Bases de l'Intelligence Artificielle

CM4 : Rappels – Logique des propositions

Marie Lefevre

2022-2023

Université Claude Bernard Lyon 1

Logique des propositions

- Logique propositionnelle
  - Logique très simple qui est la base de presque toutes les logiques
  - Logique d'ordre 0

- Aspects syntaxiques
  - Comment écrire les formules ?
  - Pour cela, on se donne un alphabet, i.e. un ensemble de symboles
  - Parmi les mots que l'on peut écrire avec cet alphabet, on regarde ceux qui correspondent à des **expressions logiques bien formées**, i.e. les formules

- Aspects sémantiques
  - Comment déterminer la valeur de vérité d'une formule ?
  - On parle de l'**interprétation** d'une formule, i.e. de l'affectation d'une valeur vrai ou faux à chacune des variables propositionnelles qui la compose

- Aspects déductifs
  - Comment démontrer (automatiquement) de nouveaux résultats ?

Logique des propositions

- Notion de proposition
  - Une proposition est un énoncé du langage ordinaire considéré du point de vue formel
  - Un énoncé est soit vrai, soit faux mais pas les deux : principe du tiers exclu
  - Exemple : « La Rochelle est en Charente-Maritime »
    « La hauteur de la Tour Eiffel est inférieure à 300 m »
    « Le cours d'IA est intéressant »

- Notion de valeur de vérité
  - Une proposition est vraie si il y a adéquation entre la proposition et les faits du monde réel, fausse sinon
  - Exemple : « La Rochelle est en Charente-Maritime » est vrai
    « La hauteur de la Tour Eiffel est inférieure à 300 m » est faux
    « Le cours d'IA est intéressant » est vrai ☺

- Paradoxe du menteur
  - Il faut faire attention aux affirmations ni tout à fait vrai, ni tout à fait fausse
  - Exemple : « Je mens » n'est pas une proposition
    Si je dit « je mens »
    Alors si je dis la vérité je mens et si je mens je dis la vérité ….

Logique des propositions : Aspects syntaxiques

- L'alphabet est constitué
  - De connecteurs logique
    - C = {¬, ∧, ∨, →, ↔}
      i.e. {non, et, ou, implique, équivalent}
  - De délimiteurs
    - Les parenthèses ( )
  - Des deux constantes propositionnelles
    - V (vrai) et F (faux)
  - D'un ensemble infini dénombrable de propositions ou variables propositionnelles
    - P = {p, q, r,...}

Logique des propositions : Aspects syntaxiques

- Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des formules du calcul propositionnel

- Toute formule F ∈ $\mathscr{F}$ est de l'une des formes suivantes :
  1. F = p avec p ∈ P,
     F est alors dite formule élémentaire
  2. F = ¬H avec H ∈ $\mathscr{F}$
  3. F = H□K avec □ ∈ {∧,∨,→,↔} et (H,K) ∈ $\mathscr{F}^2$

- Exemples
  - (p) ∧ (q)
  - (p) → ((p) → (q))

Logique des propositions : Aspects syntaxiques

- Règles d'élimination des parenthèses
  - Supprimer les parenthèses entourant les variables
  - Supprimer les parenthèses les plus externes
  - Tenir compte de l'ordre de priorité des connecteurs : $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- Exemples
  - $(\neg(p)) \wedge (q)$ devient $\neg p \wedge q$
  - $((\neg(p)) \wedge (q)) \rightarrow (r)$ devient $\neg p \wedge q \rightarrow r$
  - Par contre, $(\neg(p)) \wedge ((q) \rightarrow (r))$ devient $\neg p \wedge (q \rightarrow r)$
- Quand connecteurs équivalents, l'association se fait de gauche à droite
  - $p \rightarrow q \rightarrow r$ correspond à $((p \rightarrow q) \rightarrow r)$

Logique des propositions : Aspects sémantiques

- Notion d'interprétation
  - A chaque variable propositionnelle p,
    on associe une interprétation ou valeur de vérité
    - $\delta : p \rightarrow \{ \text{faux} , \text{vrai} \}$
  - Pour chaque formule F,
    on définit l'interprétation associée à chaque connecteur grâce aux tables de vérité
    - $\delta(F) \rightarrow \{ \text{faux} , \text{vrai} \}$

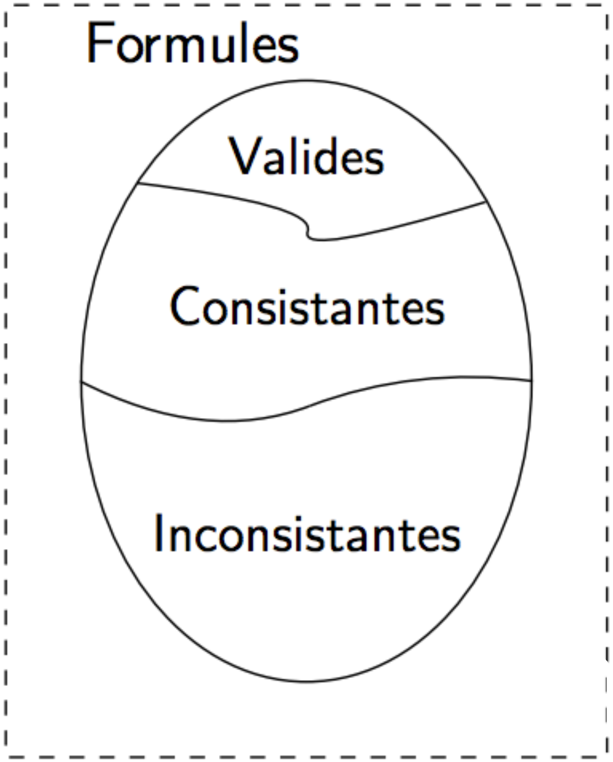
Logique des propositions : Aspects sémantiques

Table de vérité des formules (interprétation)

p	q	¬p	p∧q	p∨q	p→q
V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	F	V

Logique des propositions : Aspects sémantiques

- Formule satisfiable
  - Une formule est satisfiable si et seulement si :
    $\exists\delta\ \delta(F) = \text{vrai}$
  - On dit aussi que F est consistante
  - Exemple $F = (\neg p \rightarrow q) \land (q \leftrightarrow r)$
    est satisfiable pour
    $\delta(p) = \text{vrai}$ et $\delta(q) = \delta(r) = \text{vrai}$
- Formule insatisfiable
  - Une formule est insatisfiable si et seulement si :
    $\forall\delta\ \delta(F) = \text{faux}$
  - On dit aussi que F est inconsistante
  - Exemple $F = p \land \neg p$ est insatisfiable
- Tautologie
  - Une formule F est une tautologie si et seulement si :
    $\forall\delta\ \delta(F) = \text{vrai}$
  - On dit aussi que F est valide
  - On note $\vdash F$
  - Exemple $p \lor \neg p$ est une tautologie



Logique des propositions : Aspects sémantiques

Principales lois logiques : des tautologies (1/2)

Double implication	$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \land (q \rightarrow p))$
Lien implication – disjonction	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \lor q)$
Double négation	$\neg(\neg p) \leftrightarrow p$
Eléments neutres	$(p \lor \text{faux}) \leftrightarrow p$ $(p \land \text{vrai}) \leftrightarrow p$
Eléments absorbants	$(p \lor \text{vrai}) \leftrightarrow \text{vrai}$ $(p \land \text{faux}) \leftrightarrow \text{faux}$
Tiers exclu	$(p \lor \neg p) \leftrightarrow \text{vrai}$
Non-contradiction	$(p \land \neg p) \leftrightarrow \text{faux}$
Idempotence	$p \lor p \leftrightarrow p \land p \leftrightarrow p$

Logique des propositions : Aspects sémantiques

Principales lois logiques : des tautologies (2/2)

Commutativité	$(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$ $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$
Associativité	$(p \vee (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \vee r)$ $(p \wedge (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \wedge r)$
Distributivité	$(p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$ $(p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$
Absorption	$p \wedge (p \vee q) \leftrightarrow p$ $p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p$
Contraposition	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
Lois de de Morgan	$\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
Simplification	$p \vee (\neg p \wedge q) \leftrightarrow p \vee q$ $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r)$

Logique des propositions : Aspects sémantiques

- Lorsque l'on traduit un énoncé en formule
  - La multiplication des connecteurs alourdie l'écriture
  - Solution : réduire les formules
    - Limiter le nombre de connecteurs utilisés
    - Normaliser l' « allure » des formules manipulées

- Intérêt des formes normales
  - Théorème
    - Toute formule du calcul propositionnel est équivalente à une formule sous forme normale disjonctive (FND)
  - Corollaire
    - Toute formule du calcul propositionnel est équivalente à une formule sous forme normale conjonctive (FNC)

Logique des propositions : Aspects sémantiques

- Littéraux
  - Les éléments de P sont appelés littéraux positifs
  - La négation d'un élément de P est un littéral négatif

- Clause
  - Une clause est une disjonction de littéraux

- Forme normale disjonctive (FND)
  - Une formule F est sous FND si et seulement si
    F est une disjonction de clauses conjonctives
  - Autrement dit une disjonction de conjonction de littéraux

- Forme normale conjonctive (FNC)
  - Une formule F est sous FNC si et seulement si
    F est une conjonction de clauses
  - Autrement dit une conjonction de disjonction de littéraux

Logique des propositions : Aspects sémantiques

- La forme normale conjonctive (FNC) est aussi appelée forme clausale
- Pour mettre sous forme clausale :
  - Eliminer les $\leftrightarrow$ par des $\rightarrow$
  - Utiliser les lois de De Morgan
  - Eliminer les doubles négations
  - Appliquer les règles de distributivité
- Attention : non unicité de la forme clausale

Logique des propositions : Aspects sémantiques

Exemple : $p \land ((p \rightarrow q) \rightarrow r)$

$\cong\ p \land ((\neg p \lor q) \rightarrow r)$	Remplacer $X \rightarrow Y$ par $\neg X \lor Y$
$\cong\ p \land (\neg(\neg p \lor q) \lor r)$	
$\cong\ p \land ((p \land \neg q) \lor r)$	Descendre les $\neg$ avec De Morgan et supprimer les doubles $\neg$
$\cong\ (p \land (p \land \neg q)) \lor (p \land r)$	Distributivité
$\cong\ (p \land \neg q) \lor (p \land r)$	=> FND
$\cong\ p \land ((p \lor r) \land (\neg q \lor r))$	Distributivité
$\cong\ p \land (p \lor r) \land (\neg q \lor r)$	
$\cong\ p \land (\neg q \lor r)$	=> FNC

Logique des propositions : Aspects déductifs

- Conséquence logique
  - Soit A = $\{F_1,\ldots,F_n\}$ un ensemble d'éléments de $\mathscr{F}$ et G une formule
  - On dit que G est conséquence logique de A si et seulement si toute distribution de valeur de vérité satisfaisant simultanément toutes les formules de A satisfait G
  - On note $A \vdash G$
  - Exemple : $\{p \rightarrow q, p\} \vdash q$
    $\{p \rightarrow q, \neg q\} \vdash \neg p$

- Théorème
  - $A \vdash G$ si et seulement si $\vdash (F_1 \wedge \ldots \wedge F_n) \rightarrow G$

- Théorème : Raisonnement par l'absurde – réfutation
  - $A \vdash G$ si et seulement si $F_1 \wedge \ldots \wedge F_n \wedge \neg G$ est inconsistante

Logique des propositions : Aspects déductifs

- Un système formel S :
  - un ensemble dénombrable V de symboles ;
  - un sous-ensemble F de V^* appelé ensemble des formules ;
  - un sous-ensemble A de F appelé ensemble des axiomes ;
  - un ensemble fini R de règles de déduction ou d'inférence.
- Une règle d'inférence
  - Un ensemble de conditions $A_1,\ldots,A_n$
  - Et la conclusion qu'on peut en tirer C
  - On note $A_1,\ldots,A_n \models C$
- Principales règles d'inférences
  - Modus ponens $p \rightarrow q ,\ p \models q$
  - Modus tollens $p \rightarrow q ,\ \neg q \models \neg p$
  - Syllogisme : $p \rightarrow q ,\ q \rightarrow r \models p \rightarrow r$

Logique des propositions : Aspects déductifs

- Propriétés fondamentales du calcul propositionnel :
  - Théorème : Correction du calcul propositionnel
    - si $\models A$ alors $\vdash A$
    - i.e. tout ce qui est démontrable est vrai
  - Théorème : Complétude du calcul propositionnel
    - si $\vdash A$ alors $\models A$
    - i.e. tout ce qui est vrai est démontrable

Logique des propositions : Aspects déductifs

- Principe de réfutation :
  - $A \vdash F$ ssi $A \cup \{\neg F\}$ insatisfaisable

- Notons $\square$ la clause vide

- Complétude du principe de résolution
  - Un ensemble S de clauses est insatisfiable si et seulement si S mène par résolution à la clause vide
  - On note $S \vdash_{reso} \square$

- Donc $A \vdash C$ ssi $A \cup \{\neg C\} \vdash_{reso} \square$

Formule de réfutation

i.e. avec $A = \{F_1,\ldots,F_n\}$: $A \vdash C$ ssi $\boxed{F_1 \wedge \ldots \wedge F_n \wedge \neg C} \vdash_{reso} \square$

Logique des propositions : Aspects déductifs

Algorithme de résolution (Robinson, 1965)

Pour montrer que F est valide (toujours vraie)

- Construire la formule de réfutation
  i.e. la négation de F
- Mettre sous forme clausale
- Tant que la clause vide n'est pas rencontrée et qu'il existe des paires réductibles faire
  - Chercher des clauses résolvantes
  - Ajouter ce résultat à la liste des clauses
- Fin Tant que
- Si on trouve la clause vide
- Alors F est valide
- Sinon F est invalide

Si $F = H \vdash C$

$\neg(H \rightarrow C) \cong H \wedge \neg C$

Logique des propositions : Aspects déductifs

Exemple : Considérons les arguments suivants :

Si Didier est l'auteur de ce bruit, il est stupide ou dépourvu de principes.
Didier n'est ni stupide ni dépourvu de principes.
Donc Didier n'est pas l'auteur de ce bruit.

Pour nous convaincre de la validité de ce raisonnement, on le décompose.

Les propositions : D : « Didier est l'auteur de ce bruit »
S : « Didier est stupide »
P : « Didier est dépourvu de principes »

Les formules :

H1 : « Si Didier est l'auteur de ce bruit, il est stupide ou dépourvu de principes » : $(D \rightarrow (S \vee P))$

H2 : « Didier n'est pas stupide » : $\neg S$

H3 : « Didier n'est pas dépourvu de principes » : $\neg P$

C : « Didier n'est pas l'auteur de ce bruit » : $\neg D$

On pose la question : $\{H1, H2, H3\} \models C$?

Logique des propositions : Aspects déductifs

Exemple (suite) : Résolution par réfutation

On dispose des connaissances {H1, H2, H3} soit $\{(D \rightarrow (S \vee P)), \neg S, \neg P\}$.
On ramène sous forme clausale : $\{\neg D \vee S \vee P, \neg S, \neg P\}$.
On cherche à déduire $\neg D$.
On prend donc la négation, soit D.
On fait une preuve par réfutation de $\{\neg D \vee S \vee P, \neg S, \neg P, D\}$.

$\neg D \vee S \vee P$ $\quad$ $\neg S$

$\neg D \vee P$ $\quad$ $\neg P$

$\neg D$ $\quad$ D

$\square$

Donc $H1 \wedge H2 \wedge H3 \wedge \neg C$ est invalide
Donc $H1 \wedge H2 \wedge H3 \vdash C$ est valide

Logique des propositions

- Logique propositionnelle ou logique d'ordre 0
  - Avantage : Principe de résolution par réfutation
  - Limite : Pouvoir d'expression limité…

Si Sylvain est fils de Philippe, et Philippe fils de Jean,
alors Jean est grand-père de Sylvain,
ainsi que de Marion, fille aussi de Philippe,
et que cela est vrai dans plein d'autres cas.

Comment exprimer ce raisonnement sans avoir à énumérer tous les liens de parentés pour toutes les familles ?

- Introduction de prédicats et de variables
  - $Fils(x, y) \land Fils(y, z) \leftrightarrow Grand\_pere(z, x)$