Représentation de l’information dans la machine

Systèmes de numeration

Introduction

- Quelle que soit la nature de l'information traitée par un ordinateur (image, son, texte, vidéo), elle l'est toujours représentée sous la forme d'un ensemble de nombres binaires

- Une information élémentaire correspond à un chiffre binaire (0 ou 1) appelé bit. Le terme **bit** signifie « **binary digit** »

- Le codage de l’information permet d’établir une correspondance entre la représentation externe de l’information et sa représentation binaire

Introduction

- Nous avons pris l'habitude de représenter les nombres en utilisant dix symboles différents: 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9
- Ce système est appelé le système décimal (**déci** signifie dix).

- Il existe cependant d'autres formes de numération qui fonctionnent en utilisant un nombre de symboles distincts.
  - Exemple :
    - système binaire (bi: deux),
    - le système octal (oct: huit),
    - le système hexadécimal (hexa: seize).
    - ….
- Dans un système de numération : le nombre de symboles distincts est appelé la base du système de numération.

Le système décimal

- On utilise dix symboles différents:

  { 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 }
- N'importe quelle combinaison des symboles **{ 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 }** nous donne un nombre.

$\boxed{2}\,3\,3\,4\,5\,6\,\boxed{7}$

Poids fort

Poids faible

$\boxed{\mathbf{7126}}\,,\,\boxed{\mathbf{42538}}$

Partie entière

Partie fractionnelle

Exemple:

le nombre **7213** peut être

écrit sous la forme suivante :

$$7213 = 7*10^3 + 2*10^2 + 1*10^1 + 3*10^0$$

C'est la forme polynomiale

- Un nombre réel peut être écrit aussi sous la forme polynomiale:

$$7213{,}987 = 7*10^3 + 2*10^2 + 1*10^1 + 3*10^0 + 9*10^{-1} + 8*10^{-2} + 7*10^{-3}$$

Système binaire (système à base 2)

- Dans le système binaire, pour exprimer n'importe quelle valeur on utilise uniquement 2 symboles : { 0 , 1}

$$(\boxed{1}101)_2$$

Un bit

La base

$$(\boxed{1}\,01\,101\,\boxed{1})_2$$

Le bits du poids forts

Le bits du poids faible

. Un nombre dans la base 2 peut être écrit aussi sous la forme polynomial

$$(101101)_2 = 1*2^5 + 0*2^4 + 1*2^3 + 1*2^2 + 0*2^1 + 1*2^0 = (45)_{10}$$

$$(101101{,}101)_2 = 1*2^5 + 0*2^4 + 1*2^3 + 1*2^2 + 0*2^1 + 1*2^0 + 1*2^{-1} + 0*2^{-2} + 1*2^{-3} = (45{,}625)_{10}$$

Système binaire (système à base 2)

Exemple

- Sur **un seul bit** : 0 , 1

- **Sur 2 bits :**

Binaire	Décimal
00	0
01	1
10	2
11	3

$2^1 2^0$

4 combinaisons= 2^2

Sur 3 Bits

$2^2 2^1 2^0$

Binaire	Décimal
000	0
001	1
010	2
011	3
100	4
101	5
110	6
111	7

8 combinaisons= 2^3

Sur 4 Bits

Binaire	Décimal
0000	0
0001	1
0010	2
0011	3
0100	4
0101	5
0110	6
0111	7
1000	8
1001	9
1010	10
1011	11
1100	12
1101	13
1110	14
1111	15

16 combinaisons= 2^4

Le système octal (base 8)

- 8 symboles sont utilisés dans ce système:

  $\{ 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 \}$

- **Exemple 1 :**

$$(526)_8 = 5*8^2 + 2*8^1 + 6*8^0$$

$$(537{,}235)_8 = 5*8^2 + 3*8^1 + 7*8^0 + 2*8^{-1} + 3*8^{-2} + 5*8^{-3}$$

Exemple 2 :

On remarque que le nombre (7918) n'existe pas dans la base 8 puisque les symboles 8 et 9 n'appartiennent pas à la **base octal (base 8)** .

Le système hexadécimal (base 16)

- Dans la base 16, nous avons seize (16) symboles différents:

Décimal	Hexadécimal
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9
10	A
11	B
12	C
13	D
14	E
15	F

Exemples:

$$(263)_{16} = 2*16^2 + 6*16^1 + 3*16^0$$

$$(1CDA)_{16} = 1*16^3 + C*16^2 + D*16^1 + A*16^0 = 1*16^3 + 12*16^2 + 13*16^1 + 10*1$$

Bases de représentation

- Dans une **base X** , on utilise **X symboles** distincts pour représenter les nombres.

- La valeur de chaque symbole doit être **strictement inférieur** à la base **X**.

- Chaque nombre dans une base X peut être écrit sous sa forme polynomiale

Conversion d'une base X à la base 10

- Il suffit de faire le développement en polynôme de ce nombre dans la base X , et de faire la somme par la suite.

Exemple :

$$(1101)_2 = 1*2^3 + 1*2^2 + 0*2^1 + 1*2^0 = (13)_{10}$$

$$(1A7)_{16} = 1*16^2 + A*16^1 + 7*16^0 = 1*16^2 + 10*16^1 + 7*16^0 = 256 + 160 + 7 = (423)_{10}$$

$$(1101,101)_2 = 1*2^3 + 1*2^2 + 0*2^1 + 1*2^0 + 1*2^{-1} + 0*2^{-2} + 1*2^{-3} = (13,625)_{10}$$

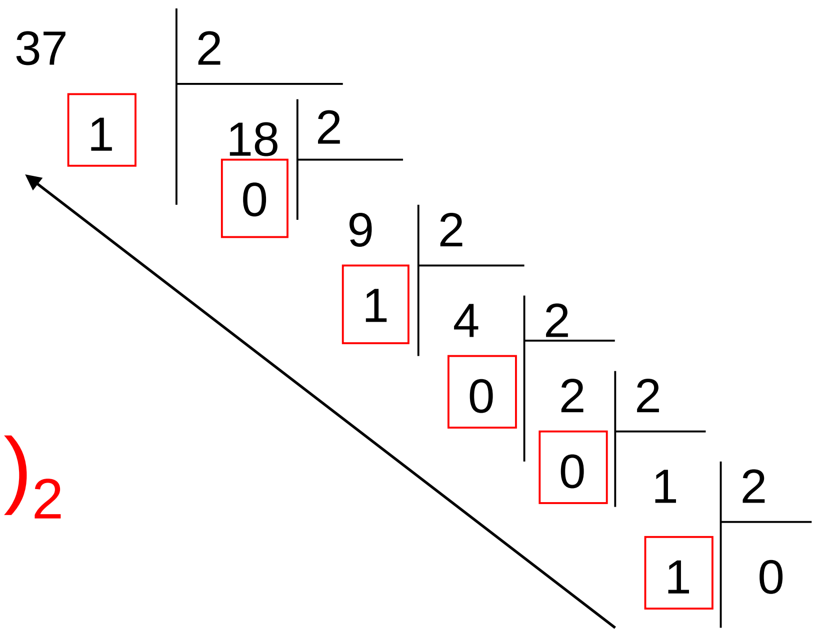
$$(43,2)_5 = 4*5^1 + 3*5^0 + 2*5^{-1} = 20 + 3 + 0,4 = (23,4)_{10}$$

Conversion de la base 10 à la base 2

Le principe de la conversion de la base 10 à la base 2:

Cela consiste à faire des divisions successives du nombre sur 2 , et prendre le reste des divisions dans l'ordre inverse.

Exemple 1 : $(37)_{10}=(?)_2$



Après division :

on obtient : $(37)_{10}=(100101)_2$

Conversion de la base 10 à la base 2 cas d'un nombre réel

- Nombre réel est constitué de deux parties : **la partie entière et la partie fractionnelle.**

- **La partie entière:** est transformée en effectuant des divisions successives.

- **La partie fractionnelle:** est transformée en effectuant des multiplications successives par 2 .

Exemple : effectuer la conversion suivante 37,625=$(?)_2$

Partie entière = 37 = $(100101)_2$

Partie fractionnelle = 0,625 = $(?)_2$

Partie fractionnelle

$0,625 * 2 = \boxed{1},25$

$0,25 * 2 = \boxed{0},5$

$0,5 * 2 = \boxed{1},0$

$(0,625)=(0,101)_2$

Donc $37,625=(100101,101)_2$

Conversion de la base 10 à la base 2 cas d'un nombre réel

- **Exemple 2:** Effectuer la conversion suivante $(0,7)_{10}=(?)_2$

$0,7 * 2 = 1,4$

$0,4 * 2 = 0,8$

$0,8 * 2 = 1,6$

$0,6 * 2 = 1,2$

$0,2 * 2 = 0,4$

$(0,7)= (0,10110)_2$

Le nombre de bits après la virgule va déterminer la précision

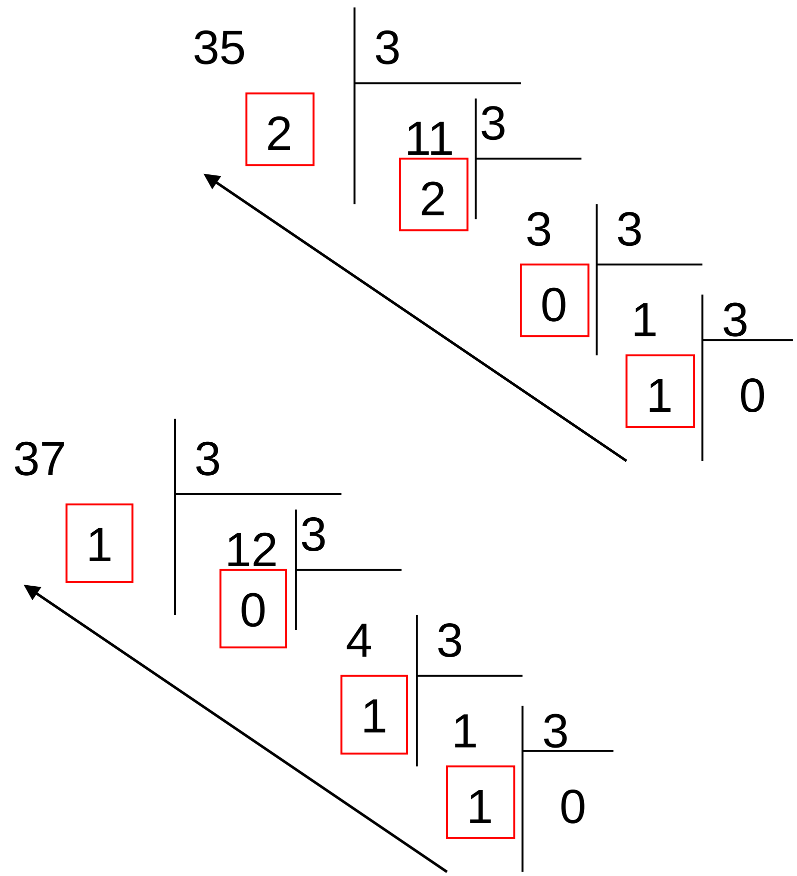
Conversion du décimal à une base X

- La conversion se fait en prenant les restes des divisions successives sur la base X dans le sens inverse.

Exemple : effectuer les conversions suivantes:

$(35)_{10} = (?)_3$

$(37)_{10} = (?)_3$



$(35)_{10} = (1022)_3$

$(37)_{10} = (1101)_3$

Conversion du décimal à une base X

- **Exercice :** Effectuer les transformations suivantes :

$$(43)_{10}=(?)_2=(?)_5=(?)_8=(?)_{16}$$

$43 \mid 2$

$\boxed{1}$ $21 \mid 2$

$\boxed{1}$ $10 \mid 2$

$\boxed{0}$ $5 \mid 2$

$\boxed{1}$ $2 \mid 2$

$\boxed{0}$ $1 \mid 2$

$\boxed{1}$ 0

$(101011)_2$

$43 \mid 5$

$\boxed{3}$ $8 \mid 5$

$\boxed{3}$ $1 \mid 5$

$\boxed{1}$

$(133)_5$

$43 \mid 8$

$\boxed{3}$ $5 \mid 8$

$\boxed{5}$ 0

$(53)_8$

$43 \mid 16$

$\boxed{11}$ $2 \mid 16$

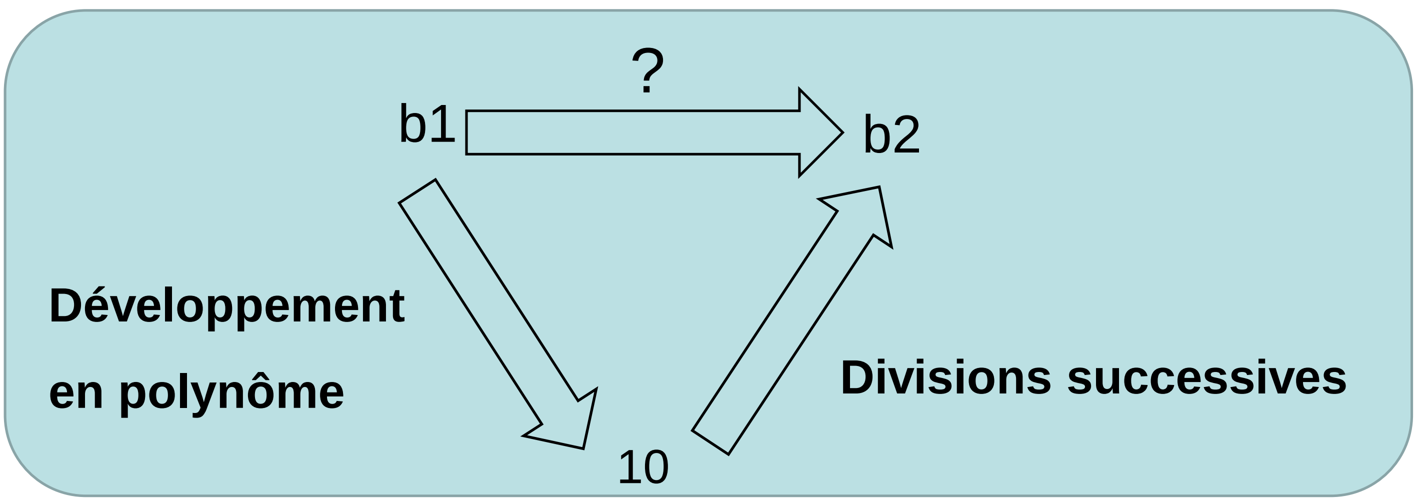
$\boxed{2}$ 0

$(2B)_{16}$

Conversion d'une base b1 à une base b2

- Pour passer d'une **base b1** à une autre **base b2** directement (généralement il n'existe pas une méthode!!)

- L'idée est de convertir le nombre de la **base b1** à la **base 10** , en suit convertir le résultat de la **base 10** à la **base b2** .



Conversion d'une base b1 à une base b2

Exercice : Effectuer la conversion suivante

$(34)_5=(?)_7$

$$(34)_5 = 3*5^1 + 4*5^0 = 15 + 4 = (19)_{10} = (?)_7$$

$$\begin{array}{r|l} 19 & 7 \\ \cline{2-2} \boxed{5} & \begin{array}{r|l} 2 & 7 \\ \cline{2-2} \boxed{2} & 0 \end{array} \end{array}$$

$(\mathbf{34})_{\mathbf{5}} = (19)_{10} = (25)_7$ ⇒ $(34)_5 = (25)_7$

Conversion : Octal → binaire

. En octal chaque, symbole de la base s'écrit sur 3 bits en binaire.

. L'idée de base est de replacer chaque symbole dans la base octal par sa valeur en binaire sur 3 bits (faire des éclatement sur 3 bits).

Octal	Binaire
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

Exemples :

$(345)_8=(\underline{011}\ \underline{100}\ \underline{101})_2$

$(65,76)_8=(\underline{110}\ \underline{101},\ \underline{111}\ \underline{110})_2$

$(35,34)_8=(\underline{011}\ \underline{101}\ ,\ \underline{011}\ \underline{100})_2$

Remarque :

le remplacement se fait de droit à gauche pour la partie entière et de gauche à droite pour la partie fractionnelle .

Conversion : binaire → octal

- L'idée est de faire des regroupements de 3 bits à partir du poids faible.
- Par la suite remplacer chaque regroupement par la valeur octal correspondante

Exemple :

$$(11001010010110)_2=(\underline{011}\ \underline{001}\ \underline{010}\ \underline{010}\ \underline{110})_2=\mathbf{(31226)_8}$$

$$(110010100,10101)_2=(\underline{110}\ \underline{010}\ \underline{100}\ ,\ \underline{101}\ \underline{010})_2=\mathbf{(624,52)_8}$$

<--- ---->

Remarque :
le regroupement se fait **de droit à gauche** pour la partie entière et **de gauche à droite** pour la partie fractionnelle .

Conversion : hexadécimal → binaire

- En Hexa chaque symbole de la base 16 s'écrit sur 4 bits.

- Replacer chaque symbole par sa valeur en binaire sur 4 bits **(faire des éclatement sur 4 bits).**

Décimal	Hexadécimal
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9
10	A
11	B
12	C
13	D
14	E
15	F

Exemple :

$(757F)_{16}=(\underline{0111}\ \underline{0101}\ \underline{0111}\ \underline{1111})_2$

$(BA3,5F7)_{16} = (\ \underline{1011}\ \underline{1010}\ \underline{0011}\ ,\ \underline{0101}\ \underline{1111}\ \underline{0111}\ )_2$

Conversion : binaire → hexadécimal

L'idée est de faire des regroupements de 4 bits à partir du poids faible.

Par la suite remplacer chaque regroupement par la valeur Héxa correspondante .

Exemple :

$(10001010100111)_2=(\underline{0010}\ \underline{0010}\ \underline{1010}\ \underline{0111})_2=$ $\mathbf{(22A7)_{16}}$

$(110000101,10111)_2=(\underline{0001}\ \underline{1000}\ \underline{0101},\underline{1011}\ \underline{1000})_2=$ $\mathbf{(185,B8)_{16}}$

Opérations arithmétiques en binaire

Exercice: Effectuer l'opération suivante

(1100011)$_2$ +(**10001011**)$_2$ =(**?**)$_2$

$$
\begin{array}{r} 0 \\ +\ 0 \\ \hline 0 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 0 \\ +\ 1 \\ \hline 1 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 1 \\ +\ 0 \\ \hline 1 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 1 \\ +\ 1 \\ \hline 10 \end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & 1 & 1 & \\
 & & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
+ & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{array}
$$

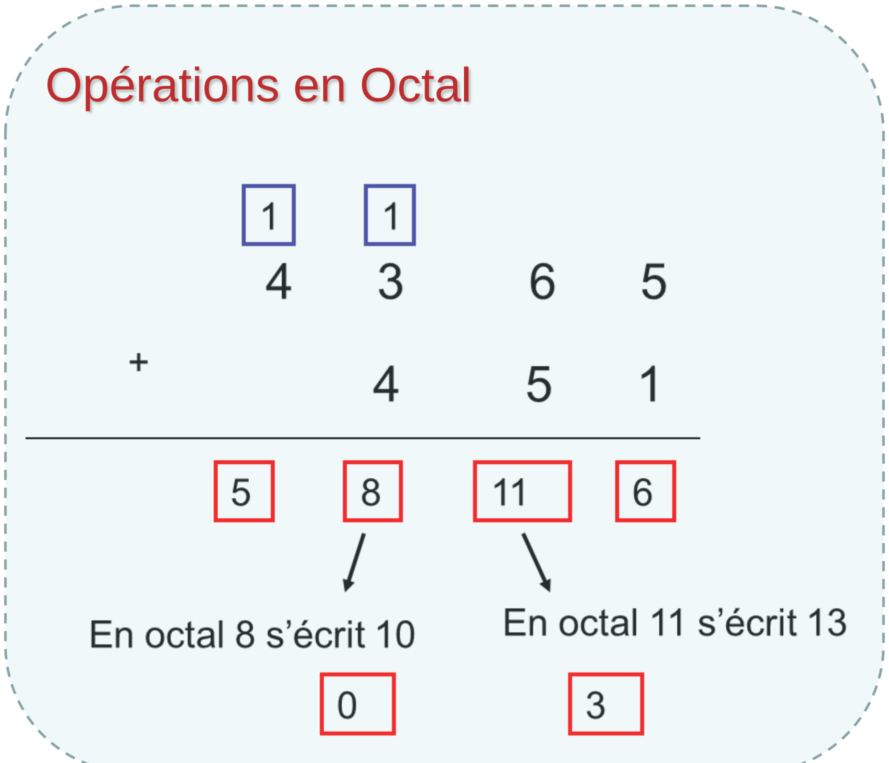
Le résultat : **(11101110)$_2$**

Opérations arithmétiques en hexadécimal

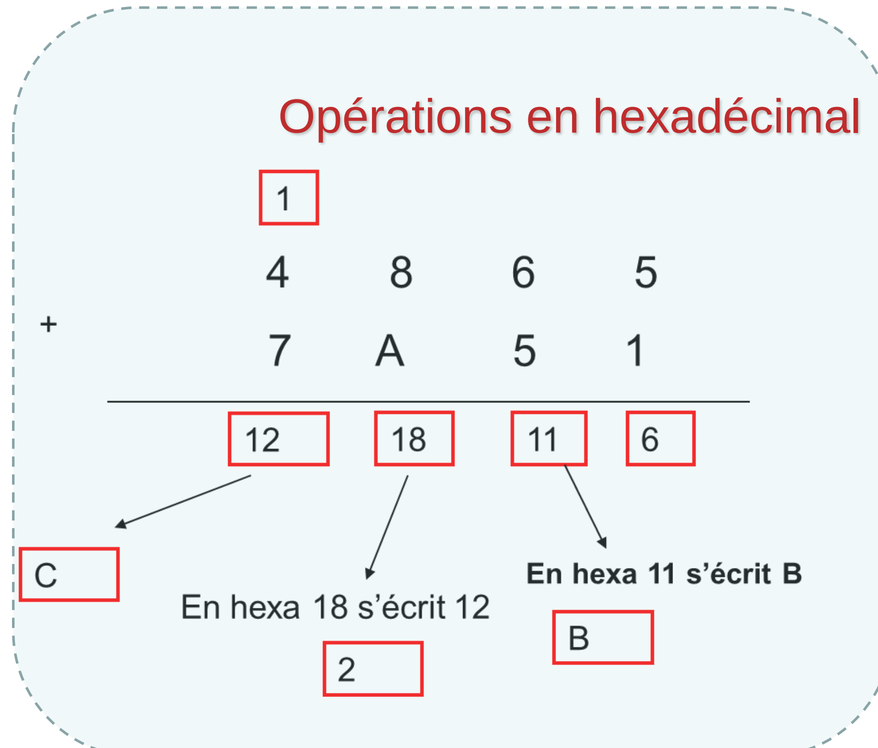
Exercice: Effectuer les opérations suivantes:

$(\mathbf{4365})_8 + (\mathbf{451})_8 = (\mathbf{?})_8$

$(\mathbf{4865})_{16} + (\mathbf{7A51})_{16} = (\mathbf{?})_{16}$



Le résultat : $(\mathbf{5036})_8$



Le résultat : $(\mathbf{C2B6})_{16}$

Représentation de l’information

Introduction

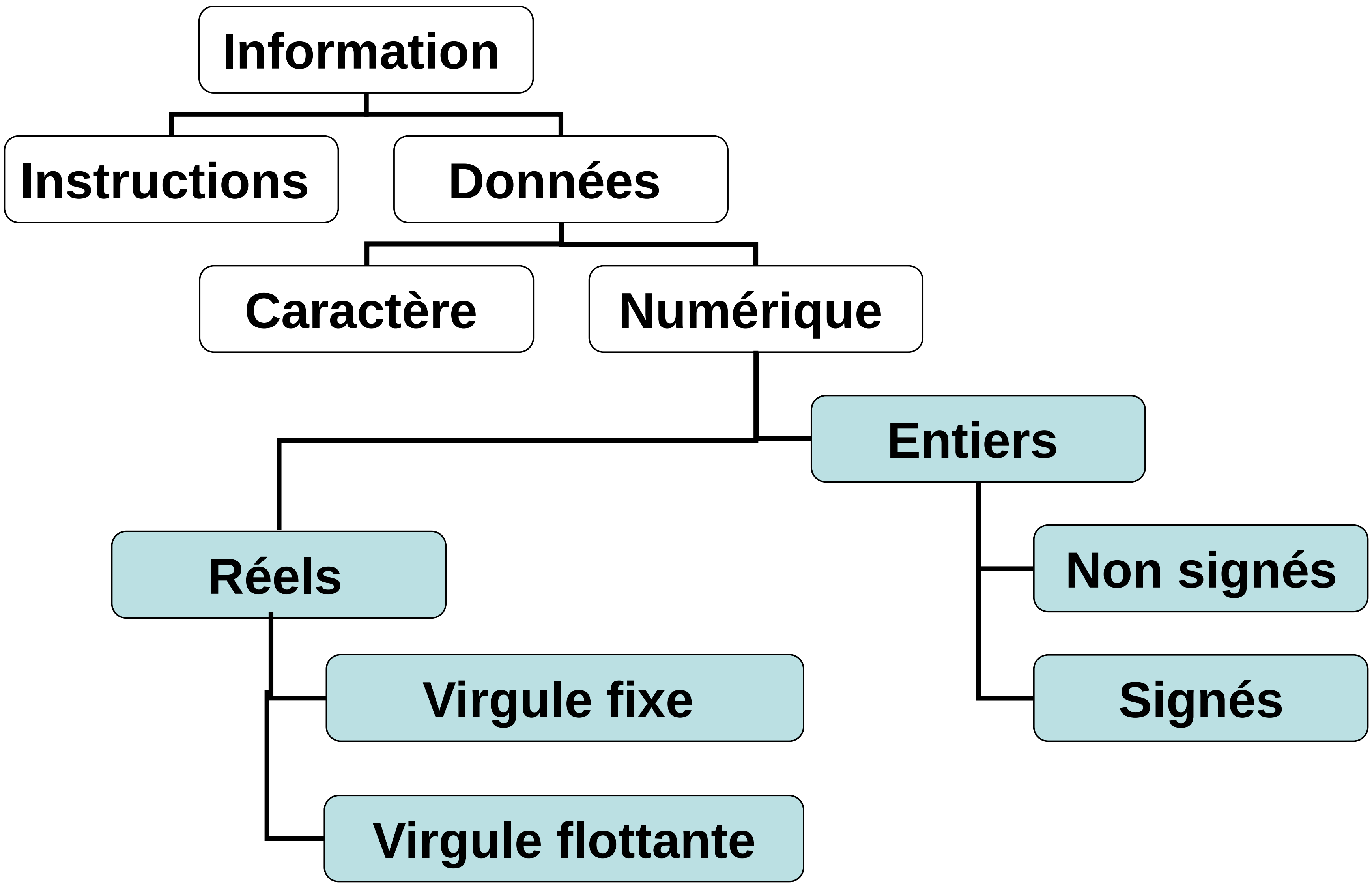
. Les machines numériques utilisent le système binaire.

. Dans le système binaire : uniquement 2 symboles sont utilisés : 0 et 1.

. C'est facile de représenter ces deux symboles dans les machines numériques.

. Le 0 et le 1 sont représentés par deux tensions .

Introduction



Représentation des nombres entiers

- Il existe deux types d'entiers :
  - les entiers non signés (positifs)
  - et les entiers signés (positifs ou négatifs)

- **Problème :** Comment indiquer à la machine qu'un nombre est négatif ou positif ?

- Il existe 3 méthodes pour représenter les nombres négatifs :
  - Signe/ valeur absolue
  - Complément à 1(complément restreint)
  - Complément à 2 (complément à vrai)

Représentation signe / valeur absolue

- Sur n bits , alors le bit du poids fort est utilisé pour indiquer le signe :
  - 1 : signe négatif
  - 0 : signe positif
- Les autres bits (n -1) désignent la valeur absolue du nombre.

$(\boxed{1}\ 1\ 0\ \boxed{1})_2$

Le bits du poids forts

Le bits du poids faible

Exemple :

1 $\boxed{001}$

Signe

Valeur absolue

0 $\boxed{001}$

Signe

Valeur absolue

1001 est la représentation de - 1

0001 est la représentation de + 1

Représentation signe / valeur absolue

Sur 3 bits on obtient :

signe	VA	valeur
0	00	+ 0
0	01	+ 1
0	10	+ 2
0	11	+ 3
1	00	- 0
1	01	- 1
1	10	- 2
1	11	- 3

- Les valeurs sont comprises entre -3 et +3

$-3 \leq N \leq +3$

$-(4-1) \leq N \leq +(4-1)$

$-(2^2-1) \leq N \leq +(2^2-1)$

$-(2^{(3-1)}-1) \leq N \leq +(2^{(3-1)}-1)$

Sur **n** bits , l'intervalle des valeurs qu'on peut représenter en système en valeur absolue:

$$-(2^{(n-1)}-1) \leq N \leq +(2^{(n-1)}-1)$$

Représentation signe / valeur absolue

Avantages et inconvénients:

- Représentation assez simple .
- Le zéro possède deux représentations +0 et -0 ce qui conduit à des difficultés au niveau des opérations arithmétiques.
- Pour les opérations arithmétiques il nous faut deux circuits : l'un pour l'addition et le deuxième pour la soustraction .

$\Rightarrow$ L'idéal est d'utiliser un seul circuit pour faire les deux opérations, puisque :

$$X - Y = X + (-Y)$$

Représentation en complément à un

- On appel complément à un d'un nombre N un autre nombre N' tel que :

$$N+N'=2^n-1$$

n : est le nombre de bits de la représentation du nombre N .

Exemple :

Soit N=1010 sur 4 bits donc son complément à un de N :

$$N'= (2^4 - 1)-N$$

$$N'=(16-1\ )_{10}-(1010)_2= (15\ )_{10} - (1010)_2 = (1111)_2 - (1010)_2 = 0101$$

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 1\ 0 \\ +\ \ 0\ 1\ 0\ 1 \\ \hline 1\ 1\ 1\ 1 \end{array}$$

Représentation en complément à un

Sur n bits , l'intervalle des valeurs qu'on peut représenter en CA1 :

$$-(2^{(n-1)} - 1) \leq N \leq +(2^{(n-1)} - 1)$$

Exemple : sur 3 bits, les valeurs sont comprises entre -3 et +3

$$-3 \leq N \leq +3$$

$$-(4-1) \leq N \leq +(4-1)$$

$$-(2^2 - 1) \leq N \leq +(2^2 - 1)$$

$$-(2^{(3-1)} - 1) \leq N \leq +(2^{(3-1)} - 1)$$

Représentation en complément à un

Sur 3 bits :

Valeur en CA1	Valeur en binaire	Valeur décimal
000	000	+ 0
001	001	+ 1
010	010	+ 2
011	011	+ 3
100	- 011	- 3
101	- 010	- 2
110	- 001	- 1
111	- 000	- 0

- Dans cette représentation , le bit du poids fort nous indique le signe: 0 : positif , 1 : négatif).

- **On remarque que dans cette représentation le zéro possède aussi une double représentation (+0 et –0) .**

Représentation en complément à un

Exemple :

Quelle est la valeur décimale représentée par la valeur 101010 en complément à 1 sur 6 bits ?

- Le bit poids fort indique qu'il s'agit d'un nombre négatif.
- Valeur = - CA1(101010)

  $= - (010101)_2 = - (21)_{10}$

Représentation en complément à 2

Représentation en complément à 2

- Soit **X** un nombre sur **n** bits alors :

$$X + 2^{n} = X \quad \text{modulo } 2^{n}$$

Le résultat sur n bits ⇒ la même valeur que X :

$$\mathbf{X + 2^{n} = X}$$

Exemple : soit X = 1001 sur 4 bits

$2^4 = 10000$

$$\begin{array}{rccccc} & & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ + & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array}$$

⇒ Si on prend le résultat sur 4 bits on trouve la même valeur de X= 1001

Représentation en complément à 2

•Si on prend deux nombres entiers **X** et **Y** sur **n** bits , on remarque que la soustraction peut être ramener à une addition :

$X – Y = X + (-Y)$ ⇒ trouver une valeur équivalente à **-Y** ?

$$X – Y = (X + 2^n) – Y = X + (2^n – 1) – Y + 1$$

On a $Y + CA1(Y)= 2^n – 1$ donc $CA1(Y) = (2^n – 1) – Y$

On obtient :

$$X– Y = X + CA1(Y) + 1$$

Représentation en complément à 2

La valeur CA1(Y)+1 s'appelle le complément à deux de b :

$$CA1(Y)+1 = CA2(Y)$$

Et enfin on va obtenir :

$X - Y = X + CA2(Y)$ → transformer la soustraction en une addition .

Représentation en complément à 2

Si on travail sur 3 bits :

Valeur en CA2	Valeur en binaire	valeur
000	000	+ 0
001	001	+ 1
010	010	+ 2
011	011	+ 3
100	- 100	- 4
101	- 011	- 3
110	- 010	- 2
111	- 001	- 1

•Sur 3 bits on remarque que les valeurs sont comprises entre -4 et +3

$$-4 \leq N \leq +3$$
$$-4 \leq N \leq +(4-1)$$
$$-2^2 \leq N \leq +(2^2-1)$$
$$-2^{(3-1)} \leq N \leq (2^{(3-1)}-1)$$

Si on travail sur n bits , l'intervalle des valeurs qu'on peut représenter en CA2 :

$$-(2^{(n-1)}) \leq N \leq +(2^{(n-1)}-1)$$

•Dans cette représentation , le bit du poids fort nous indique le signe .

•On remarque que le zéro n'a pas une double représentation.

Représentation en complément à 2

Exemple 1:

Trouver le complément à 2 : 01000101 sur 8 bits ?

Exemple 2 :

Quelle est la valeur décimale représentée par la valeur 101010 en complément à deux sur 6 bits ?

Le bit poids fort indique qu'il s'agit d'un nombre négatif.

Valeur = **- CA2(101010)**

= - **(010101 + 1)**

= - **$(010110)_2$= - (22)**

Représentation en complément à 2

Exemple 3:

Effectuer les opérations suivantes sur 5 Bits….

$$\begin{array}{r} +9 \\ +4 \\ \hline +13 \end{array} \qquad \begin{array}{rccccc} & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ + & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Le résultat est positif

$(01101)_2 = (13)_{10}$

$$\begin{array}{r} +9 \\ -4 \\ \hline +5 \end{array} \qquad \begin{array}{rcccccc} & & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ + & & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Report

Le résultat est positif

$(00101)_2 = (5)_{10}$

Représentation en complément à 2

Exemple 4:

Effectuer les opérations suivantes sur 5 Bits

$$\begin{array}{r} -9 \\ -4 \\ \hline -13 \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ + & & & & & \\ & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Report

Le résultat est négatif :

Résultat = - CA2 (10011)= -(01101)

= - 13

$$\begin{array}{r} -9 \\ +9 \\ \hline +0 \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ + & & & & & \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Report

Le résultat est positif

$(00000)_2 = (0)_{10}$

Représentation en complément à 2

La retenue et le débordement

- On dit qu’il y a une retenue si une opération arithmétique génère un report .

- On dit qu’il y a un débordement (Over Flow) ou dépassement de capacité: si le résultat de l’opération sur n bits et faux .

  – Le nombre de bits utilisés est insuffisant pour contenir le résultat
  – Autrement dit le résultat dépasse l’intervalle des valeurs sur les n bits utilisés.

Représentation en complément à 2

Cas de débordement

$+9$ $+8$ $+17$	$\begin{array}{cccccc} & 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ + & & & & & \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & {\color{red}1} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$ Négatif
-9 -8 -17	$\begin{array}{cccccc} & 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ + & & & & & \\ & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & {\color{red}0} & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}$ Positif

- Un débordement ⇨ - si la somme de deux nombres positifs donne un nombre négatif .
  - ou la somme de deux nombres négatifs donne un Nombre positif
- Il y a jamais un débordement si les deux nombres sont de signes différents.

Représentation des nombres réels

Représentation des nombres réels

- Problème : comment indiquer à la machine la position de la virgule ?

- Un nombre réel est constitué de deux parties : la partie entière et la partie fractionnelle (les deux parties sont séparées par une virgule)

- Il existe **deux méthodes** pour représenter les nombre réel :

  1) **Virgule fixe** : la position de la virgule est fixe

  2) **Virgule flottante** : la position de la virgule change (dynamique)

Représentation en virgule fixe

- Dans cette représentation la partie entière est représentée sur n bits et la partie fractionnelle sur p bits , en plus un bit est utilisé pour le signe.

- Exemple : si n=3 et p=2 on va avoir les valeurs suivantes

Signe	Partie entière	Partie fractionnelle	valeur
0	000	00	+ 0,0
0	000	01	+ 0,25
0	000	10	+ 0,5
0	000	11	+ 0,75
0	001	.00	+ 1,0
.	.	.	.
.	.	.	.

Dans cette représentation les valeurs sont limitées et nous n'avons pas une grande précision

Représentation en virgule flottante

- Chaque nombre réel peut s'écrire de la façon suivante :

$$N = \pm M * b^{e}$$

e : l'exposant

b : la base

M : mantisse

- **Exemple :**

$13,11 = 0,1311 * 10^{+2}$

$-(110,101)_2 = -(0,110101)_2 * 2^{+3}$

$(0,00101)_2 = (0,101)_2 * 2^{-2}$

Remarque :

on dit que la mantisse est normalisée si le **premier chiffre après la virgule** est différent de **0** et **le premier chiffre avant la virgule** est égale à **0**.

Représentation en virgule flottante

- Dans cette représentation sur n bits :
  - La mantisse est sous la forme signe/valeur absolue
    - **1 bit** pour le signe
    - et **k bits** pour la valeur.
  - L'exposant (positif ou négatif) est représenté sur p bits .

Signe mantisse	Exposant	Mantisse normalisée
1 bit	**p bits**	**k bits**

•Pour la représentation de l'exposant on utilise :

1) **Le complément à deux**
2) **Exposant décalé ou biaisé**

Représentation de l'exposant en complément à deux

- **<u>Exemple:</u>** on veut représenter les nombres $(0,015)_8$ et $-(15,01)_8$ en virgule flottante sur une machine ayant le format suivant :

Signe mantisse	Exposant en CA2	Mantisse normalisée
1 bit	4 bits	8 bits

$(0,015)_8=(0,000001101)_2= 0,1101 * 2^{-5}$

Signe mantisse : positif **<u>(0)</u>**
Mantisse normalisé : 0,1101
Exposant = -5 → utiliser le complément à deux pour représenter le -5
Sur 4 bits **CA2(0101)=1011**

0	**1 0 1 1**	**1 1 0 1 0 0 0 0**
1 bit	4 bits	8 bits

Représentation de l'exposant en complément à deux

- $(15,01)_8 = -(001101,000001)_2 = -\ 0,1101000001 * 2^4$

Signe mantisse : négatif (1)
Mantisse normalisée : 0,1101000001
Exposant = 4 , en complément à deux il garde la même valeur (0100)

On remarque que la mantisse est sur 10 bits (1101 0000 **01**), et sur la machine **seulement 8 bits** sont utilisés pour la mantisse.
Dans ce cas on va prendre **les 8 premiers bits de la mantisse**

1	0 1 0 0	1 1 0 1 0 0 0 0
1 bit	4 bits	8 bits

Remarque :
si la mantisse est sur k bits et si elle est représenté sur la machine sur k' bits tel que k> k' , alors la mantisse sera tronquée : on va prendre uniquement k' bits → perdre dans la précision .

L' exposant décalé (biaisé)

- en complément à 2, l'intervalle des valeurs qu'on peut représenter sur p bits :

$$- 2^{(p-1)} \leq N \leq 2^{(p-1)} - 1$$

Si on rajoute la valeur $2^{(p-1)}$ à tout les terme de cette inégalité :

$$- 2^{(p-1)} + 2^{(p-1)} \leq N + 2^{(p-1)} \leq 2^{(p-1)} - 1 + 2^{(p-1)}$$

$$0 \leq N + 2^{(p-1)} \leq 2^{p} - 1$$

- On pose $N' = N + 2^{(p-1)}$ donc : $0 \leq N' \leq 2^{p} - 1$

Dans ce cas on obtient des valeur positives.

- La valeur 2^{p-1} s'appelle le biais ou le décalage

L’ exposant décalé (biaisé)

- Avec l’exposant biaisé on a transformé les exposants négatifs à des exposants positifs en rajoutons à l’exposant la valeur $\mathbf{2^{p-1}}$.

Exposant Biaisé = Exposant réel + Biais

L' exposant décalé (biaisé)

Exemple

On veut représenter les nombres $(0,015)_8$ et $-(15,01)_8$ en virgule flottante sur une machine ayant le format suivant :

Signe mantisse	Exposant décalé	Mantisse normalisée
1 bit	4 bits	11 bits

$(0,015)_8=(0,000001101)_2= 0,1101 * 2^{-5}$

Signe mantisse : positif (0)
Mantisse normalisé : 0,1101
Exposant réel = -5
Calculer le biais : **$b= 2^{4-1} = 8$**
Exposant Biaisé = -5 + 8 = +3 = $(0011)_2$

0	**0011**	**1 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0**
1 bit	4 bits	11 bits

L' exposant décalé (biaisé)

$- (15,01)_8 = -(001101,000001)_2 = -0,1101000001 * 2^4$

Signe mantisse : négatif (1)

Mantisse normalisée : 0,1101000001

Exposant réel = + 4

Calculer le biais : b= 2^{4-1} = 8

Exposant Biaisé = 4 + 8 = +12 = $(1100)_2$

1	**1100**	**1 1 0 1 0 0 0 0 0 1 0**
1 bit	4 bits	11 bits

Opérations arithmétiques

Soit deux nombres réels N1 et N2 tel que

$N1=M1*b^{e1}$ et $N2=M2*b^{e2}$

On veut calculer N1+N2 ?

Deux cas se présentent :

1) Si e1 = e2 alors $N3= (M1+M2)\ b^{e1}$
2) Si e1 <> e2 alors élevé au plus grand exposant et faire l'addition des mantisses et par la suite normalisée la mantisse du résultat.

Exemple

- Effectuer l'opération suivante sur la machine suivante:
  $(0,15)_8+ (1,5)_8=(?)$:

Signe mantisse	Exposant biaisé (décalé)	Mantisse normalisée
1 bit	4 bits	6 bits

Opérations arithmétiques

Correction:

$(0,15)_8 = (0,001101)_2 = 0,1101 \ \ast 2^{-2}$

$(1,5)_8 = (001,\ 1\ \ 01)_2 = 0,1101 \ \ast 2^{1}$

$(0,15)_8 + (1,5)_8 = 0,1101 \ \ast 2^{-2} + 0,1101 \ \ast 2^{1}$

$= 0,0001101 \ \ast 2^{1} + 0,1101 \ \ast 2^{1}$

$= 0,\ 1110101 \ast 2^{1}$

0	**0001**	**111010**
1 bit	4 bits	6 bits

Opérations arithmétiques

Exercice 2

1) Donner la représentation des deux nombres **N1= $(-0,014)_8$ et N2=$(0,14)_8$** sur la machine suivante :

Signe mantisse	Exposant biaisé (décalé)	Mantisse normalisée
1 bit	**5 bits**	**10 bits**

2) Calculer **N2-N1** ?

Opérations arithmétiques

Correction:

Avant de représenter les deux nombres on doit calculer le biais (décalage)

N1 = $(-0,014)_8 = (-0,000001100)_2 = (-0,1100)_2 \cdot 2^{-5}$

B = $2^{5-1} = 2^4 = 16$

ExpB$= -5 + 16 = 11 = (01011)_2$

N2 = $(0,14)_8 = (0,001100)_2 = (0,1100)_2 \cdot 2^{-2}$

ExpB $= -2 + 16 = 14 = (01110)_2$

Donc on va avoir la représentation suivante pour N1 et N2:

N1	1	01011	1100000000	**1 010 1111 0000 0000** **$(AF00)_{16}$**
N2	0	01110	1100000000	**0011 10 11 0000 0000** **$(3B00)_{16}$**

Opérations arithmétiques

$N2 - N1 = 0,14 – (-0,014) = 0,14 + 0,014$

$N2 - N1 = (0,1100)_2 . 2^{-2} +(0,1100)_2 . 2^{-5}$

$= (0,1100)_2 . 2^{-2} +(0,0001100)_2 . 2^{-2}$

$= (0,1101100)_2 . 2^{-2}$

•Si on fait les calculs avec l'exposant biaisé :

$N2 - N1 = (0,1100)_2 . 2^{14} + (0,1100)_2 . 2^{11}$

$= (0,1100)_2 . 2^{14} + (0,0001100)_2 . 2^{14}$

$= (0,1101100)_2 . 2^{14}$

Exposant biaisé = 14

Exposant réel = Exposant biaisé – Biais

Exposant réel = 14 – 16 = -2

$N2 - N1 = (0,1101100)_2 . 2^{-2}$

Donc on trouve le même résultat que la première opération.

Le codage BCD (Binary Coded Decimal)

- Pour passer du décimal au binaire , il faut effectuer des divisions successives. Il existe une autre méthode simplifiée pour le passage du décimal au binaire.

- Le principe consiste à faire des éclatement sur 4 bits et de remplacer chaque chiffre décimal par sa valeur binaire correspondante .

- **Les combinaisons supérieures à 9 sont interdites**

Décimal	Binaire
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001

Exemple

1 2 9

0001 0010 1001

$129 = (\ 0001\ 0010\ 1001)_2$

5 6 2

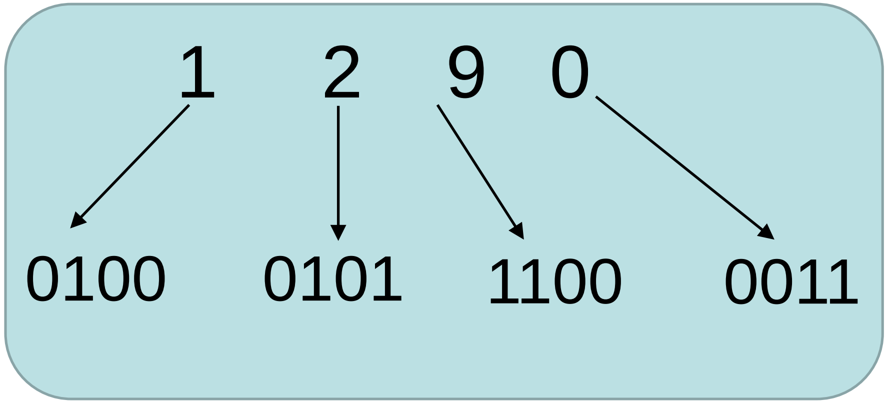
0101 0110 0010

$562 = (0101\ 0110\ 0010)_2$

Le codage EXCESS3 (BCD+3)

Décimal	BCD+3	Binaire
0	3	0011
1	4	0100
2	5	0101
3	6	0110
4	7	0111
5	8	1000
6	9	1001
7	10	1010
8	11	1011
9	12	1100

Exemple



L'avantage principal de l'encodage XS-3 sur l'encodage BCD est qu'on peut calculer le complément à 9 d'un nombre décimal aussi facilement qu'on peut calculer le complément à 1

Codage des caractères

- Les caractères englobent : les lettres alphabétiques (A, a, B , b,..) , les chiffres , et les autres symboles (> , ; / : ….) .
- Le codage le plus utilisé est le ASCII (American Standard Code for Information Interchange)
- 7 bits ->128 caractères :

  26 lettres majuscules A - Z

  26 lettres minuscule a - z

  10 chiffres 0 à 9

  33 caractères de ponctuation

  sp,! ” #$%& ’ ()*+,-. /< = >?@ [ ] ^_` { | } ~

  33 caractères de contrôle :

  null, etx, bel, bs, ht, lf, vt, ff, cr, …, del

Codage des caractères

- Le code ASCII

Chaque caractère a un « code » unique

Entier entre 0 et 255

Exemple

- E 69
- x 120
- e 101
- m 109
- p 112
- l 108
- e 101

32		64	@	96	`
33	!	65	A	97	a
34	"	66	B	98	b
35	#	67	C	99	c
36	$	68	D	100	d
37	%	69	E	101	e
38	&	70	F	102	f
39	'	71	G	103	g
40	(	72	H	104	h
41	)	73	I	105	i
42	*	74	J	106	j
43	+	75	K	107	k
44	,	76	L	108	l
45	-	77	M	109	m
46	.	78	N	110	n
47	/	79	O	111	o

48	0	80	P	112	p
49	1	81	Q	113	q
50	2	82	R	114	r
51	3	83	S	115	s
52	4	84	T	116	t
53	5	85	U	117	u
54	6	86	V	118	v
55	7	87	W	119	w
56	8	88	X	120	x
57	9	89	Y	121	y
58	:	90	Z	122	z
59	;	91	[	123	{
60	<	92	\	124	|
61	=	93	]	125	}
62	>	94	^	126	~
63	?	95	_	127	

ASCII étendu

- Dans ce codage chaque caractère est représenté sur 8 bits .
- Avec **8 bits** on peut avoir **2^8 = 256 combinaisons**
- Chaque combinaison représente un caractère
  - Exemple :
    - Le code 65 $(01000001)_2$ correspond au caractère **A**
    - Le code 97 $(01100001)_2$ correspond au caractère **a**
    - Le code 58 $(00111010)_2$ correspond au caractère **:**
- **Actuellement il existe un autre code sur 16 bits , se code s'appel UNICODE .**

Codage des caractères

Par exemple :

- ‘A’ = 65_{10} = $0100\ 0001_2$
- ‘B’ = 66_{10} = 0100 0010
- ...
- ‘a’ = 97_{10} = 0110 0101
- ‘ ‘ = 32_{10} = 0010 0000
- ‘0’ = 48_{10} = 0011 0000
- ‘1’ = 49_{10} = 0011 0001
- ‘2’ = 50_{10} = 0011 0010
- …
- ‘9’ = 57_{10} = 0011 1001

Codage des caractères

- Actuellement il existe un autre code sur 16 bits , se code s'appel UNICODE .

- UNICODE 16 bits -> 65 536 caractères

Ce code contient -→ en plus de tous les caractères européens, 42 000 caractères asiatiques.

Le code ASCII est contenu dans les 128 premiers caractères d'UNICODE.

Codage des caractères

Il existe deux formats :

1) 16 bits (UCS-2)

2) ou 32 bits (UCS-4)

ISO/IEC 10646

- UCS-2 équivalent à UNICODE 2.0
- UCS-4 inclut :

  - Caractères musicaux
  - Symboles mathématiques
  - Écritures anciennes telles que les hiéroglyphes.

Merci pour votre attention