Logique Possibiliste à Intervalles

Salem Benferhat[1], Julien Hué[1], Sylvain Lagrue[1], Julien Rossit[2]

[1] CRIL – CNRS UMR 8188 – Université d'Artois
Faculté des sciences Jean Perrin - Rue Jean Souvraz, SP 18
62307 lens Cedex, France
{benferhat,hue,lagrue}@cril.univ-artois.fr

[2] LIPADE – Université Paris Descartes
45 rue des Saints Pères
75270 Paris Cedex 06, France
julien.rossit@parisdescartes.fr

Résumé : La logique possibiliste est un formalisme permettant de raisonner à partir d'informations incertaines représentées à l'aide de bases de croyances pondérées potentiellement incohérentes. Elle associe pour cela à des formules de la logique propositionnelle des degrés strictement positifs issus de l'intervalle [0,1]. Cependant, en pratique, il peut être difficile pour un expert de fournir les degrés exacts à associer aux formules d'une base de croyances.

Cet article propose une représentation flexible de l'information incertaine dans laquelle les poids associés aux formules sont fournis sous forme d'un intervalle. Nous étudions en premier lieu une approche pour raisonner à partir de bases de croyances possibilistes reposant sur les intervalles, en étendant les principaux concepts de la logique possibiliste tels que les mesures de possibilité ou de nécessité. Nous fournissons ensuite une caractérisation d'une base de croyance possibiliste reposant sur les intervalles, par le biais du concept des bases de croyances possibilistes compatibles.

En particulier, nous montrons que la logique possibiliste reposant sur les intervalles étend la logique possibiliste classique lorsque les intervalles sont des singletons. Finalement, nous fournissons un résultat de complexité calculatoire concernant l'obtention des conclusions plausibles d'une base de croyances possibiliste à intervalles. En particulier, nous montrons que considérer cette flexibilité dans la représentation de l'information incertaine ne nécessite aucun coût calculatoire supplémentaire.

1 Introduction

La logique possibiliste (Dubois *et al.*, 1994; Dubois & Prade, 2004) est un formalisme permettant de représenter et de raisonner à partir d'informations incertaines et incomplètes. D'un point de vue syntaxique, l'incertitude est représentée par un ensemble de formules pondérées de la forme $K = \{\langle \varphi_i, \alpha_i \rangle : i = 1, .., n\}$ où φ_i représente une formule propositionnelle, et α_i un nombre réel appartenant à l'intervalle [0,1]. De cette

façon, la paire $\langle \varphi_i, \alpha_i \rangle$ signifie que φ_i est certaine (ou importante) à un degré d'au moins α_i.

Un mécanisme d'inférence a été proposé dans Lang (2000) afin de dériver les conclusions plausibles d'une base de croyances possibiliste, qui nécessite $log_2(m)$ appels au test de satisfiabilité d'un ensemble de clauses propositionnelles (SAT), où m est le nombre de degrés différents employés par K. D'autre part, l'incertitude est représentée au niveau sémantique en associant un degré de possibilité à chaque monde possible (ou interprétation).

Différentes extensions de la logique possibiliste ont été proposée, en particulier pour remplacer l'intervalle unitaire $[0, 1]$ par un treillis complet ou encore un pré-ordre partiel. Par exemple, dans Lafage *et al.* (1999), un ensemble d'hypothèses supportant une formule est utilisé en lieu et place d'un nombre positif réel. Dans Dubois *et al.* (1992b), les degrés sont remplacés par un ensemble de valeurs positives (pas nécessairement incluses dans $[0, 1]$) représentant une fenêtre de temps dans laquelle les formules sont vraies. Dans Benferhat *et al.* (2004); Benferhat & Prade (2006), une extension est proposée afin de traiter des informations partiellement ordonnées. Cependant, ces extensions peuvent augmenter la complexité calculatoire (en particulier dans le cas d'informations partiellement ordonnées), ou encore ne généralisent pas (au sens strict) la logique possibiliste.

Cet article s'inscrit dans l'esprit de ces extensions de la logique possibiliste. Il étudie les fondements théoriques, fournissant une analyse des problèmes calculatoires d'une logique possibiliste basée sur les intervalles. La question abordée par cet article est de savoir si il est possible d'étendre et d'accroitre la puissance d'expressivité de la logique possibiliste standard en représentant l'incertitude associée aux formules par les moyens d'intervalles, sans pour autant augmenter la complexité calculatoire du processus de raisonnement.

Le formalisme considéré dans cet article est celui de la logique possibiliste basée sur les intervalles. Au niveau syntaxique, les informations sont représentées par une base de croyances possibilistes à intervalles, de la forme $IK = \{\langle \varphi_i, I_i \rangle : i = 1, .., n\}$, où $I_i = [\alpha_i, \beta_i]$ est un sous-intervalle fermé de $]0, 1]$. La paire $\langle \varphi_i, I_i \rangle$, appelée formule pondérée par un intervalle, signifie que le poids associé à φ_i est un des éléments de I_i. Cette interprétation disjonctive de $\langle \varphi_i, I_i \rangle$ ne doit pas être confondue avec l'interprétation conjonctive présentée dans Dubois *et al.* (1992b), qui correspond au fait que pour tout $\alpha_i \in I_i$, $\langle \varphi_i, \alpha_i \rangle$ est vraie. Cette interprétation conjonctive a du sens lorsque l'on considère des intervalles de temps, lorsque $\langle \varphi_i, I_i \rangle$ signifie que φ_i est vraie sur l'intégralité de l'intervalle de temps I_i.

De façon similaire, la sémantique de la logique possibiliste basée sur les intervalles est une distribution de possibilités à intervalles, où un sous-intervalle de [0,1] est associé à chaque interprétation. À l'inverse de la logique possibiliste classique, une distribution de possibilités à intervalles n'induit qu'un préordre *partiel* sur l'ensemble des interprétations.

Sur la base d'une interprétation disjonctive de la notion d'intervalle, nous proposons de voir une base de croyances à intervalles comme une famille de bases de croyances possibilistes standards compatibles. Une base possibiliste compatible est obtenue en considérant un unique poids possible de l'intervalle associé à chaque formule. Un pre-

mier résultat intéressant est que raisonner avec l'ensemble de toutes les bases possibilistes compatibles est équivalent à définir le niveau d'incohérence d'une base de croyances possibiliste à intervalles. Nous montrons également que raisonner à partir de bases de croyances possibilistes à intervalles n'est pas plus coûteux que de raisonner à partir de la logique possibiliste standard : nous étendons cette dernière sans coût calculatoire supplémentaire. Nous fournissons également une caractérisation sémantique où une base de croyances possibiliste à intervalles induit un unique préordre partiel sur l'ensemble des interprétations.

La Section 2 présente une brève introduction à la logique possibiliste. La Section 3 ainsi que la Section 4 étudient les représentations sémantique puis syntaxique de la logique possibiliste basée sur les intervalles. La Section 5 étudie le processus d'inférence et présente les résultats en termes de complexité calculatoire qui lui sont associées. Enfin, la Section 6 discute de travaux apparentés.

2 Quelques rappels sur la logique possibiliste

2.1 Distributions de possibilité

Nous considérons un langage propositionnel $\mathcal{L}$ utilisant un nombre *fini* de variables propositionnelles. Nous notons Ω l'ensemble fini des interprétations de $\mathcal{L}$ et ω désigne un élément de Ω.

Une distribution de possibilité, notée π, est une fonction de Ω vers $[0, 1]$. $\pi(\omega)$ représente le degré de compatibilité (ou cohérence) d'une interprétation ω avec les connaissances disponibles. $\pi(\omega) = 1$ signifie que ω est totalement compatible avec les connaissances disponibles, là où $\pi(\omega) = 0$ signifie que ω est impossible. $\pi(\omega) > \pi(\omega')$ signifie simplement que ω est plus compatible que ω'. Une distribution de possibilité π est dite normalisée si il existe une interprétation ω telle que $\pi(\omega) = 1$. Celle-ci est dite sous-normalisée sinon. Les distributions de possibilité sous-normalisées encodent des ensembles de croyances incohérents.

Une distribution de possibilité permet de définir deux fonctions de $\mathcal{L}$ vers $[0, 1]$ appelées mesures de possibilité et de nécessité, notée Π et N, définies par :

$$\Pi(\varphi) = \max\{\pi(\omega) : \omega \in \Omega,\ \omega \models \varphi\},\ \text{ et}$$

$$N(\varphi) = 1 - \Pi(\neg\varphi).$$

$\Pi(\varphi)$ indique dans quelle mesure la formule φ est compatible avec l'ensemble des connaissances disponibles, alors que $N(\varphi)$ apprécie dans quelle mesure celle-ci peut être déduite.

Étant donnée une distribution de possibilité π encodant un ensemble de connaissances disponibles, une formule φ est dite conséquence de π, noté $\pi \models_\pi \varphi$, si et seulement si $\Pi(\varphi) > \Pi(\neg\varphi)$. Intuitivement, φ est conséquence de π si les meilleurs modèles de φ (les modèles de φ associés aux degrés les plus forts) sont plus plausibles (ou préférés) que les meilleurs modèles de $\neg\varphi$.

2.2 Base de croyances possibiliste

Une formule possibiliste est un tuple $\langle\varphi,\alpha\rangle$ où φ est un élément de $\mathcal{L}$ et $\alpha \in (0,1]$ est une valuation de φ représentant $N(\varphi)$. Remarquons qu'il est possible de ne considérer aucune formule de la forme $\langle\varphi,0\rangle$, dans la mesure où celles-ci n'apportent aucune information. Une base de croyances $K = \{\langle\varphi_i,\alpha_i\rangle, 1 \leq i \leq n\}$ est un ensemble de formules possibilistes.

Une notion importante, jouant un rôle central dans le processus d'inférence, est celle d'α-coupe stricte. Une α-coupe stricte, notée K_α, est l'ensemble des formules propositionnelles définies par $K_\alpha = \{\varphi \,:\, \langle\varphi,\beta\rangle \in K \text{ et } \beta > \alpha\}$.

L'α-coupe stricte est une notion utile pour mesurer le degré de cohérence de K, définie par $Inc(K) = \max\{\alpha \,:\, K_\alpha \text{ en cas d'incohérence}, \alpha = 0\}$ sinon.

Si $Inc(K) = 0$, alors K est dite totalement cohérente. Si une base possibiliste est partialement incohérente, alors $Inc(K)$ peut être vu comme un seuil à partir duquel toute formule est considérée comme non suffisamment fondée pour être prise en compte dans le processus d'inférence. Plus précisément, nous définissons la notion de noyau d'une base de croyances comme étant composé des formules associées à un degré de certitude supérieur à $Inc(K)$, soit formellement :

$$\mathcal{C}ore(K) = K_{Inc(K)} = \{\varphi : \langle\varphi,\alpha\rangle \in K \text{ et } \alpha > Inc(K)\}$$

Une formule φ est une conséquence d'une base possibiliste K, dénoté $K \vdash_\pi \varphi$, si et seulement si $\mathcal{C}ore(K) \vdash \varphi$.

Une base de croyances possibiliste est une représentation compacte répandue d'une distribution de possibilité. Étant donnée une base possibiliste K, nous pouvons générer une unique distribution possibiliste où chaque interprétation ω satisfaisant toute formule propositionnelle de K est associée au degré le plus haut possible, soit $\pi(\omega) = 1$ (puisqu'elles sont totalement cohérentes), là où les autres sont ordonnées vis-à-vis de la formule la plus importante qu'elles falsifient. Plus formellement :

$$\forall\omega \in \Omega, \pi_K(\omega) = \begin{cases} 1 \text{ si } \forall\langle\varphi,\alpha\rangle \in K,\ \omega \models \varphi \\ 1 - max\{\alpha_i : \langle\varphi_i,\alpha_i\rangle \in K, \omega \not\models \varphi_i\} \text{ sinon.} \end{cases}$$

Le résultat de complétude et d'adéquation suivant est vérifié :

$$K \vdash_\pi \varphi \text{ ssi } \pi_K \models_\pi \varphi.$$

3 Distributions de possibilités à intervalles

L'objectif de cette section est l'étude d'un cadre plus générale, où l'incertitude n'est pas encodée au moyen d'une simple valeur de nécessité mais par le biais d'un intervalle de degrés possibles. Ce cadre permet l'introduction d'une imprécision sur la priorité associée aux croyances. Nous utilisons des intervalles de nombres réels de la forme $I = [\alpha,\beta] \subseteq [0,1]$ afin d'encoder l'incertitude associée aux formules. Nous notons $\mathcal{I}$ l'ensemble de tous les intervalles inclus dans $[0,1]$.

Opérations sur les intervalles Étant donnés $I_1 = [\alpha_1,\beta_1]$ et $I_2 = [\alpha_2,\beta_2]$ deux intervalles, nous définissons les opérations suivantes qui seront utilisées dans la suite, et

garantissent la cohérence de cet article. En particulier, elles permettent l'extension de la logique possibiliste standard lorsque les intervalles sont des singletons de la forme $[\alpha, \alpha]$.

- Maximum d'intervalles : étant donné un ensemble d'intervalles $I_i = [\alpha_i, \beta_i]$ $\mathcal{M}\{I_1, \ldots, I_n\} = [\max\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}, \max\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}]$
- Inverse d'un intervalle : $1 \ominus I_1 = [1 - \beta_1, 1 - \alpha_1]$
- Comparaison d'intervalles : $I_1 \lhd I_2$ ssi $\beta_1 < \alpha_2$

Intuitivement, quand I_1 et I_2 sont associés à deux formules φ_1 et φ_2, alors $I_1 \lhd I_2$ signifie que la formule φ_2 est strictement préférée à φ_1. Cette attitude est clairement une interprétation sûre (mais prudente) de la notion de préférence. En effet, en utilisant la relation $\lhd$, $\langle \varphi_2, I_2 \rangle$ est préférée à $\langle \varphi_1, I_1 \rangle$ si quelque soir le degré assigné à φ_2 en provenance de I_2, il sera plus grand que le degré associé à φ_1 obtenue de I_1.

Distributions de possibilités à intervalles et compatibles Une distribution de possibilités à intervalles, notée $\pi_{\mathcal{I}}$, est une fonction de Ω vers $\mathcal{I}$. $\pi_{\mathcal{I}}(\omega) = I$ signifie que le degré de possibilité associé à ω est un des éléments de I. $\pi_{\mathcal{I}}$ n'induit seulement qu'un préordre partiel sur les interprétations, défini par $\omega < \omega'$ (ω' est préférée à ω) si et seulement si $\pi_{\mathcal{I}}(\omega) \lhd \pi_{\mathcal{I}}(\omega')$. Puisque $\lhd$ est un préordre partiel, une distribution de possibilités à intervalles n'induit qu'un préordre partiel sur les interprétations. Une distribution de possibilités à intervalles peut être vue comme une famille de distributions de possibilités standard compatibles définie par :

Définition 1
Soit $\pi_{\mathcal{I}}$ une distribution de possibilité à intervalles. Une distribution de possibilité π est dite compatible avec $\pi_{\mathcal{I}}$ si et seulement si $\forall \omega \in \Omega,\ \pi(\omega) \in \pi_{\mathcal{I}}(\omega)$.

Il n'existe pas une distribution compatible unique. Nous notons $\mathcal{C}mp(\pi_{\mathcal{I}})$ l'ensemble de toutes les distributions de possibilités compatibles avec $\pi_{\mathcal{I}}$. Une distribution de possibilités à intervalles est normalisée s'il existe une interprétation ω, telle que $\pi_{\mathcal{I}}(\omega) = [1, 1]$. Il peut être constater que $\pi_{\mathcal{I}}$ est normalisée si et seulement si toutes ses distributions compatibles sont normalisées.

Mesures de nécessité et de possibilité Une façon naturelle de définir la contrepartie des mesures de possibilité et de nécessité associées à une formule φ à partir d'une distribution de possibilité à intervalles est de prendre en compte l'ensemble de toutes les distributions compatibles, c'est à dire :

Définition 2
Soit $\pi_{\mathcal{I}}$ une distribution de possibilité à intervalles et soit φ une formule. Alors :

$$\Pi_{\mathcal{I}}(\varphi) = [\min_{\pi \in \mathcal{C}mp(\pi_{\mathcal{I}})} \Pi(\varphi), \max_{\pi \in \mathcal{C}mp(\pi_{\mathcal{I}})} \Pi(\varphi)],\ \textit{et}$$

$$N_{\mathcal{I}}(\varphi) = [\min_{\pi \in \mathcal{C}mp(\pi_{\mathcal{I}})} N(\varphi), \max_{\pi \in \mathcal{C}mp(\pi_{\mathcal{I}})} N(\varphi)]$$

L'intervalle des degrés de possibilité associé à une formule représente toutes les valeurs possibles qui peuvent être obtenues à partir de l'ensemble des distributions compatibles. La proposition suivante montre que les degrés de possibilité et de nécessité peuvent être calculés directement et de façon équivalente en utilisant les distributions de possibilités à intervalles :

Proposition 1
Soit $\pi_{\mathcal{I}}$ une distribution de possibilités à intervalles, et soit φ une formule. Alors :

$$\Pi_{\mathcal{I}}(\varphi) = \mathcal{M}\{\pi_{\mathcal{I}}(\omega) : \omega \in \Omega, \omega \models \varphi\} \text{ et}$$

$$N_{\mathcal{I}}(\varphi) = 1 \ominus \Pi_{\mathcal{I}}(\neg\varphi)$$

avec $1\ominus$ et $\mathcal{M}$ respectivement les opérations inverse et maximum sur les intervalles définies précédemment.

Il est possible de montrer que dans des cas particuliers où les intervalles fournis par les distributions de possibilités sont des singletons, notre approche coïncide avec les définitions standard des mesures de la logique possibiliste. Formellement :

Proposition 2
Dans les cas où les intervalles de $\pi_{\mathcal{I}}$ sont seulement des singletons (en d'autres termes, quels que soient $\omega, \pi_{\mathcal{I}}(\omega) = [\alpha, \alpha]$) alors :

(i) *$\pi_{\mathcal{I}}$ possède une unique distribution de possibilités compatibles π et*

(ii) *$\Pi_{\mathcal{I}}(\varphi) = [\Pi(\varphi), \Pi(\varphi)]$ et $N_{\mathcal{I}}(\varphi) = [N(\varphi), N(\varphi)]$ où N et Π sont les mesures possibilistes standards.*

Définition 3
Étant donnée une distribution de possibilités à intervalles $\pi_{\mathcal{I}}$, une formule φ est dite acceptée, ou conséquence de $\pi_{\mathcal{I}}$, noté $\pi_{\mathcal{I}} \models_{\mathcal{I}} \varphi$, si et seulement si $\Pi_{\mathcal{I}}(\neg\varphi) \lhd \Pi_{\mathcal{I}}(\varphi)$.

Il peut être montré que le Définition 3 peut être reformulée au moyen de distributions de possibilité compatibles, formellement :

$$\pi_{\mathcal{I}} \models_{\mathcal{I}} \varphi \text{ ssi } \forall \pi \in \mathcal{C}mp(\pi_{\mathcal{I}}), \Pi(\varphi) > \Pi(\neg\varphi).$$

D'un point de vue sémantique, l'utilisation de distributions de possibilités compatibles représente une justification solide des concepts principaux de la logique des possibilités à intervalles : les mesures de possibilité et de nécessité à intervalles, et la condition de normalisation. La section suivante montre que ceci se tient au niveau syntaxique de la représentation de la logique possibiliste à intervalles.

4 Base possibiliste à intervalles

Nous étudions dans cette section la représentation syntaxique de la logique possibiliste basée sur les intervalles. Pour cela, nous généralisons la notion de base possibiliste à celle de base de croyances possibiliste à intervalles.

Définition 4 (Base possibiliste à intervalles)
Une base possibiliste à intervalles, notée IK, est un multi-ensemble de formules associées à des intervalles :

$$IK = \{\langle\varphi, I\rangle, \varphi \in \mathcal{L} \text{ et } I \in \mathcal{I}\}$$

Cette représentation intuitive de $\langle \varphi, I \rangle$ signifie que le degré associé à φ est un des éléments de $I = [\alpha, \beta]$. De façon similaire à la logique possibiliste classique, nous ne permettons pas à α de valoir 0. De cette façon, nous ne représentons explicitement que les informations acceptées. L'utilisation d'intervalles ouverts, ou d'intervalles incluant 0 fera l'objet de futures recherches.

Exemple 1
Nous utiliserons la base de croyance possibiliste à intervalles suivante pour illustrer les concepts principaux de cet article :

$$IK = \{\langle a, [.7, .9] \rangle, \langle a \wedge b, [.55, .8] \rangle, \langle \neg a, [.5, .6] \rangle, \langle \neg b, [.1, .3] \rangle\}$$

4.1 Bases compatibles

Une base possibiliste à intervalles IK peut être vue comme une famille de bases possibilistes standard, appelées bases compatibles. Une base possibiliste à intervalles K est dite compatible avec IK si et seulement si il existe une bijection de IK vers K telle que pour chaque formule associée avec un intervalle I de IK, le degré de cette formule dans K est un élément de I. Plus formellement :

Définition 5 (Base possibiliste à intervalles)
Une base possibiliste K est dite compatible avec une base possibiliste à intervalles IK si et seulement si il existe une bijection f de IK vers K telle que $\{f(\langle \varphi, [\alpha, \beta] \rangle) = \langle \varphi, \delta \rangle \in K$ t.q. $\alpha \leq \delta \leq \beta\}$

En d'autres termes, les bases possibilistes compatibles sont obtenues à partir des bases possibilistes à intervalles en remplaçant chaque formule possibiliste à intervalles $\langle \varphi, I \rangle$ par une formule possibiliste classique $\langle \varphi, \delta \rangle$ où $\delta \in I$. Chaque base possibiliste compatible est telle que $K = \{\langle \varphi, \delta \rangle \ : \ \langle \varphi, I \rangle \in IK$ et $\delta \in I\}$.

Nous notons $\mathcal{C}mp(IK)$ l'ensemble infini des bases possibilistes compatibles associées à une base possibiliste à intervalles IK.

Étant donnée une base possibiliste à intervalles IK, nous définissons deux bases compatibles particulières, notées IK_{lb} et IK_{ub}, en sélectionnant respectivement soit la borne inférieure de l'intervalle (point de vue pessimiste), soit la borne supérieure (point de vue optimiste) :

(i) $IK_{lb} = \{\langle \varphi, \alpha \rangle \ : \ \langle \varphi, [\alpha, \beta] \rangle \in IK\}$

(ii) $IK_{ub} = \{\langle \varphi, \beta \rangle \ : \ \langle \varphi, [\alpha, \beta] \rangle \in IK\}$

Exemple 2
Le Tableau 1 présente cinq exemples de bases possibilistes compatibles. La valeur de nécessité associée à chaque formule de chacune de ces bases standard appartient à l'intervalle qui leur est respectivement associé dans IK. Les bases compatibles K_1 et K_5 fournies par le Tableau 1 correspondent respectivement à IK_{lb} et IK_{ub}.

IK		K_1	K_2	K_3	K_4	K_5
a	[.7,.9]	.7	.7	.8	.8	.9
$a \wedge b$	[.55,.8]	.55	.6	.6	.6	.8
$\neg a$	[.5,.6]	.5	.55	.56	.58	.6
$\neg b$	[.1,.3]	.1	.2	.2	.2	.3

TABLE 1 – Exemples de bases compatibles

4.2 Inférence à partir des bases compatibles

La relation d'inférence à partir d'une base possibiliste à intervalles peut être définie à partir de l'ensemble des bases possibilistes compatibles. En d'autres termes, une formule φ est une conclusion plausible d'une base possibiliste à intervalles IK si et seulement si elle peut être déduite de chaque base possibiliste appartenant à $\mathcal{C}mp(IK)$. Formellement :

$$IK \vdash_c \varphi \text{ ssi } \forall K \in \mathcal{C}mp(IK), K \vdash_\pi \varphi$$

où $\vdash_\pi$ est défini Section 2.2.

4.3 Des bases possibilistes à intervalles aux distributions possibilistes à intervalles

De même que dans le cadre des bases possibilistes standard, une base de croyances possibiliste à intervalles IK permet également la représentation compacte d'une distribution de possibilités à intervalles π_{IK}. Cette distribution de possibilités peut être obtenue par le biais : i) d'une extension de la définition de π_K donnée par la Section 2.2 afin de manipuler les intervalles, ii) des distributions de possibilités obtenues des bases compatibles, et iii) des deux bases compatibles particulières IK_{lb} et IK_{ub}. Ceci est résumé par la Définition 6 et la Proposition 3

Définition 6 (Distribution de possibilités à intervalles)
Soit IK une base possibiliste à intervalles. Alors :

$$\pi_{IK}(\omega) = [\min_{K \in \mathcal{C}mp(IK)} \pi_K(\omega), \max_{K \in \mathcal{C}mp(IK)} \pi_K(\omega)]$$

où π_K est la distribution possibiliste standard associée à la base compatible K.

Proposition 3
La définition de π_{IK} de la Définition 6 est équivalente à :

i) $\pi_{IK}(\omega) = [\pi_{IK_{ub}}(\omega), \pi_{IK_{lb}}(\omega)]$, *en d'autres termes $\pi_{IK}(\omega)$ est bornées par les poids associés à ω respectivement par les bases particulières IK_{lb} et IK_{ub}*

ii) $\pi_{IK}(\omega) = \begin{cases} [1,1] \text{ si } \forall(\varphi, I) \in IK,\ \omega \models \varphi \\ 1 - \mathcal{M}\{I : (\varphi, I) \in IK,\ \omega \not\models \varphi\} \text{ sinon.} \end{cases}$

Un résultat important se trouve dans le fait que la relation d'inférence à partir de π_{IK} est équivalente à considérer la relation d'inférence basée sur l'ensemble des bases compatibles. En d'autres termes, le résultat de cohérence et de complétude est également vérifié dans le cadre de la logique possibiliste basée sur les intervalles :

Proposition 4
Soit IK une base possibiliste à intervalles. Alors :

$$IK \models_c \varphi \quad \textit{ssi} \quad \Pi_{IK}(\neg\varphi) \lhd \Pi_{IK}(\varphi).$$

Exemple 3
L'Exemple 1, nous donne $IK_{lb} = \{\langle a, .7\rangle, \langle a \wedge b, .55\rangle, \langle \neg a, .5\rangle, \langle \neg b, .1\rangle\}$ et $IK_{ub} = \{\langle a, .9\rangle, \langle a \wedge b, .8\rangle, \langle \neg a, .6\rangle, \langle \neg b, .3\rangle\}$. Le Tableau 2 fournit les distributions de possibilités induites par IK_{lb} et IK_{ub}.

$\omega_i \in \Omega$	a	b	$\pi_{IK_{lb}}(\omega_i)$	$\pi_{IK_{ub}}(\omega_i)$	$\pi_{IK}(\omega_i)$
ω_0	0	0	.3	.1	[.1,.3]
ω_1	0	1	.3	.1	[.1,.3]
ω_2	1	0	.45	.2	[.2,.45]
ω_3	1	1	.5	.4	[.4,.5]

TABLE 2 – Distributions de possibilités à intervalles

D'après le Tableau 2, nous avons, par exemple, $\pi_{IK} \models a$ puisque $\Pi_{IK}(\neg a) = [.5, .6] \lhd \Pi_{IK}(a) = [.7, .9]$.

5 Analyse d'un point de vue calculatoire

5.1 Degré d'incohérence

La section précédente fournit la définition d'une relation d'inférence à partir d'une base de croyances possibiliste à intervalles, utilisant le concept de base compatible ou de la distribution de possibilités qui lui est associée. Cette section se concentre sur les problèmes calculatoires en proposant une caractérisation syntaxique de cette relation d'inférence.

Cette caractérisation est basée sur une extension naturelle de la notion de degré d'incohérence, et de celle du noyau d'une base de croyance possibiliste utilisé par la logique possibiliste classique (voir Section 2).

À nouveau, une façon de définir le degré d'incohérence associé à une base de croyances possibiliste à intervalles est de considérer l'ensemble des degrés d'incohérences associés à chaque base possibiliste compatible avec IK. Formellement :

Définition 7 (Degré d'incohérence basé sur les intervalles)
Soit IK une base possibiliste à intervalles. Alors :

$$Inc(IK) = \{Inc(K) \ : \ K \in \mathcal{C}mp_{IK}\}$$

La proposition suivante montre que $Inc(IK)$, l'ensemble des degrés d'incohérence associés à chaque base compatible, constitue un intervalle. Formellement :

Proposition 5
Soit IK une base possibiliste à intervalles. Alors : $Inc(IK) = [Inc(IK_{lb}), Inc(IK_{ub})]$.

5.2 Noyau d'une base possibiliste à intervalles

Le noyau de IK est intuitivement l'ensemble des formules propositionnelles dont les intervalles associés sont plus grand que $Inc(IK)$ au sens de $\triangleleft$ fourni par la Section 4.2. Formellement :

Définition 8
Soit IK une base possibiliste à intervalles. Alors :

$$\mathcal{C}ore(IK) = \{\varphi \ : \ \langle \varphi, I \rangle \in IK \text{ et } Inc(IK) \triangleleft I\}$$

La Proposition 6 ci-après montre que $\mathcal{C}ore(IK)$ est cohérent et est inclus dans le noyau de chaque base compatible, soit encore :

Proposition 6
Soit IK une base possibiliste à intervalles. Alors :

i) $\mathcal{C}ore(IK)$ *est cohérent ;*

ii) $\forall K \in \mathcal{C}mp_{IK}, \mathcal{C}ore(IK) \subseteq \mathcal{C}ore(K)$.

Finalement, la proposition suivante montre que les conclusions plausibles dérivées de $\mathcal{C}ore(IK)$ sont les mêmes que celles obtenues de l'intégralité de l'ensemble des bases compatibles. En corollaire, elles sont également les mêmes que celles fournies au niveau sémantique.

Proposition 7
Soit IK une base possibiliste à intervalles. Alors : $\forall \psi \in \mathcal{L}$:

$$IK \models_c \psi \text{ ssi } \mathcal{C}ore(IK) \vdash \psi \text{ ssi } \forall K \in \mathcal{C}mp_{IK}, \mathcal{C}ore(K) \vdash \psi$$

Exemple 4
Considérant à nouveau l'exemple 1, nous avons $IK_{lb} = \{\langle a, .7\rangle, \langle a \wedge b, .55\rangle, \langle \neg a, .5\rangle, \langle \neg b, .1\rangle\}$ et $IK_{ub} = \{\langle a, .9\rangle, \langle a \wedge b, .8\rangle, \langle \neg a, .6\rangle, \langle \neg b, .3\rangle\}$. Ainsi, nous obtenons $Inc(IK_{lb}) = .5$ et $Inc(IK_{ub}) = .6$, et ainsi $Inc(IK) = [.5, .6]$.

De cette façon, $\mathcal{C}ore(IK) = \{a\}$. Il est possible de vérifier que les conclusions obtenues de l'Exemple 3 sont les mêmes que celles obtenues en considérant $\mathcal{C}ore(IK)$.

5.3 Complexité calculatoire

Cette sous-section analyse le complexité calculatoire du processus d'inférence introduit dans cet article. Nous rappelons que le problème de décision « Une formule ψ est elle la conséquence d'une base possibiliste standard ? » est un problème Δ_p^2-complet (Nebel (1994)). Puisque lorsque les intervalles sont des singletons, l'inférence à partir de bases possibilistes à intervalles correspond à celle utilisé dans le cadre de la logique possibiliste standard, notre relation d'inférence est au moins Δ_p^2. En fait, celle-ci est exactement $\Delta_p^2 - complet$:

Proposition 8
Le problème de décision « Une formule ψ est-elle la conséquence d'une base possibiliste à intervalles ? « est un problème $\Delta_p^2 - complet$.

La Proposition 8 montre que les bases possibilistes à intervalles offrent un cadre plus flexible pour la représentation des informations incertaines sans coût calculatoire supplémentaire. La complexité calculatoire du raisonnement à partir de telles bases est en effet du même ordre de magnitude que celle observée dans le cas de bases possibilistes classiques.

Algorithme 1 Calculer les conséquences d'une base possibiliste à intervalles

ENTRÉES: IK, ψ
SORTIES: Vrai si ψ est une conséquence de IK. Faux sinon.

1: Calculer IK_{lb}
2: Calculer $Inc(IK_{lb})$
3: Calculer IK_{ub}
4: Calculer $Inc(IK_{ub})$
5: $Inc(IK) \leftarrow [Inc(IK_{lb}), Inc(IK_{ub})]$
6: $\mathcal{C}ore(IK) \leftarrow \emptyset$
7: **pour tout** $\langle \varphi, I \rangle \in IK$ **faire**
8: **si** $Inc(IK) \triangleleft I$ **alors**
9: $\mathcal{C}ore(IK) \leftarrow \mathcal{C}ore(IK) \cup \{\varphi\}$
10: **finsi**
11: **fin pour**
12: **renvoyer** $\mathcal{C}ore_{IK} \vdash \psi$

Détaillons maintenant l'Algorithme 1). Celui-ci est de complexité $O(log_2(n) \times SAT)$ où SAT est le test de satisfiabilité propositionnelle et $n = \max(m_{lb}, m_{ub})$, où m_{lb} (resp. m_{ub}) est le nombre de degré différents dans IK_{lb} (resp. IK_{ub}). L'algorithme calcule d'abord $\mathcal{C}ore(IK)$. Cette étape est accomplie en déterminant IK_{lb} et IK_{ub} et leur degré d'incohérence associés (Étapes 1-5). Ces étapes nécessitent $2 \times log_2(n)$ appels à un oracle SAT. Les Étapes 6-10 calculent $\mathcal{C}ore(IK)$ depuis IK en considérant les formules propositionnelles φ dont l'intervalle associé est plus grand que $Inc(IK)$. Cette étape est de complexité $O(|IK|)$ où $|IK|$ est le nombre de formules de IK. La dernière étape nécessite un unique appel à SAT afin de vérifier si ψ est une conséquence de $\mathcal{C}ore(IK)$. Ainsi, dériver les conclusions plausible peut être accompli en $O(log_2(N))$ appels à la résolution d'un problème SAT.

6 Travaux associés

Dans Dubois *et al.* (1992b), une extension de la logique possibiliste, *Timed Possibilistic Logic* (TPL), a été proposée afin de gérer des informations temporelles. Les formules sont pondérées grâce à des ensembles finis de valeurs dont les bornes sont des nombres réels quelconques (les intervalles n'appartiennent pas forcément à $[0, 1]$). Elles représentent des trames temporelles où les formules sont vraies, autrement dit la valeur de nécessité de la formule est positive pour la formule dans l'intervalle de temps associé. La sémantique sous-jacente diffère de la notre dans le sens où nous considérons une interprétation disjonctive en ne considérant comme vrai qu'un seul élément de l'intervalle. Par conséquent, les outils et les opérateurs utilisés dans Dubois *et al.* (1992b) (comme les opérateurs d'union et d'intersection) diffèrent de ceux que nous avons utilisés.

D'un point de vue plus technique (et indépendamment des problème de représentation) notre approche étend la logique possibiliste classique, ce qui n'est pas forcément le cas de TPL. Par exemple, si ω_1 et ω_2 sont les seuls modèles d'une formule φ, et si $\pi(\omega_1) = [.3, .3]$, $\pi(\omega_2) = [.4, .4]$ (c'est-à-dire que les intervalles sont réduits à des singletons), alors avec notre approche nous obtenons $\Pi(\varphi) = [.4, .4]$, alors qu'en utilisant celle décrite dans Dubois *et al.* (1992b) nous obtenons $\Pi(\varphi) = [.3, .4]$, qui n'est plus un singleton. Néanmoins, les différences entre nos approches respectives s'expliquent par l'interprétation différente que nous associons aux intervalles : TPL est définie pour des informations temporelles alors que la notre est plus orientée vers des situations où l'incertitude associée aux formules est imprécise.

La *logique des supporters* proposée dans Lafage *et al.* (1999) est très proche de celle donnée dans Dubois *et al.* (1992b). La différence principale se situe une nouvelle fois dans la signification des intervalles : ils sont ici considérés en tant que justification (dans le sens d'un ATMS) d'une formule. Cette approche est également conjonctive ne permets pas réellement de traiter des imprécisions.

Dans un article plus récent, Marquis & Öztürk (2009) ont proposés de représenter les préférences grâce à des formules pondérées par des intervalles. Les intervalles ne représentent pas un degré associé à la formule mais une connaissance sur une valeur numérique quelconque. Par exemple, une formule $\langle hauteur, \geq, 6, \leq, 7\rangle$ représente la connaissance qu'une valeur $hauteur$ est incluse entre 6 et 7. L'objectif de cet article est de représenter de manière compacte les ordres d'intervalles associés aux interprétations en utilisant ces formules pondérées. Ils ont étudiés certaines familles d'opérateurs d'agrégation et fournis plusieurs résultats concernant la complexité. Leur travail est orienté vers le problème de décision et de représentation compacte de préférence ; ils ne traitent pas de problèmes d'inférence.

Conclusion

Cet article propose les fondations pour le raisonnement à l'aide de bases possibilistes à intervalles. La méthode proposée étend la logique possibiliste classique dans le cas où les intervalles sont des singletons. La flexibilité dans la représentation des informations incertaines est obtenues en utilisant le concept de bases compatibles. Nous avons

montré que les mesures de possibilité et de nécessité ainsi que la distribution de possibilité peuvent être calculés simplement et sans coût calculatoire supplémentaire. Ainsi, le problème de décision dans le cadre de la logique possibiliste à intervalles est Δ_p^2-complet. Finalement, lorsque les intervalles sont des singletons, toutes les relations de conséquences données dans cet article sont équivalentes à celle de la logique possibiliste classique.

Ce travail ouvre différentes perspectives. Par exemple, il a été brièvement proposé dans Dubois & Prade (2004) une extension du principe de résolution aux intervalles. Il serait intéressant de comparer cette définition à notre cadre. Il serait également intéressant d'étudier ce principe de résolution par rapport à différentes extensions basées sur d'autres ordres sur les intervalles et proposées dans Benferhat *et al.* (2011) (dont d'ailleurs ce présent article reprend les principaux résultats). Un autre problème intéressant serait d'établir les liens entre notre formalisme et celui de la logique possibiliste multi-source présentée dans Dubois *et al.* (1992a). Enfin, un travail futur consisterait en l'étude de la fusion, de la révision et du conditionnement dans le cadre de la logique possibiliste à intervalles.

Références

BENFERHAT S., HUÉ J., LAGRUE S. & ROSSIT J. (2011). Interval-based possibilistic logic. In *Proceedings of the 22nd International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'11)*. To appear.

BENFERHAT S., LAGRUE S. & PAPINI O. (2004). Reasoning with partially ordered information in a possibilistic framework. *Fuzzy Sets and Systems*, **144**, 25–41.

BENFERHAT S. & PRADE H. (2006). Compiling possibilistic knowledge bases. In *Proc. of ECAI'06*, p. 337–341.

DUBOIS D., LANG J. & PRADE H. (1992a). Dealing with multi-source information in possibilistic logic. In *Proceedings of the 10th European Conference on Artificial Intelligence (ECAI'92)*, p. 38–42.

DUBOIS D., LANG J. & PRADE H. (1992b). Timed possibilistic logic. *Fundamenta Informaticae*, **XV**, 211–234.

DUBOIS D., LANG J. & PRADE H. (1994). Possibilistic logic. In *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming*, volume 3, p. 439–513.

DUBOIS D. & PRADE H. (2004). Possibilistic logic : a retrospective and prospective view. *Fuzzy sets and systems*, **144**, 3–23.

LAFAGE C., LANG J. & SABBADIN R. (1999). A logic of supporters. In *Information, uncertainty and fusion*, p. 381–392. Springer.

LANG J. (2000). Possibilistic logic : complexity and algorithms. In *Handbook of Defeasible Reasoning and Uncertainty Management Systems*, volume 5, p. 179–220. Kluwer Academic.

MARQUIS P. & ÖZTÜRK M. (2009). Representing interval orders by weighted bases : Some complexity results. *Mathematical Social Sciences*, **57**, 367–388.

NEBEL B. (1994). Base revision operations and schemes : semantics, representation and complexity. In *Proc. of ECAI'94*, p. 341–345.