De l'organisation hexagonale des concepts de Blanché à l'analyse formelle de concepts et à la théorie des possibilités

Didier Dubois Henri Prade

Institut de Recherche en Informatique de Toulouse - IRIT
Université de Toulouse, 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex 09, France
dubois@irit.fr, prade@irit.fr

Résumé : L'article introduit tout d'abord un cube d'oppositions qui associe le traditionnel carré des oppositions au carré dual obtenu par réciprocation (au sens de Piaget). On montre ensuite que l'extension de Blanché du carré des oppositions en une structure hexagonale conceptuelle repose toujours sur une partition abstraite à 3 éléments. Considérer des partitions à 4 éléments permet d'organiser les 16 connecteurs binaires en un tétraèdre régulier. Enfin, on montre que le cube d'oppositions, une fois interprété en termes modaux, correspond à une généralisation récente de l'analyse formelle de concepts, où des hexagones remarquables apparaissent. Cette généralisation de l'analyse formelle de concepts a été motivée par un parallèle avec la théorie bipolaire des possibilités qui est basée sur 4 fonctions d'ensembles, lesquelles, quoique graduées, peuvent être structurées de manière similaire.

1 Introduction

L'idée d'opposition n'est pas toujours une notion binaire. En effet, tandis que la négation involutive (bi-valuée) classique induit des dichotomies, une partition en plus de deux parties induit implicitement une forme plus riche d'oppositions. Au niveau linguistique, on a remarqué depuis l'antiquité grecque, qu'un énoncé (A) de la forme "tout X est Y" a pour négation l'énoncé (O) "au moins un X n'est pas Y", tandis qu'un énoncé tel que (E) "aucun X n'est Y" correspond clairement à une forme d'opposition encore plus forte au premier énoncé (A). Ces trois énoncés, et la négation de (E), c'est-à-dire (I) "au moins un X est Y", donnent naissance au carré des oppositions bien connu (21), traditionellement associé aux lettres A, I (moitié affirmative) et E, O (moitié négative). Ce carré remonte à Aristote et a été discusté plus avant par Apulée, Boèce et ensuite les logiciens du Moyen-Age.

Notons que d'autres énoncés peuvent être associés à (A) : la négation peut en effet plutôt porter 1) sur X, ou 2) à la fois sur X et Y, c'est-à-dire

1. (e) : "tout non-X est Y", et

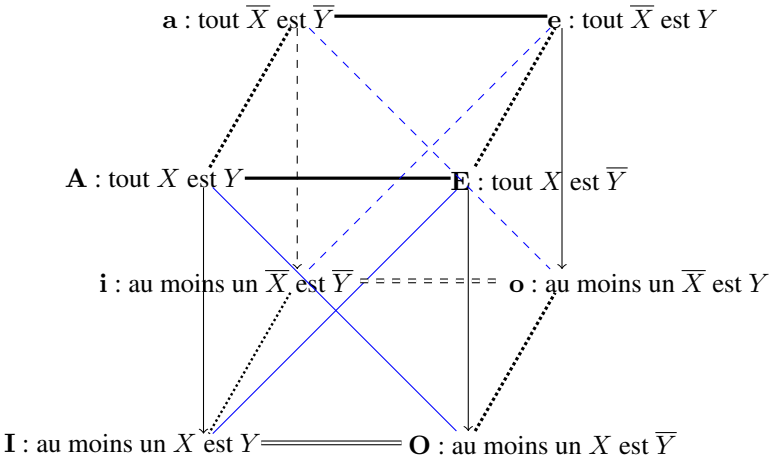

FIGURE 1 – Cube des oppositions

2. (a) : "tout non-X est non-Y",

qui peuvent être eux-même niés, ce qui donne (i) : "au moins un non-X est non-Y" et (o) :"au moins un non-X est Y" respectivement.
Il est intéressant de constater que George Boole (8) et Augustus De Morgan (9) ont considéré ces derniers énoncés en utilisant les transformations correspondant à (e) et (a) respectivement. La dénotation des énoncés par a, i, e, o a été proposée par De Morgan [1] (9).

On est ainsi amené à considérer 8 énoncés, A, I, E, O, a, i, e, o qui peuvent être organisés dans ce qu'on peut appeler un *cube d'opposition* [2] comme celui de la Figure 1, où $\overline{X}$ (resp. $\overline{Y}$) dénote non-X (resp. non-Y). La face de devant du cube est le carré traditionnel des oppositions, A, I, E, O, où les lignes épaisses lient des contraires, les lignes fines doubles sans flèche lient des sous-contraires, les lignes diagonales sans flèche lient des contradictoires, et les flèches verticales pointent sur les subalternes (et expriment des implications si l'ensemble des X's n'est pas vide). La face de derrière constitue un autre carré des oppositions, a, i, e, o, basé sur les "non-X's".

Le carré des oppositions, qui n'a plus été étudié après la fin du Moyen-Age, a perdu progressivement son importance conceptuelle, ainsi que sa traduction géométrique, jusqu'à l'émergence de la logique moderne ; par exemple, le carré est encore dessiné par Scipion Dupleix (16) au début du 17eme siècle, tandis que 150 ans plus tard dans l'Encyclopédie de Diderot et d'Alembert (1), seuls les énoncés logiques associés à ses 4 sommets (avec leurs noms traditionnels A, I, E, O) sont donnés. C'est seulement au début des années 1950 que le carré des oppositions a commencé à connaître un certain re-

1. La notation vient du fait que De Morgan (9) dénote par x les éléments qui sont non-X.

2. Ce cube ne doit pas être confondu avec le "cube logique" introduit par Moretti (20), où toutes les arêtes ont la même interprétation sémantique (correspondant à celle des flèches verticales unidirectionnelles du cube de la Figure 1) et expriment des implications dans une structure de "4-opposition".

gain d'intérêt [3]. Tout d'abord, un physicien, spécialiste de mécanique, Augustin Sesmat (27) et un philosophe de la logique, Robert Blanché (6), ont proposé indépendamment de compléter le carré des oppositions sous la forme d'un hexagone en ajoutant deux sommets, nommés par ce dernier auteur, U et Y respectivement [4] : (Y) est la conjonction de (I) et (O), et correspond ainsi à "au moins un X est Y et au moins un ne l'est pas", tandis que (U) est la disjonction de (A) et (E), et se lit "soit tout X est Y ou aucun X n'est Y", qui est ainsi équivalent à la négation de l'énoncé précédent. De plus, Y implique à la fois (I) et (O), tandis que, (A), tout comme (E), implique (U).

Indépendamment, et à peu près au même moment, le psychologue Jean Piaget (23; 24) dans son traité de logique "opérationnelle" (qu'il place dans la tradition de G. Boole (8)) étudie de manière formelle le groupe de Klein des transformations logiques qu'il a identifié dans ses travaux sur l'acquisition des capacités cognitives qui sont progressivement maîtrisées par les enfants et les pré-adolescents. Il s'agit d'une structure de groupe à 4 éléments constitué par 4 transformations applicables à tout énoncé logique $\phi = f(p, q, r, ...)$ comportant des variables binaires p, q, r, ..., qui sont i) l'identité $I(\phi) = \phi$, la négation $N(\phi) = \neg\phi$, la réciprocation $R(\phi) = f(\neg p, \neg q, \neg r, ...)$, et la corrélation $C(\phi) = \neg f(\neg p, \neg q, \neg r, ...)$. On peut vérifier facilement que $N = RC$, $R = NC$, $C = NR$, et $I = NRC$ (la composition des transformations est l'opération qui définit le groupe). Ce groupe a aussi été identifié au même moment par le mathématicien Walter H. Gottschalk (19) dans sa théorie de la quaternalité ("quaternality") (où il se réfère aussi au carré des oppositions). Comme on peut le voir sur la Figure 1, les lignes en pointillés serrés du cube des oppositions correspondent à la réciprocation, et le groupe de Piaget peut être vu à l'œuvre sur les deux rectangles diagonaux AaOo et EeIi. Par exemple, on a $R(A) = C(N(A)) = a$, $C(O) = N(R(O)) = a$, ou $N(R(C(E))) = N(R(i)) = N(I) = E$.

Le carré des oppositions a une autre lecture classique en termes de modalités, où (A) correspond maintenant à "$\Box p$", (E) à "$\neg\Diamond p$", (I) à "$\Diamond p$", et (O) à "$\neg\Box p$" (ce qui peut être complété en un hexagone). Dans son étude de la négation paraconsistente, Jean-Yves Béziau (4) a récemment introduit deux autres hexagones "modaux" associés respectivement aux carrés (A) : = "p", (E) : = "$\neg\Diamond p$", (I) := "$\Diamond p$", et (O) : = "$\neg p$", et (A) = "$\Box p$", (E) : = "$\neg p$", (I)= "p", et (O) : = "$\neg\Box p$", qui conduit à un dodécaèdre stellaire d'oppositions. Cette découverte a été le point de départ de nouvelles études par en particulier Alessio Moretti (20), Régis Pellissier (22), et Hans Smessaert (28) qui ont développé une théorie géneralisée de n-opposition, où le carré et l'hexagone correspondent respectivement aux cas $n = 2$ et $n = 3$.

Dans cet article, nous procédons à un réexamen des travaux de Blanché (7) sur l'organisation structurelle des concepts en termes d'hexagones et présentons une explication simple, basée sur des 3-partitions, de l'"universalité" des hexagones dans l'organisation

3. On consultera avec profit le site d'Alessio Moretti sur de nombreux points d'histoire touchant au carré des oppositions et à ses extensions http ://alessiomoretti.perso.sfr.fr/NOTAncestors.html.

4. R. Blanché (5) introduisit Y tout d'abord en 1952, avant de le compléter avec U dans son article de 1953 (6). Sesmat (27) utilisent déjà les mêmes lettres Y et U pour dénoter les mêmes choses.

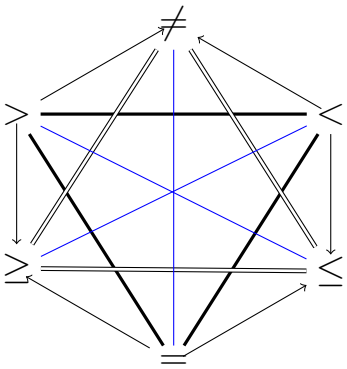

FIGURE 2 – Hexagone de Blanché induit par un pré-ordre complet

des concepts. Nous montrons que le cas des 4-partitions donne naissance à des structures tétraédrales, qu'on trouve en particulier à l'œuvre dans l'organisation logique des 16 connecteurs binaires. Ceci est le sujet de la Section ci-après. La Section 3 revient à une interprétation de type modal pour un nouveau carré d'oppositions (où certaines relations sont cependant modifiées), obtenu directement à partir d'un cadre qui étend la théorie conventionnelle de l'analyse formelle de concepts (18). Ce nouveau carré est aussi associé (de manière standard) à un hexagone qui fait sens, et conduit à une contre-partie modale du cube des oppositions présenté dans l'introduction. Enfin, la Section 4 propose avec la théorie des possibilités bipolaire une contre-partie graduelle de cette structure [5].

2 De l'hexagone au tétraèdre

Dans son livre (7) sur les "structures intellectuelles", Blanché propose différents exemples de situations où des hexagones sont rencontrés, en commençant par les 6 comparateurs existant en mathématiques, qui se trouvent être harmonieusement répartis sur un hexagone : (A) : = " $>$", (E) : = " $<$", (U) : = " $\neq$", (I) : = " $\geq$", (O) : = " $\leq$", et (Y) : = " $=$". Voir la Figure 2. Plusieurs autres exemples sont donnés. Mentionnons, par exemple, parmi d'autres :

- avec des modalités déontiques : (A) ="obligatoire", (E) : ="interdit", (U) : ="régulé", (I) : ="permis", (O) : ="non obligatoire", et (Y) : ="indifférent",
- à propos d'attitudes : (A) ="J'accepte", (E) : ="Je refuse", (U) : ="Je choisis", (I) : ="Je ne dis pas non", (O) : ="Je ne dis pas oui", et (Y) : ="J'hésite",
- à propos de goûts : (A) ="J'aime çà", (E) : ="Je déteste çà", (U) : ="Je n'y suis pas indifférent", (I) : ="Je ne déteste pas çà", (O) : =" Je n'aime pas çà", et (Y) : ="J'y suis indifférent".

Cependant, Blanché (7) n'insiste pas vraiment sur la raison pour laquelle la structure hexagonale est rencontrée dans des domaines très différents. Cela provient du fait que

5. Les deux dernières sections de cet article développent des résultats (15) présentés initialement au 2ème "World Congress on the Square of Opposition".

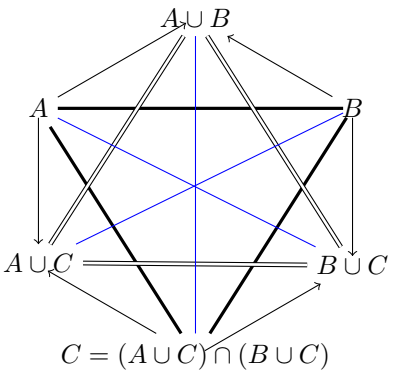

FIGURE 3 – Hexagone induit par une tri-partition (A, B, C)

l'hexagone est sous-tendu par une partition de base en 3 situations mutuellement exclusives, comme nous allons le voir [6].

Soit U un univers du discours partitionné en 3 parties A, B, et C. C'est-à-dire qu'on a $A \cap B = B \cap C = A \cap C = \emptyset$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $C \neq \emptyset$, $A \cup B \cup C = U$. On peut alors aisément construire l'hexagone de la Figure 2. Observons que $(A \cup C) \cap (B \cup C) = C$. Il est clair que chaque flèche correspondant à une arête de l'hexagone traduit une implication. Par exemple, $A \subseteq A \cup B$. Les 3 diagonales expriment l'exclusion mutuelle (e.g., $A \cap (B \cup C) = \emptyset$) ainsi que la complémentarité (puisque $A \cup (B \cup C) = U$). Les 3 lignes épaisses relient des contraires (les deux peuvent être faux en même temps, mais ne peuvent pas être vrais en même temps puisque leur intersection est vide), les 3 doubles lignes relient des sous-contraires (les deux peuvent être vrais en même temps, mais ne peuvent pas être faux en même temps puisque leur union est le référentiel). Clairement, dans l'exemple des relations de comparaison en mathématiques, (A) : = " $>$ ", (E) : = " $<$ ", (Y) : = " $=$ " forment une 3-partition de l'ensemble des paires de valeurs. De plus on a en effet " $\geq$ " = " $>$ " $\cup$ " $=$ ". Une telle partition existe aussi dans les autres cas, e.g., (A) ="J'aime çà", (E) : ="Je déteste çà", et (Y) : ="J'y suis indifférent", et on peut considérer que "Je ne déteste pas çà"= "J'aime çà"ou "Je n'y suis pas indifférent". Notons que A, B, et C jouent des rôles similaires, et qu'il n'est pas nécessaire qu'une des 3 situations de base soit entre ou sépare les deux autres (comme c'est le cas pour "$=$ " par rapport à " $>$ " et " $<$ "), même si ce cas se rencontre souvent.

De plus, dans le cas où $C = \emptyset$, l'hexagone de Blanché (en utilisant la logique propositionelle à la place de propositions quantifiées dans le carré des oppositions de base) se réduit à un losange (puisque les sommets (A) et (I), et (E) et (O), coïncident respectivement). Les sommets correspondent alors à l'affirmation (A = I), à la négation (E = O), à la contradiction (Y) et à l'ignorance (U), qui sont les 4 valeurs de la logique de Belnap (2).

6. Blanché écrit cependant dans son article fondateur (6) p. 130 : "cette triade AYE, système de termes mutuellement exclusifs et collectivement exhaustifs, fournit la molécule première pour la constitution d'un tableau des opposés".

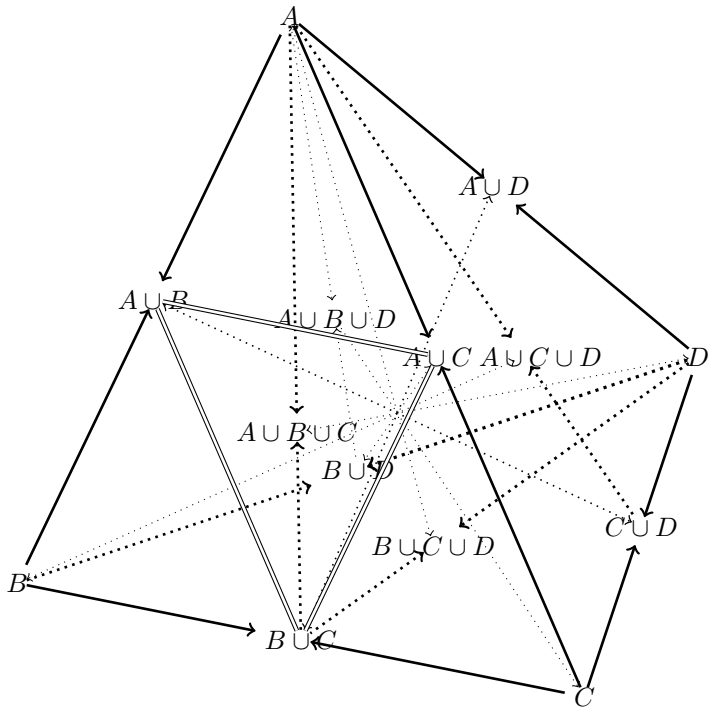

FIGURE 4 – Un tétraèdre induit par une 4-partition (A,B,C,D)

Le processus précédent s'étend au cas des 4-partitions, qui présente aussi un intérêt pratique. Considérons une partition en 4 parties A, B, C, et D, de l'univers du discours. Ainsi, on suppose $A \cap B = B \cap C = A \cap C = A \cap D = B \cap D = C \cap D = \emptyset$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $C \neq \emptyset$, $D \neq \emptyset$, $A \cup B \cup C \cup D = U$. Dans le cas de la 3-partition, l'hexagone est constitué de deux triangles opposés, A, B, C et $A \cup B, A \cup C, B \cup C$. Plutôt que d'utiliser la représentation hexagonale, on peut utiliser une double représentation triangulaire, qui apparaissait déjà dans (27), où le second triangle est maintenant à l'intérieur du premier, et où $A \cup B$ est associé avec le milieu du côté qui joint A et B, et de manière similaire $A \cup C$ et $B \cup C$ sont au milieu respectivement de A et C, et de B et C.

La 4-partition donne naissance à 4 doubles triangles de cette sorte (en considérant à chaque fois 3 parties sur 4), qui constitue les 4 faces d'un tétraèdre régulier ayant pour sommets A, B, C, et D, comme dans la Figure 3. Traçons maintenant toutes les lignes joignant un sommet au milieu des 3 côtés opposés, et associons l'union des sous-ensembles des deux extrémités au point situé au 2/3 de la distance à partir du sommet sur le segment considéré. Par exemple, $A \cup B \cup C$ est associé au point à la distance de 1/3 à partir de $B \cup C$ et de 2/3 à partir de A, i.e., est le centre du triangle A, B, C.

En utilisant des résultats de la géométrie des tétraèdres réguliers, on peut voir que $A \cup B \cup C, A \cup B \cup D, A \cup C \cup D, B \cup C \cup D$ forment un tétraèdre régulier, dual de A, B, C, D. De plus, toutes les lignes qui joignent un sommet à l'un des milieux des

côtés opposés, ou deux milieux de deux arêtes opposées se rencontrent en un même point, qui est le centre du tétraèdre. Ce sont les 7 lignes qui joignent $A \cup B$ et $C \cup D$, $A \cup C$ et $B \cup D$, $A \cup D$ et $B \cup C$, A et $B \cup C \cup D$, B et $A \cup C \cup D$, C et $A \cup B \cup D$, D et $A \cup B \cup C$. Notons que les extrémitiés de chacune de ces lignes sont associées à des sous-ensembles disjoints dont l'union est le référentiel U. Sur chacune des 4 faces du tétraèdre, nous avons la représentation par double triangle, équivalente à la représentation hexagonale, où maintenant le centre est associé à l'union des sous-ensembles correspondant au 3 sommets de la face.

Il y a moins d'exemples naturels de 4-partitions. Un exemple est obtenu quand on compare deux objets s et t au moyen d'une relation réflexive de surclassement pour laquelle "s est non comparable à t" est une option au même titre que "s est préféré à t", "t est préféré à s", et "on est indifférent entre s et t" (25). Par ailleurs, un cas particulier important de 4-partition est induit par deux variables binaires p et q, qui donnent naissance à 4 interprétations mutuellement exclusives, à savoir $p \wedge q$, $p \wedge \neg q$, $\neg p \wedge q$, $\neg p \wedge \neg q$. Le tétraèdre correspondant, qui exhibe tous les connecteurs binaires de la logique classique, est donné en Figure 4.

Comme nous allons le voir, cela offre une alternative à la double structure hexagonale "ouverte" proposée par Blanché (7) pour fournir une vue unifiée de tous les connecteurs binaires. En s'appuyant sur la géométrie des tétraèdres réguliers, les points suivants méritent d'être remarqués :

- tout connecteur qui apparaît entre deux autres sur la même ligne (qui peut être une arête du tétraèdre, ou un segment reliant un sommet au milieu d'une arête opposée) est impliqué par chacun des deux connecteurs figurant à ses extrémités. Par exemple, $p \wedge q$, ou $\neg p \wedge \neg q$ implique $p \equiv q$. De manière similaire, $p \wedge q$, ou $\neg p$, implique $\neg p \vee q = p \rightarrow q$,
- un segment reliant les milieux de deux arêtes opposées, ou un segment reliant un sommet au centre de la face opposée, est associé à une paire de connecteurs (à ses extrémités) dont la conjonction donne la contradiction, et la disjonction la tautologie. Puisque tous ces segments ont un point commun, qui est le centre du tétraèdre, ce centre peut être associé à la fois à la contradiction et à la tautologie ;
- en dehors de la contradiction et de la tautologie, les 14 autres connecteurs binaires apparaissent dans cette construction ;
- les 4 disjonctions $p \vee q$, $\neg p \vee q = p \rightarrow q$, $p \vee \neg q = q \rightarrow p$, et $\neg p \vee \neg q = p \rightarrow \neg q$ sont les sommets du tétraèdre dual à l'intérieur du tétraèdre initial associé au 4 conjonctions $p \wedge q$, $\neg p \wedge q$, $p \wedge \neg q$, et $\neg p \wedge \neg q$;
- p, $\neg p$, q, $\neg q$, $p \equiv q$ et $p \Delta q$ (ou exclusif) sont les sommets d'un octaèdre régulier ;
- le groupe de Piaget peut encore être vu à l'œuvre, quand on considère une arête du tétraèdre avec l'arête parallèle correspondante dans le tétraèdre dual. Par exemple, $p \wedge q$, $\neg p \wedge \neg q$, $p \vee q$, $\neg p \vee \neg q = p \rightarrow \neg q$ sont en effet échangés par les transformations, I, N, R, C du groupe de Piaget.
- la position d'un connecteur sur un segment reflète le nombre de bits à basculer pour passer de lui aux connecteurs qui sont à ses extrémités (et réciproquement). Par exemple, $p \equiv q$ est à mi-chemin entre $p \wedge q$ et $\neg p \wedge \neg q$: pour chacune de

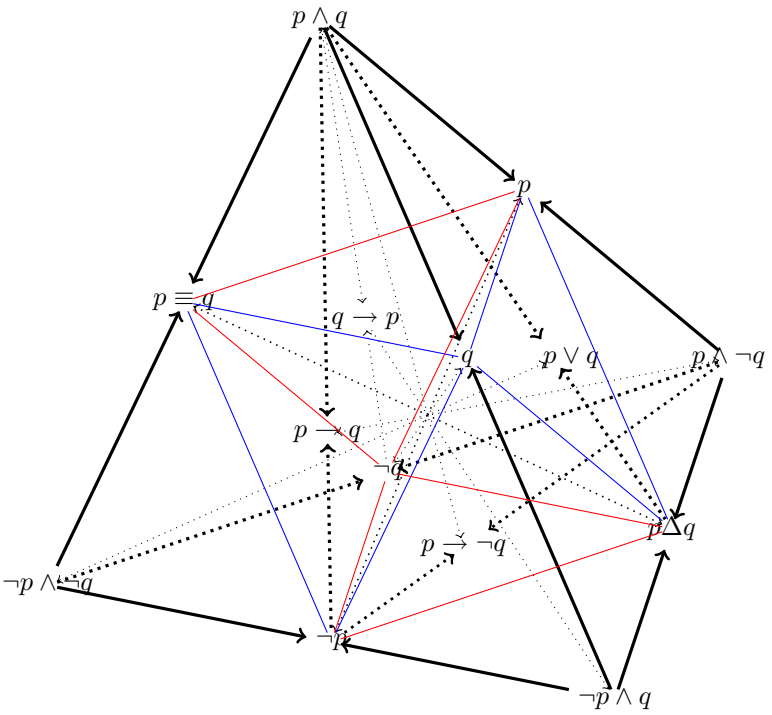

FIGURE 5 – tétraèdre des 16 connecteurs binaires

ces deux dernières formules, une ligne dans leur table de vérité doit passer de 0 à 1 pour obtenir la table de vérité de $p \equiv q$. De manière similaire, $p \rightarrow q$ est à une distance 1/3 de $\neg p$ et à une distance 2/3 de $p \wedge q$: une ligne dans la table de vérité de $\neg p$ doit passer de 0 à 1 pour obtenir la table de $p \rightarrow q$, tandis que 2 lignes dans la table de vérité de $p \wedge q$ doivent passer de 0 à 1 pour obtenir la table de $p \rightarrow q$.

Ainsi, le tétraèdre nous offre une vue très riche des relations existant entre les connecteurs binaires.

Dans la suite de l'article, nous nous tournons vers l'investigation d'une structure qui met en œuvre 8 quantifications ou modalités, les 4 modalités aristotéliciennes, et 4 autres qui en sont le mirroir au travers de la réciprocation de Piaget. Cette structure cubique induit aussi des hexagones remarquables, et est obtenue naturellement à partir des 4 opérateurs qui sont à la base d'une vue généralisée de l'analyse formelle de concepts.

3 Analyse formelle de concepts généralisée

En analyse formelle de concepts (18), une relation R, appelée *contexte formel*, est supposée donnée entre un ensemble d'objets Obj et un ensemble de propriétés $Prop$. Soit $R(x)$ l'ensemble des propriétés possédées par un objet x, et $R^{-1}(y)$ l'ensemble des objets ayant la propriété y. Etant donné un ensemble Y de propriétés, quatre ensembles remarquables d'objets peuvent être définis dans ce cadre (12) (la barre supérieure dénote ici la complémentation ensembliste) :

- $R^{\Pi}(Y) = \{x \in Obj | R(x) \cap Y \neq \emptyset\} = \cup_{y \in Y} R^{-1}(y)$, qui est l'ensemble des objets ayant au moins une propriété dans Y ;
- $R^{N}(Y) = \{x \in Obj | R(x) \subseteq Y\} = \cap_{y \notin Y} \overline{R^{-1}(y)}$, qui est l'ensemble des objets ayant aucune propriété en dehors de Y ;
- $R^{\Delta}(Y) = \{x \in Obj | R(x) \supseteq Y\} = \cap_{y \in Y} R^{-1}(y)$, qui est l'ensemble des objets ayant en commun toutes les propriétés dans Y (et en ayant éventuellement d'autres) ;
- $R^{\nabla}(Y) = \{x \in Obj | R(x) \cup Y \neq Prop\} = \cup_{y \notin Y} \overline{R^{-1}(y)}$, qui est l'ensemble des objets à qui il manque au moins une propriété en dehors de Y.

En fait, l'analyse formelle de concepts (18) standard exploite seulement la 3eme fonction d'ensembles. Cette dernière est suffisante pour définir un *concept formel* comme une paire constituée de son *extension* X et de son *intension* Y telle que $R^{\Delta}(Y) = X$ et $R^{-1\Delta}(X) = Y$, où $(X, Y) \subseteq Obj \times Prop$, et $R^{-1\Delta}(X)$ est défini de la même manière : $\{y \in Prop | R^{-1}(y) \supseteq X\}$. On peut montrer qu'un concept formel est une paire (X, Y) maximale telle que $X \times Y \subseteq R$. Par ailleurs, il a été récemment mis en évidence (10) que les paires (X, Y) telles que $R^{N}(Y) = X$ et $R^{-1N}(X) = Y$ caractérisent des sous-contextes indépendants, au sens où ils ne partagent ni objets ni propriétés. Un tel sous-contexte formel (X, Y) est tel que $(X \times Y) \cup (\overline{X} \times \overline{Y}) \supseteq R$.

On peut montrer (12) que le 4-uplet des valeurs de vérité des 4 énoncés $x \in R^{\Pi}(Y)$, $x \in R^{N}(Y)$, $x \in R^{\Delta}(Y)$, et $x \in R^{\nabla}(Y)$ est nécessaire afin de caractériser complé-

$$\begin{tikzcd}
\forall y, y \in R(x) \to y \in Y \arrow[r, dashed, no head] \arrow[d] & \forall y, y \in \overline{R(x)} \to y \in \overline{Y} \arrow[d] \\
\exists y, y \in R(x) \wedge y \in Y \arrow[r, dashed, no head] & \exists y, y \in \overline{R(x)} \wedge y \in \overline{Y}
\end{tikzcd}$$

FIGURE 6 – Carré induit par les 4 opérateurs définis dans le cadre de l'analyse formelle de concepts

tement les positions relatives possibles des ensembles $R(x)$ et Y. Il est clair que les 4 expressions ci-dessus sont sous-tendues par les expressions logiques suivantes :
- $R^{\Pi}(Y) : \exists y, y \in R(x) \wedge y \in Y$;
- $R^{N}(Y) : \forall y, y \in R(x) \to y \in Y$;
- $R^{\Delta}(Y) : \forall y, y \notin R(x) \to y \notin Y$;
- $R^{\nabla}(Y) : \exists y, y \notin R(x) \wedge y \notin Y$.

Remarquons que les deux premières expressions $\forall y, y \in R(x) \to y \in Y$, $\exists y, y \in R(x) \wedge y \in Y$, forment un carré des oppositions avec les expressions $\forall y, y \in R(x) \to y \notin Y$ et $\exists y, y \in R(x) \wedge y \notin Y$, correspondant respectivement à $R^{N}(\overline{Y})$, et à $R^{\Pi}(\overline{Y})$. Il s'agit de la face frontale du cube des oppositions de la Figure 1, c'est-à-dire la face AIEO.

De même, les deux dernières expressions $\forall y, y \notin R(x) \to y \notin Y$, $\exists y, y \notin R(x) \wedge y \notin Y$ forment un autre carré des oppositions avec les expressions $\forall y, y \notin R(x) \to y \in Y$, et $\exists y, y \notin R(x) \wedge y \in Y$ correspondant respectivement à $R^{\Delta}(\overline{Y})$, et à $R^{\nabla}(\overline{Y})$. Il s'agit de la face de derrière du cube des oppositions de la Figure 1, c'est-à-dire la face aieo.

Cependant les expressions logiques qui sont à la base respectivement de $R^{\Pi}(Y)$, $R^{N}(Y)$, $R^{\Delta}(Y)$, et $R^{\nabla}(Y)$, à savoir
- $\forall y, y \in \overline{R(x)} \to y \in \overline{Y} (\Longleftrightarrow \forall y, y \in \overline{Y} \to y \in \overline{R(x)})$
- $\forall y, y \in \overline{R(x)} \to y \in \overline{Y} (\Longleftrightarrow \forall y, y \in Y \to y \in R(x))$
- $\exists y, y \in \overline{R(x)} \wedge y \in \overline{Y} (\Longleftrightarrow \exists y, y \in Y \wedge y \in \overline{R(x)})$
- $\exists y, y \in \overline{R(x)} \wedge y \in \overline{Y} (\Longleftrightarrow \exists y, y \in \overline{Y} \wedge y \in \overline{R(x)})$

où $R(x)$ et Y jouent des rôles symétriques, et peuvent aussi être organisées en un carré des oppositions d'un autre type, comme indiqué sur la Figure 5 (où les lignes épaisses pointillés correspondent à la réciprocation) : Cela correspond à la face du côté gauche du cube des oppositions de la Figure 1, c'est-à-dire à la face AIai.

En pratique, on suppose qu'à la fois $R(x) \neq \emptyset$ et $R(x) \neq Prop$, i.e. tout objet doit avoir au moins une propriété dans $Prop$, mais aucun objet n'a toutes les propriétés de $Prop$. Cette bi-normalisation évite les problèmes d'"import existentiel" puisque ni

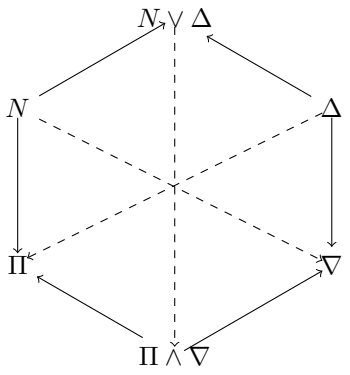

FIGURE 7 – Hexagone induit par les 4 opérateurs à la base de l'analyse formelle de concepts et de la théorie des possibilités

$R(x)$ ni $\overline{R(x)}$ peuvent être vides.

Il est aussi à noter que le principe de construction d'un hexagone à partir d'un carré en ajoutant les deux sommets $Y = I \wedge O$ et $U = A \vee E$ fait encore sens ici. En effet, on peut montrer (12) que sous l'hypothèse de bi-normalisation, la relation d'inclusion suivante est satisfaite :

$$R^N(Y) \cup R^\Delta(Y) \subseteq R^\Pi(Y) \cap R^\nabla(Y).$$

On obtient l'hexagone de la Figure 6. Cet hexagone diffère sémantiquement de celui de la Figure 2, ce qui est normal, puisque l'hexagone de la Fig. 6 n'est pas obtenu à partir d'un carré des oppositions standard. Comme on peut le voir, toutes les lignes sont orientées, y compris les diagonales, et expriment des implications.

L'introduction des opérateurs $R^\Pi(Y)$, $R^N(Y)$, et $R^\nabla(Y)$ (12), au côté de l'opérateur de base $R^\Delta(Y)$ de l'analyse formelle de concepts, a été motivée par un parallèle avec la théorie des possibilités (14), où il existe 4 fonctions d'ensembles de base habituellement dénotées Π, N, Δ, et ∇ qui sont liées directement à des idées d'intersection non-vide ou d'inclusion. Ces fonctions d'ensembles sont graduelles, puisqu'elles prennent leur valeurs dans l'intervalle unité $[0, 1]$. Cependant, restreintes à $\{0, 1\}$, elles correspondent à un système particulier de modalités qui a été étudié dans (13). Dans la prochaine section, nous rappelons brièvement les traits caractéristiques des 4 fonctions d'ensembles de la théorie des possibilités et leur sémantique en tant que modalités, et nous montrons comment elles peuvent être organisées en un cube des oppositions (avec 4 autres fonctions d'ensembles qui leur sont reliées).

4 Théorie des possibilités

La théorie des possibilités a été proposée par Lotfi Zadeh (30) comme une nouvelle théorie pour traiter l'incertain en relation avec des éléments d'information exprimés linguistiquement. Le cadre initial proposé était essentiellement basé sur des mesures de

possibilité max-décomposables. Il est intéressant de remarquer qu'une théorie similaire avait été proposée auparavant par l'économiste anglais G. L. S. Shackle (26) sur la base de motivations complètement différentes ; l'idée de base en est la notion de degré de surprise, qui formellement s'avére être un degré d'impossibilité.

En théorie des possibilités, l'information disponible est représentée au moyen d'une distribution de possibilité. C'est une fonction, en général dénotée π, de l'univers du discours U dans l'intervalle unité $[0, 1]$. La fonction π range les valeurs potentielles d'une variable décrivant les états possibles du monde considéré, selon leur plausibilité. La valeur $\pi(u)$ est interprétée comme la possibilité que cette variable soit égale à u. Une information précise correspond à une situation où $\exists u^*, \pi(u^*) = 1$, et $\forall u \neq u^*, \pi(u) = 0$, tandis que l'ignorance complète est représentée par $\forall u \in U, \pi(u) = 1$. Dans le cas général, π prend des valeurs intermédiaires de degrés de possibilité. Cependant, il est intéressant de considérer aussi le cas particulier binaire où $\forall u \in U, \pi(u) \in \{0, 1\}$. Dans ce cas, π n'est rien d'autre que la fonction caractéristique d'un sous-ensemble de U, qu'on dénotera E (comme "évidence") dans la suite. Cet ensemble E correspond à l'ensemble $R(x)$ (ou $R^{-1}(y)$) en analyse formelle de concepts. L'hypothèse de binormalisation signifie pour E que $E \neq \emptyset$ et que $E \neq U (\Leftrightarrow \overline{E} \neq \emptyset)$.

Soit A un sous-ensemble de l'univers du discours U. Nous rappelons maintenant le système complet des 4 fonctions d'ensembles qui sous-tendent la théorie des possibilités, et leur propriétés caractéristiques :

- i) La *mesure de possibilité (faible)* (ou possibilité potentielle)

$$\Pi(A) = \max_{u \in A} \pi(u)$$

  évalue à quel point il est possible que l'état du monde soit dans A. Quand π se réduit à E, $\Pi(A) = 1$ si $A \cap E \neq \emptyset$, ce qui exprime la cohérence de l'évènement A avec l'évidence E, et $\Pi(A) = 0$ sinon. Les mesures de possibilité sont caracterisées par la propriété suivante de décomposabilité :

$$\Pi(A \cup B) = \max(\Pi(A), \Pi(B))$$

- ii) La *mesure* duale de *nécessité (forte)* (ou nécessité "garantie")

$$N(A) = \min_{u \notin A} 1 - \pi(u) = 1 - \Pi(\overline{A})$$

  évalue à quel point il est certain (nécessairement vrai) que l'état du monde est dans A. Quand π se réduit à E, $N(A) = 1$ si $E \subseteq A$, ce qui exprime que l'évidence E implique A, et $N(A) = 0$ sinon. La dualité de N par rapport à Π exprime que A est d'autant plus certain que l'évènement opposé $\overline{A}$ est impossible. Les mesures de nécessité sont caractérisées par la propriété suivante de décomposabilité :

$$N(A \cap B) = \min(N(A), N(B))$$

- iii) La mesure de possibilité *(forte)* (ou *possibilité "garantie"*)

$$\Delta(A) = \min_{u \in A} \pi(u)$$

évalue à quel point *toutes* les valeurs dans A sont possibles pour l'état du monde, étant donné l'évidence E. Quand π se réduit à E, $\Delta(A) = 1$ si $A \subseteq E$, et $\Delta(A) = 0$ sinon. Les mesures de possibilité forte sont caractérisées par la propriété suivante :

$$\Delta(A \cup B) = \min(\Delta(A), \Delta(B))$$

.

– iv) La mesure duale de nécessité *(faible)* (ou nécessité potentielle)

$$\nabla(A) = \max_{u \notin A} 1 - \pi(u) = 1 - \Delta(\overline{A})$$

évalue à quel point il y a une valeur en dehors de A qui est impossible [7]. Quand π se réduit à E, $\nabla(A) = 1$ si $A \cup E \neq U$, et $\nabla(A) = 0$ sinon. Les mesures de nécessité faible sont caractérisées par la propriété suivante :

$$\nabla(A \cap B) = \max(\nabla(A), \nabla(B))$$

La possibilité faible et la nécessité forte sont des fonctions croissantes par rapport à l'inclusion ensembliste (comme le sont les mesures de probabilité), tandis que les deux autres fonctions d'ensembles sont décroissantes. Les deux premières mesures sont naturellement liées à une expression de l'information négative où on exprime ce qui est (non)-impossible, tandis que la mesure de possibilité forte (tout comme sa duale) est associée à une expression de l'information positive ; voir (3) pour une discussion détaillée de cette bipolarité. Sous l'hypothèse que la distribution de possibilité est bi-normalisée, i.e. ici $\exists u^*, \pi(u^*) = 1$, et $\exists u^{**}, \pi(u^{**}) = 0$, une contrepartie de l'inclusion existant en analyse formelle de concepts tient :

$$\forall A, \max(\Delta(A), N(A)) \leq \min(\Pi(A), \nabla(A)).$$

Ces 4 fonctions d'ensembles qui expriment des modalités Π, N, Δ, et ∇ dans le cadre de la théorie des possibilités, ou dans celui des opérateurs correspondants en analyse formelle de concepts, peuvent être organisées en un cube d'oppositions, de concert avec les modalitées $\neg\Pi$, $\neg N$, $\neg\Delta$, et $\neg\nabla$ qui sont associées aux précédentes par négation et complémentation respectivement ; voir la Figure 7.

Les expressions logiques à la base des opérateurs introduits en analyse formelle de concepts, ou de l'évaluation des différentes modalités en théorie des possibilités binaire, correspondent clairement aux sommets du cube des oppositions construit au début de cet article (voir Figure 1). Notons cependant que le cube de la Figure 7 n'est pas disposé de la même façon que dans la Figure 1 afin de rendre la face AIai plus visible. De plus, il est dupliqué afin de mieux montrer différentes relations entre les sommets, que nous allons commenter maintenant :

– Les lignes horizontales en pointillés serrés de la face arrière correspondent à une relation de réciprocation. En théorie des possibilités, cela revient à changer π en

7. Comme dans le cas du sommet "sans nom" (O) (4) dans le carré des oppositions classique, il est notable que cette 4eme fonction d'ensembles est moins facile à interpréter que les trois autres.

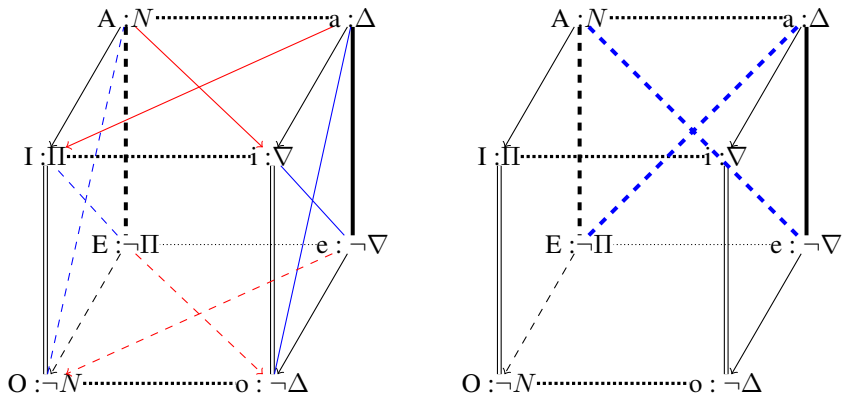

FIGURE 8 – Cube des opérateurs de l'analyse formelle de concepts / de la théorie des possibilités

$1 - \pi$, et A en $\overline{A}$. Cela correspond à renverser le sens de l'inclusion entre les ensembles A et E, et à interpréter les liens entre N et Δ comme l'opposition entre nécessité et suffisance. Il est clair que le groupe de transformations de Piaget s'applique encore ici, comme dans la Figure 1.

– Les lignes verticales épaisses de la face arrière relient des contraires : la nécessité N et l'impossibilité $\neg\Pi$, la possibilité garantie Δ et le manque de certitude potentielle $\neg\nabla$. Elles sont complétées par deux diagonales épaisses (seulement visibles sur la face arrière du cube de droite) qui relient aussi des contraires : la possibilité forte Δ et l'impossibilité $\neg\Pi$ d'une part, et la nécessité N et le manque de certitude faible $\neg\nabla$ d'autre part.
– On peut voir les contradictoires aux extrémités des lignes diagonales non-orientées sur les deux faces latérales du cube de gauche : Π et $\neg\Pi$, N et $\neg N$, Δ et $\neg\Delta$, ∇ et $\neg\nabla$.
– Les 4 arêtes du cube dirigées de l'arrière à l'avant expriment des implications : ce qui est certain est possible ($N \leq \Pi$), ce qui est garanti possible est potentiellement certain ($\Delta \leq \nabla$). De manière équivalente, ce qui est impossible ne peut être certain ($\neg\Pi \leq \neg N$), et ce qui n'est pas potentiellement certain n'est pas garanti possible ($\neg\nabla \leq \neg\Delta$). de plus, les diagonales des faces du dessus et du dessous du cube de gauche dirigées de l'arrière à l'avant expriment des implications : ce qui est garanti possible est potentiellement possible ($\Delta \leq \Pi$), ce qui est vraiment certain est faiblement certain ($N \leq \nabla$), ce qui n'est pas potentiellement possible n'est pas garanti possible ($\neg\Pi \leq \neg\Delta$), ce qui n'est pas faiblement certain n'est pas vraiment certain $\neg\nabla \leq \neg N$).
– Les lignes verticales doubles de la face de devant relient des sous-contraires : possibilité Π et manque de certitude garantie $\neg N$, nécessité faible ∇ et manque de possibilité garantie $\neg\Delta$.

Ainsi, les interrelations entre les 8 modalités de la théorie des possibilités (ou entre les opérateurs correspondants en analyse formelle de concepts), peuvent être complètement

décrites sur le cube des oppositions qui a été introduit, et donnent par ailleurs naissance au nouvel hexagone de la Figure 6.

5 Conclusion

Depuis très longtemps, le carré des oppositions a été considéré comme le point de départ de l'étude des syllogismes. En distinguant les contraires des contradictoires (et des sous-contraires), et en se basant sur deux manières différentes d'introduire la négation dans une assertion, le carré des oppositions est au cœur de l'expression des capacités humaines en matière de raisonnement, comme le confirme sa relation avec le groupe de transformations de Piaget, et joue un rôle important dans la catégorisation conceptuelle des situations comme l'a souligné Blanché. L'article a mis en évidence que deux théories modernes développées depuis trente ans pour analyser les relations entre objets et propriétés, et pour modéliser l'incertitude épistemique respectivement, avaient aussi leurs racines dans le carré des oppositions.

Plus précisément, l'article a introduit un cube des oppositions (déjà en puissance dans les écrits de De Morgan) dont les faces montrent différents types de carrés des oppositions et qui est fermé par les transformations du groupe de Piaget. On peut disposer sur ce cube toutes les modalités à l'œuvre en théorie des possibilités bipolaire, ou tous les opérateurs de l'analyse formelle de concepts. De plus ses faces peuvent être étendues à des hexagones de différents types.

Par ailleurs, l'article a aussi souligné que l'hexagone de Sesmat-Blanché est obtenu dès qu'on considère une tri-partition de l'univers du discours, tandis qu'une quadri-partition nous permet de décrire les interrelations entre les16 connecteurs binaires au sein d'une structure tétraédrale. Ceci suggère d'autres développements. Mentionnons-en quelques-uns. Dans la construction de l'hexagone, si A, B, et C forment une partition ordonnée (supposons B entre A et C) d'un univers ordonné du discours U, alors A et C représentent des antonymes, et deux négations involutives sont clairement à l'œuvre : l'une échangeant A et C, et laissant B inchangé, et l'autre reflétant la complémentation d'ensembles. Une telle idée de travailler avec deux types de négation a fait aussi l'objet d'une discussion d'un point de vue géometrique (29), sans référence au carré des oppositions, mais en considérant la négation cyclique de la logique multi-valuée de Post ainsi que la négation dans la logique à 3 valeurs de Kleene et dans la logique à 4 valeurs de Belnap. Notons que U peut être n'importe quoi, un domaine d'attribut par exemple, aussi bien qu'un ensemble de sous-ensembles de valeurs de vérité. Ce dernier cas quand $U = \{\{T\}, \{F\}, \{T, F\}\}$ est d'un intérêt particulier pour décrire les états compatibles avec un état d'information incomplète (le sous-ensemble $\{T, F\}$ corrrespond à la situation où on ne peut pas prouver à partir de l'information disponible si un énoncé est vrai (T) ou s'il est faux (F), le singleton $\{T\}$ (resp. $\{F\}$) correspond au cas où on peut prouver que l'énoncé est vrai (resp. faux) (11).

Une autre direction de recherche, serait de considérer l'extension de la représentation tétraédrale à des logiques multivalentes. Pour ce faire, on peut s'inspirer de travaux

existants (17) sur la version graduelle du système des quatre relations strictes à la base de la comparaison des objets. La logique de Lukasiewicz semblerait de ce point de vue un candidat intéressant puisque les lois du tiers-exclu et de non-contradiction y sont préservées. Par exemple, si on considère l'arête $(p \wedge q) - q - (\neg p \wedge q)$ du tétraèdre de la Figure 4, la vérité de p diminuerait en allant de $p \wedge q$ à q, et alors sa fausseté augmenterait en passant de q à $\neg p \wedge q$.

Au delà d'un intérêt historique évident, la perspective proposée ici permet une vision unifiée de différentes théories, et peut aussi aider à un enrichissement conceptuel mutuel de ces théories. Plus généralement, il est important de mieux comprendre les structures d'opposition qui ne sont pas basées sur de simples dichotomies, et qu'on peut rencontrer dans de nombreux domaines de l'intelligence artificielle relatifs au raisonnement, à la décision, et à l'argumentation, notamment.

Références

[1] Anonyme. Syllogisme. In : Encyclopédie ou Dictionnaire Raisonné des Sciences, des Arts et des Métiers, de D. Diderot et J. (le Rond) d'Alembert. 1751-1772. http ://portail.atilf.fr/encyclopedie/Formulaire-de-recherche.htm

[2] N. D. Belnap. A useful four-valued logic. In J.M. Dunn et G. Epstein, editors, Modern UsesMultiple-Valued Logic. D.Reidel, Dordrecht, The Netherlands, 837(1977).

[3] S. Benferhat, D. Dubois, S. Kaci, H. Prade. Modeling positive et negative information in possibility theory. Int. J. of Intelligent Systems, 23,1094–1118, 2008.

[4] J.-Y. Béziau. New light on the square of oppositions et its nameless corner. Logical Investigations, 10, 218–233, 2003.

[5] R. Blanché. Quantity, modality, et other kindred systems of categories. Mind, LXI(243), 369–375, 1952.

[6] R. Blanché. Sur l'opposition des concepts. Theoria, 19, 89–130,1953.

[7] R. Blanché. Structures Intellectuelles. Essai sur l'Organisation Systématique des Concepts. Vrin, Paris. 1966.

[8] G. Boole. An Investigation of *The Laws of Thought* on which are founded The Mathematical Theories of Logic et Probabilities. Chap. XV : The Aristotelian logic et its modern extensions, examined by the method of its treatise. Macmillan, 1854. Reprinted by Dover, NewYork, 1958.

[9] A. De Morgan. On the structure of the syllogism. Trans. Camb. Phil. Soc., VIII, 379–408, 1846. Reprinted in : On the Syllogism et Other Logical Writings, (P. Heath, ed.), Routledge et Kegan Paul, London, 1966.

[10] Y. Djouadi, D. Dubois, H. Prade. Possibility theory et formal concept analysis : Context decomposition et uncertainty handling. In : Computational Intelligence for Knowledge-Based Systems Design, Proc.13th Inter. Conf. on Information Processing et Management of Uncertainty (IPMU 2010), (E. Hüllermeier, R. Kruse et F. Hoffmann, eds.), Dortmund, June 28 – July 2, Springer, LNCS 6178, 260–269, 2010.

[11] D. Dubois. On ignorance and contradiction considered as truth-values. Logic Journal of the IGPL, 16(2) : 195–216, 2008.
[12] D. Dubois, F. Dupin de Saint-Cyr, H. Prade. A possibility-theoretic view of formal concept analysis. Fundamentae Informaticae, 75, 195–213, 2007.
[13] D. Dubois, P. Hajek, H. Prade. Knowledge-driven versus data-driven logics. J. of Logic, Language, et Information, 9, 65–89, 2000.
[14] D. Dubois, H. Prade. Possibility theory : qualitative et quantitative aspects. In : Quantified Representation of Uncertainty et Imprecision, (D. Gabbay, P. Smets, eds.), Handbook of Defeasible Reasoning et Uncertainty Management Systems, Kluwer Acad. Publ., Vol.1, 169–226, 1998.
[15] D. Dubois, H. Prade. Squares of opposition in generalized formal concept analysis et possibility theory. Hand Book of the 2nd World Congress on the Square of Opposition, (J.-Y. Béziau, K. Gan-Krzywoszyńska, eds.), Corte, Corsica, June 17-20, 2010, Università di Corsica - Pasquale Paoli, p. 42.
[16] S. Dupleix. De l'opposition des énonciations. Book IV, chap 10, in : La Logique ou Art de Discourir et de Raisonner. 1607. Reprinted by Fayard, Paris, 1984.
[17] J. Fodor, M. Roubens, Fuzzy Preference Modelling et Multicriteria Decision Support. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1994.
[18] B. Ganter et R. Wille. Formal Concept Analysis. Mathematical Foundations. Springer Verlag, 1999.
[19] W. H. Gottschalk. The theory of quaternality. J. Symbolic Logic. 18, 193–196, 1953.
[20] A. Moretti. The Geometry of Logical Opposition. PhD dissertation, University of Neuchâtel, Switzerland, March 2009. http ://alessiomoretti.perso.sfr.fr/NOTMorettiPhD2009GeometryLogicalOpposition.pdf
[21] T. Parsons. The traditional square of opposition. The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2008 Edition), E. N. Zalta (ed.), URL = http ://plato.stanford.edu/archives/fall2008/entries/square/.
[22] R. Pellissier. 2-opposition et the topological hexagon. In : New Perspectives on the Square of Opposition, (Béziau J.-Y. et Payette G., eds.), Peter Lang, Bern, 2010.
[23] J. Piaget. Traité de Logique. Essai de logistique opératoire. Armand Colin, Paris, 1949.
[24] J. Piaget. Essai sur les Transformations des Opérations Logiques : Les 256 opérations ternaires de la logique bivalente des propositions. Presses Universitaires de France, Paris, 1952.
[25] M. Roubens, Ph. Vincke. Preference Modeling. LNEMS 250, Springer Verlag, Berlin, 1985.
[26] G. L. S. Shackle. Decision, Order, et Time in Human Affairs. Cambridge University Press, UK, 1961.
[27] A. Sesmat. Logique II : Les Raisonnements, la Logistique. Hermann, Paris. 1951.
[28] H. Smessaert. On the 3D visualisation of logical relations", Logica Universalis, 3, 303–332, 2009.
[29] A. C. Varzi, M. Warglien. The geometry of negation. J. of Applied Non-Classical Logics, 13, 9-19, 2003.
[30] L. A. Zadeh. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. Fuzzy Sets et Systems, 1, 3–28, 1978.