Reconstruction de la sémantique d'admissibilité en défauts et programmation logique

Farid Nouioua, Vincent Risch

LSIS - UMR CNRS 6168,
Faculté des Sciences de Saint–Jérôme,
avenue Escadrille Normandie–Niemen,
13397 Marseille cedex 20, France
{farid.nouioua,vincent.risch}@lsis.org

Résumé : Nous proposons de spécialiser la notion d'extension justifiée de façon à représenter les extensions admissibles (et donc préférées et stables) au sein d'une théorie de défauts. En nous appuyant sur la correspondance entre extensions justifiées et ι-answer sets (iota answer sets), nous montrons alors que tout ensemble admissible d'arguments d'un cadre argumentatif abstrait peut être directement calculé à partir des ι-answer sets du programme logique correspondant. En particulier, il est possible d'étendre un tel programme par un ensemble de contraintes *ad hoc* permettant d'en filtrer directement les ensembles admissibles.

Mots-clés : Argumentation abstraite, défauts, programmation logique

1 Introduction

Depuis l'introduction de la notion de cadre argumentatif abstrait par Phan Minh Dung (cf. Dung (1993a), Dung (1993b), Dung (1995)), plusieurs auteurs ont considéré les liens associant cette théorie avec les défauts ou la programmation logique, (Dung (1995), Bondarenko *et al*. (1997), Nieves *et al*. (2008), Egly *et al*. (2010)). L'ensemble de ces travaux procède d'une vision commune qui souligne avec succès le rôle fondamental que joue au cœur de ces formalismes la notion de conflit entre deux informations. Le cadre argumentatif apparaît donc comme une approche particulièrement éclairante du mécanisme non-monotone mis en oeuvre au sein d'une théorie de défaut ou d'un programme logique. Sans aucunement remettre en cause l'intérêt profond de cette démarche, nous proposons toutefois de revenir à la question inverse, à notre sens insuffisament explorée, à savoir : qu'est-ce qu'une théorie de défauts ou un programme logique peuvent nous apprendre d'un cadre argumentatif abstrait ? En particulier, parce que tout cadre argumentatif apparaît formellement comme un fragment d'une théorie de défauts, il nous semble judicieux d'explorer de façon plus précise comment l'un des concepts de base de l'approche argumentative – l'extension admissible – est apparenté

au même concept dans les approches non-monotones citées. Nos motivations sont multiples : nous espérons élucider de façon plus précise les liens entre ces différents formalismes et, à un moment où se pose avec acuité la question des approches logiques de la notion d'argument (par exemple dans Amgoud & Besnard (2009)), précisément être en mesure de proposer les bases d'une réévaluation de l'argumentation abstraite à l'aune de la logique. De ce point de vue, nous pensons aussi qu'il serait intéressant de connaître les conditions formelles permettant d'appliquer aux cadres argumentatifs les très nombreux travaux menés du côté de la logique sur les préférences, sur la notion d'inférence cumulative ou sur d'autres propriétés. Enfin, en replaçant les cadres argumentatifs dans la perspective de la programmation logique, nous espérons pouvoir mieux bénéficier du remarquable pouvoir calculatoire des systèmes qui sont actuellement proposés. Nous commençons donc par montrer que tout ensemble d'arguments, maximal, sans conflit, correspond très exactement à la notion d'extension justifiée d'une théorie de défauts, initiée par Lukaszewicz (1988), et par contrecoup aux ι-answer sets (ou ι-as) d'un programme logique (cf. Gebser *et al*. (2009)). A partir de contraintes spécifiques sur les extensions justifiées d'une théorie de défauts, nous proposons ensuite une caractérisation de la notion d'ensemble admissible d'arguments d'une théorie argumentative abstraite obtenue à partir de cette théorie de défauts. Etant donnée la correspondance entre extensions justifiées et ι-as, nous montrons alors que tout ensemble admissible d'un cadre argumentatif abstrait peut être caractérisé à partir des ι-as du programme logique équivalent. Il devient notamment possible d'adjoindre à ce programme logique un ensemble de contraintes permettant d'exfiltrer directement à partir des ι-as les ensembles admissibles d'arguments. Il est à noter que les ι-as héritent de la propriété de semi-monotonie des extensions justifiées, ce qui souligne leur rôle central dans le cadre d'un traitement incrémental des arguments à partir d'un programme logique. Dans le second paragraphe, nous rappelons les concepts de base liés aux cadres argumentatifs abstraits Dung (1995) et des théories de défauts Reiter (1980). Dans le troisième paragraphe, nous établissons une correspondance stricte entre ensembles d'arguments maximal sans conflit et extensions justifiées, ce qui permet ensuite la caractérisation de tout ensemble admissible d'arguments comme un cas particulier d'extension justifiée. Le quatrième paragraphe étend cette caractérisation aux ι-as et au calcul d'extensions admissibles à l'aide de contraintes d'intégrité.

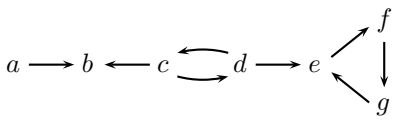
2 Préliminaires

Nous rappelons ici brièvement quelques définitions de base concernant les cadres argumentatifs abstraits d'abord, les théories de défauts ensuite. La notion de programme logique est abordée plus loin.

Un *cadre argumentatif* est une paire $\langle AR, attaque\rangle$ telle que AR est un ensemble et $attaque$ est une relation entre les éléments AR i.e. $attaque \subseteq AR \times AR$. Tout élément de AR est appelé *argument* et $a\ attaque\ b$ signifie qu'il y a une attaque de a à b. Dans ce cas a est appelé *contre-argument* de b. Par extension, un ensemble $S \subseteq AR$ *attaque* un argument $a \in AR$ ssi un argument de S attaque a. Au contraire, S *défend* a ssi pour tout $b \in AR$, si $b\ attaque\ a$ alors $S\ attaque\ b$. Dans ce cas, a est aussi dit être *acceptable au regard de* S. La relation d'attaque induit différents degrés de cohérence

entre arguments. En premier lieu $S \subseteq AR$ est dit *sans conflit* ssi il n'y a aucun a et b de S tel que a *attaque* b. S est *admissible* ssi S est sans conflit et défend tous ses éléments. Une *extension préferée* est un sous-ensemble $\subseteq$-maximal admissible de AR. Enfin S est une *extension stable* ssi S est sans conflit et attaque tout argument qui n'est pas dans S.

Exemple 1 Soit le cadre argumentatif *AF* suivant, les flèches représentant la relation d'attaque entre les arguments a, b, c, d, e, f, g :



Les ensembles admissibles sont : $\emptyset$, $\{a\}$, $\{c\}$, $\{d\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{d, f\}$, $\{a, d, f\}$. Les extensions préferées sont $\{a, c\}, \{a, d, f\}$. L'unique extension stable est $\{a, d, f\}$. Quelque soit le type d'extension considérée (admissible, préferée, ou stable), celle-ci est un sous-ensemble d'un ensemble $\subseteq$-maximal sans conflit parmi $\{a, c, e\}, \{a, c, f\}$, $\{a, c, g\}, \{a, d, f\}, \{a, d, g\}, \{b, d, f\}, \{b, d, g\}, \{b, e\}$.

Un défaut est une expression de la forme $\frac{\alpha:\beta}{\gamma}$, α, β, γ y étant des formules closes du premier ordre. α est appelé *prérequis*, β *justification*, et γ *conclusion*. Etant donné un ensemble de défauts D, $PREREQ(D)$, $JUST(D)$, et $CONS(D)$ font respectivement référence aux ensembles des prérequis, des justifications et des conséquences des défaults de D. Une *théorie de défauts* Δ est la paire (W, D), W y désignant un ensemble de formules du premier ordre et D un ensemble de défauts. Intuitivement, une conséquence de défaut est valide si le prérequis de ce défaut est valide, et si rien ne contredit la justification. La conséquence essentielle de cette approche est capturée par la notion d'extension. Les caractérisations que nous utilisons des R- et J- extensions (notions respectivement dues à Reiter (1980) et Lukaszewicz (1988)) sont données dans Risch (1996). Soit $\Delta = (W, D)$ une théorie de défauts. Un sous-ensemble D' de D est dit *enraciné* ssi pour tout $d \in D'$, il existe une séquence $d_0, d_1, \ldots, d_k$ d'éléments de D' telle que (1) $PREREQ(\{d_0\}) \in Th(W)$, (2) Pour $1 \leq i \leq k-1, PREREQ(\{d_{i+1}\}) \in Th(W) \cup CONS(\{d_0, d_1, \ldots d_i\})$, et $d_k = d$. Soit alors D' un sous-ensemble quelconque de D ; $E = Th(W \cup CONS(D'))$ est : (1) une *J-extension* de Δ ssi D' est un sous ensemble enraciné $\subseteq$-maximal de D tel que pour tout $\beta \in JUST(D')$, $\neg\beta \notin E$; (2) une *R-extension* de Δ ssi elle est une J-extension, et pour tout défaut $d \in D \setminus D', d = \frac{\alpha:\beta}{\gamma}$, $\alpha \notin E$ ou $\neg\beta \in E$. Lorsque $E = Th(W \cup CONS(D'))$ est une extension (J- ou R-), l'ensemble D' est appelé ensemble de *défauts générateurs* de E, et noté $GD(E, \Delta)$. Il est à remarquer que les J-extensions disposent de propriétés intéressantes pour le calcul : elles existent toujours, et les R-extensions en représentent un cas particulier aisément caractérisable Risch (1996). De plus, elles sont semi-monotones : ajouter de nouveaux défauts à une théorie ne remet pas en cause les J-extensions déjà produites. Dans la suite, nous n'aurons pas en général l'utilité du pouvoir expressif de la logique du premier ordre dans

son ensemble, et nous nous restreindrons à des théories propositionelles de défauts.

Exemple 2 Soit la théorie de défauts $\Delta = (\emptyset, \{\frac{c:\neg a \wedge \neg b}{d}, \frac{\top:\neg a}{a \vee b}, \frac{\top:a}{a}\})$. Δ a deux J-extensions $E^1 = Th(a \vee b)$, $E^2 = Th(a)$ parmi lesquelles seule E^2 est une R-extension ; $GD(E^1, \Delta) = \{\frac{\top:\neg a}{a \vee b}\}$, $GD(E^2, \Delta) = \{\frac{\top:a}{a}\}$.

Nous en venons à présent aux théories de défauts en tant que cadres argumentatifs. Soit $\Delta = (W, D)$ une théorie de défauts et $\Lambda = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\} \subseteq JUST(D)$. Une formule λ est dite *conséquence défaisable de* Δ *et* Λ (Dung (1995)) s'il existe une séquence $(e_0, e_1, \ldots e_n)$ avec $e_n = \lambda$ telle que, pour tout $e_i, 0 \leq i \leq n$, (1) $e_i \in W$, ou (2) e_i est consequence logique de membres précédents de la séquence, ou (3) e_i est la conclusion γ d'un défaut $\frac{\alpha:\beta}{\gamma}$ dont le prérequis α est un membre précédent dans la séquence et dont la justification β appartient à Λ. Λ est appelé support de λ au regard de Δ. La théorie Δ est alors interprétée comme cadre argumentatif de la manière suivante : (1) $AR_\Delta = \{(\Lambda, \lambda) \mid \Lambda \subseteq JUST(D), \Lambda$ est support de λ au regard de $\Delta\}$; (2) $(\Lambda, \lambda)\ attaque_\Delta\ (\Lambda', \lambda')$ ssi $\neg\lambda \in \Lambda'$. Inversement, tout cadre argumentatif $AF = \langle AR, attaque \rangle$ peut être traduit modulairement par une théorie de défauts $\Delta_{AF} = (\emptyset, D_{AF})$ de manière suivante : (1) $D_{AF} = \{\frac{:\top}{a} \mid a \in AR\}$; (2) pour tout argument a, b de AR tel que $b\ attaque\ a$, si d_a dénote l'unique defaut de D_{AF} associé à a, ajouter $\neg b$ à $JUST(\{d_a\})$. En d'autres termes, à chaque argument de $\langle AR, attaque \rangle$ est associé un unique défaut sans prérequis dont la conséquence est l'argument lui-même, et dont l'ensemble de justifications est le plus petit ensemble contenant $\top$ et les négations des arguments qui attaquent cet argument.

Exemple 1 (suite) Soit le cadre argumentatif *AF* donné plus haut. La théorie correspondante de défauts est donnée par $\Delta_{AF} = (\emptyset, \{\frac{:\top}{a}, \frac{:\neg a, \neg c}{b}, \frac{:\neg d}{c}, \frac{:\neg c}{d}, \frac{:\neg d, \neg g}{e}, \frac{:\neg e}{f}, \frac{:\neg f}{g}\})$

Il est à noter que si la traduction d'un cadre argumentatif en une théorie de défauts génère un nombre de défauts égal au nombre d'arguments de départ, la traduction en sens opposé (d'une théorie de défauts vers un cadre argumentatif) génère généralement un nombre beaucoup plus important (potentiellement infini) d'arguments. Cette complexification est essentiellement due au fait qu'on passe du langage propositionnel pris dans son ensemble (pour les défauts) à un fragment réduit aux atomes propositionnels, avec ou sans négation (pour les arguments). Un autre point remarquable est qu'à l'image des approches logiques de l'argumentation (cf. Besnard & Hunter (2008)), les traductions proposées ici conduisent à définir une notion d'argument avec structure, sous la forme $(support, conclusion)$. Enfin, remarquons encore que la notion de *conséquence défaisable* permet précisément d'exprimer tout argument sous forme structurée en faisant en sorte d'éliminer les prérequis de la théorie initiale de défauts.

Comme cela est montré dans Dung (1995), il y a une correspondance exacte entre R-extensions d'une théorie de défauts et extensions stables d'un cadre argumentatif abstrait. Soit A une théorie du premier ordre, et $A' \subseteq AR_\Delta$ un ensemble d'arguments obtenus à partir d'une théorie de défauts Δ. On définit (1) $arg(A) = \{(\Lambda, \lambda) \in AR_\Delta \mid \forall \beta \in \Lambda, \beta \cup A \not\vdash\}$; (2) $flat(A') = \{\lambda \mid \exists (\Lambda, \lambda) \in A'\}$. Soit Δ une théorie de

défauts. Alors (lemme 42 et théorème 43 de Dung (1995)) : (1) E est une R-extension de Δ ssi $E = \mathit{flat}(arg(E))$; (2) Etant donnée E une R-extension de Δ, $arg(E)$ est une extension stable de $\langle AR_\Delta, attaque_\Delta \rangle$; (3) Etant donnée E' une extension stable de $\langle AR_\Delta, attaque_\Delta \rangle$, $\mathit{flat}(E')$ est une R-extension de Δ. Nous établissons le résultat préliminaire suivant :

Théorème 1
Soit $\Delta = (W, D)$ une théorie de défauts et $\langle AR_\Delta, attaque_\Delta \rangle$ le cadre argumentatif correspondant. Alors :

(1) $(\Lambda, \lambda) \in AR_\Delta$ ssi il existe $D' \subseteq D$, D' enraciné dans W tel que $\Lambda = JUST(D')$ et $\lambda \in Th(W \cup CONS(D'))$;

(2) $\mathit{flat}(AR_\Delta) = \bigcup_{\substack{D' \in 2^D \\ D' \text{grounded}}} Th(W \cup CONS(D'))$.

A partir de ce résultat, il est immédiat que dans AR_Δ, un argument attaque un argument (Λ, λ) ssi il existe $\beta \in \Lambda$ tel que $\neg\beta \in \mathit{flat}(AR_\Delta)$.

3 Admissibilité à partir des J-extensions

Envisageons de façon plus approfondie la question de l'obtention d'arguments de AR_Δ à partir d'une théorie de défauts Δ. Notre idée est d'établir une correspondance aussi fine et générale que possible entre tout ensemble de défauts applicables et un sous-ensemble d'arguments, de façon à mettre en relation les notions respectives d'extensions dans AR_Δ et Δ. Le théorème 1 souligne le rôle crucial joué par les sous-ensembles de D dans la constitution d'un argument (Λ, λ) de AR_Δ, puisque pour tout argument de ce type, il existe $D' \subseteq D$ tel que $\Lambda = JUST(D')$ et $\lambda \in Th(W \cup CONS(D'))$. Ce dernier ensemble est précisément de la forme prise par les différentes sortes d'extensions de Δ (à partir de différents types de contraintes sur sa génération). En d'autres termes, nous souhaitons être capable de relier certains types d'ensembles de AR_Δ avec certains types d'extensions de Δ *via* $JUST(D')$ (pour les supports d'arguments) et $Th(W \cup CONS(D'))$ (pour les supports des *mêmes* arguments). Dans ce but, nous commençons par introduire les définitions suivantes :

Definition 1
Etant donnée une théorie de défauts $\Delta = (W, D)$, et $D' \subseteq D$, soit $AR_\Delta(D') = \{(\Lambda, \lambda) \in AR_\Delta \mid \lambda \in Th(W \cup CONS(D'))\}$

Clairement, $AR_\Delta(D) = AR_\Delta$. Soit $E = Th(W \cup CONS(D'))$; clairement encore, par construction, $E = \mathit{flat}(AR_\Delta(D'))$. Le théorème suivant explicite le lien existant entre les ensembles d'arguments issus de $AR_\Delta(D')$ et ceux issus de $arg(Th(W \cup CONS(D')))$:

Théorème 2
Etant donnée une théorie de défauts $\Delta = (W, D)$ et $D' \subseteq D$, soit $E = Th(W \cup CONS(D'))$. Alors : (1) $AR_\Delta(D') \subseteq arg(E)$ ssi $\forall \beta \in JUST(D'), \beta \cup E \nvdash$; (2) $AR_\Delta(D') = arg(E)$ ssi E est une R-extension de Δ.

Exemple 2 (suite) Soit la théorie de défauts $\Delta = (\emptyset, D)$ considérée plus haut, on rappelle que Δ a deux J-extensions E^1 et E^2 parmi lesquelles E^2 seule est une R-extension. Il est aisé de vérifier par exemple que $(\{\neg a\}, a \vee b)$ ou $(\{a\}, a)$ appartiennent à $arg(E^1)$ mais que $(\{a\}, a) \notin AR_\Delta(GD(E^1, \Delta))$, ce qui illustre le fait qu'en général, pour $D' \subseteq D$ quelconque, $arg(Th(W \cup CONS(D'))) \not\subseteq AR_\Delta(D')$. En d'autres termes $AR_\Delta(D')$ correspond précisément aux arguments de AR_Δ obtenus à partir des défauts de D', ni plus ni moins. Par ailleurs, $AR_\Delta(GD(E^2, \Delta)) = arg(E^2)$, puisque E^2 est une R-extension.

A partir de ces résultats, il devient aisé de caractériser un ensemble sans conflit d'arguments à partir d'un sous-ensemble D' de défauts :

Théorème 3
Etant donnée une théorie de défauts $\Delta = (W, D)$, soit $D' \subseteq D$, D' enraciné dans W et $E = Th(W \cup CONS(D'))$. $AR_\Delta(D')$ est sans conflit ssi $\forall \beta \in JUST(D'), \neg\beta \notin E$.

Corollaire 1
Soit $\Delta = (W, D)$ une théorie de défauts et $\langle AR_\Delta, attaque_\Delta \rangle$ le cadre argumentatif correspondant. (1) Soit E_Δ un sous-ensemble sans conflit $\subseteq$-maximal quelconque de AR_Δ. Alors $flat(E_\Delta)$ est une J-extension de Δ. (2) Soit E une J-extension quelconque de Δ. Alors $AR_\Delta(GD(E, \Delta))$ est un sous-ensemble sans conflit $\subseteq$-maximal de AR_Δ.

La question est donc d'arriver à filtrer à l'intérieur des J-extensions en vue d'obtenir une représentation des extensions admissibles au sein d'une théorie de défauts. C'est ce que permet le théorème de caractérisation suivant :

Théorème 4
Soit $\Delta = (W, D)$ une théorie de défauts et $\langle AR_\Delta, attaque_\Delta \rangle$ le cadre argumentatif correspondant. Soit $\{D_{i, i \in \mathbb{N}}\}$ une énumération de tous les sous-ensembles D qui sont enracinés dans W, avec $E(D_i) = Th(W \cup CONS(D_i))$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Pour tout $D' \subseteq D$, $AR_\Delta(D')$ est un ensemble admissible de $\langle AR_\Delta, attaque_\Delta \rangle$ ssi (1) il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $D' = D_i$ (2) il existe $j \in \mathbb{N}$ tel qu $D' \subseteq D_j$ et $E(D_j)$ est une J-extension (3) pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(\forall \beta \in JUST(D'), \neg\beta \in E(D_k) \Rightarrow (\exists \gamma \in E(D'), \neg\gamma \in JUST(D_k))$

Ce que dit ce théorème, c'est que pour qu'un sous-ensemble d'une J-extension puisse correspondre à un ensemble admissible, il est nécessaire de vérifier que si la négation d'une justification utilisée dans la construction de ce sous-ensemble est trouvée dans un ensemble enraciné (i.e. un argument de l'ensemble est attaqué) alors la négation d'une formule de cet ensemble enraciné doit elle-même être trouvée parmi les justifications du sous-ensemble de départ (i.e. l'argument attaqué est défendu). En d'autres termes, pour calculer les ensembles admissibles au sein d'une théorie de défauts (et donc les extensions préférées pour les sous-ensembles $\subseteq$-maximaux), il suffit de filtrer à l'intérieur des J-extensions de cette théorie de défauts. On notera que le cas pour lequel la consequence $(\exists \gamma \in E(D'), \neg\gamma \in JUST(D_k))$ de l'implication (3) est toujours vraie permet

de caractériser les extensions stables, puisque celles-ci correspondent directement aux R-extensions telles que caractérisées plus haut.

4 Liens avec les ι-answer sets

Dans le contexte de la programmation logique, il a été montré par Delgrande *et al.* (2003) que la notion de J-extension correspond à un relâchement sur les contraintes de génération d'un answer set. Cette idée est complètement formalisée avec la notion d'ι-as introduite dans Gebser *et al.* (2009) comme exacte contrepartie de celle de J-extension au sein de toute théorie de défauts équivalente à un programme logique. A la suite de Gebser *et al.* (2009), rappelons qu'un programme logique normal est un ensemble fini de règles de la forme

$$p_0 \leftarrow p_1, \ldots, p_m, not\ p_{m+1}, \ldots, not\ p_n$$

chaque p_i y désigant un *atome*. Pour une règle r, on pose $head(r) = p_0$ et $body(r) = \{p_1, \ldots, p_m, not\ p_{m+1}, \ldots, not\ p_n\}$ De plus, $body^+(r) = \{p_1, \ldots, p_m\}$ et $body^-(r) = \{not\ p_{m+1}, \ldots, not\ p_n\}$. Etant donné un programme logique Π, $head(\Pi) = \{head(r) \mid r \in \Pi\}$, $body(\Pi) = \{body(r) \mid r \in \Pi\}$, $body^+(\Pi) = \bigcup_{r\in\Pi} body^+(r)$, $body^-(\Pi) = \bigcup_{r\in\Pi} body^-(r)$. Enfin, on notera qu'une tête de règle qui est vide est assimilée à $\bot$, alors qu'un corps vide est assimilé à $\top$. Un programme Π est dit *basique* si $body^-(\Pi) = \emptyset$. Tout programme basique Π a un unique modèle $\subseteq$-minimal, denoté par $Cn(\Pi)$, et qui est le plus petit ensemble d'atomes clos pour les règles de Π. Le *reduct* d'un programme logique Π relativement à un ensemble X d'atomes est le programme basique $\Pi^X = \{head(r) \leftarrow body^+(r) \mid r \in \Pi, body^-(r) \cap X = \emptyset\}$. Si $X = Cn(\Pi^X)$, alors X est un *answer set* de Π. On pose $Cn^+(\Pi) = Cn(\Pi^\emptyset) = Cn(head(r) \leftarrow body^+(r) \mid r \in \Pi)$. Soit Π un programme logique et X un ensemble d'atomes, X est un ι-as de Π si $X = Cn^+(\Pi')$ pour un certain $\Pi' \subseteq \Pi$ maximal, tel que (1) $body^+(\Pi') \subseteq Cn^+(\Pi')$ et (2) $body^-(\Pi') \cap Cn^+(\Pi') = \emptyset$. Les ι-as d'un programme Π correspondent aux extensions justifiées d'une théorie de défauts donnée par la traduction modulaire suivante : chaque règle r de Π produit un défaut $\frac{\bigwedge body^+(r) : \neg|body^-(r)|}{head(r)}$ (avec $| S |= \{a \mid not\ a \in S\}$), et $W = \emptyset$. Etant donné $\Pi' \subseteq \Pi$, soient $AR_\Pi(\Pi') = \{(body^-(r), head(r)) \mid r \in \Pi'\}$, et $flat_\Pi(\Pi') = \{head(r) \mid r \in \Pi'\}$. Soit $\Delta_\Pi = (\emptyset, D_\Pi)$, une théorie de défauts obtenue par la traduction donnée ci-dessus, alors clairement $AR_\Delta(D') = AR_\Pi(\Pi')$ et $flat(AR_\Delta(D')) = flat_\Pi(\Pi')$ pour tout $D' \subseteq D_\Pi$ obtenu à partir de $\Pi' \subseteq \Pi$ *via* cette traduction. On remarquera qu'à partir de cette traduction et du théorème 1 toutes les règles ont un corps positif vide. A partir du corollaire 1 on obtient immédiatement :

Corollaire 2
Soit Π un programme dont le corps positif est vide et $AR_\Pi(\Pi)$ le cadre argumentatif correspondant. Pour tout $\Pi' \subseteq \Pi$, $AR_\Pi(\Pi')$ est un sous-ensemble sans conflit $\subseteq$-maximal de $AR_\Pi(\Pi)$ ssi $head(\Pi')$ est un ι-as de Π.

Du théorème 4 on obtient directement :

Corollaire 3
Soit Π un programme dont le corps positif est vide et $AR_\Pi(\Pi)$le cadre argumentatif correspondant. Soient $X_1, \ldots, X_k$ une collection quelconque de tous les ι-as de Π et $AR_\Pi(\Pi_1), \ldots, AR_\Pi(\Pi_k)$ les sous-ensembles sans conflit $\subseteq$-maximaux de $AR_\Pi(\Pi)$ correspondants. Pour tout $\Pi' \subseteq \Pi$, $AR_\Pi(\Pi')$ est un ensemble admissible de $AR_\Pi(\Pi)$ ssi il existe i, $1 \leq i \leq k$, tel que $\Pi' \subseteq \Pi_i$ et $(\forall r' \in \Pi')(\forall r \in \Pi \setminus \Pi')(body^-(r') \cap head(r) \neq \emptyset) \Rightarrow (head(\Pi') \cap body^-(r) \neq \emptyset)$.

Exemple 1 (suite) A partir du cadre argumentatif *AF* proposé plus haut, on obtient le programme Π_{AF} suivant :

$$\begin{array}{llll} r^1: & a & \leftarrow & \\ r^2: & b & \leftarrow & not\ a, not\ c \\ r^3: & c & \leftarrow & not\ d \\ r^4: & d & \leftarrow & not\ c \end{array} \qquad \begin{array}{llll} r^5: & e & \leftarrow & not\ d, not\ g \\ r^6: & f & \leftarrow & not\ e \\ r^7: & g & \leftarrow & not\ f \end{array}$$

Huit ι-as sont générés : $X_1 = \{a, c, e\}$, $X_2 = \{a, c, f\}$, $X_3 = \{a, c, g\}$, $X_4 = \{a, d, f\}$, $X_5 = \{a, d, g\}$, $X_6 = \{b, d, f\}$, $X_7 = \{b, d, g\}$, $X_8 = \{b, e\}$. Par exemple, et en particulier, X_1 et X_5 correspondent respectivement aux sous-ensembles sans conflit $\subseteq$-maximaux de $AR_\Pi(\Pi_{AF})$ suivants : $AR_\Pi(\Pi_1) = \{(\{\}, a), (\{not\ d\}, c), (\{not\ d, not\ g\}, e)\}$, $AR_\Pi(\Pi_5) = \{(\{\}, a), (\{not\ c\}, d), (\{not\ f\}, g)\}$ avec $\Pi_1 = \{r^1, r^3, r^5\}, \Pi_4 = \{r^1, r^4, r^6\}, \Pi_5 = \{r^1, r^4, r^7\}$. En appliquant le corollaire 3, il est aisé de vérifier qu'alors que $(\{not\ f\}, g)$ de $AR_\Pi(\Pi_5)$ *attaque* $(\{not\ d, not\ g\}, e)$ de $AR_\Pi(\Pi_1)$ (i.e. $body^-(r^5) \cap head(r^7) \neq \emptyset$), $AR_\Pi(\Pi_1)$ ne se défend pas contre cette attaque (i.e. $head(\Pi_1) \cap body^-(r^7) = \emptyset$). On en déduit que $AR_\Pi(\Pi_1)$ n'est pas admissible et que l'argument $(\{not\ d, not\ g\}, e)$ doit être retiré de $AR_\Pi(\Pi_1)$ de façon à obtenir $\{(\{\}, a), (\{not\ d\}, c)\}$ comme un sous-ensemble admissible de $AR_\Pi(\Pi_{AF})$. Des vérifications similaires s'appliquent à chacun des ι-as trouvés.

La définition suivante introduit directement la contrepartie d'un ensemble d'arguments dans un programme logique :

Definition 2
Soit Π un programme logique et X un ensemble d'atomes. X est appelé answer set admissible *de Π ssi il existe $\Pi' \subseteq \Pi$ tel que $X = flat_\Pi(\Pi')$ et $AR_\Pi(\Pi')$ est un ensemble admissible de $AR_\Pi(\Pi)$.*

A la suite des propositions faites par Gebser *et al.* (2009) pour obtenir les ensembles de réponses à partir des ι-as, nous étendons nos programmes logiques avec des contraintes d'intégrité dont le but est ici de filtrer directement à l'intérieur des ι-ensembles de réponses les ensembles admissibles. Rappelons qu'une contrainte d'intégrité est une règle c dont la tête est vide, c'est à dire :

$$\leftarrow p_1, \ldots, p_m, not\ p_{m+1}, \ldots, not\ p_n$$

Toujours à la suite de Gebser *et al.* (2009), une contrainte c est dite *satisfaite au regard* d'un ensemble X d'atomes si $body^+(c) \not\subseteq X$ ou $body^-(c) \cap X \neq \emptyset$. Afin d'éliminer

dans les ι-as les sous-ensembles qui ne correspondent pas à des ensembles admissibles de $AR_\Pi(\Pi)$ pour un programme donné Π obtenu à partir d'un cadre argumentatif, on pose

$$\mathcal{C}_\Pi^{Ad} = \{\leftarrow head(r'), body^-(r) \mid r, r' \in \Pi, head(r) \in body^-(r')\}.$$

Definition 3
Soit Π un programme, $\mathcal{C}_\Pi^{Ad}$ un ensemble de contraintes d'intégrité, et X un ensemble d'atomes. X est dit admissible au regard de $\mathcal{C}_\Pi^{Ad}$ *ssi X est un sous-ensemble d'un ι-as de Π tel que toute contrainte $c \in \mathcal{C}_\Pi^{Ad}$ est satisfaite au regard de X.*

Théorème 5
Soit Π un programme logique et X un ensemble d'atomes. Alors X est un answer set admissible de Π ssi X est admissible au regard de $\mathcal{C}_\Pi^{Ad}$.

Exemple 1 (suite) En revenant au cadre argumentatif initial *AF* donné plus haut, et au programme logique correspondant Π_{AF}, on y ajoute l'ensemble de contraintes $\mathcal{C}_{\Pi_{AF}}^{Ad}$:

$$\begin{array}{llll} c^{12}: & \leftarrow & b & \\ c^{32}: & \leftarrow & b, not\ d & \\ c^{45}: & \leftarrow & e, not\ c & \end{array} \qquad \begin{array}{llll} c^{56}: & \leftarrow & f, not\ d, not\ g & \\ c^{67}: & \leftarrow & g, not\ e & \\ c^{75}: & \leftarrow & e, not\ f & \end{array}$$

Par commodité chaque contrainte est étiquetée à partir des deux règles de Π_{AF} qui la produisent, i.e. c^{ij} dénote $\leftarrow head(r^i), body^-(r^j)$ quand $head(r^i) \in body^-(r^j)$. Remarquons que les constraintes $c^{34} : \leftarrow d, not\ d$ et $c^{43} : \leftarrow c, not\ c$ qui devraient appartenir à $\mathcal{C}_{\Pi_{AF}}^{Ad}$ peuvent être retirées car elles sont toujours satisfaites. $X_1 = \{a, c, e\}$ est éliminé par c^{75} puisque $body^+(c^{75}) \subseteq X_1$ alors que $body^-(c^{75}) \cap X_1 = \emptyset$, et par conséquent c^{75} n'est pas satisfaite au regard de X_1. Inversement, $X_1 \setminus \{e\}$ est bien un ensemble admissible de Π_{AF} au regard de $\mathcal{C}_{\Pi_{AF}}^{Ad}$. On notera aussi que tout ensemble contenant b est éliminé d'emblée par c^{12}.

5 Conclusion

Nous avons présenté une caractérisation de la sémantique d'admissibilité de Dung dans le cadre des défauts et de la programmation logique. A notre avis, les résultats obtenus, quoique naturels, dénotent un lien plus étroit entre argumentation abstraite, défauts, et programmation logique que celui initialement décrit par Dung. En particulier, Dung (1995), Nieves *et al.* (2008) ou Egly *et al.* (2010) adoptent une approche qui consiste à coder le graphe des attaques comme une méta-connaissance livrée à un programme chargé de le traiter. Hors, il apparaît par exemple superflu de passer par une interprétation prédicative d'un cadre argumentatif abstrait pour pouvoir le représenter en programmation logique. Si, faute d'une étude qui dépasserait le cadre de cet article, nous ne prétendons pas en l'état disposer d'une approche calculatoire plus performante que Nieves *et al.* (2008) ou Egly *et al.* (2010), notre méthode relève toutefois d'un point de vue qui va au-delà de la seule ingénierie visant le traitement d'un cadre argumentatif

par un programme. En montrant que la sémantique d'admissibilité correspond clairement à un fragment des défauts et des programmes logiques, et en élucidant comment, nous espérons montrer que ces trois formalismes contribuent simplement aux éclairages différents d'un même objet mathématique, dont la représentation et le traitement bénéficieront donc des acquis obtenus dans chacune des approches considérées. Dans une perpective future, nous envisageons d'une part de donner une interprétation argumentative à la notion de prérequis d'un défaut (ou de façon équivalente, au corps positif d'une règle de programme logique), d'autre part d'étendre notre approche à d'autres sémantiques argumentatives connues, notamment les extensions complètes, CF2 et la sémantique semi-stable.

Références

AMGOUD L. & BESNARD P. (2009). Bridging the gap between abstract argumentation systems and logic. In L. GODO & A. PUGLIESE, Eds., *Scalable Uncertainty Management : Proceedings of SUM 2009*, volume 5785 of *Lecture Notes in Computer Science*, p. 12–27 : Springer.

BESNARD P. & HUNTER A. (2008). *Elements of Argumentation*. The MIT Press.

BONDARENKO A., DUNG P. M., KOWALSKI R. A. & TONI F. (1997). An abstract, argumentation-theoric approach to default reasoning. *Artificial Intelligence*, **93**(1-2), 63–101.

DELGRANDE J. P., GHARIB M., MERCER R. E., RISCH V. & SCHAUB T. (2003). Lukaszewicz-style answer set programming : A preliminary report. In M. D. VOS & A. PROVETTI, Eds., *Answer Set Programming, Advances in Theory and Implementation, Proceedings of the 2nd Intl. ASP'03 Workshop*, volume 78 of *CEUR Workshop Proceedings* : CEUR-WS.org.

DUNG P. M. (1993a). An argumentation semantics for logic programming with explicit negation. In *ICLP : 10th International Conference on Logic Programming*, p. 616–630.

DUNG P. M. (1993b). On the acceptability of arguments and its fundamental role in nonmonotonic reasoningand logic programming. In *IJCAI : 13th International Joint Conference on Artificial Intelligence*, p. 852–859.

DUNG P. M. (1995). On the acceptability of arguments and its fundamental role in nonmonotonic reasoning, logic programming and n-person games. *Artificial Intelligence*, **77**(2), 321–358.

EGLY U., GAGGL S. A. & WOLTRAN S. (2010). Answer-set programming encodings for argumentation frameworks. *Argument and Computation*, **1**(2), 147–177.

GEBSER M., GHARIB M., MERCER R. E. & SCHAUB T. (2009). Monotonic answer set programming. *Journal of Logic and Computation*, **19**(4), 539–564.

LUKASZEWICZ W. (1988). Considerations on default logic – an alternative approach. *Computational Intelligence*, **4**, 1–16.

NIEVES J. C., CORTÉS U. & OSORIO M. (2008). Preferred extensions as stable models. *Theory and Practice of Logic Programming*, **8**(4), 527–543.

REITER R. (1980). A logic for default reasoning. *Artificial Intelligence*, **13**, 81–132.

RISCH V. (1996). Analytic tableaux for default logics. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, **6**, 71–88.