La proportion analogique axiomatique

La proportion analogique et la factorisation

La proportion analogique dans les groupes non commutatifs

Généralités

Les permutations

Les matrices inversibles

Et l'apprentissage ?

La proportion analogique comme factorisation.

L. Miclet

ENSSAT-IRISA

Atelier RaPC 2009

La proportion analogique axiomatique

La proportion analogique et la factorisation

La proportion analogique dans les groupes non commutatifs

Généralités

Les permutations

Les matrices inversibles

Et l'apprentissage ?

1 La proportion analogique axiomatique

2 La proportion analogique et la factorisation

3 La proportion analogique dans les groupes non commutatifs
- Généralités
- Les permutations
- Les matrices inversibles

4 Et l'apprentissage ?

La proportion analogique axiomatique

La proportion analogique et la factorisation

La proportion analogique dans les groupes non commutatifs

Généralités

Les permutations

Les matrices inversibles

Et l'apprentissage ?

Plan

1 La proportion analogique axiomatique

2 La proportion analogique et la factorisation

3 La proportion analogique dans les groupes non commutatifs
- Généralités
- Les permutations
- Les matrices inversibles

4 Et l'apprentissage ?

La proportion analogique : exemple

Une proportion analogique zoologique :

Le poulain *est à* **la jument** *ce que* **le veau** *est à* **la vache**.

- Dans ce cas, l'analogie suivante est également correcte (symétrie du *ce que*) :

  Le veau *est à* **la vache** *ce que* **le poulain** *est à* **la jument**
- Et celle-ci aussi (permutation des termes moyens) :

  Le veau *est au* **poulain** *ce que* **la vache** *est à* **la jument**.

Pourquoi ?

	mammifère	jeune	équidé	femelle adulte
veau	1	1	0	0
poulain	1	1	1	0
vache	1	0	0	1
jument	1	0	1	1

Les colonnes de 0 et de 1 sont toutes en proportion analogique.

La proportion analogique dans $\mathbb{B}^d$

Quatre vecteurs binaires A, B, C et D sont en *proportion analogique* si pour chacune des composantes on a :

$$A_i \textit{ est à } B_i \textit{ ce que } C_i \textit{ est à } D_i.$$

$$A_i : B_i :: C_i : D_i$$

$0 : 0 :: 0 : 0,$	$0 : 0 :: 1 : 1,$	$0 : 1 :: 0 : 1$
$1 : 1 :: 1 : 1,$	$1 : 1 :: 0 : 0,$	$1 : 0 :: 1 : 0$

Attention : $1 : 0 :: 0 : 1$ et $0 : 1 :: 1 : 0$ **ne sont pas** des proportions analogiques.

La proportion analogique dans $\mathbb{R}^d$

Quatre vecteurs A, B, C et D sont en *proportion analogique additive* si pour chacune des composantes on a :

$$A_i \text{ est à } B_i \text{ ce que } C_i \text{ est à } D_i.$$

$$A_i : B_i :: C_i : D_i$$

$$\overrightarrow{A_i B_i} = \overrightarrow{C_i D_i}$$

$$\overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{OD_i} = \overrightarrow{OB_i} + \overrightarrow{OC_i}$$

A, B, C et D forment un parallélogramme.

La proportion analogique

Définition (La proportion analogique)

Une proportion analogique sur un ensemble $\mathbb{E}$ est une relation sur $\mathbb{E}^4$ telle que, pour quadruplet A, B, C et D en relation dans cet ordre (ce qui est noté $A : B :: C : D$), on ait :

1. $A : B :: C : D \Leftrightarrow C : D :: A : B$
2. $A : B :: C : D \Leftrightarrow A : C :: B : D$

D'autre part, pour tout couple, on a : $A : B :: A : B$

On montre que cinq autres relations sont équivalentes :

$\boxed{B : A :: D : C}$ $\boxed{D : B :: C : A}$ $\boxed{D : C :: B : A}$

$\boxed{B : D :: A : C}$ $\boxed{C : A :: D : B}$

La proportion analogique dans d'autres ensembles

Analogie multiplicative dans $\mathbb{R}$.

$$A : B :: C : D \Leftrightarrow \frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Leftrightarrow A \times D = B \times C$$

Par exemple : $6 : 10 :: 21 : 35$ puisque $6 \times 35 = 10 \times 21 = 210$

Analogie dans les séquences

$$\textit{marchons} : \textit{marcher} :: \textit{chantons} : \textit{chanter}$$

Plan

La proportion analogique axiomatique

La proportion analogique et la factorisation

La proportion analogique dans les groupes non commutatifs

Généralités

Les permutations

Les matrices inversibles

Et l'apprentissage ?

1 La proportion analogique axiomatique

2 La proportion analogique et la factorisation

3 La proportion analogique dans les groupes non commutatifs
- Généralités
- Les permutations
- Les matrices inversibles

4 Et l'apprentissage ?

L'algèbre de la proportion analogique : la factorisation

Factorisation dans $\mathbb{R}$

$$\frac{6}{10} = \frac{21}{35} \Leftrightarrow \frac{2 \times 3}{2 \times 5} = \frac{7 \times 3}{7 \times 5}$$

.

Les nombres $u = 6$, $v = 10$ $w = 21$ et $x = 35$ sont en proportion analogique parce qu'il existe quatre facteurs $f_1 = 2$, $f_2 = 7$, $f_3 = 3$ et $f_4 = 5$ tels que :

$$u = f_1 \times f_3, \; v = f_1 \times f_4, \; w = f_2 \times f_3, \; x = f_2 \times f_4$$

Factorisation dans $\Sigma^\star$

$\Sigma = \{a, b, c, d\}$, muni de l'opération non commutative de concaténation.

Factorisation et proportion analogique dans $\Sigma^\star$

marchons : marcher :: chantons : chanter

peut se factoriser comme

$$f_1.f_3 : f_1.f_4 :: f_2.f_3 : f_2.f_4,$$

avec $f_1 = march$, $f_2 = chant$, $f_3 = ons$, $f_4 = er$.

Factorisations plus complexes

Soit l'analogie numérique multiplicative dans R :

$$18 : 63 :: 30 : 105$$

et l'analogie morphologique dans $\Sigma^\star$:

déridés : ridons :: démarchés : marchons

Nous pouvons les factoriser de la manière suivante :

$$\begin{array}{rcccccccccc} 18 & = & 2 & \times & 3 & \times & 2 & \times & 1 & \times & 3 \\ 63 & = & 1 & \times & 3 & \times & 1 & \times & 7 & \times & 3 \\ 30 & = & 2 & \times & 5 & \times & 2 & \times & 1 & \times & 3 \\ 105 & = & 1 & \times & 5 & \times & 1 & \times & 7 & \times & 3 \end{array}$$

Factorisations plus complexes, suite

$$
\begin{array}{rcccccccccc}
\textit{déridés} & = & \textit{dé} & . & \textit{rid} & . & \textit{é} & . & \epsilon & . & s \\
\textit{ridons} & = & \epsilon & . & \textit{rid} & . & \epsilon & . & \textit{on} & . & s \\
\textit{démarchés} & = & \textit{dé} & . & \textit{march} & . & \textit{é} & . & \epsilon & . & s \\
\textit{marchons} & = & \epsilon & . & \textit{march} & . & \epsilon & . & \textit{on} & . & s
\end{array}
$$

Chaque quadruplet de facteurs en colonne, est soit (f_i, f_i, g_i, g_i), soit (f_i, g_i, f_i, g_i).

Un facteur est éventuellement l'élément neutre de l'ensemble considéré (1 pour la multiplication dans $\mathbb{R}$ et ϵ pour la concaténation dans $\Sigma^\star$).

Le cas du groupe commutatif

- Soit un groupe abélien (commutatif, élément neutre, inverse) $(U, \oplus)$. L'inverse de x est noté $\ominus x$. Quatre éléments sont en proportion analogique $x : y :: z : t$ si et seulement si
$$x \oplus (\ominus y) = z \oplus (\ominus t)$$
- Ce qui est équivalent à dire qu'il existe quatre éléments x_1, x_2, t_1 et t_2 tels que :
$$x = x_1 \oplus x_2, y = x_1 \oplus t_2, z = t_1 \oplus x_2, t = t_1 \oplus t_2$$

C'est par exemple le cas de $(\mathbb{R}, \times)$ (proportion analogique multiplicative), de $(\mathbb{R}, +)$ et par extension de $(\mathbb{R}^d, +)$ (parallélogramme).

Le cas des ensembles

- Soit un ensemble fini S. L'ensemble $(2^S, \cup)$ est un monoïde abélien (associatif, commutatif, élément neutre, mais pas d'inverse).
- $\forall (x, y, z, t) \in (2^S)^4$, on a $x : y :: z : t$ si et seulement si $\exists (x_1, x_2, t_1, t_2)$ tels que :

$$x = x_1 \cup x_2, y = x_1 \cup t_2, z = t_1 \cup x_2, t = t_1 \cup t_2$$

Le cas le plus général

- Soit un semigroupe (associatif seulement) $(U, \oplus)$.
- Une *factorisation* f_u d'un élément u de U est une séquence $(u_1, \ldots, u_n)$ avec $\forall i \in [1, n], u_i \in U$ et telle que : $u = u_1 \oplus \ldots \oplus u_n$.
- Chaque terme u_i est un facteur de u. On note $f_u(i) = u_i$ et $|f_u| = n$. Si $I = \{i_1, \ldots, i_k\} \in [1, n]$ on note aussi : $f_u(I) = u_{i_1} \oplus \ldots \oplus u_{i_k}$.
- Soit $(x, y, z, t) \in U^4$. On dit que $x : y :: y : z$ si et seulement si il existe quatre factorisations f_x, f_y, f_z, f_t de x, y, z et t telles que :

$$\forall i \in [1, d], (f_y(i), f_z(i) \in \{(f_x(i), f_t(i)), (f_y(i), f_x(i))\}$$

N.B. : s'il y a un élément neutre ϵ, on est dans le cas du monoïde, donc des séquences de lettres. Cet élément neutre peut être un facteur.

Exemple (rappel)

$$\begin{array}{rcccccccccc}
\textit{déridés} & = & \textit{dé} & . & \textit{rid} & . & \textit{é} & . & \epsilon & . & s \\
\textit{ridons} & = & \epsilon & . & \textit{rid} & . & \epsilon & . & \textit{on} & . & s \\
\textit{démarchés} & = & \textit{dé} & . & \textit{march} & . & \textit{é} & . & \epsilon & . & s \\
\textit{marchons} & = & \epsilon & . & \textit{march} & . & \epsilon & . & \textit{on} & . & s
\end{array}$$

Chaque quadruplet de facteurs en colonne, est soit (f_i, f_i, g_i, g_i), soit (f_i, g_i, f_i, g_i).

Un facteur est éventuellement l'élément neutre de l'ensemble considéré (1 pour la multiplication dans $\mathbb{R}$ et ϵ pour la concaténation dans $\Sigma^\star$).

La proportion analogique axiomatique

La proportion analogique et la factorisation

La proportion analogique dans les groupes non commutatifs

Généralités

Les permutations

Les matrices inversibles

Et l'apprentissage ?

Plan

1 La proportion analogique axiomatique

2 La proportion analogique et la factorisation

3 La proportion analogique dans les groupes non commutatifs
- Généralités
- Les permutations
- Les matrices inversibles

4 Et l'apprentissage ?

Plan

1 La proportion analogique axiomatique

2 La proportion analogique et la factorisation

3 La proportion analogique dans les groupes non commutatifs

- Généralités
- Les permutations
- Les matrices inversibles

4 Et l'apprentissage ?

Une première définition

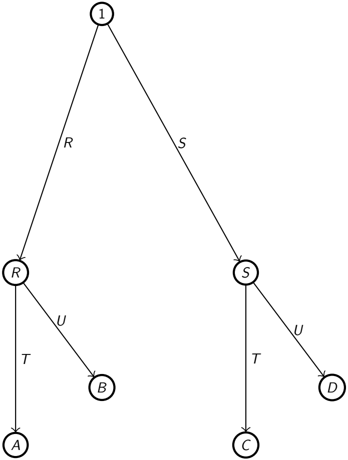
$(\mathbb{G}, \otimes)$ est un groupe ($\otimes$ est associative et chaque élément possède un inverse). Il y a un élément neutre. En général, un groupe n'est pas commutatif.

Quatre éléments d'un groupe sont en analogie s'ils se factorisent en deux facteurs à gauche et à droite.

A, B, C et D éléments de $(\mathbb{G}, \otimes)$ sont en proportion analogique s'il existe

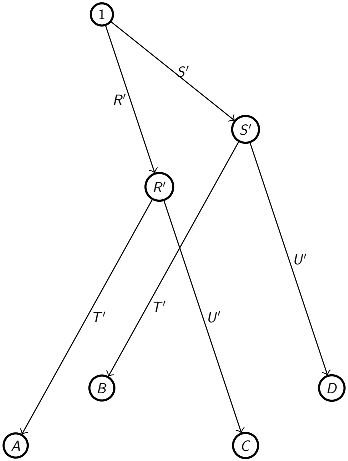
- quatre éléments R, T, S et U de $\mathbb{G}$ tels que $A = R \otimes T$, $B = R \otimes U$, $C = S \otimes T$, $D = S \otimes U$,
- et quatre éléments R', T', S' et U' de $\mathbb{G}$ tels que $A = R' \otimes T'$, $B = S' \otimes T'$, $C = R' \otimes U'$ et $D = S' \otimes U'$.

La première factorisation



L'arc orienté qui va du nœud A au nœud B avec l'étiquette P exprime la relation $A \otimes P = B$.

La seconde factorisation



Une définition équivalente

Quatre éléments d'un groupe sont en analogie s'ils forment un « parallélogramme ».

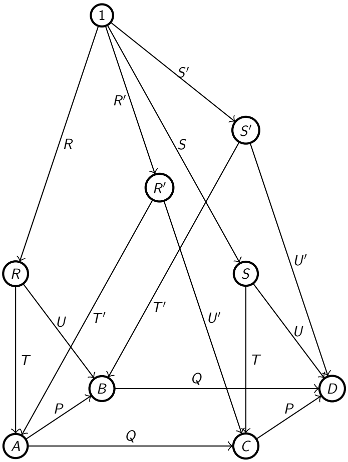
Soit A, B, C et D quatre éléments de $\mathbb{G}$, on dit que (A, B, C, D) sont en proportion analogique s'il existe un couple (P, Q) d'éléments de $\mathbb{G}$ tel que

$$A \otimes P = B, \qquad C \otimes P = D, \qquad A \otimes Q = C \qquad \text{et} \qquad B \otimes Q = D\,.$$

Le « parallélogramme »analogique

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[rr, "Q"] & & D \\
A \arrow[ur, "P"] \arrow[rr, "Q"] & & C \arrow[ur, "P"] &
\end{tikzcd}$$

Au total



L'arc orienté qui va du nœud A au nœud B avec l'étiquette P exprime la relation $A \otimes P = B$.

Une CNS de proportion analogique

A, B, C et D quatre éléments de $\mathbb{G}$, sont en proportion analogique si et seulement si les deux égalités suivantes sont respectées :

$$\begin{aligned} C \otimes A^{-1} \otimes B &= B \otimes A^{-1} \otimes C\,, \\ D &= B \otimes A^{-1} \otimes C\,. \end{aligned}$$

Résolution

La proportion analogique axiomatique

La proportion analogique et la factorisation

La proportion analogique dans les groupes non commutatifs

Généralités

Les permutations

Les matrices inversibles

Et l'apprentissage ?

De même la recherche des proportions analogiques $A : B :: C : D$ suite à la donnée de (B, C) ou (A, D) se ramène à la résolution dans $\mathbb{G}$ d'une équation de la forme

$$P \otimes X = X \otimes P$$

de la manière suivante

$$\begin{array}{lll} (X \otimes B) : B :: C : \left(X^{-1} \otimes C\right) & \text{où} & P = B \otimes C^{-1}, \\ A : (X \otimes A) :: \left(X^{-1} \otimes D\right) : D & \text{où} & P = A \otimes D^{-1}. \end{array}$$

Plan

La proportion analogique axiomatique

La proportion analogique et la factorisation

La proportion analogique dans les groupes non commutatifs

Généralités

Les permutations

Les matrices inversibles

Et l'apprentissage ?

1 La proportion analogique axiomatique

2 La proportion analogique et la factorisation

3 La proportion analogique dans les groupes non commutatifs
- Généralités
- Les permutations
- Les matrices inversibles

4 Et l'apprentissage ?

Le groupe des permutations $\mathcal{S}_n$

Composition

$$\begin{array}{rcccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \sigma = & 4 & 5 & 3 & 6 & 2 & 1 \\ \sigma \circ \sigma = & 6 & 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{array}$$

Décomposition en cycles

$$\begin{array}{rcccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \sigma = & 4 & 5 & 3 & 6 & 2 & 1 \end{array}$$

$$\sigma = (146)(25)(3)$$

Analyse

La proportion analogique axiomatique

La proportion analogique et la factorisation

La proportion analogique dans les groupes non commutatifs

Généralités

Les permutations

Les matrices inversibles

Et l'apprentissage ?

Conjugaison

Par définition, deux permutations σ_1 et σ_2 sont conjuguées s'il existe τ telle que $\sigma_1 = \tau \circ \sigma_2 \circ \tau^{-1}$

La proportion analogique

On est ramené à la résolution dans $\mathcal{S}_n$ de l'équation

$$\sigma_P \circ \sigma \;=\; \sigma \circ \sigma_Q$$

où σ_P et σ_Q sont des permutations conjuguées de $\mathcal{S}_n$.

Par exemple, pour σ_2 et σ_3 donnés, les solutions σ_1 vérifient cette équation pour $\sigma_P = \sigma_3^{-1} \circ \sigma_2$ et $\sigma_Q = \sigma_2^{-1} \circ \sigma_3$.

Résolution

- Comme les deux permutations σ_P et σ_Q sont conjuguées, leur décomposition en cycles à supports disjoints sont identiques : elles ont le même nombre de cycles de longueur 1, le même nombre de cycles de longueur 2, etc.
- La condition requise pour que σ soit solution est la suivante : elle doit transformer un cycle de σ_Q en un cycle de même longueur de σ_P en respectant l'ordre des éléments des cycles.

Exemple

La proportion analogique axiomatique

La proportion analogique et la factorisation

La proportion analogique dans les groupes non commutatifs

Généralités

Les permutations

Les matrices inversibles

Et l'apprentissage ?

Soit deux permutations σ_2 et σ_3 sur l'ensemble $\{1, \ldots, 6\}$,

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= (1325)(4)(6)\,, \\ \sigma_3 &= (13546)(2)\,. \end{aligned}$$

On recherche les couples (σ_1, σ_4) tels que $\sigma_1 : \sigma_2 :: \sigma_3 : \sigma_4$.

$$\begin{aligned} \sigma_3 \circ \sigma_2^{-1} &= (146)(25)(3)\,, \\ \sigma_2^{-1} \circ \sigma_3 &= (1)(23)(456)\,. \end{aligned}$$

Ces décompositions comportent un cycle de longueur 1, un cycle de longueur 2 et un cycle de longueur 3.
Il y a six solutions σ_1 qui envoient le cycle (1) vers (3), (23) vers (25) et (456) vers (146).
Pour chacune, on en déduit $\sigma_4 = \sigma_2 \circ \sigma_1^{-1} \circ \sigma_3 = \sigma_3 \circ \sigma_1^{-1} \circ \sigma_2$.

En Pratique

Pour construire un quadruplet de permutations en proportion analogique, on peut donc procéder de la sorte :

- Choisir arbitrairement deux permutations σ_2 et σ_3.
- Calculer $\sigma_3^{-1} \circ \sigma_2$ et $\sigma_2 \circ \sigma_3^{-1}$.
- Choisir σ_1 de manière à ce qu'elle envoie chaque cycle de $\sigma_2 \circ \sigma_3^{-1}$ sur un cycle de même longueur de $\sigma_3^{-1} \circ \sigma_2$ en respectant l'ordre des éléments des cycles.
- Calculer $\sigma_4 = \sigma_2 \circ \sigma_1^{-1} \circ \sigma_3$.

Distance entre permutations

- Le nombre minimal de transpositions pour passer d'une permutation à une autre est une distance, invariante à droite et à gauche par composition.
- Par conséquent, la dissemblance analogique qui en découle a toutes les bonnes propriétés, y compris l'inégalité triangulaire.

La proportion analogique axiomatique

La proportion analogique et la factorisation

La proportion analogique dans les groupes non commutatifs

Généralités

Les permutations

Les matrices inversibles

Et l'apprentissage ?

Plan

1 La proportion analogique axiomatique

2 La proportion analogique et la factorisation

3 La proportion analogique dans les groupes non commutatifs

- Généralités
- Les permutations
- Les matrices inversibles

4 Et l'apprentissage ?

Proportion analogique entre quatre matrices

- Soit quatre matrices A, B, C et D.
- On suppose B et C connues et on cherche les A et les D telles que : $D = CA^{-1}B = BA^{-1}C$.
- Les deux matrices CB^{-1} et $B^{-1}C$ sont semblables. Elles ont donc les mêmes valeurs propres, avec les mêmes ordres de multiplicité.
- Pour simplifier, on suppose ces valeurs propres toutes différentes.
- Les deux matrices sont diagonalisables, et on a : $CB^{-1} = UJU^{-1}$ et $B^{-1}C = VJV^{-1}$ avec J diagonale.
- L'équation $CB^{-1}A = AB^{-1}C$ a pour unique famille de solutions $A = U\Delta V^{-1}$, avec Δ matrice diagonale quelconque.

S. Bayoudh, L. Miclet and A. Delhay
Learning by Analogy : a Classification Rule for Binary and Nominal Data.
IJCAI 2007.

L. Miclet, S. Bayoudh and A. Delhay
Analogical Dissimilarity : Definition, Algorithms and Two Experiments in Machine Learning.
Journal of Artificial Intelligence Research, Vol 32, 2008.

N. Stroppa and F. Yvon.
Analogical learning and formal proportions : Definitions and methodological issues.
Technical Report ENST, 2005.

Y. Lepage.
De l'analogie rendant compte de la commutation en linguistique.
HDR Grenoble 2003.