Sur le voisinage entre configurations qualitatives spatio-temporelles

Dominique D'Almeida et Nicolas Schwind

CRIL – CNRS
Université d'Artois
Lens, France
{dalmeida, schwind}@cril.univ-artois.fr

Résumé : La fusion et la révision de connaissances temporelles ou spatiales sous la forme de réseaux de contraintes qualitatives (RCQ) sont motivées par de nombreuses applications. En particulier, déterminer la distance ou le coût éventuel qui induit la modification d'un scénario est une tâche essentielle. Pour cela, la notion de voisinage conceptuel entre relations de base de certains formalismes qualitatifs a été introduite dans la littérature. Actuellement, l'approche utilisée pour le calcul de la distance possède l'inconvénient d'être trop dépendante de l'aspect structurel du RCQ, car elle est réalisée localement, de manière "syntaxique" sur les contraintes. Dans cet article, nous proposons une nouvelle définition du voisinage conceptuel entre relations de base pour de nombreux formalismes qualitatifs. En nous appuyant sur les configurations qualitatives spatio-temporelles, nous donnons une définition de voisinage entre scénarios pertinente et naturelle, nous permettant ainsi d'y associer la notion de distance.

Mots-clés : formalismes qualitatifs, réseaux de contraintes qualitatives, voisinage conceptuel

1 Introduction

La représentation des connaissances est un domaine majeur en intelligence artificielle. En particulier, la représentation de connaissances temporelles ou spatiales prend une part très importante dans ce domaine, et les applications sont nombreuses (e.g., systèmes d'informations géographiques, navigation de robots, planification). L'approche la plus communément utilisée est une approche qualitative, dans laquelle les entités temporelles et spatiales ne sont pas associées à des données « numériques », mais à des notions symboliques. Ces informations peuvent être représentées par un formalisme qualitatif, défini par un ensemble fini de symboles, appelés *relations de base*, caractérisant la position relative entre des entités temporelles ou spatiales. Parmi les formalismes qualitatifs les plus célèbres, l'algèbre des intervalles (Allen, 1981) permet de modéliser des informations temporelles, décrites par des intervalles sur la droite du temps, et l'algèbre RCC8 (Randell *et al.*, 1992) permet la représentation d'informations spa-

tiales/topologiques. Dans le cas général, décider de la cohérence d'informations qualitatives modélisées à l'aide de tels formalismes est un problème NP-complet.

Face à des connaissances erronées ou incomplètes, Freksa (1992) propose d'adapter l'algèbre des intervalles en s'intéressant à la notion de *voisinage conceptuel* entre relations de base. Cette approche permet un raisonnement sur des connaissances fines ou grossières en exploitant les propriétés « physiques » de ce formalisme. Ceci a pour but d'améliorer la puissance du processus d'inférence par abstraction ou relaxation sur les connaissances. Gooday & Cohn (1994) adaptent les travaux de Freksa au formalisme RCC-8 afin d'améliorer l'efficacité calculatoire. Cependant, définir le voisinage conceptuel entre relations de base n'est pas trivial. Cette notion est dépendante des formalismes qualitatifs et de la façon dont les entités temporelles ou spatiales peuvent se déplacer dans leur domaine. La notion de voisinage est donc régie par une *loi de transformation*, basée sur la notion de continuité dans un espace topologique.

Le voisinage conceptuel est également étudié par Egenhofer & Al-Taha (1992), en identifiant les *déformations topologiques* des relations de base du formalisme RCC-8, dans le but de déterminer l'évolution de certaines connaissances ou de manière plus fine les étapes par lesquelles passe cette évolution. Cette approche relève des domaines de la révision et de la fusion de connaissances temporelles ou spatiales, complètes ou incomplètes, et l'étude du voisinage conceptuel est un élément primordial pour définir une *distance* entre les connaissances. Pour cela, la manipulation des connaissances temporelles ou spatiales est facilitée par une représentation sous la forme de *réseaux de contraintes qualitatives* (RCQ en abrégé). On parle alors de distance entre *configurations* - un état figé des entités dans leur domaine - ou *scénarios* - un ensemble de configurations défini par les relations entre entités - qui sont les ingrédients majeurs des processus cités précédemment (Condotta *et al*., 2008, 2010). Dans la littérature, le calcul de ces distances relève d'une analyse « syntaxique » des contraintes du RCQ, et est réalisé localement à partir de l'agrégation des distances entre relations de base. En d'autres termes, cette distance dépend de la structure qui décrit les connaissances et non des configurations qualitatives qu'elles représentent. Notre approche permet de définir un voisinage « sémantique » entre scénarios cohérents plus naturel et représentatif du domaine, au moyen du voisinage entre les configurations de ces scénarios. Ce voisinage induit naturellement une nouvelle définition de distance entre scénarios cohérents, pour de nombreux formalismes qualitatifs.

La suite de l'article s'organise comme suit. Dans la section 2, nous introduisons quelques notions préliminaires sur les formalismes qualitatifs et la représentation sous la forme de RCQ. Nous y introduisons également un exemple « fil conducteur » sur l'algèbre des intervalles nous permettant d'illustrer nos définitions. Nous donnons également quelques rappels de topologie et introduisons les notations utilisées. Dans la section 3, nous définissons la notion de « loi de transformation », illustrée en adaptant les lois de transformations de Freksa à notre cadre. Nous définissons ensuite le voisinage conceptuel entre relations de base, puis nous illustrons le graphe de voisinage des relations pour deux lois de transformations. Dans la section 4, nous définissons le voisinage entre scénarios cohérents ainsi que la notion de distance entre scénarios, avant de conclure dans la dernière section.

2 Notions préliminaires

2.1 Formalismes qualitatifs

Un formalisme qualitatif considère un ensemble fini B de relations de base binaires définies sur un domaine D. Les éléments de D représentent les entités temporelles ou spatiales considérées. Chaque relation de base $b \in \mathsf{B}$ représente une position relative particulière pouvant être satisfaite par deux éléments de D. L'ensemble B satisfait également les trois propriétés suivantes : (i) B forme une partition de $\mathsf{D} \times \mathsf{D}$, autrement dit tout couple de $\mathsf{D} \times \mathsf{D}$ satisfait une et une seule relation de base de B ; (ii) la relation identité sur D, notée eq, appartient à l'ensemble B ; (iii) pour toute relation de base $b \in \mathsf{B}$, la relation inverse de b, notée b^{-1}, appartient également à l'ensemble B. Ces trois propriétés font de B un *schéma de partition* (Ligozat & Renz, 2004).

Par exemple, considérons le formalisme d'Allen, dit également l'algèbre des intervalles (Allen, 1981), qui permet de décrire des positions relatives entre des intervalles de temps non ponctuels, sans notion de mesure sur ces intervalles. Ce formalisme considère un ensemble B_{int} de treize relations de base définies sur le domaine des intervalles fermés de la droite $\mathsf{D}_{int} = \{(x^-, x^+) \in \mathbb{R}^2 \ : x^- < x^+\}$. Les relations de base de $\mathsf{B}_{int} = \{eq, p, pi, m, mi, o, oi, s, si, d, di, f, fi\}$ sont illustrées dans le tableau 1.

Relation	Illustration	Relation inverse
X précède Y p	X Y	Y succède X pi
X rencontre Y m	X Y	Y est rencontré par X mi
X chevauche Y o	X Y	Y est chevauché par X oi
X commence Y s	X Y	Y est commencé par X si
X est contenu par Y d	X Y	Y contient X di
X fini Y f	X Y	Y est fini par X fi
X est égal à Y eq	X Y	Y est égal à X eq

TABLE 1 – Illustration des relations de base de l'algèbre des intervalles

Les entités peuvent être mises en relation par une relation dite *complexe*. Une relation complexe est l'union de relations de base, que l'on représente par l'ensemble des relations de base qu'elle contient. (dans la suite, nous omettons le qualificatif « complexe »). Par exemple, dans le cadre du formalisme d'Allen, deux intervalles x et y satisfont la relation $\{p, m, eq\}$, noté $x \ \{p, m, eq\} \ y$, si et seulement si l'intervalle x *précède*, *rencontre* ou *est égal à* l'intervalle y. L'ensemble 2^{B}, l'ensemble des sous-ensembles de B, forme l'ensemble des relations. 2^{B} est muni, entre autres, des opérations ensemblistes usuelles et de l'opération *inverse* définie par $R^{-1} = \{b^{-1} \mid b \in R\}$. Dans la suite, étant donné un ensemble B de relations de base sur un domaine D, 2^{B} dénotera le formalisme qualitatif considéré.

2.2 Réseaux de contraintes qualitatives

Il est courant de représenter un ensemble de configurations qualitatives à propos d'un ensemble d'entités spatiales ou temporelles à l'aide d'un graphe de contraintes, appelé *réseau de contraintes qualitatives* (RCQ en abrégé). Les nœuds d'un tel graphe représentent les entités en question et ses arcs représentent des contraintes définies pour chacune d'elles par un ensemble de relations de base « permises » entre les entités reliées par la contrainte. Une structure de RCQ constitue un moyen très naturel pour représenter un ensemble de croyances ou de préférences sur un ensemble d'entités, et fournit également les outils algorithmiques nécessaires pour le raisonnement et la déduction sur les informations qualitatives. Formellement, étant donné un formalisme qualitatif 2^{B} défini sur le domaine D, un RCQ sur 2^{B} est un couple (V, C) où $V = \{v_1, ..., v_n\}$ est un ensemble fini de variables représentant les entités, et C est une application qui associe à tout couple de variables (v_i, v_j) une relation $N[v_i, v_j]$ de 2^{B}, notée également $N[i, j]$. C est telle que pour tout couple de variables (v_i, v_j), $N[i, i] = \{eq\}$ et $N[i, j] = N[j, i]^{-1}$.

Étant donné un RCQ $N = (V, C)$, le RCQ $N' = (V, C')$ est un *sous*-RCQ de N, noté $N' \subseteq N$, si et seulement si pour tout $v_i, v_j \in V$, $N'[i, j] \subseteq N[i, j]$. Un RCQ est atomique si et seulement si chaque contrainte est définie par une relation singleton de 2^{B}. Un *scénario* de N est un sous-RCQ atomique de N. Une *instanciation* est une application de V dans D. Une instanciation α est appelée *solution* d'un RCQ $N = (V, C)$ si et seulement si pour tout couple de variables v_i, v_j, $(\alpha(v_i), \alpha(v_j)) \in N[i, j]$. Un RCQ est *cohérent* si et seulement si il admet une solution. Dans la suite de l'article, $[N]$ dénotera l'ensemble des scénarios cohérents de N et $[\![N]\!]$ l'ensemble de ses solutions.

Exemple 1 (Réseau de contraintes qualitatives)
Pour illustrer les RCQ*, considérons l'exemple suivant : la présentation de travaux scientifiques doit être réalisée durant un certain temps (T). La présentation se compose d'un exposé (E), lui-même terminé par une session dédiée aux questions (Q), puis elle est suivie d'une phase de délibération (D). Le* RCQ *$N = (V, C)$ correspondant, défini sur le formalisme d'Allen $2^{\mathsf{B}_{int}}$ est représenté sur la figure 1. On a $V = \{T, E, Q, D\}$ et C défini par les contraintes décrites ci-dessus*[1]*. Par exemple, l'exposé (E) précède ou rencontre la phase de délibération (D).*

La figure 2 illustre, quant à elle, un scénario cohérent σ de N ainsi qu'une solution α de ce scénario.

Dans le cas général, le problème de la cohérence d'un RCQ sur un formalisme qualitatif quelconque, i.e., le problème de la recherche d'une solution de ce RCQ, est un problème indécidable (Hirsch, 1999). Néanmoins, nous considérons d'une part que résoudre le problème de la cohérence d'un RCQ N revient à déterminer si N admet un scénario cohérent, et d'autre part nous supposons que le problème de la cohérence d'un scénario est décidable en temps polynomial, ce qui est le cas à notre connaissance pour l'ensemble des formalismes qualitatifs d'intérêt qui ont été définis dans la littérature.

1. Par souci de clarté, pour tout couple de variables (v_i, v_j), on ne représente pas la contrainte $N[i, j]$ lorsque $N[i, j] = \mathsf{B}$ (i.e., lorsqu'aucune information n'est spécifiée quant à la position relative entre les entités représentées par les variables v_i et v_j), lorsque $N[j, i]$ est représentée ou lorsque $i = j$.

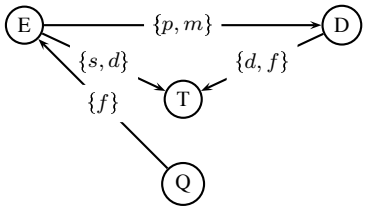

FIGURE 1 – N, un RCQ défini sur $2^{\mathsf{B}_{int}}$

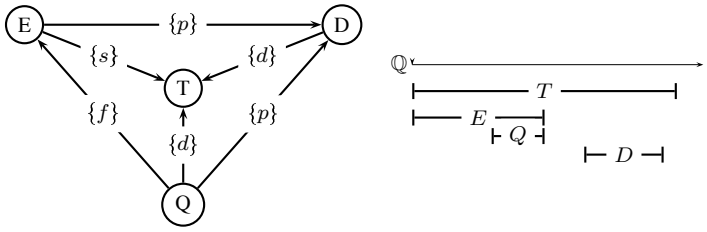

FIGURE 2 – σ, un scénario cohérent de N et α, une solution de σ.

Par conséquent, le problème de la cohérence d'un RCQ appartient à la classe NP de problèmes de décision. Pour la plupart des formalismes qualitatifs d'intérêt, ce problème est NP-complet.

2.3 Rappels de topologie et notations

Nous rappelons maintenant quelques notions de base sur les topologies. Considérons D un ensemble fixé. Une topologie sur D est un couple $(\mathsf{D}, Vois_{\mathcal{T}})$ où $Vois_{\mathcal{T}}$ est une application qui associe à tout élément x de D un ensemble non vide $Vois_{\mathcal{T}}(x)$ de sous-ensembles de D appelés *voisinages* de x, et qui vérifie les conditions suivantes, $\forall x \in \mathsf{D}$, $\forall W \in Vois_{\mathcal{T}}(x)$:

- $x \in W$;
- $\forall W' \subseteq \mathsf{D}$, si $W \subseteq W'$, alors $W' \in Vois_{\mathcal{T}}(x)$;
- $\forall W' \in Vois_{\mathcal{T}}(x), W \cap W' \in Vois_{\mathcal{T}}(x)$;
- $\exists W' \in Vois_{\mathcal{T}}(x)\ \forall y \in W', W \in Vois_{\mathcal{T}}(y)$.

Un *ouvert* O d'une topologie $\mathcal{T}$ sur D est un sous-ensemble de D qui est voisinage de chacun de ses points. Une topologie peut être également définie à partir des ouverts, et dans ce cas le voisinage d'un élément x de D correspond à l'ensemble des sous-ensembles de D qui contiennent un ouvert contenant x.

Soit $E \subseteq \mathsf{D}$. Étant donné une topologie particulière $\mathcal{T}$ sur D, l'*adhérence* de E, notée $adh_{\mathcal{T}}(E)$, est définie par $adh_{\mathcal{T}}(E) = \{x \in \mathsf{D} \mid \forall W \in Vois_{\mathcal{T}}(x), W \cap E \neq \emptyset\}$; l'*intérieur* de E, noté $int_{\mathcal{T}}(E)$, est défini par $int_{\mathcal{T}}(E) = \{x \in \mathsf{D} \mid E \in Vois_{\mathcal{T}}(x)\}$; la *frontière* de E, notée $front_{\mathcal{T}}(E)$, est définie par $front_{\mathcal{T}}(E) = adh_{\mathcal{T}}(E) \backslash int_{\mathcal{T}}(E)$.

3 Loi de transformation et voisinage conceptuel entre relations

Une notion de voisinage conceptuel peut être définie entre les relations de base d'un schéma de partition B. Freksa (1992) est le premier à évoquer une telle notion dans le cadre du formalisme d'Allen. Parallèlement, Egenhofer & Al-Taha (1992) ont proposé une notion similaire de voisinage, appelée *distance topologique*, entre des relations de type topologique, correspondant aux relations de base du formalisme RCC8 (Randell *et al.*, 1992). Quel que soit le formalisme qualitatif étudié, la notion de voisinage conceptuel entre relations est elle-même basée sur une notion sous-jacente de *loi de transformation* des entités dans leur domaine.

3.1 Loi de transformation

Une loi de transformation décrit l'ensemble des manières possibles pour une entité du domaine de se « transformer » au sein de son domaine, autrement dit, l'ensemble des valeurs d'une entité qui succèdent directement une valeur initiale de l'entité, lorsque l'on souhaite « transformer » l'entité selon la loi correspondante.

La définition d'une loi de transformation reste arbitraire. Tout d'abord, elle dépend du type de domaine considéré. Par exemple, pour le domaine correspondant à l'ensemble des sous-ensembles fermés d'un espace topologique (par exemple, un segment du plan, une région de points fermée du plan, ...), Kurata (2009) considère une loi de transformation d'entité correspondant à la « déformation » de l'entité de manière continue dans le domaine sans modifier sa structure topologique. Un autre exemple est celui où le domaine correspond à un espace affine réel de dimension finie, la notion de transformation d'une entité ne correspond plus alors à celle de sa déformation, mais plutôt à celle de son « déplacement » dans l'espace. Par ailleurs, au sein d'un même domaine une loi de transformation peut être définie de différentes manières : dans le cas des points d'un espace affine réel de dimension finie, une loi de transformation peut correspondre au « déplacement » d'une entité ponctuelle librement sur le plan, i.e., dans n'importe quelle direction autour de lui, ou elle peut restreindre ses possibilités de déplacement en suivant l'un des axes du repère définissant le plan.

Par exemple pour le formalisme d'Allen, Freksa (1992) identifie trois lois de transformation des intervalles dans leur domaine D_{int} :

- la première loi de transformation (dite *A-transformation*) considère un contexte où une transformation d'un intervalle correspond au déplacement de l'une de ses deux bornes vers la gauche ou vers la droite ; dans un tel contexte, on considère par exemple que le décalage d'un intervalle vers la gauche ou vers la droite s'effectue en deux temps, par un déplacement indépendant de chacune de ses deux bornes ;
- pour la deuxième loi de transformation (*B-transformation*), un intervalle peut être déplacé vers la gauche ou vers la droite en déplaçant simultanément ses deux bornes dans la même direction ;
- enfin, la troisième loi de transformation identifiée par Freksa (*C-transformation*) correspond au rétrécissement ou à l'élargissement d'un intervalle, i.e., en déplaçant chacune de ses deux bornes dans des directions opposées.

Nous proposons une définition très générale de la notion de loi de transformation qui peut s'appliquer à n'importe quel domaine D pour les entités considérées.

Définition 1 (Loi de transformation)
Une loi de transformation τ *sur* D *est un ensemble de topologies sur* D.

La topologie est le socle conceptuel des notions de continuité (et donc de transformations continues), ce qui constitue un cadre suffisamment général pour s'appliquer à un grand nombre d'applications. En effet, en considérant pour support une topologie particulière sur D, on peut représenter une transformation d'entité particulière de la loi de transformation comme un *continuum linéaire* sur D, i.e., un sous-ensemble de D muni d'une relation d'ordre totale et dense : un tel continuum linéaire peut être caractérisé par une application continue sur D. Ainsi, une topologie sur D caractérise un ensemble de continuums linéaires qui représente l'ensemble des possibilités pour une entité de D de se « déplacer » ou se « déformer » de manière ordonnée et continue dans son domaine. Enfin, une loi de transformation est formée de manière générale de plusieurs topologies, ceci permettant de représenter des situations où une entité peut se déplacer de plusieurs manières différentes. Par exemple, la loi représentant un déplacement d'un point du plan suivant l'un des deux axes générant le plan est définie par deux topologies, chacune correspondant à la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$ que l'on associe à chaque axe.

Nous illustrons cette notion au travers des lois de transformation τ_A et τ_C, correspondant respectivement aux A-transformation et C-transformation décrites précédemment. Chacune de ces lois de transformation est formée de deux topologies sur D_{int}. Formellement :

Exemple 2 (Lois de transformation τ_A et τ_C)
- $\tau_A = \{\mathcal{T}_A, \mathcal{T}'_A\}$, *où pour tout intervalle fermé* $x \in \mathsf{D}_{int}$ *:*
  - $Vois_{\mathcal{T}_A}(x)$ *est l'ensemble des sous-ensembles de* D_{int} *qui contiennent un ouvert* $O(x, X)$ *de* $\mathcal{T}_A$*, où* $O(x, X)$ *est un sous-ensemble de* D_{int} *de la forme* $O(x, X) = \{\{x^-\} \times X \mid X$ *un intervalle ouvert contenant* $x^+\}$ *;*
  - $Vois_{\mathcal{T}'_A}(x)$ *est l'ensemble des sous-ensembles de* D_{int} *qui contiennent un ouvert* $O(x, Y)$ *de* $\mathcal{T}'_A$*, où* $O(x, Y)$ *est un sous-ensemble de* D_{int} *de la forme* $O(x, Y) = \{Y \times \{x^+\} \mid Y$ *un intervalle ouvert contenant* $x^-\}$ *;*
- $\tau_C = \{\mathcal{T}_C, \mathcal{T}'_C\}$, *où pour tout intervalle fermé* $x \in \mathsf{D}_{int}$ *:*
  - $Vois_{\mathcal{T}_C}(x)$ *est l'ensemble des sous-ensembles de* D_{int} *qui contiennent un ouvert* $O(x, X, Y)$ *de* $\mathcal{T}_C$*, où* $O(x, X, Y)$ *est un sous-ensemble de* D_{int} *non singleton de la forme* $O(x, X, Y) = \{x\} \cup \{X \times Y \mid X$ *un intervalle ouvert tel que* $X^- = x^-, Y$ *un intervalle ouvert tel que* $Y^+ = x^+\}$ *;*
  - $Vois_{\mathcal{T}'_C}(x)$ *est l'ensemble des sous-ensembles de* D_{int} *qui contiennent un ouvert* $O(x, X', Y')$ *de* $\mathcal{T}'_C$*, où* $O(x, X', Y')$ *est un sous-ensemble de* D_{int} *non singleton de la forme* $O(x, X', Y') = \{x\} \cup \{X' \times Y' \mid X'$ *un intervalle ouvert tel que* $X'^+ = x^-, Y'$ *un intervalle ouvert tel que* $Y'^- = x^+\}$.

Les figures 3 et 4 représentent schématiquement des sous-ensembles $O(x, X)$, $O(x, Y)$, $O(x, X, Y)$, $O(x, X', Y')$ de D_{int}, étant donné un intervalle de référence $x \in \mathsf{D}_{int}$. Par exemple, un voisinage d'un intervalle $x \in \mathsf{D}_{int}$ selon la topologie $\mathcal{T}_A$ est un sur-ensemble d'un ensemble d'intervalles de D_{int} de la forme $O(x, X)$.

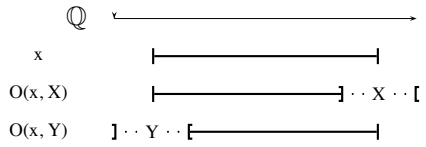

FIGURE 3 – Loi $\tau_A = \{\mathcal{T}_A, \mathcal{T}'_A\}$

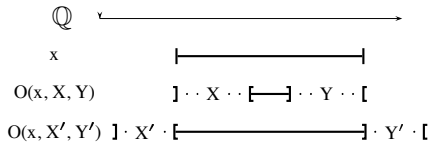

FIGURE 4 – Loi $\tau_C = \{\mathcal{T}_C, \mathcal{T}'_C\}$

3.2 Voisinage conceptuel entre relations

Étant donnée une loi de transformation sur D, on peut définir une notion de voisinage entre deux relations binaires disjointes sur D. De manière informelle, étant donnée une topologie particulière sur D, une relation binaire $R_1 \subseteq \mathsf{D} \times \mathsf{D}$ est dite voisine d'une autre relation binaire $R_2 \subseteq \mathsf{D} \times \mathsf{D}$ si l'on peut passer directement d'un couple de valeurs de R_1 à un couple de valeurs de R_2 par une transformation de la seconde valeur du couple (Freksa, 1992; Condotta *et al.*, 2008; Kurata, 2009), la transformation étant régie par la topologie correspondante. Formellement :

Définition 2 (Voisinage faible entre relations)
Soient $\mathcal{T}$ une topologie sur D et R_1, R_2 deux relations binaires disjointes sur D. R_2 est dite faiblement voisine de R_1 *pour $\mathcal{T}$ ssi $\exists (x, y) \in R_1$, $\exists W \subseteq \mathsf{D}$ tel que $y \in front_{\mathcal{T}}(W)$ et tel que ($\forall y' \in D$, si $y' \in int_{\mathcal{T}}(W)$ alors $(x, y') \in R_2$).*

Une notion plus restrictive de voisinage entre relations peut être définie : une relation $R_1 \subseteq \mathsf{D} \times \mathsf{D}$ est dite fortement voisine d'une autre relation $R_2 \subseteq \mathsf{D} \times \mathsf{D}$ si *pour tout* couple de valeurs de R_1, on peut passer directement à un couple de valeurs de R_2 par une transformation de la seconde valeur du couple. Formellement,

Définition 3 (Voisinage fort entre relations)
Soient $\mathcal{T}$ une topologie sur D, et R_1, R_2 deux relations binaires disjointes sur D. R_2 est dite fortement voisine de R_1 *pour $\mathcal{T}$ ssi $\forall (x, y) \in R_1, \exists W \subseteq \mathsf{D}$ tel que $y \in front_{\mathcal{T}}(W)$ et tel que ($\forall y' \in D$, si $y' \in int_{\mathcal{T}}(W)$, alors $(x, y') \in R_2$).*

Dans la suite de cet article, nous considérons les formalismes qualitatifs pour lesquels les notions de voisinage faible et fort entre relations coïncident sur l'ensemble des relations de base du schéma de partition associé B. Cette restriction n'est pas contraignante, puisqu'elle est vérifiée pour la plupart des formalismes qualitatifs proposés dans la littérature : c'est le cas en particulier du formalisme d'Allen, de l'algèbre des points ou des directions cardinales [2]. Par conséquent, dans la suite de l'article nous omettons le qualificatif « faible » ou « fort ».

Nous étendons maintenant la notion de voisinage entre relations à celle basée sur un ensemble de topologies, c'est-à-dire à une loi de transformation. La notion correspon-

2. La propriété qui caractérise de tels formalismes reste inconnue à ce jour, mais il reste cependant aisé de vérifier *ad hoc* si les deux notions coïncident pour un formalisme qualitatif donné.

dante définit une relation de voisinage *conceptuel* entre relations [3] :

Définition 4 (Voisinage conceptuel entre relations)
Soient τ une loi de transformation et R_1, R_2 deux relations binaires disjointes sur D. On dit que R_2 est conceptuellement voisine de R_1 pour la loi τ, noté $R_1 \xrightarrow{\tau} R_2$ ssi il existe une topologie $\mathcal{T} \in \tau$ telle que R_2 est voisine de R_1 pour $\mathcal{T}$.

Étant donné un schéma de partition B sur D et une loi de transformation τ, une relation de voisinage conceptuel entre les relations de base de B peut alors être représentée au moyen d'un graphe de voisinage conceptuel sur B, i.e., un graphe orienté dont chaque noeud représente un élément de B. Dans un tel graphe, une arête relie un nœud n_a correspondant à une relation de base $a \in \mathsf{B}$ à un autre nœud n_b correspondant à une relation de base $b \in \mathsf{B}$ si et seulement si $a \xrightarrow{\tau} b$.

Exemple 3 (Voisinage conceptuel sur B_{int} pour les lois τ_A et τ_C)
Les figures 5 et 6 illustrent respectivement les graphes de voisinage conceptuel sur B_{int} pour les lois de transformation τ_A et τ_C. Les figures 7 et 8 montrent chacune une instance de voisinage conceptuel entre deux relations de B_{int} pour les lois τ_A et τ_C. Ainsi pour la loi τ_A, on a par exemple $eq \xrightarrow{\tau_A} si$ (cf. figure 7), et pour la loi τ_C, on a par exemple $eq \xrightarrow{\tau_C} di$ (cf. figure 8).

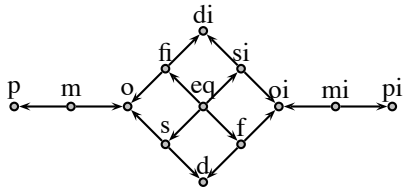

FIGURE 5 – Graphe de voisinage conceptuel sur B_{int} pour la loi τ_A.

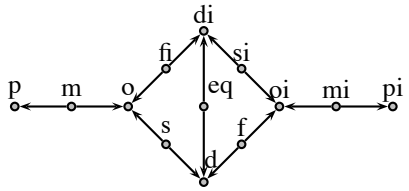

FIGURE 6 – Graphe de voisinage conceptuel sur B_{int} pour la loi τ_C.

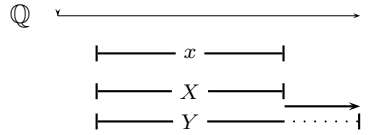

FIGURE 7 – si est conceptuellement voisine de eq pour la loi τ_A.

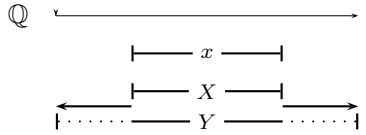

FIGURE 8 – di est conceptuellement voisine de eq pour la loi τ_C.

3. La relation de voisinage conceptuel entre relations introduite ici n'est pas symétrique. La fermeture symétrique de cette relation donne lieu à la notion de voisinage conceptuel entre relations initialement proposée dans (Condotta *et al.*, 2008).

4 Voisinage entre scénarios cohérents

Le problème du changement de croyances ou de préférences représentées au moyen de RCQ a suscité l'intérêt de plusieurs chercheurs ces dernières années, notamment celui de la fusion de RCQ (Condotta *et al.*, 2008, 2010) ou la réparation de RCQ incohérents (Dylla & Wallgrün, 2007). Afin d'élaborer le processus de fusion ou de réparation de RCQ, il est très souvent nécessaire de disposer d'une notion de *distance* entre RCQ, plus précisément d'une distance entre scénarios. Une telle distance peut par ailleurs être exploitée pour représenter une notion de « coût » pour passer d'une configuration qualitative à une autre. Considérons par exemple le scénario σ représenté sur la figure 2. Supposons que nous souhaitions optimiser l'utilisation du temps dont on dispose (T) pour la présentation de l'exposé (E) et la phase de délibération (D), sans perturber le séminariste, i.e., en conservant un planning proche de l'original. Le scénario σ' représenté sur la figure 9 caractérise le scénario « idéal ». On suppose également que les modifications des créneaux sont régies par la loi de transformation τ_C (cf. figure 4), autrement dit un créneau peut être soit élargi, soit réduit. La question qui se pose alors est la suivante *« Dans quelle mesure faut-il modifier le scénario initial σ pour obtenir le scénario idéal σ' ? »* . La définition d'une distance entre les deux scénarios nous permettrait alors de répondre à cette question.

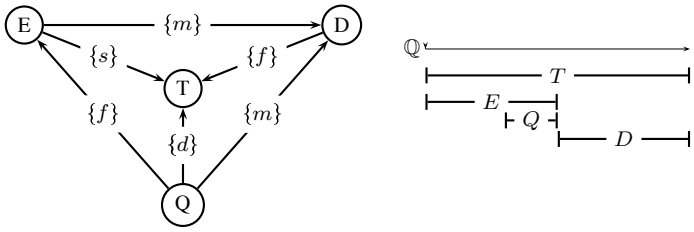

FIGURE 9 – σ', un scénario cohérent de N et α', une solution de σ'.

Condotta *et al.* (2008, 2010) ont proposé une notion de distance entre scénarios qui est définie de la manière suivante. Pour tout scénario σ, σ' sur le même formalisme qualitatif 2^{B} et sur le même ensemble de variables V la distance entre σ et σ', notée d est définie par :

$$d(\sigma, \sigma') = f\{d_{\mathsf{B}}(\sigma[i,j], \sigma'[i,j]) \mid v_i, v_j \in V, i < j\},$$

où d_{B} est une pseudo-distance[4] sur B et f une fonction d'agrégation[5] symétrique en chacun de ses arguments.

Cette définition de distance entre scénarios exploite la notion de voisinage conceptuel entre relations de base de B. En effet, d_{B} peut être définie pour toute relation de base $a, b \in \mathsf{B}$ comme étant la longueur de la chaîne la plus courte dans le graphe de voisinage

4. Une pseudo-distance d_E sur E est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}^+$ qui vérifie $\forall e_1, e_2 \in E$, $d_E(e_1, e_2) = 0$ si et seulement si $e_1 = e_2$ et $d_E(e_1, e_2) = d_E(e_2, e_1)$.

5. Une fonction d'agrégation est une application qui associe à un vecteur de nombres réels positifs un nombre réel positif.

conceptuel sur B en question reliant les nœuds n_a et n_b correspondant aux relations de base a et b. Ainsi, pour le formalisme d'Allen, si l'on considère le graphe de voisinage conceptuel sur B_{int} pour la loi τ_C (cf. figure 5), on a par exemple $d_{\mathsf{B}}(o, si) = 3$. Lorsqu'une distance d_{B} sur B est définie, la fonction d'agrégation f est utilisée pour agréger les distances calculées localement au niveau des contraintes entre les scénarios, et par conséquent obtenir une distance entre les deux scénarios. Le choix pour la fonction d'agrégation f dépend du contexte. Par exemple pour $f = \sum$, les distances d_{B} sur toutes les contraintes sont sommées (Condotta *et al.*, 2008).

Bien qu'une telle distance exploite la notion de voisinage conceptuel entre relations de base, elle peut donner lieu à des résultats contre-intuitifs. Considérons de nouveau les scénarios cohérents σ et σ' représentés sur les figures 2 et 9. Intuitivement, ces deux scénarios devraient être considérés comme étant « voisins » selon la loi de transformation τ_C (cf. figure 4) puisqu'il suffit, à partir d'une solution de σ (cf. figure 2), de réduire la durée de l'intervalle représenté par la variable D pour directement obtenir une solution de σ' (cf. figure 9). Cependant, il s'avère que les scénarios diffèrent au niveau de plusieurs paires de variables ((D, E), (D, T) et (D, Q)). Ainsi, lorsque $f = \sum$, on peut vérifier dans l'exemple que $d(\sigma, \sigma') = 3$.

De manière générale, la transformation d'une entité au sein d'une solution d'un scénario entraîne souvent une modification simultanée de plusieurs contraintes de ce scénario, et c'est ici que cette distance rencontre ses limites : sa définition s'effectue en deux temps, d'abord de manière locale où une distance entre relations de base est calculée contrainte par contrainte, puis passe par une étape d'agrégation de ces valeurs locales. Par conséquent, elle dépend très fortement de la structure des RCQ et non pas des configurations qualitatives que ces derniers représentent.

Nous proposons ici une approche différente pour définir la distance entre scénarios cohérents ; celle-ci est basée sur une notion sous-jacente de voisinage entre scénarios cohérents, qui se veut être une extension naturelle du voisinage entre relations vers le voisinage entre ensembles d'instanciations du domaine. Ainsi, la définition du voisinage entre scénarios cohérents ne dépend plus de la structure de ces derniers, mais des solutions qu'ils représentent. La définition du voisinage entre deux scénarios cohérents σ, σ' définis sur un ensemble de variables V se base sur deux paramètres : une loi de transformation d'entité, et un sous-ensemble V_* de V qui définit l'ensemble des variables dont les entités représentées peuvent se transformer dans leur domaine suivant la loi correspondante, et ce, de manière *successive*. Cette définition est générique au sens où l'on peut considérer selon le contexte que la modification d'une configuration qualitative s'effectue par la transformation d'une seule entité, de plusieurs entités ou même de l'ensemble des entités représentées par V. Intuitivement, pour une loi de transformation τ et un sous-ensemble V_* de V fixé, deux scénarios σ et σ' sont V_*-voisins pour la loi τ si et seulement si l'on peut, à partir d'une solution α de σ, construire directement une solution α' de σ' en modifiant α par transformation successive des entités représentées par V_* pour la loi τ. Formellement,

Définition 5 (Voisinage entre scénarios cohérents)
Soient τ une loi de transformation sur D, B un schéma de partition, σ, σ' deux scénarios

cohérents sur 2^{B} *et* V, *et* $V_* \subseteq V$ *où les variables de l'ensemble* V_* *sont renommées pour former l'ensemble* $V_* = \{v^1, \ldots, v^m\}$. σ' *est* V_*-voisin de σ pour la loi τ *ssi* $\exists \alpha \in [\![\sigma]\!], \exists (W_1, \mathcal{T}_1), \ldots, (W_m, \mathcal{T}_m) \subseteq \mathsf{D} \times \tau$, $(\forall v^j \in V_*, \alpha(v^j) \in adh_{\mathcal{T}_j}(W_j))$ *et* $(\forall \alpha' \in \mathsf{D}^n, ((\forall v_i \in V \backslash V_*, \alpha'(v_i) = \alpha(v_i))$ *et* $(\forall v^j \in V_*, \alpha'(v^j) \in int_{\mathcal{T}_j}(W_j)))$ *ssi* $\alpha' \in [\![\sigma']\!])$.

La définition 5 formalise la notion de voisinage entre scénarios cohérents, mais ne fournit pas de méthode algorithmique pour déterminer si deux scénarios cohérents donnés sont voisins ou non. Le théorème suivant nous permet de pallier le problème.

Théorème 1
Soient τ *une loi de transformation sur* D, B *un schéma de partition,* σ, σ' *deux scénarios cohérents sur* 2^{B} *et* V, *et* $V_* \subseteq V$. *Soit* V' *l'ensemble* $\{v'_i \mid v_i \in V_*\}$. *On définit le* RCQ $N = N(\sigma, \sigma', V_*, \tau)$ *sur* 2^{B} *et l'ensemble de variables* $V \cup V'$ *par :*
- $\forall (v_i, v_j) \in V \times V, N[v_i, v_j] = \sigma[v_i, v_j]$;
- $\forall (v'_i, v'_j) \in V' \times V', N[v'_i, v'_j] = \sigma'[v_i, v_j]$;
- $\forall (v'_i, v_j) \in V' \times V \backslash V_*, N[v'_i, v_j] = \sigma'[v_i, v_j]$;
- $\forall (v'_i, v_j) \in V' \times V_*, i \neq j, N[v'_i, v_j] = \mathsf{B}$;
- $\forall v'_i \in V'$, $N[v'_i, v_i]$ *est défini par l'ensemble des relations de base voisines de la relation* eq *pour la loi* τ.

σ' *est* V_**-voisin de* σ *pour la loi* τ *si et seulement si* N *est cohérent.*

Déterminer si deux scénarios donnés sont voisins (pour un certain paramétrage de ce voisinage) revient à décider de la cohérence d'un RCQ. Étant donné que le problème de la cohérence d'un RCQ est un problème NP-complet (donc décidable), nous avons à disposition une méthode algorithmique afin de décider du voisinage entre deux scénarios cohérents.

Exemple 4 (Voisinage entre scénarios cohérents)
Considérons de nouveau les scénarios σ *et* σ' *(cf. figures 2 et 9).* σ *est* $\{D\}$*-voisin de* σ' *pour la loi* τ_C, *puisque d'après la définition 5, on peut à partir d'une solution* α' *de* σ', *construire directement une solution* α *de* σ *en modifiant* α' *par un « rétrécissement » de l'intervalle* D.

La figure 10 illustre le RCQ $N(\sigma, \sigma', \{D\}, \tau_C)$ *construit selon la définition donnée dans le théorème 1. Ce* RCQ *est cohérent, nous pouvons déduire du théorème 1 que les scénarios cohérents* σ, σ' *sont* $\{D\}$*-voisins pour la loi de transformation* τ_C.

Nous pouvons à présent construire une distance entre scénarios cohérents, basée sur la notion de voisinage entre scénarios cohérents que nous venons de définir et de caractériser de manière algorithmique. Pour cela, nous introduisons la notion de k-voisinage entre scénarios cohérents, pour tout entier $k > 0$. Deux scénarios cohérents sont k-voisins si et seulement si l'on peut trouver un sous-ensemble V_* de variables de taille au plus k tel que les deux scénarios soient V_*-voisins :

Définition 6 (k-voisinage entre scénarios cohérents)
Soient τ *une loi de transformation sur* D, B *un schéma de partition,* σ, σ' *deux scénarios cohérents sur* 2^{B} *et* V, *et* k *un entier positif.* σ' *est* k*-voisin de* σ *selon la loi* τ *ssi il existe* $V_* \subseteq V$, $|V_*| \leqslant k$ *tel que* σ *est* V_**-voisin de* σ' *pour la loi* τ.

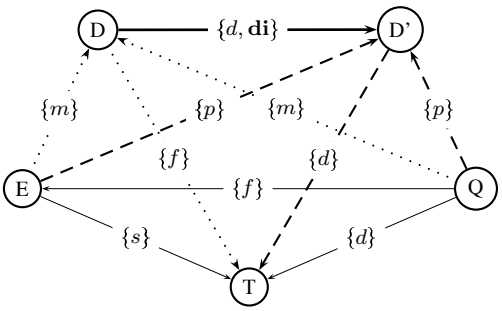

FIGURE 10 – Le RCQ $N(\sigma, \sigma', \{D\}, \tau_C)$.

Le choix du paramètre k dépend du contexte. Il correspond au nombre maximum d'entités qui ont la possibilité de se transformer successivement pour former une étape unique de transformation d'une configuration qualitative représentée par un scénario. On peut en effet remarquer de manière évidente que pour tout entier $k > 0$, le k-voisinage entre scénarios cohérents implique leur k'-voisinage, pour tout entier positif $k' \leqslant k$.

Étant donné un schéma de partition B sur D, un ensemble de variables V, une loi de transformation et un entier $k > 0$ fixé, une relation de k-voisinage entre scénarios cohérents (à l'instar d'une relation de voisinage conceptuel entre relations de base, voir section précédente) peut être représentée au moyen d'un graphe de voisinage sur l'ensemble des scénarios cohérents sur 2^{B} et V, i.e., un graphe orienté dont chaque noeud représente un scénario cohérent sur 2^{B} et V. Dans un tel graphe, une arête relie un nœud n_σ correspondant à un scénario cohérent σ à un autre nœud $n_{\sigma'}$ correspondant à un scénario cohérent σ' si et seulement si σ' est k-voisin de σ pour la loi τ. Une notion de k-distance entre scénarios cohérents peut alors être dérivée de ce graphe.

Définition 7 (k-distance entre scénarios cohérents)
Soient τ une loi de transformation sur D, B un schéma de partition, σ, σ' deux scénarios cohérents sur 2^{B} et V, et k un entier positif. La k-distance entre σ et σ' est la longueur de la chaîne la plus courte reliant les deux nœuds représentant σ et σ' dans le graphe de voisinage dérivé du k-voisinage entre scénarios cohérents correspondant.

Nous avons donc à disposition une distance entre scénarios cohérents générique et pertinente puisqu'elle est indépendante de l'aspect structurel de ces scénarios.

5 Conclusion

Dans cet article, nous avons proposé une définition générique de la notion de loi de transformation, qui peut être appliquée à n'importe quel domaine D (muni d'une topologie) pour les entités spatiales ou temporelles. Cette définition s'appuie sur la notion de continuité induite des espaces topologiques. À titre d'exemple, nous avons importé dans notre cadre deux lois de transformation particulières de l'algèbre des intervalles initialement proposées par Freksa. À partir de ces lois de transformations, nous avons défini la notion de voisinage entre relations de base d'un formalisme qualitatif. Cette

notion donne naturellement naissance à un graphe de voisinage conceptuel entre relations de base. Nous avons également proposé une nouvelle définition du voisinage entre scénarios, dont nous avons fourni une caractérisation algorithmique. Nous avons également proposé par extension une notion de distance entre scénarios cohérents, ingrédient majeur des opérateurs de changements de croyances ou de préférences décrites par des RCQ. La distance ainsi définie est plus pertinente et naturelle que les distances actuellement proposées dans la littérature.

En perspective, une étude expérimentale est prévue afin d'évaluer la complexité de calcul d'une distance entre deux scénarios cohérents donnés. Une méthode « brutale » consiste à choisir l'un des deux scénarios donnés, à générer l'ensemble de ses scénarios cohérents voisins, puis pour chacun de ces scénarios voisins obtenus à générer l'ensemble de leurs voisins, et ainsi de suite jusqu'à atteindre l'autre scénario ; la profondeur de l'arbre de recherche finalement obtenu correspond alors à la distance entre les deux scénarios initiaux. Cet algorithme paraît très coûteux, et c'est pourquoi une recherche approfondie doit être menée dans le but de permettre l'élagage de certaines branches de l'arbre de recherche lors de son développement. En outre, il serait intéressant d'étudier dans quelle mesure la notion de distance introduite dans cet article peut être adaptée d'autres formalismes de représentation d'informations. Par exemple, dans le cadre de la logique propositionnelle, de nombreux opérateurs de fusion de bases de croyances sont construits à partir d'une notion de distance entre interprétations (Konieczny *et al.*, 2004). Une distance typiquement choisie par ces opérateurs est la distance de Hamming (Dalal, 1988). L'utilisation de cette distance nécessite d'admettre une hypothèse d'indépendance entre les variables propositionnelles. Or, lorsque l'on est en présence de contraintes d'intégrité (représentées par une formule propositionnelle) qui codent la structure du problème représenté, i.e., des lois « physiques » et indéniables, l'indépendance entre les variables est remise en cause et la distance de Hamming est alors un choix inapproprié (Konieczny *et al.*, 2011). Par conséquent, à l'instar de notre approche qui consiste à construire une distance basée sur les lois du domaine et du formalisme qualitatif considéré, un travail futur sera (dans le cadre de la logique propositionnelle en particulier), d'élaborer de nouvelles distances, plus pertinentes que la distance de Hamming, et qui dépendent de ces contraintes d'intégrité.

Références

ALLEN J. F. (1981). An interval-based representation of temporal knowledge. In *Proceedings of the 7th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'81)*, p. 221–226.

CONDOTTA J.-F., KACI S., MARQUIS P. & SCHWIND N. (2010). A syntactical approach to qualitative constraint networks merging. In *Proceedings of the 17th International Conference on Logic for Programming, Artificial Intelligence and Reasoning (LPAR'10)*, p. 233–247.

CONDOTTA J.-F., KACI S. & SCHWIND N. (2008). A Framework for Merging Qualitative Constraints Networks. In *Proceedings of the 21st International FLAIRS Conference (FLAIRS'08)*, p. 586–591.

DALAL M. (1988). Investigations into a theory of knowledge base revision : preliminary report. In *Proceedings of the 7th National Conference on Artificial Intelligence (AAAI'88)*, p. 475–479.

DYLLA F. & WALLGRÜN J. O. (2007). Qualitative spatial reasoning with conceptual neighborhoods for agent control. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, **48**(1), 55–78.

EGENHOFER M. J. & AL-TAHA K. K. (1992). Reasoning about gradual changes of topological relationships. In *Spatio-Temporal Reasoning*, p. 196–219.

FREKSA C. (1992). Temporal reasoning based on semi-intervals. *Artificial Intelligence*, **54**(1), 199–227.

GOODAY J. M. & COHN A. G. (1994). Conceptual neighbourhoods in temporal and spatial reasoning. In *Proceedings of the ECAI Spatial and Temporal Reasoning Workshop*.

HIRSCH R. (1999). A finite relation algebra with undecidable network satisfaction problem. *Logic Journal of the IGPL*, **7**(4), 547–554.

KONIECZNY S., LANG J. & MARQUIS P. (2004). $\mathbf{DA}^2$ merging operators. *Artificial Intelligence*, **157**(1-2), 49–79.

KONIECZNY S., MARQUIS P. & SCHWIND N. (2011). Belief base rationalization for propositional merging. In *Proceedings of the 22nd International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'11), to appear*.

KURATA Y. (2009). Semi-automated derivation of conceptual neighborhood graphs of topological relations. In *Proceedings of the 9th Conference on Spatial Information Theory (COSIT'09)*, p. 124–140.

LIGOZAT G. & RENZ J. (2004). What is a qualitative calculus ? a general framework. In *Proceedings of the 8th Pacific Rim International Conferences on Artificial Intelligence (PRICAI'04)*, p. 53–64.

RANDELL D. A., CUI Z. & COHN A. G. (1992). A spatial logic based on regions and connection. In *Proceedings of the 3rd International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'92)*, p. 165–176.