i) \neq 0 \leq \max_{A \cap A'_i \neq \emptyset} \sigma'_*(A'_i)$ donc $\exists A'_j$ tel que $A_i \cap A'_j \neq \emptyset$ donc $\cup_i A_i \cap \cup_j A'_j \neq \emptyset$.

La deuxième inclusion est :

Définition 6
$\mathcal{F}_{\sigma_*} \bar{\subseteq} \mathcal{F}_{\sigma'_*}$ si et seulement si $Q^{pos} \leq Q^{pos\prime}$.

Cette deuxième inclusion est équivalente à $\forall A,\ \max_{A \subseteq A_i} \sigma_*(A_i) \leq \max_{A \subseteq A'_j} \sigma'_*(A'_j)$.

Proposition 4
Si $\mathcal{F}_{\sigma_*} \bar{\subseteq} \mathcal{F}_{\sigma'_*}$ alors $\mathcal{S}(\mathcal{F}_{\sigma_*}) \subseteq \mathcal{S}(\mathcal{F}_{\sigma'_*})$.

Preuve: $\forall A_i$, $\sigma_*(A_i) \neq 0 \leq \max_{A_i \subseteq A'_j} \sigma'_*(A'_j)$ donc $\exists A'_j$ tel que $A_i \subseteq A'_j \subseteq \cup_j A'_j$. Donc $\cup_i A_i \subseteq \cup_j A'_j$. ■

Toujours en nous inspirant de (Dubois & Prade, 1986) il semble naturel de définir la relation entre deux affectations possibilistes de la manière suivante.

Définition 7
$\sigma \vDash \sigma'$ si et seulement si
$\forall A,\ \max_{A \subseteq A_i} \sigma_*(A_i) \leq \max_{A \subseteq A'_j} \sigma'_*(A'_j)$ *et* $\max_{A'_j \subseteq A} \sigma'_*(A'_j) \leq \max_{A_i \subseteq A} \sigma_*(A_i)$.

A l'aide des propositions précédentes concernant les noyaux et les supports on peut facilement démontrer le résultat suivant :

Proposition 5
Si $\sigma \vDash \sigma'$ alors $\mathcal{S}(\mathcal{F}_{\sigma_*}) \subseteq \mathcal{S}(\mathcal{F}_{\sigma'_*})$ et $\mathcal{C}(\mathcal{F}_{\sigma_*}) \subseteq \mathcal{C}(\mathcal{F}_{\sigma'_*})$.

5.2 Lien entre implication et comportement des éléments focaux minimum et maximum

Nous allons maintenant nous intéresser aux éléments focaux minimum et maximum au sens de l'inclusion. Plus précisément nous allons étudier le lien entre l'implication de deux affectations possibilistes et le comportement de ces ensembles.

Définition 8
$\mathcal{F}_{\sigma_*^{min}} = \{A \subseteq \Omega \,|\sigma_*(A) \neq 0$ *et* $\forall B$ *tel que* $B \subset A,\ \sigma_*(B) = 0\}$.
$\mathcal{F}_{\sigma_*^{max}} = \{A \subseteq \Omega \,|\sigma_*(A) \neq 0$ *et* $\forall B \subseteq \Omega$ *tel que* $A \subset B,\ \sigma_*(B) = 0\}$.

Proposition 6
Soient σ et σ' deux affectations possibilistes.

$$\textit{Si } \sigma \vDash \sigma' \textit{ alors } \begin{cases} \forall A \in \mathcal{F}_{\sigma'^{min}_*},\ \exists B \textit{ tel que } B \subseteq A \textit{ et } B \in \mathcal{F}_{\sigma_*^{min}} \\ \forall A \in \mathcal{F}_{\sigma_*^{max}},\ \exists B \textit{ tel que } A \subseteq B \textit{ et } B \in \mathcal{F}_{\sigma'^{max}_*}. \end{cases}$$

Preuve: Soient σ et σ' tels que $\sigma \vDash \sigma'$.
Si $A \in \mathcal{F}_{\sigma'^{min}_*}$ alors $\sigma'_*(A) \neq 0 \leq \max_{B \subseteq A} \sigma_*(B)$, donc il existe $B \subseteq A$ tel que $\sigma_*(B) \neq 0$, donc A contient un ensemble appartenant à $\mathcal{F}_{\sigma_*^{min}}$.
Si $A \in \mathcal{F}_{\sigma_*^{max}}$ alors $\sigma_*(A) \neq 0 \leq \max_{A \subseteq B} \sigma'_*(B)$, donc il existe $A \subseteq B$ tel que $\sigma'_*(B) \neq 0$, donc A est inclus dans un élément de $\mathcal{F}_{\sigma'^{max}_*}$. ■

Il est possible d'avoir $\sigma \vDash \sigma'$ avec $\mathcal{F}_{\sigma'^{min}_*} \nsubseteq \mathcal{F}_{\sigma_*^{min}}$ ou $\mathcal{F}_{\sigma_*^{max}} \nsubseteq \mathcal{F}_{\sigma'^{max}_*}$. Pour les exemples suivants remarquons que si σ est telle que, si $A \subset B$ avec $\sigma(A) \neq 0$ et $\sigma(B) \neq 0$ alors $\sigma(A) < \sigma(B)$, σ est égale à σ_*.
Exemple : Soit $\Omega = \{1, 2\}$ et σ_*, σ'_* définies par :

	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
σ_*	0.5	0	1
σ'_*	0	0	1

nous avons $\{1, 2\} \in \mathcal{F}_{\sigma'^{min}_*}$ et $\{1, 2\} \notin \mathcal{F}_{\sigma_*^{min}}$.

Exemple : $\Omega = \{1, 2\}$, σ_* et σ'_* sont définies par :

	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
σ_*	1	1	0
σ'_*	0	0.5	1

nous avons$\{2\} \in \mathcal{F}_{\sigma_*^{max}}$ et $\{2\} \notin \mathcal{F}_{\sigma'^{max}_*}$.

Proposition 7
Soient σ, σ' deux affectations possibilistes telles que $\sigma \vDash \sigma'$ et $\sigma' \vDash \sigma$, alors $\mathcal{F}_{\sigma_*^{min}} = \mathcal{F}_{\sigma'^{min}_*}$ et $\mathcal{F}_{\sigma_*^{max}} = \mathcal{F}_{\sigma'^{max}_*}$.

Preuve: Soit $A \in \mathcal{F}_{\sigma_*^{min}}$. D'après la proposition précédente $\sigma' \vDash \sigma$ implique $\exists B$ $B \subseteq A$ et $B \in \mathcal{F}_{\sigma'^{min}_*}$. Si $B \neq A$, alors $\sigma \vDash \sigma'$ implique $\exists C$ $C \subseteq B$ et $C \in \mathcal{F}_{\sigma_*^{min}}$. $C \subset A$ ce qui contredit $A \in \mathcal{F}_{\sigma_*^{min}}$ donc $B = A$ ce qui entraine $\mathcal{F}_{\sigma_*^{min}} \subseteq \mathcal{F}_{\sigma'^{min}_*}$. Par symétrie de la proposition on a aussi $\mathcal{F}_{\sigma'^{min}_*} \subseteq \mathcal{F}_{\sigma_*^{min}}$.

Soit $A \in \mathcal{F}_{\sigma_*^{max}}$. D'après la proposition précédente, $\sigma \models \sigma'$ implique $\exists B\ A \subseteq B$ et $B \in \mathcal{F}_{\sigma'^{max}_*}$. Si $B \neq A$, alors $\sigma' \models \sigma$ implique $\exists C\ B \subseteq C$ et $C \in \mathcal{F}_{\sigma_*^{max}}$. $A \subset C$ ce qui contredit $A \in \mathcal{F}_{\sigma_*^{max}}$ donc $B = A$ ce qui entraine $\mathcal{F}_{\sigma_*^{max}} \subseteq \mathcal{F}_{\sigma'^{max}_*}$. De la même façon on montre que $\mathcal{F}_{\sigma'^{max}_*} \subseteq \mathcal{F}_{\sigma_*^{max}}$. ■

Proposition 8
Dans le cas binaire si σ, σ' sont deux affectations possibilistes telles que $\mathcal{F}_{\sigma_*^{min}} = \mathcal{F}_{\sigma'^{min}_*}$ et $\mathcal{F}_{\sigma_*^{max}} = \mathcal{F}_{\sigma'^{max}_*}$ alors $\sigma \models \sigma'$ et $\sigma' \models \sigma$.

Preuve: Dans le cas binaire si on considère deux ensembles A et B tels que $A \subset B$ on a soit $\sigma_*(A) = \sigma_*(B) = 0$ soit $\sigma_*(A) = 1$ ou $\sigma_*(B) = 1$ mais pas les deux. Les ensembles des éléments focaux minimum et celui des éléments focaux maximum sont donc identiques. Si les ensembles sont égaux pour deux affectations possibilistes σ et σ', alors $\sigma = \sigma'$ ce qui permet de conclure. ■

6 Les règles de combinaison

Dans la théorie des fonctions de croyance, à côté de la règle bien connue de la combinaison de Dempster (Shafer, 1976) d'autres règles ont été proposées pour la fusion des fonctions de masse. En particulier, la règle de combinaison disjonctive est une autre règle de base (Dubois & Prade, 1986). Ces règles et leurs propriétés se retrouvent dans le cadre qualitatif (Prade & Rico, 2011). Plus précisément on a les résultats suivants :

Définition 9
Soient σ et σ' deux affectations possibilistes.

La règle de combinaison conjonctive est :

$(\sigma \otimes \sigma')(\emptyset) = 0$ *et*

$\forall A \subseteq \Omega$, $(\sigma \otimes \sigma')(A) = \max_{B \cap C = A \neq \emptyset} \min(\sigma(B), \sigma'(C))$.

La règle de combinaison disjonctive est :

$(\sigma \oplus \sigma')(\emptyset) = 0$ *et*

$\forall A \subseteq \Omega$, $(\sigma \oplus \sigma')(A) = \max_{B \cup C = A \neq \emptyset} \min(\sigma(B), \sigma'(C))$.

La règle de combinaison conjonctive a déjà été suggérée dans (Dubois & Prade, 1985).

Remarque : La fonction $\sigma \otimes \sigma'$ est une affectation possibiliste si et seulement si il existe B et C tels que $B \cap C \neq \emptyset$ et $\sigma(B) = \sigma'(C) = 1$. Si les affectations possibilistes sont normales alors $\sigma \oplus \sigma'$ est une affectation possibiliste. De plus la règle de combinaison $\otimes$ conserve les propriétés suivantes :

Proposition 9
$\otimes$ est commutative : $\sigma \otimes \sigma' = \sigma' \otimes \sigma$ pour tout σ, σ'.

$\otimes$ est associative : $(\sigma \otimes \sigma') \otimes \sigma'' = \sigma \otimes (\sigma' \otimes \sigma'')$.

$\otimes$ possède une élément neutre σ_0 : $\sigma_0 \otimes \sigma = \sigma$

avec σ_0 l'affectation possibiliste qui vaut 0 partout sauf pour Ω.

L'opérateur $\oplus$ est aussi commutatif et associatif. Si on note $Bel^{pos} \oplus Bel^{pos\prime}$ la fonction de croyance possibiliste associée à l'affectation possibiliste $\sigma \oplus \sigma'$ et $Q^{pos} \otimes Q^{pos\prime}$ la communalité possibiliste associée à l'affectation possibiliste $\sigma \otimes \sigma'$, alors les propriétés suivantes, vérifiées dans la théorie des fonctions de croyance, restent vraies dans le cas qualitatif.

Proposition 10
$Bel_1^{pos} \oplus Bel_2^{pos} = \min(Bel_1^{pos}, Bel_2^{pos})$ *et* $Q_1^{pos} \otimes Q_2^{pos} = \min(Q_1^{pos}, Q_2^{pos})$.

7 Conclusion

Dans cet article, nous avons esquissé un début de contrepartie qualitative à la théorie des fonctions de croyance. Il est assez remarquable qu'en remplaçant la somme par le maximum, nous préservons des propriétés du cas classique.

Il est clair que si nous avions remplacé la somme par le minimum, au lieu du maximum, on obtiendrait une structure minitive avec des propriétés similaires, mais avec une interprétation différente. Par exemple, $\min_{B \subseteq A} \sigma(B)$ suggère que σ doit maintenant être comprise comme une affectation de nécessité.

Au-delà des résultats présentés dans cet article, de nombreuses questions demeurent. L'une d'entre elles concerne les fonctions de croyance possibilistes. En effet dans le cas classique les fonctions de croyance séparables sont décomposables en fonctions à support simple et cette décomposition est unique. Il semble aussi naturel de définir les fonctions à support simple dans notre contexte (Prade & Rico, 2011), mais cette décomposition sera t-elle toujours possible et unique (Chemin *et al.*, 2011) ?

Par ailleurs, nous avons récemment proposé une méthode pour décrire des objets acceptables par les intégrales de Sugeno (Prade & Rico, 2010). Plus précisément pour des objets décrits par des combinaisons de propriétés, nous avons étudié l'utilisation des intégrales de Sugeno comme un outil de représentation de ces objets. Dans cette méthode l'intégrale de Sugeno a été définie en utilisant la mesure qui est nommée Bel^{pos} dans ce papier. Nous espérons que les implications entre les affectations possibilistes nous aiderons à mieux comprendre les implications entre les intégrales de Sugeno, et comment les objets sont sélectionnés avec les intégrales de Sugeno.

Une autre voie de recherche digne d'intérêt, considérant que plusieurs affectations possibilistes distinctes conduisent aux mêmes fonctions de croyance si elles sont associées à la même borne inférieure de la transformée de Möbius qualitative, serait l'étude d'une extension du cadre présenté ici basée non plus sur $\max$ (et $\min$), mais sur leur raffinement leximin et leximax de façon à éviter des effets de noyade de certains des éléments focaux de l'affectation possibiliste (et sa non-unicité).

Références

BENFERHAT S., HUÉ J., LAGRUE S. & ROSSIT J. (2011). Interval-based possibilistic logic. In *Proc. 22nd Inter. Joint Conf. on Artif. Intellig. (IJCAI'11)*, p. 16–22, Barcelona.

CHEMIN M., RICO A. & PRADE H. (2011). Decomposition of possibilistic belief functions into simple support functions. In *submited*.

DEZERT J. & SMARANDACHE F. (2006). Introduction to the fusion of quantitative and qualitative beliefs. *int. Journal of Information and Security*, **20**, 9–49.

DUBOIS D. (2011). Fuzzy measures on finite scales as families of possibility meas. In *in conf. proc of European Society For Fuzzy Logic and Technology (EUSFLAT-LFA)*, Aix-Les-Bains, France.

DUBOIS D. & FARGIER H. (2009). Capacity refinements and their application to qualitative decision evaluation. In C. SOSSAI & G. CHEMELLO, Eds., *Proc. 10th Europ. Conf. on Symboloic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty (ECSQARU)*, LNCS 5590, p. 311–322, Verona.

DUBOIS D. & PRADE H. (1984). Upper and lower possibilities induced by a multivalued mapping. In E. SANCHEZ, Ed., *Proc. IFAC Symp. on Fuzzy Information, Knowledge Representation and Decision Analysis*, Pergamon Press, p. 152–174, Marseille.

DUBOIS D. & PRADE H. (1985). Evidence measures based on fuzzy information. *Automatica*, **21**, 547–562.

DUBOIS D. & PRADE H. (1986). A set-theoretic view of belief functions. logical operations and approximations by fuzzy sets. *Int. J. General Systems*, **12**, 193–226.

DUBOIS D. & PRADE H. (2004). Possibilistic logic : a retrospective and prospective view. *Fuzzy Sets and Systems*, **144**, 3–23.

GRABISCH M. (2003). The symmetric Sugeno integral. *Fuzzy Sets and Systems*, **139**(3), 473–490.

GRABISCH M. (2004). The Möbius transform on symmetric ordered structures and its application to capacities on finite sets. *Discrete Mathematics*, **287**(1-3), 17–34.

PARSONS S. & MAMDANI E. (1993). Qualitative Dempster-Shafer theory. In *proc. III Imacs International Workshop on Qualitative Reasoning and Decision Technologies*.

PRADE H. & RICO A. (2010). Describing acceptable objects by means of Sugeno integrals. In *Proc. 2nd IEEE International Conference of Soft Computing and Pattern Recognition*, Cergy-Pontoise.

PRADE H. & RICO A. (2011). Possibilistic evidence. In *Conf. on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty (ECSQARU)*, LNCS 5590, p. 713–722, Belfast.

SHAFER G. (1976). *A Mathematical Theory of Evidence*. Princeton Univ. Press. Princeton, NJ.

SUGENO M. (1977). Fuzzy measures and fuzzy integrals : a survey. *Fuzzy Automata and Decision Processes (M.M. Gupta, G.N. Saridis, and B.R. Gaines, eds.)*, p. 89–102.

TSIPORKOVA E. & BAETS B. D. (1998). A general framework for upper and lower possibilities and necessities. *Inter. J. of Uncert., Fuzz. and Knowledge-Based Syst.*, **6**, 1–34.

ZADEH L. A. (1978). Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems*, **1**, 3–28.