MASTER 1 MEEF : CAPES MATHS OPTION INFORMATIQUE

ECRIT BLANC - EPREUVE DE 5 HEURES

Les résultats des questions pourront être réutilisés ainsi que les différentes fonctions demandées non traitées au cours de l'épreuve. L'usage de la calculatrice est interdit.

Problème 1

Ce sujet a pour objectif de calculer des enveloppes convexes de nuages de points dans le plan affine, un grand classique en géométrie algorithmique. On rappelle qu'un ensemble $C \subseteq \mathbb{R}^2$ est convexe si et seulement si pour toute paire de points $p, q \in C$, le segment de droite $[p, q]$ est inclus dans C. L'enveloppe convexe d'un ensemble $P \subseteq \mathbb{R}^2$, notée $Conv(P)$, est le plus petit convexe contenant P. Dans le cas où P est un ensemble fini (appelé nuage de points), le bord de $Conv(P)$ est un polygone dont les sommets appartiennent à P, comme illustré dans la figure 1.

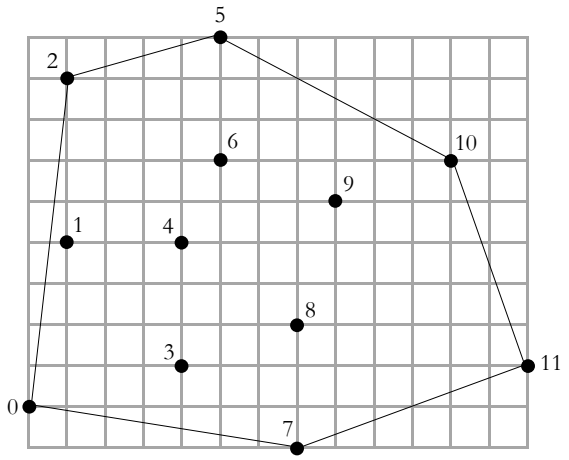


Figure 1 : Un nuage de points, numérotés de 0 à 11, et le bord de son enveloppe convexe.

Le calcul de l'enveloppe convexe d'un nuage de points est un problème fondamental en informatique, qui trouve des applications dans de nombreux domaines comme :

- l'animation et la robotique, par exemple pour l'accélération de la détection de collisions dans le cadre de la planification de la trajectoire,
- le traitement d'images et la vision, par exemple pour la détection d'objets convexes (comme des plaques minéralogiques de voiture) dans les scènes 2D,
- l'informatique graphique, par exemple pour l'accélération du rendu de scènes 3D par lancer de rayon,
- la théorie des jeux, par exemple pour déterminer l'existence d'équilibres de Nash,

– la vérification formelle, par exemple pour déterminer si une variable risque de dépasser sa capacité de stockage ou d'atteindre un ensemble de valeurs interdites lors de l'exécution d'une boucle dans un programme,

et bien d'autres encore.

Dans ce sujet, nous allons écrire deux algorithmes de calcul de bord de l'enveloppe convexe d'un nuages de points P dans le plan affine. Le premier, dit *algorithme du paquet cadeau*, consiste à envelopper le nuage de point progressivement en faisant pivoter une droite tout autour. Le deuxième, dit *de balayage*, consiste à balayer le plan horizontalement avec une droite verticale, tout en maintenant au fur et à mesure l'enveloppe convexe de la partie du nuage située à gauche de cette droite verticale. Les deux algorithmes sont illustrés respectivement sur les figures 3 et 4.

Le temps d'exécution du premier algorithme est majoré par une constante fois nm, celui du deuxième par une constante fois $n \log n$, où n désigne le nombre total de points de P et m le nombre de points de P appartenant au bord de $Conv(P)$.

Dans toute la suite, on supposera que le nuage de points P est de taille $n \geq 3$ et en position générale, c'est-à-dire qu'il ne contient pas 3 points distincts alignés.

Ces hypothèses vont permettre de simplifier les calculs en ignorant les cas pathologiques, comme par exemple la présence de 3 points alignés sur le bord de l'enveloppe convexe. Les programmes prendront en entrée un nuage de points P dont les coordonnées sont stockées dans un tableau *tab* à 2 dimensions, comme dans l'exemple ci-dessous qui contient les coordonnées du nuage de points de la figure 1.

i/j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	1	1	4	4	5	5	7	7	8	11	13
1	0	4	8	1	4	9	6	-1	2	5	6	1

Précisons que les coordonnées, supposées entières, sont données dans une base orthonormée du plan, orientée dans le sens direct. La première ligne du tableau contient les abscisses, tandis que la deuxième ligne contient les ordonnées. Ainsi, la colonne d'indice j contient les deux coordonnées du point d'indice j. Ce dernier sera nommé p_j dans la suite.

Partie A : Préliminaires

On se propose d'utiliser le module **`pyplot`** du package **`matplotlib`** pour effectuer les tracés des points et du bord de l'enveloppe convexe. La fonction plot de ce module reçoit trois arguments : deux listes X et Y de même taille, dont on notera x_i et y_i les éléments, et un troisième paramètre représentant le style de tracé sous forme d'une chaîne de caractères. Pour une ligne noire continue reliant les points de coordonnées (x_i, y_i), ce style est décrit par la chaîne **`'k-'`** et pour dessiner des points noirs ce style est décrit par la chaîne **`'ko'`**.

Ainsi le code suivant affiche trois points et les deux segments de droite les connectant.

```
from matplotlib.pyplot import *

X = [0,1,2]
Y = [-1,2,0]
plot(X,Y,'ko') # dessine les points
plot(X,Y,'k-') # dessine les segments de droites
```

1. Ecrire une fonction **dessinerPoints** qui reçoit en entrée un tableau à 2 dimensions (abscisses en première et ordonnées en seconde dimension) et qui dessine les points du nuage donnés dans le tableau.

```
def dessinerPoints(points):
    """ Dessine les points donnés par le tableau 2D points """
    plot(points[0],points[1],'ko')
    # Ajout des numéros des points et de la grille (non demandé)
    for i in range(0, len(points[0])):
        annotate(i, (points[0][i] + 0.1, points[1][i] + 0.1))
    grid()
```

2. Ecrire une fonction **dessinerEnveloppe** qui reçoit en entrée un tableau à 2 dimensions (abscisses en première et ordonnées en seconde dimension) et qui dessine les segments de droite reliant, dans l'ordre du tableau, tous les points.

```
def dessinerEnveloppe(points):
    """ Dessine les segments de droite reliant, dans l'ordre du tableau 2D points,
tous les points """
    # ajout du premier élément à la fin pour boucler
    points[0].append(points[0][0])
    points[1].append(points[1][0])
    plot(points[0],points[1],'k-')
```

3. Ecrire un programme qui dessine les points et l'enveloppe de la figure 1.

```
# Affichage des points de l'exemple
exemple_points = [[0,1,1,4,4,5,5,7,7,8,11,13],[0,4,8,1,4,9,6,-1,2,5,6,1]]
dessinerPoints(exemple_points)
# Affichage de l'enveloppe convexe de l'exemple
exemple_conv_X       =       [exemple_points[0][0],       exemple_points[0][7],
exemple_points[0][11],       exemple_points[0][10],       exemple_points[0][5],
exemple_points[0][2]]
exemple_conv_Y       =       [exemple_points[1][0],       exemple_points[1][7],
exemple_points[1][11],       exemple_points[1][10],       exemple_points[1][5],
exemple_points[1][2]]
exemple_conv = [exemple_conv_X,exemple_conv_Y]
dessinerEnveloppe(exemple_conv)
show()
```

4. Ecrire une fonction **plusBas** qui prend en paramètre le tableau à 2 dimensions **tab** et qui renvoie l'indice *j* du point le plus bas (c'est-à-dire de plus petite ordonnée) parmi les points du nuage *P*. En cas d'égalité, votre fonction devra renvoyer l'indice du point de plus petite abscisse parmi les plus bas.

Sur l'exemple précédent, le résultat de la fonction doit être l'indice 7.

```
def plusBas(tab) :
  """Trouve et retourne l'indice du point le plus bas dans tab.
  En cas d'égalité, renvoie celui qui est le plus à gauche parmi les points les
plus bas"""
  j_min, abs_min, ord_min = 0, tab[0][0], tab[1][0]
  for j in range(1,len(tab[0])) :
    if tab[1][j] < ord_min or
    (tab[1][j] == ord_min and tab[0][j] < abs_min) :
      j_min, abs_min, ord_min = j, tab[0][j], tab[1][j]
  return j_min
```

Dans la suite nous aurons besoin d'effectuer un seul test de type géométrique : celui de l'orientation.

Définition 1 : Etant donnés trois points p_i, p_j et p_k du nuage P, distincts ou non, le test d'orientation renvoie +1 si la séquence (p_i, p_j, p_k) est orienté positivement, -1 si elle est orientée négativement, et 0 si les trois points sont alignés (c'est-à-dire si deux au moins sont égaux, d'après l'hypothèse de position générale).

Pour déterminer l'orientation de (p_i, p_j, p_k), il suffit de calculer l'aire signée du triangle, comme illustré sur la figure 2. Cette aire vaut la moitié du déterminant de la matrice 2×2 formée par les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{p_i p_j}$ et $\overrightarrow{p_i p_k}$.

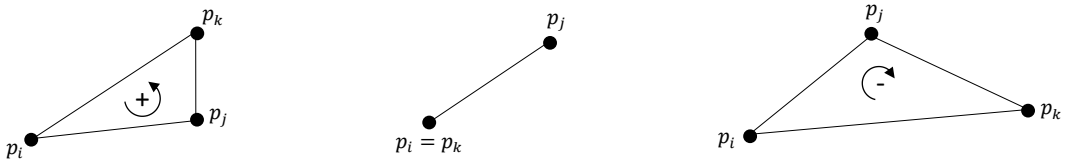


Figure 2 : Test d'orientation sur la séquence (p_i, p_j, p_k) : positif à gauche, nul au centre, négatif à droite

5. Sur l'exemple de la figure 1, donner le résultat du test d'orientation pour les choix d'indices suivants :

- $i = 0, j = 3, k = 4$
- $i = 8, j = 9, k = 10$

Les points p_0, p_3, p_4 ont pour coordonnées respectives (0,0), (4,1) et (4,4). Par conséquent, on calcule le déterminant

$$\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 \times 4 - 1 \times 4 = 12 > 0$$

Donc le triplet (p_0, p_3, p_4) est orienté positivement.

Les points p_8, p_9, p_{10} ont pour coordonnées respectives (7,2), (8,5) et (11,6). Par conséquent, on calcule le déterminant

$$\begin{vmatrix} 8-7 & 11-7 \\ 5-2 & 6-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 3 \times 4 = -8 < 0$$

Donc le triplet (p_8, p_9, p_{10}) est orienté négativement.

6. Ecrire une fonction **`orient`** qui prend en paramètres le tableau **`tab`** des points du nuage et trois indices de colonnes (i, j, k), potentiellement égaux, et qui renvoie le résultat (-1, 0 ou +1) du test d'orientation sur la séquence (p_i, p_j, p_k).

```
def orient(tab,i,j,k):
    """Retourne l'orientation (-1,0,+1) du test d'orientation de la séquence
(pi,pj,pk)"""
    # On calcule les coefficients de la matrice formée par les coordonnées
    a11 = tab[0][j]-tab[0][i]
    a21 = tab[1][j]-tab[1][i]
    a12 = tab[0][k]-tab[0][i]
    a22 = tab[1][k]-tab[1][i]
    # On calcule le déterminant
    det = a11*a22 - a12*a21
    # On regarde le signe du déterminant
    if det > 0:
        return 1
    elif det < 0:
        return -1
    return 0
    # En utilisant la fonction sign de module numpy les 5 dernières instructions
```

```
    # se remplacent par : return sign(det)
```

Partie B : Algorithme du paquet cadeau

Cet algorithme a été proposé par R. Jarvis en 1973. Il consiste à envelopper peu à peu le nuage de points P dans une sorte de paquet cadeau, qui à la fin du processus est exactement le bord de $Conv(P)$. On commence par insérer le point de plus petite coordonnée (celui d'indice 7 dans l'exemple de la figure 1) dans le paquet cadeau, puis à chaque étape de la procédure on sélectionne le prochain point du nuage P à insérer.

La procédure de sélection fonctionne comme suit. Soit p_i le dernier point inséré dans le paquet cadeau à cet instant. Par exemple, $i = 10$ dans l'exemple de la figure 3.

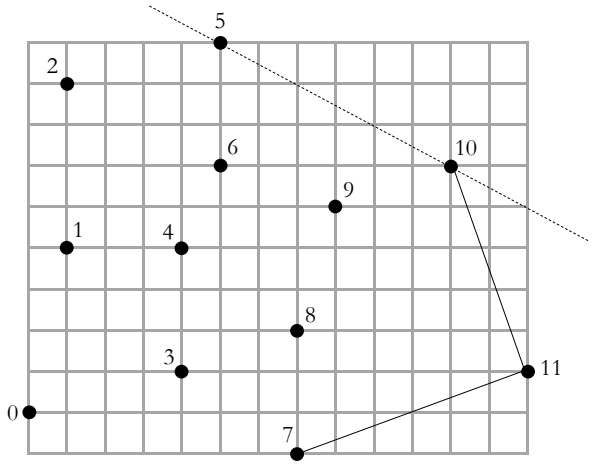


Figure 3 : Mise à jour du paquet cadeau après insertion du point p_{10}.

Considérons la relation binaire $\preccurlyeq$ définie sur l'ensemble $P \setminus \{p_i\}$ par

$$p_j \preccurlyeq p_k \quad \Leftrightarrow \quad \texttt{orient(tab,i,j,k)} \leq 0$$

7. Justifier brièvement le fait que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre total sur l'ensemble $P \setminus \{p_i\}$, c'est-à-dire :

- (réflexivité) pour tout $j \neq i,\ p_j \preccurlyeq p_j$
- (antisymétrie) pour tout $j, k \neq i,\ p_j \preccurlyeq p_k$ et $p_k \preccurlyeq p_j$ implique $j = k$
- (transitivité) pour tout $j, k, l \neq i,\ p_j \preccurlyeq p_k$ et $p_k \preccurlyeq p_l$ implique $p_j \preccurlyeq p_l$
- (totalité) pour tout $j, k \neq i,\ p_j \preccurlyeq p_k$ ou $p_k \preccurlyeq p_j$

Vérifions que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur l'ensemble $P \setminus \{p_i\}$.

- Soit $j \in [0, n-1] \setminus \{i\}$. Comme deux des trois points de la séquence sont égaux, $\texttt{orient(tab,i,j,j)} = 0 \leq 0$ et donc $p_j \preccurlyeq p_j$. La relation est réflexive.
- Soit $(j,k) \in ([0, n-1] \setminus \{i\})^2$. On suppose que $p_j \preccurlyeq p_k$ et $p_k \preccurlyeq p_j$. Alors $\texttt{orient(tab,i,j,k)} \leq 0$ et $\texttt{orient(tab,i,k,j)} \leq 0$. Autrement dit, $Det(\overrightarrow{p_i p_j}, \overrightarrow{p_i p_k}) \leq 0$ et $Det(\overrightarrow{p_i p_k}, \overrightarrow{p_i p_j}) \leq 0$. Or $Det(\overrightarrow{p_i p_j}, \overrightarrow{p_i p_k}) = -Det(\overrightarrow{p_i p_k}, \overrightarrow{p_i p_j})$, donc $Det(\overrightarrow{p_i p_j}, \overrightarrow{p_i p_k}) = 0$. Ce qui signifie que deux au moins des trois points sont égaux. Par hypothèse, p_i est différent de p_j et p_k donc $p_j = p_k$ puis $j = k$ puisque les points du nuage sont deux à deux distincts. La relation est antisymétique.
- Soit $(j,k,l) \in ([0, n-1] \setminus \{i\})^3$. On suppose que $p_j \preccurlyeq p_k$ et $p_k \preccurlyeq p_l$. Ainsi, $Det(\overrightarrow{p_i p_j}, \overrightarrow{p_i p_k}) \leq 0$ et $Det(\overrightarrow{p_i p_k}, \overrightarrow{p_i p_l}) \leq 0$. Comme le point p_i appartient à l'enveloppe convexe du nuage P, il existe une droite Δ passant par p_i telle que les points p_j, p_k et p_l soient

du même côté de Δ. Soit alors $(\vec{u}, \vec{v})$ une base orthonormale directe du plan telle que $\vec{u}$ dirige Δ et p_j, p_k et p_l soient d'ordonnées strictement positives dans le repère $(p_i; \vec{u}, \vec{v})$. Notons pour tout $s \in [0, n-1]$, x_s et y_s les coordonnées du point p_s dans le repère $(p_i; \vec{u}, \vec{v})$. Ainsi $\Delta_1 = Det(\overrightarrow{p_i p_j}, \overrightarrow{p_i p_k}) = \begin{vmatrix} x_j & x_k \\ y_j & y_k \end{vmatrix} = x_j y_k - y_j x_k$ et $\Delta_2 = Det(\overrightarrow{p_i p_k}, \overrightarrow{p_i p_l}) = \begin{vmatrix} x_k & x_l \\ y_k & y_l \end{vmatrix} = x_k y_l - y_k x_l$. On s'intéresse au signe de $\Delta = \begin{vmatrix} x_j & x_l \\ y_j & y_l \end{vmatrix} = x_j y_l - y_j x_l$. Calculons le produit $\Delta \times y_k = x_j y_l y_k - x_l y_j y_k = y_l(\Delta_1 + y_j x_k) + y_j = y_l \Delta_1 + y_j \Delta_2 \leq 0$. Comme $y_k > 0$, cela entraîne que $\Delta \leq 0$. On a démontré que la relation est transitive.

- Soit $(j, k) \in ([0, n-1] \setminus \{i\})^2$. Si **orient(tab,i,j,k)** ≤ 0, alors $p_j \preccurlyeq p_k$. Sinon **orient(tab,i,k,j)** $= -$ **orient(tab,i,j,k)** < 0. Donc $p_k \preccurlyeq p_j$. On a bien dans tous les cas $p_j \preccurlyeq p_k$ ou $p_k \preccurlyeq p_j$. La relation est totale.

On a donc bien une relation d'ordre total l'ensemble $P \setminus \{p_i\}$.

Ainsi le prochain point à insérer (le point d'indice 5 dans la figure 3) est l'élément maximum pour la relation d'ordre $\preccurlyeq$. Il peut se calculer en temps linéaire par une simple itération sur les points de l'ensemble $P \setminus \{p_i\}$.

8. Ecrire la fonction **prochainPoint** qui prend en paramètres le tableau **tab** de taille $2 \times n$ ainsi que l'indice i du point inséré en dernier dans le paquet cadeau. La fonction renvoie l'indice du prochain point à insérer. Le temps d'exécution de cette fonction doit être majoré par une constante fois n, pour tout n et i. La constante doit être indépendante de n et i, et on ne demande pas de la préciser.

Le point suivant p_i dans l'enveloppe convexe est le maximum de l'ensemble $P \setminus \{p_i\}$ muni de la relation d'ordre $\preccurlyeq$. On parcourt donc l'ensemble $P \setminus \{p_i\}$, en partant de p_0 si p_i est différent de p_0 et partant de p_1 sinon. Comme on parcourt une fois le nuage, le temps d'exécution de la fonction sera majoré par une constante fois le nombre n de points du nuage. Notons que dans la boucle on passe éventuellement par p_i, mais pour $k = i$ le test d'orientation renvoie 0 donc ce ne sera pas le maximum.

```
def prochainPoint(tab,i):
    """Retourne l'indice du prochain point à insérer, l'indice i étant l'indice
du dernier point inséré"""
    # On commence la recherche par le premier point (deuxieme si i est le premier)
    j = 1 if i==0 else 0
    # Recherche du max
    for k in range(1,len(tab[0])):
        if orient(tab,i,j,k) < 0:
            j = k
    return j
```

9. Décrire à la main le déroulement de la procédure **prochainPoint** sur l'exemple de la figure 3. Plus précisément, indiquer la séquence des points de l'ensemble $P \setminus \{p_i\}$ considérés et la valeur de l'indice du maximum à chaque itération.

L'appel à **prochainPoint(tab,10)** donne l'évolution des variables et les appels à **orient** suivants :

i	j	k	orient(tab,i,j,k)
10	0	1	orient(tab,10,0,1) < 0
10	1	2	orient(tab,10,1,2) < 0
10	2	3	orient(tab,10,2,3) > 0
10	2	4	orient(tab,10,2,4) > 0
10	2	5	orient(tab,10,2,5) < 0
10	5	6	orient(tab,10,5,6) > 0
10	5	7	orient(tab,10,5,7) > 0

10	5	8	orient(tab,10,5,8) > 0
10	5	9	orient(tab,10,5,9) > 0
10	5	10	orient(tab,10,5,10) = 0
10	5	11	orient(tab,10,5,11) > 0

La fonction renvoie bien 5, qui est l'indice du point suivant p_{10} dans l'enveloppe convexe de P.

On peut maintenant combiner la fonction **prochainPoint** avec la fonction **plusBas** de la question 4 pour calculer le bord de l'enveloppe convexe de P. On commence par insérer le point p_i d'ordonnée la plus basse, puis on itère le processus de mise à jour du paquet cadeau jusqu'à ce que le prochain point à insérer soit de nouveau p_i. A ce moment-là, on renvoie le paquet cadeau comme résultat sans insérer p_i une seconde fois.

Un détail technique : comme la taille du paquet cadeau augmente peu à peu lors du processus, et qu'à la fin elle peut être petite par rapport au nombre n de points de P, nous stockerons les indices des points du paquet cadeau dans une liste. Par exemple, sur le nuage de la figure 1, le résultat sera la liste [7,11,10,5,2,0].

10. Modifier la fonction **dessinerEnveloppe** de la question 2 afin qu'elle prenne en paramètre le tableau **tab** de taille $2 \times n$ et la liste des indices des points de l'enveloppe à dessiner.

```
def dessinerEnveloppe(tab,liste):
    """ Dessine les segments de droite reliant, dans l'ordre des indices de la
liste, les points de la liste """
    abscisse_points, ordonnee_points = [], []
    for i in liste:
        abscisse_points.append(tab[0][i])
        ordonnee_points.append(tab[1][i])
    abscisse_points.append(tab[0][liste[0]])
    ordonnee_points.append(tab[1][liste[0]])
    plot(abscisse_points,ordonnee_points,'k-')
```

11. Ecrire une fonction **convJarvis** qui prend en paramètre le tableau tab de taille $2 \times n$ représentant le nuage P, et qui renvoie une liste contenant les indices des sommets du bord de l'enveloppe convexe de P, sans doublon. Le temps d'exécution de cette fonction doit être majoré par une constante fois $n \times m$, où m est le nombre de points de P situés sur le bord de $Conv(P)$.

```
def convJarvis(tab):
    """ Retourne la liste des indices des points de l'enveloppe convexe des points
de tab par l'algorithme de Jarvis"""
    point_inf = plusBas(tab) # premier point de l'enveloppe (le plus bas)
    envConv = [point_inf] # contiendra les points de l'enveloppe convexe
    j = prochainPoint(tab,point_inf) # deuxième point de l'enveloppe convexe
    while  j != point_inf: # tant que l'on n'est pas revenu sur le premier point
        envConv.append(j) # on ajoute le prochain point
        j = prochainPoint(tab,j) # on calcule le point suivant
    return envConv
```

12. Justifier brièvement le temps d'exécution de l'algorithme du paquet cadeau de Jarvis.

La fonction **convJarvis** fait appel aux fonctions **plusBas** et **prochainPoint**. La fonction **prochainPoint** fait appel à **orient** qui a un coût constant. Les fonctions **plusBas** et **prochainPoint** ont donc un temps d'exécution en $O(n)$.
Notons m le nombre de points de l'enveloppe convexe. La boucle **while** de **convJarvis** effectue $m - 1$ itérations et dans chacune de ces itérations elle fait appel à la fonction **prochainPoint**. Par conséquent, le temps d'exécution est en $O(m \times n)$.

Intermède : piles d'entiers

Dans la suite nous aurons besoin d'utiliser des piles d'entiers, dont on rappelle la définition ci-dessous :

Définition 2 : Une pile d'entiers est une structure de données permettant de stocker des entiers et d'effectuer les opérations suivantes en temps constant (indépendant de la taille de la pile) :

- créer une nouvelle pile vide
- déterminer si la pile est vide
- insérer un entier au sommet de la pile
- lire la valeur de l'entier au sommet de la pile
- retirer l'entier au sommet de la pile

Nous supposerons fournies les fonctions suivantes, qui réalisent les opérations ci-dessus et s'exécutent chacune en temps constant :

- `nouvellePile()`, qui ne prend pas d'argument et renvoie une pile vide
- `estPileVide(p)`, qui prend une pile `p` en argument et renvoie `True` ou `False` suivant que la pile `p` est vide ou non
- `empilerPile(i,p)`, qui prend un entier `i` et une pile `p` en argument, insère `i` au sommet de la pile (c'est-à-dire à la fin de la liste), et ne renvoie rien
- `sommetPile(p)`, qui prend une pile `p` supposée non vide en argument et renvoie la valeur de l'entier au sommet de la pile
- `depilerPile(p)`, qui prend une pile `p` supposée non vide en argument, supprime l'entier au sommet de la pile et renvoie sa valeur

Dans la suite, il est demandé au candidat de manipuler les piles uniquement au travers de ces fonctions, sans aucune hypothèse sur la représentation effective des piles en mémoire.

Partie C : Algorithme de balayage

Cet algorithme a été proposé par R. Graham en 1972. Nous allons écrire la variante (plus simple) proposée par A. Andrew quelques années plus tard. La première étape consiste à trier les n points du nuage P par ordre croissant d'abscisse, en conservant tous les points de même abscisse dans un ordre arbitraire.

13. Parmi les algorithmes de tri que vous connaissez, mentionnez-en un qui a un temps d'exécution majoré par une constante fois $n \log n$ sur les entrées de taille n.

Par exemple, l'algorithme de tri fusion a un temps d'exécution en $O(n \log n)$.

A partir de maintenant, on supposera que les points fournis en entrée sont triés par abscisse croissante, comme c'est le cas dans l'exemple du tableau tab donné au début du sujet.

L'idée de l'algorithme est de balayer le nuage de points horizontalement de gauche à droite par une droite verticale, tout en mettant à jour l'enveloppe convexe des points de P situés à gauche de cette droite, comme illustré dans la figure 4.

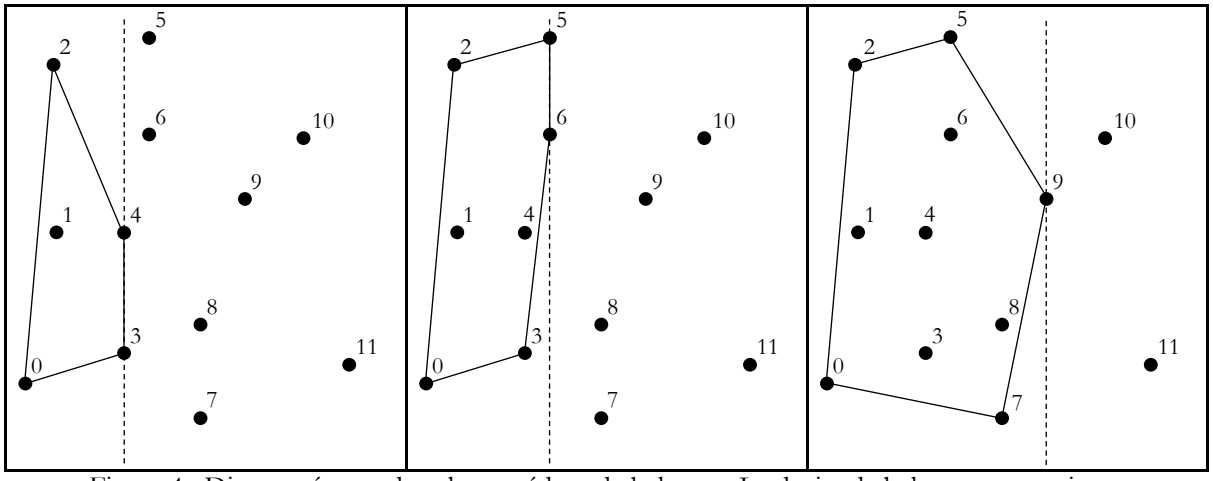


Figure 4 : Diverses étapes dans la procédure de balayage. La droite de balayage est en tirets.

Plus précisément, l'algorithme visite chaque point de P une fois, par ordre croissant d'abscisse (donc par ordre croissant d'indice de colonne dans le tableau **tab** car celui-ci est trié). A chaque nouveau point p_i visité, il met à jour le bord de l'enveloppe convexe du sous-nuage $\{p_0, \cdots, p_i\}$ situé à gauche de p_i. On remarque que les points p_0 et p_i sont sur ce bord, et on appelle *enveloppe supérieure* la partie du bord de $Conv\{p_0, \cdots, p_i\}$ située au-dessus de la droite passant par p_0 et p_i (p_0 et p_i compris) et *enveloppe inférieure* la partie du bord de $Conv\{p_0, \cdots, p_i\}$ située au-dessous (p_0 et p_i compris). Le bord de $Conv\{p_0, \cdots, p_i\}$ est donc constitué de l'union de ces deux enveloppes, après suppression des doublons de p_0 et p_i.

Par exemple, dans le cas du nuage P de la figure 4 gauche, le sous-nuage $\{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4\}$ a pour enveloppe supérieure la séquence (p_0, p_2, p_4) et pour enveloppe inférieure la séquence (p_0, p_3, p_4), le bord de son enveloppe convexe étant donné par la séquence (p_0, p_3, p_4, p_2).

Informatiquement, les indices des sommets des enveloppes inférieure et supérieure seront stockés dans deux piles d'entiers séparées, nommées **ei** (pour enveloppe inférieure) et **es** (pour enveloppe supérieure).

La mise à jour de l'enveloppe supérieure est illustrée sur la figure 5 : tant que le point visité (p_9 dans ce cas) et les deux points dont les indices situés au sommet de la pile **es** (dans l'ordre p_8 et p_5) forme une séquence (p_9, p_8, p_5) d'orientation négative (voir la définition 1 pour rappel de l'orientation), on dépile l'indice situé au sommet de **es** (8 dans ce cas). On poursuit ce processus d'élimination jusqu'à ce que l'orientation devienne positive ou qu'il ne reste plus qu'un seul indice dans la pile. L'indice du point visité (p_9 dans ce cas) est alors inséré au sommet de **es**. La mise à jour de l'enveloppe inférieure s'effectue de manière symétrique.

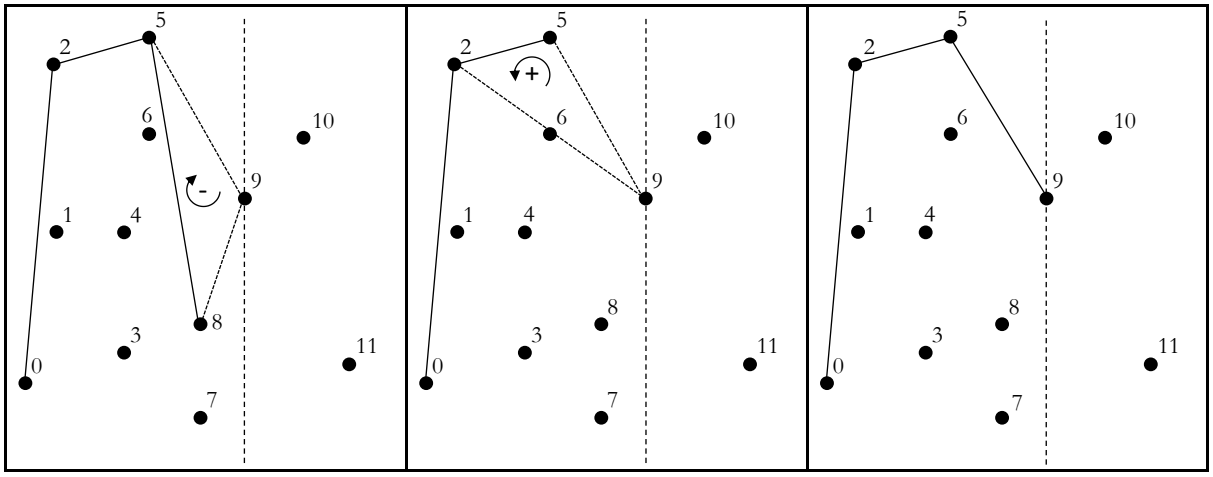


Figure 5 : Mise à jour de l'enveloppe supérieure lors de la visite du point p_9.

14. Ecrire une fonction **majES** qui prend en paramètre le tableau **tab** ainsi que la pile **es** et l'indice **i** du point à visiter. Cette fonction met à jour l'enveloppe supérieure du sous-nuage. Le temps d'exécution de cette fonction doit être majoré par une constante fois **i**.

```
def majES(tab,es,i):
    """ Met à jour l'enveloppe supérieure es (supposée non vide)"""
    j = depilerPile(es) # on dépile le dernier élément
    while not estPileVide(es) and orient(tab,i,j,sommetPile(es)) < 0:
        # on dépile jusqu'à obtenir une orientation positive ou une pile vide
        j = depilerPile(es)
    empilerPile(j,es) # on remet le dernier élément à sa place
    empilerPile(i,es) # on ajoute le nouveau point i
```

15. Ecrire une fonction **majEI** qui effectue la mise à jour de l'enveloppe inférieure, avec le même temps d'exécution.

La mise à jour de l'enveloppe inférieure se fait de manière similaire, la seule différence se situe au niveau du test d'orientation : cette fois-ci, on dépile le sommet de **ei** quand on arrive sur une séquence orientée positivement.

```
def majEI(tab,ei,i):
    """ Met à jour l'enveloppe inférieure ei (supposée non vide)"""
    j = depilerPile(ei)
    while not estPileVide(ei) and orient(tab,i,j,sommetPile(ei)) > 0:
        j = depilerPile(ei)
    empilerPile(j,ei)
    empilerPile(i,ei)
```

16. Ecrire une fonction **convGraham** qui prend en paramètre le tableau **tab** de taille $2 \times n$ représentant le nuage P, et qui effectue le balayage des points de P comme décrit précédemment. On supposera les colonnes du tableau déjà triées par ordre croissant d'abscisse. La fonction doit renvoyer une pile contenant les indices des sommets du bord de $Conv(P)$ triés dans l'ordre positif d'orientation, à commencer par le point p_0.

Par exemple, sur le nuage de la figure 1, le résultat de la fonction **convGraham** doit être la pile contenant la suite d'indices 0, 7, 11, 10, 5, 2 dans cet ordre. L'indice 0 se trouvant au fond de la pile et l'indice 2 au sommet de la pile.

Dans la fonction **convGraham**, on crée d'abord les piles **es** et **ei** contenant les indices des éléments des enveloppes supérieure et inférieure. On doit ensuite réunir ces éléments. On commence par dépiler **es**, car le sommet de **es** est dans les deux piles. On dépile ensuite les éléments de **es** dans **ei**, tant que **es** est non vide. Il reste alors à dépiler **ei**, car le dernier élément de **es** ajouté à **ei** était déjà dans **ei**. En procédant ainsi, la pile **ei** contient alors les éléments de $Conv(P)$, triés dans l'ordre positif d'orientation car les éléments de **ei** sont restés dans le sens initial et les éléments de **es** ont été « inversés » lorsqu'on a dépilé **es** sur **ei**.

```
def convGraham(tab):
    """ Retourne la liste des indices des points de l'enveloppe convexe des points
de tab par l'algorithme de Graham"""
    es, ei = nouvellePile(), nouvellePile() # les enveloppes supérieure et
inférieure, résultat final dans ei
    empilerPile(0,es) # insertion du point p0 dans la pile
    empilerPile(0,ei) # insertion du point p0 dans la pile
    for j in range(1,len(tab[0])):
        majES(tab,es,j) # mise à jour de es
        majEI(tab,ei,j) # mise à jour de ei
```

```
    depilerPile(es) # on dépile le sommet de es déjà dans ei (ie. le point pn)
    while not estPileVide(es): # on dépile les éléments de es dans ei
        empilerPile(depilerPile(es),ei)
    depilerPile(ei) # on dépile le sommet de ei, qui est deux fois dans ei (ie.
le point p0)
    return ei
```

17. Analyser brièvement le temps d'exécution de l'algorithme de Graham-Andrew, en supposant une fois encore que les points du nuage fourni en entrée sont déjà triés par abscisse croissante. En déduire que le temps d'exécution total de l'algorithme de Graham-Andrew est bien majoré par une constante fois $n \log n$.

Dans l'algorithme de Graham-Andrew, on effectue n itérations de la boucle **for** et à chacune d'elle on met à jour les piles **es** et **ei**. Notons r_j le nombre d'itérations de l'appel de fonction **majES(tab,es,j)**. Le nombre de points retirés à la pile **es** lors de cette étape est alors égal à $r_j + 1$. Ainsi, la complexité temporelle de cet appel est en $O(r_j)$, puisque les fonctions utilisées ont un coût constant. Or, on observe que chaque sommet est retiré au plus une fois lors de la j[ème] étape, et qu'un sommet qui a été retiré n'est plus considéré lors des étapes suivantes. Par conséquent, $\sum_{j=1}^{n} r_j$ est en $O(n)$. La complexité de l'ensemble des appels à la fonction **majES** est donc linéaire. Il en va de même pour les appels à **majEI** et par conséquent la complexité du balayage est linéaire.
Notons cependant que le balayage est précédé d'un tri des points par abscisses croissantes, dont la complexité est en $O(n \log n)$ (cf. question 13). Le temps d'exécution total de l'algorithme de Graham-Andrew, incluant le tri est donc en $O(n \log n)$.

Problème 2

Ce problème consiste en l'analyse et l'exploitation de données GPS (Global Positioning System) acquises par un récepteur équipant un véhicule. Ces dernières sont obtenues via un dispositif de réception installé à bord et fonctionnant à une fréquence allant de 1 à 4 Hertz. Chacune des mesures reçues contient (entre autres) des informations de positionnement (latitude, longitude) et de vitesse.

Le capteur inclus dans le récepteur GPS envoie les informations au calculateur embarqué via un bus de communication suivant un protocole particulier. Dans le cadre de ce sujet, le protocole retenu est le protocole NMEA 0183 (National Marine Electronics Association) utilisant des trames de type GPRMC (Recommended minimum specific GPS/Transit data) et utilisable avec la plupart des récepteurs GPS. Le format des trames GPRMC est défini en annexe 1.

Partie A : Acquisition des trames NMEA via une liaison série

L'objectif de cette première partie est d'enregistrer les trames GPS reçues par le décodeur dans un fichier nommé `tramesNMEA.txt`. Ce fichier sera utilisé en temps différé pour afficher le parcours réalisé. Le décodeur GPS reçoit des trames provenant des satellites à la fréquence de 1 Hertz. Elles sont ensuite transmises sur un port série dans le but d'être traitées par le calculateur embarqué.

A.1 Liaison série

Le décodeur GPS envoie sur la liaison série de type RS-232C une trame GPRMC. De manière générale, une liaison série permet de véhiculer, sur un nombre réduit de supports physiques, des informations élémentaires les unes à la suite des autres. Dans le protocole RS-232C, pour chaque octet à transmettre, 1

bit de start, 8 bits de données (correspondant à l'octet ou au caractère à transmettre), puis 1 bit de stop sont envoyés sur le bus de communication. Ainsi pour chaque octet d'une trame GPRMC, 10 bits sont transmis. Le signal de communication est bivalent, chaque bit est codé par un signal électrique haut ou bas dont la durée dépend du débit choisi pour la transmission. Au débit de 57600 bauds que l'on choisira ici, 57600 bits sont transmis chaque seconde.

Nous faisons l'hypothèse que la liaison est fiable, c'est-à-dire que l'on considère qu'il n'y a pas de panne du récepteur ou de déconnexion physique de la liaison série. On considère une trame de 76 caractères codés en ASCII. On donne en annexe 1 un exemple de trame.

1. Quelle est la durée de transmission d'une trame de 76 caractères sur le bus RS-232C ?

Le bus RS-232C a un débit de 57 600 bauds par secondes. Il faut transmettre 76 caractères, soit 760 bits (en comptant les bits start et stop). La durée de transmission d'une frame est donc de $\frac{760}{57600} \approx 0.013$ s.

2. Le débit de transmission du bus série est-il suffisant pour traiter en temps réel les trames provenant des satellites ?

On reçoit une trame par seconde (1 Hertz) et le temps de réception d'une trame est de 13 millisecondes, le débit de transmission du bas est donc suffisant (il reste 987 millisecondes pour traiter l'information).

A.2 Lecture des trames GPS

On souhaite utiliser une bibliothèque permettant la gestion des entrées/sorties sur une liaison série. Un extrait de la spécification de cette bibliothèque est donné ci-après.

```
def initSerie(port,bauds):
    """ Initialise un port série et retourne un identifiant de port idport
    Entrées :
      * port : entier >= 0, le numéro de port à initialiser
      * bauds : entier, débit du port en bauds
    Sortie :
      * idport : entier, l'identifiant du port
    """

def lireSerie(idport):
    """ Attend l'arrivée d'un octet sur le port d'identifiant idport et retourne
        cet octet sous la forme d'un entier (code ASCII)
    Entrées :
      * idport : entier, l'identifiant du port série
    Sortie :
      * car : entier, valeur de l'octet lu sur le port série (code ASCII)
    """
```

3. Donner l'instruction permettant d'initialiser le port série numéroté « 0 » à une vitesse de 57600 bauds. L'identifiant du port sera stocké dans une variable nommée `identifiant`.

```
identifiant = initSerie(0,57600)
```

4. Indiquer quel est toujours le dernier caractère lu dans une trame ainsi que la valeur numérique de son code ASCII.

Le dernier caractère est toujours un retour à la ligne, son code ASCII vaut 10.

5. Donner la fonction standard Python qui permet d'obtenir un caractère à partir de la valeur numérique de son code ASCII.

La fonction Python qui permet de convertir une valeur ASCII en caractère est : `chr(valeur)`.

6. Ecrire la fonction `lireTrame` qui prend en argument l'identifiant d'un port série, qui retourne la chaîne de caractères d'une trame lue sur le port, et qui l'affiche à l'écran.

```
def lireTrame(idport):
   """ Lit, affiche, et renvoie une trame lue sur le port idport """
   trame = ''
   lu = 0
   while lu != 10 :
      lu = lireSerie(idport)
      trame += chr(lu)
   print(trame)
   return trame
```

A.3 Enregistrement dans un fichier

Nous souhaitons maintenant enregistrer toutes les trames envoyées par le récepteurs GPS dans un fichier texte nommé `tramesNMEA.txt` situé dans le dossier courant (une ligne par trame). Le fichier texte sera ouvert en début de programme de sorte à être vidé s'il existait déjà auparavant. Ici, le récepteur GPS envoyant des trames en continu, le programme à réaliser n'a pas de fin et ne se terminera que lorsqu'il sera explicitement fermé par l'utilisateur. Pour implémenter ce comportement, on pourra utiliser l'expression `while True`.

7. Ecrire le programme principal qui, après initialisation du port « 0 » de la liaison série, permet de lire les trames sur ce port et d'enregistrer le contenu des trames, telles qu'elles sont reçues, dans le fichier `tramesNMEA.txt`, au format texte.

```
idport = initSerie(0,57600)
try :
   f = open(tramesNMEA.txt,'w') # ouverture du fichier en écriture
   while True : # boucle infinie (attente arrêt par l'utilisateur)
      trame = lireTrame(idport) # lecture d'une trame sur le port
      f.write(trame) # ou print(trame,sep='',end='',file=f)
      # pas besoin de saut de ligne, déjà en fin de trame
   f.close()
except OSError :
   print('Erreur impossible d'ouvrir le fichier tramesNMEA.txt')
```

Partie B : Exploitation du ficher de trames

L'objectif de cette partie est d'extraire et d'enregistrer une trame dans une structure de données cohérente afin de pouvoir exploiter aisément les mesures. On fait l'hypothèse que les trames ne contiennent pas d'erreur.

B.1 Extraction d'une trame

La description d'une trame GPRMC, donnée en annexe 1, indique que les valeurs des différentes informations de la trame sont comprises entre les caractères « $ » et « * ».

8. Ecrire la fonction `cherchePremiereOccurence` qui retourne l'indice de la première occurrence d'un caractère dans une chaîne de caractères, tous les deux passés en paramètre de la fonction. Par exemple

l'appel `cherchePremiereOccurence('a','capes')` retourne la valeur 1. Il conviendra de choisir et de justifier ce que la fonction retourne dans le cas où le caractère recherché n'est pas présent dans la chaîne.

```
def cherchePremiereOccurence(car,chaine) :
    """ Retourne l'indice de la première occurrence du caractère car dans la chaîne
de caractère chaine. Retourne None si le caractère est absent (absence de
renseignement sur la position de caractère recherché) """
    n = len(chaine)
    i = 0
    while i < n :
        if chaine[i] == car :
            return i
        i += 1
    return None # optionnel, fait par défaut en Python si jamais retourner avant
```

On cherche maintenant à concevoir l'algorithme de la fonction `extraireTrame`. Cette fonction doit permettre d'extraire et de retourner, au format chaîne de caractères, le contenu d'une trame (nommée `NMEA`) complète située strictement entre les caractères « $ » et « * ». La trame extraite se nomme `NMEA_extraite`.

A titre d'exemple, le contenu de la trame `NMEA_extraite` issue de la fonction `extraireTrame`, basée sur la trame donnée en exemple dans l'annexe 1 est de la forme :

GPRMC,071139.988,A,4639.8232,N,0021.6810,E,8.95,184.14,141014,1.1,W,A

On précise que G est en première position de la trame extraite, c'est-à-dire en position 0 dans une chaîne en Python.

9. Indiquer quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes que doit respecter une chaîne de caractères quelconque afin de pouvoir extraire une trame complète grâce à la fonction `extraireTrame`.

Une trame commence par « $ » et finit avec « * ». Pour qu'une trame soit extraite, il faut qu'elle contienne ces deux caractères, le « $ » avant le « * ».

10. Ecrire la fonction `extraireTrame` dans laquelle la chaîne d'entrée se nomme `NMEA` et la chaîne de sortie se nomme `NMEA_extraite`. Dans le cas où elle ne peut pas être extraite, la fonction doit retourner une chaîne vide.

```
def extraireTrame (NMEA) :
    """ Extrait la première trame complète d'une chaîne quelconque """
    debut = cherchePremiereOccurence('$',NMEA)
    if debut is None :
        return ''
    fin = cherchePremiereOccurence('*',NMEA[deb+1:])
    if fin is None :
        return ''
    NMEA_extraite = NMEA[deb+1:fin+deb+1]
    return NMEA_extraite
```

B.2 Structure de données

Dans le cadre des traitements ultérieurs que nous souhaitons effectuer, il nous faut représenter une mesure GPS, que nous nommerons par la suite `pointGPS`, par sa latitude, sa longitude et sa vitesse.

Dans la trame GPS, les longitudes et latitudes sont données en degrés et minutes. Cette représentation ne facilitant pas les calculs, on décide de les convertir en minutes (1 degré étant égal à 60 minutes). Par ailleurs on opte pour la convention suivante :

- pour la latitude, le signe positif est choisi pour le Nord
- pour la longitude, le signe positif est choisi pour l'Est

Ainsi par exemple, si la trame contient la latitude « 0314.2500 » suivie de l'indicateur « S », la séquence « 03 » correspond à 3 degrés soit 180 minutes d'angle, la séquence « 14.2500 » correspond à 14.25 minutes d'angle et l'indicateur « S » implique une latitude négative. On stockera donc la valeur -194.25 dans le `pointGPS`. Cette convention est assurée par la fonction `conversionLongLat2Min` qui prend en argument une chaîne de caractères sous la forme ddmm.mmm (latitude ou longitude) et un caractère (« N », « S », « W » ou « E »), et qui renvoie une valeur réelle correspondant à la conversion en minutes d'angle expliquée ci-dessus. On supposera cette fonction connue et utilisable dans la suite de ce sujet.

Afin de stocker un `pointGPS`, on utilise une liste qui présente la structure interne suivante :

`pointGPS = [latitude, longitude, vitesse]`

Cette liste sera renseignée par les latitudes, longitudes et les vitesses extraites des différentes trames par le décodeur et traitées par les fonctions précédentes. Il existe deux principales méthodes pour extraire ces données, une première repose sur le comptage des séparateurs et peut s'adapter à des longueurs variables pour un même champ. La seconde, plus simple à mettre en œuvre, repose sur l'hypothèse que toutes les trames présentent exactement la même structure et que toutes les longueurs de champs restent identiques entre les différentes trames reçues. Dans la suite du sujet nous ferons l'hypothèse que toutes les longueurs de champ sont toujours identiques dans toutes les trames à traiter (celle de 76 caractères au total donnée en exemple).

11. A partir de la trame extraite issue de l'annexe 1 (donnée en section 2.1), compléter le tableau ci-dessous donnant l'indice de début et l'indice de fin des informations nécessaires à l'extraction de la latitude (y compris l'orientation), de la longitude (y compris l'orientation) et de la vitesse.

	Latitude	Orientation	Longitude	Orientation	Vitesse
Indice début					
Indice fin					

Rappel de la trame extraite :
GPRMC,071139.988,A,4639.8232,N,0021.6810,E,8.95,184.14,141014,1.1,W,A

	Latitude	Orientation	Longitude	Orientation	Vitesse
Indice début	19	29	31	41	43
Indice fin	27	29	39	41	46

12. Ecrire la fonction `creationPointGPS` qui prend en argument la chaîne de caractères d'une trame NMEA extraite (i.e. issue de la fonction `extraireTrame`) et qui retourne un `pointGPS` contenant les informations de latitude, longitude et vitesse de la trame.

```
def creationPointGPS(NMEA_extraite) :
    """ Stocke les valeurs de type latitude, longitude et vitesse dans une structure
de type pointGPS. La trame extraite fait exactement 76 caractères. """
    latitude = conversionLongLat2Min(NMEA_extraite[19:28],NMEA_extraite[29])
    longitude = conversionLongLat2Min(NMEA_extraite[31:40],NMEA_extraite[41])
    vitesse = float(NMEA_extraite[43:47])
    pointGPS = [latitude,longitude,vitesse]
    return pointGPS
```

B.3 Affichage du fichier

Nous disposons maintenant de toutes les fonctions qui permettent d'exploiter le fichier de trames créé dans la première partie (`trameNMEA.txt`). Nous souhaitons à présent afficher successivement chacun des `pointGPS` présents dans le fichier à l'écran.

13. Le fichier `trameNMEA.txt` contient les éléments correspondant aux `pointGPS`. Ecrire un programme principal qui affiche à l'écran chacun de ces éléments. Chaque ligne devra être de la forme (où chaque espace correspond à une tabulation) :

latitude_Point1 longitude_Point1 vitesse_Point1

latitude_Point2 longitude_Point2 vitesse_Point2

```
try :
   f = open(tramesNMEA.txt,'r') # ouverture du fichier en lecture
   for NMEA in f : # pour chaque ligne, ie. chaque trame NMEA
      NMEA_extraite = extraireTrame(NMEA)
      pointGPS = creationPointGPS(NMEA_extraite)
      print(pointGPS[0]+'\t'+pointGPS[1]+'\t'+pointGPS[2])
   f.close()
except OSError :
   print('Erreur impossible d'ouvrir le fichier tramesNMEA.txt')
```

Partie C : Structure de donnée avancée

L'objectif de cette partie est de stocker les points GPS dans un arbre afin de pouvoir accéder aux points ayant la plus grande vitesse de façon optimale.

Un **tas binaire** est une structure de données qui permet d'accéder au maximum (respectivement minimum) d'un ensemble de données en temps constant. On peut le représenter par un arbre binaire vérifiant deux contraintes :

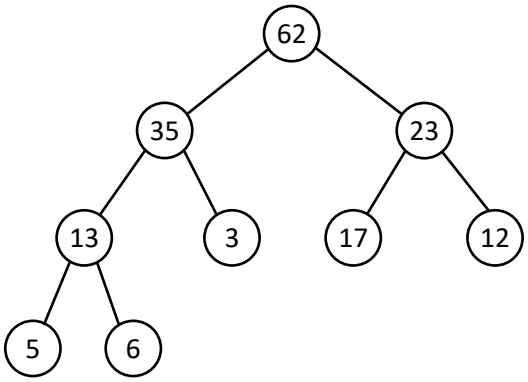
- c'est un arbre binaire parfait : tous les niveaux de l'arbre (excepté le niveau le plus bas) sont totalement remplis. Si le dernier n'est pas totalement rempli alors il doit l'être de gauche à droite
- c'est un tas : une clé est associée à chaque nœud de l'arbre. Cette dernière doit être supérieure ou égale aux clés de chacun de ses fils

Ainsi lorsque les clés sont des nombres (valeurs) et quand la relation d'ordre choisie est l'ordre naturel, on parle alors de tas-max (ou *max-heap*).

Un tas binaire étant un arbre binaire complet, on peut l'implémenter à l'aide d'un tableau tel que :

- la racine de l'arbre (niveau le plus haut) se trouve à l'indice 0
- en considérant un nœud à l'indice i :
  - son fils gauche se trouve à l'indice $2i + 1$
  - son fils droit se trouve à l'indice $2i + 2$
- en considérant un nœud à l'indice $i > 0$:
  - son père se trouve à l'indice $(i - 1)/2$, le symbole / désignant la division entière

La figure 1 illustre un tas binaire (max) et le tableau d'indices associés.

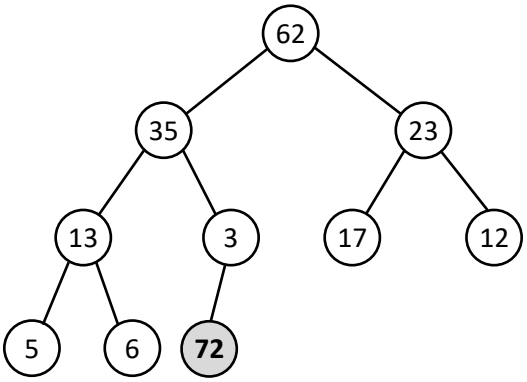


Valeur (clé)	62	35	23	13	3	17	12	5	6
Indice	0	1	2	3	4	5	6	7	8

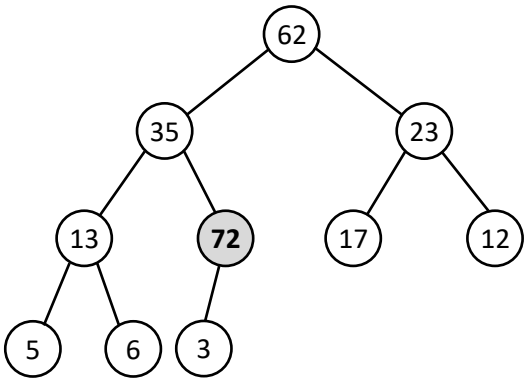
Le nœud ayant la valeur 62 est la racine de l'arbre (niveau le plus haut) et les nœuds ayant les valeurs 5 et 6 sont au niveau le plus bas.

Figure 1 : Tas binaire (max) et son implémentation en tableau

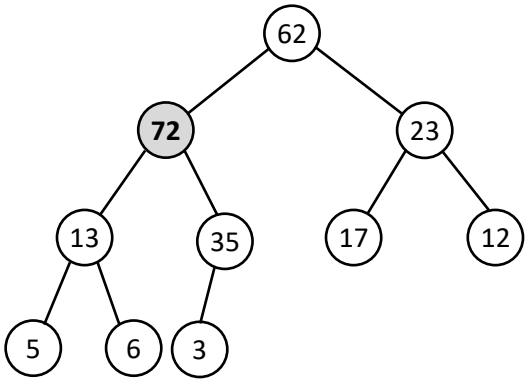
Dans un tas binaire, on insère l'élément à la prochaine position libre (la position libre la plus à gauche possible sur le dernier niveau) puis on effectue l'opération `retablirOrdreTasBinaire` pour rétablir si nécessaire la propriété d'ordre du tas binaire. Dans cette opération, tant que l'élément n'est pas la racine de l'arbre et que la clé de l'élément est strictement supérieure à son père, alors on échange les positions entre l'élément et son père. L'exemple de la figure 2 montre l'insertion d'un élément ayant une valeur 72 dans l'arbre de la figure 1.



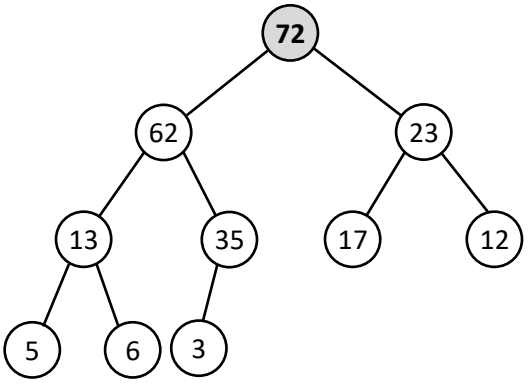
Insertion de la clé 72



Echange de la clé 72
avec son père (clé 3)



Echange de la clé 72
avec son père (clé 35)



Echange de la clé 72
avec son père (clé 62)

Figure 2 : Insertion de l'élément de clé 72

On souhaite stocker les `pointGPS` dans un tas binaire. La liste (i.e. le tas) sera donc de la forme :

`[[latitude_0,longitude_0,vitesse_0], [latitude_1,longitude_1,vitesse_1],...]`

Quand un tas binaire est réalisé sur un ensemble structuré de variables comme c'est le cas sur les variables de type `pointGPS`, un des paramètres de cette variable structurée devient la clé. Les comparaisons présentes dans la fonction `retablirOrdreTasBinaire` se font alors sur cette clé.

14. Ecrire la fonction `retablirOrdreTasBinaire` qui prend en argument le tas binaire de points GPS dont l'ordre des clés doit être rétabli après l'insertion d'un élément en première position libre. Le paramètre vitesse jouera le rôle de clé.

```
def retablirOrdreTasBinaire(tas) :
    """ Rétabli l'ordre des clés du tas binaire après insertion en fin de tas """
    indice = len(tas) - 1 # indice du dernier élément
    element = tas[indice] # dernier element
    while indice > 0 :
        indicePere = (indice-1)//2
        pere = tas[indicePere]
        if element[2] < pere[2]: # la vitesse du père est plus grande, on s'arrête
            break
        else : # on échange père et fils
            tas[indice], tas[indicePere] = tas[indicePere], tas[indice]
            indice = indicePere
```

15. Ecrire une fonction `insererPointGPS` qui ajoute un point GPS dans un tas binaire de points. Tous les deux seront passés en paramètre de la fonction.

```
def insererPointGPS(pointGPS,tas) :
    """ Insère un point GPS dans le tas et rétabli l'ordre si nécessaire """
    tas.append(pointGPS)
    retablirOrdreTasBinaire(tas)
```

16. Ecrire une fonction `extraireMax` qui retourne le `pointGPS` de plus grande vitesse dans un tas binaire de points GPS passé en paramètre. Donner la complexité de cette fonction en fonction du nombre de points GPS dans le tas.

```
def extraireMax(tas) :
    """ Retourne le point GPS de vitesse max dans le tas """
    return tas[0]
```

Le maximum est toujours au sommet du tas. La complexité de cette fonction est en $O(1)$, elle ne dépend pas du nombre de points.

17. *Question bonus.* Ecrire la classe `Parcours` définie par :

- un constructeur initialisant une instance à partir du nom d'un fichier de trames (ex. `tramesNMEA.txt`)
- deux attributs `listePointsGPS` et `tasPointsGPS` stockant les points GPS de la trame lue d'une part sous forme d'une liste où les points sont triés dans le même ordre que la trame (parcours chronologique), et d'autre part sous forme d'un tas binaire où les clés sont les vitesses
- une méthode `afficherPointsChrono` sans paramètre permettant d'afficher les points GPS dans l'ordre chronologique (un point par ligne, même format que la question 13)

- une méthode `afficherPointsVitesseMinMax` sans paramètre permettant d'afficher le point GPS de vitesse minimale et le point de vitesse maximale (un point par ligne, même format que la question 13)
- toutes autres méthodes internes que vous jugerez utiles

```
class Parcours:
    """ La classe Parcours représente un parcours de points GPS, lus depuis un
fichier de trame NMEA. """

    def __init__(self, fichier):
        """ Initialisation de la liste et du tas binaire """
        f = open(fichier,'r')
        self.listePointsGPS, self.tasPointsGPS = ‘’
        for NMEA in f :
          NMEA_extraite = extraireTrame(NMEA)
          pointGPS = creationPointGPS(NMEA_extraite)
          self.listePointsGPS.append(pointGPS)
          insererPointGPS(pointGPS,self.tasPointsGPS)
        f.close()

    def afficherPointsChrono (self):
        """ Affiche les points GPS dans l'ordre chronologique """
        for point in self.listePointsGPS :
           print(point[0]+'\t'+point[1]+'\t'+point[2])

    def afficherPointsVitesseMinMax (self):
        """ Affiche les points GPS de vitesse min et max """
        print('Point de vitesse max :' + self.tasPointsGPS[0][0] + '\t' +
self.tasPointsGPS[0][1] + '\t' + self.tasPointsGPS[0][2])
        indMin = rechercheIndiceVitesseMin()
        print('Point de vitesse min :' + self.tasPointsGPS[indMin][0] + '\t' +
self.tasPointsGPS[indMin][1] + '\t' + self.tasPointsGPS[indMin][2])

    def rechercheIndiceVitesseMin(self) :
        """ Retourne l'indice du point GPS de vitesse min dans le tas. La recherche
dans le tas ou dans la liste est de même complexité O(n), on n'a pas besoin de
parcourir l'arbre de père en fils, juste d'itérer sur tous les éléments du tas
"""
        indiceMin = 0
        min = self.tasPointsGPS[0][2]
        for indice in range(1,len(self.tasPointsGPS)) :
           if self.tasPointsGPS[indice][2] < min :
              min = self.tasPointsGPS[indice][2]
              indiceMin = indice
        return indiceMin
```