Introduction aux courbes paramétriques et à la géométrie différentielle

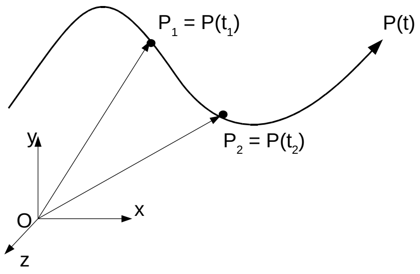
Ce cours est une **compilation** :
- Cours Loic Barthe (IRIT-UPS Toulouse; Equipe Vortex)
- Cours de Christian Jacquemin (LIMSI- Paris 11)
- Cours de Marc Daniel (LSIS- Marseille)
- Cours G. DUT Informatique- Arles
- Cours G. Gesquière Master II Gamagora

Plan

- Introduction
- Représentation d'une droite
- Représentation d'une courbe
- Introduction : géométrie différentielle
  - Tangente, normale principale, repère de Frénet
  - Courbure, torsion
- Les cubiques d'Hermite

Notion de courbe paramétrique

- Une courbe est engendrée par le déplacement d'un point P dans l'espace
- Pour faciliter l'interprétation, on peut prendre le temps **t** comme paramètre; mais n'importe quel scalaire **u** permet de décrire une courbe dans l'espace.



- A noter : Le point P(x,y,z) a les mêmes coordonnées que le vecteur $\overrightarrow{OP}$

Définition

- Un courbe paramétrique dans l'espace R^3 est définie par une fonction

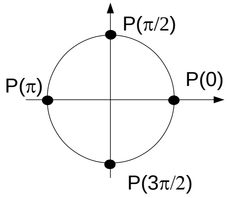
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$
$$u \rightarrow P(u) = \begin{cases} x(u) = f_x(u) \\ y(u) = f_y(u) \\ z(u) = f_z(u) \end{cases}$$

- Ainsi, pour chaque valeur du paramètre u, on calcule indépendamment les trois coordonnées x, y et z du point P(u)
- Une même courbe peut avoir plusieurs représentations paramétriques différentes

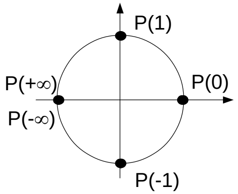
Exemple

- Equations paramétriques du cercle de rayon r, centré à l'origine (dans R^2):

  - $P(u): \begin{cases} x(u) = r \cos u \\ y(u) = r \sin u \end{cases} \qquad u \in [0, 2\pi[$



  - $P(u): \begin{cases} x(u) = r \dfrac{1-u^2}{1+u^2} \\ y(u) = r \dfrac{2u}{1+u^2} \end{cases} \qquad u \in]-\infty, +\infty[$

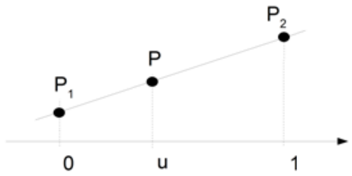


Représentation d'une droite

- Représentation paramétrique d'une droite de R^3 passant par deux points P_1 et P_2 :

$$P(u) = (1-u) P_1 + u P_2 \qquad \equiv \qquad P(u) \begin{cases} x(u) = (1-u) x_1 + u x_2 \\ y(u) = (1-u) y_1 + u y_2 \\ z(u) = (1-u) z_1 + u z_2 \end{cases} \qquad u \in R$$

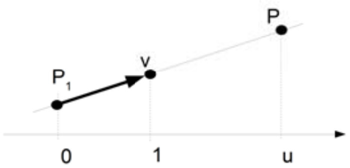
- Cette représentation conduit à la notion d'interpolation linéaire, en effet, quand u varie entre 0 et 1, le point P parcours linéairement le segment de P_1 jusqu'à P_2



Représentation d'une droite

- Une droite peut aussi être représentée à partir d'un point P_1 et d'un vecteur **v**:

$$P(u) = P_1 + u\, v$$



Représentation d'une courbe

$$P(u) = \begin{pmatrix} x(u) \\ y(u) \\ z(u) \end{pmatrix}$$

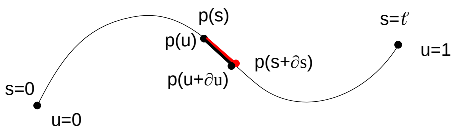
- En modélisation géométrique, on utilise essentiellement un paramètre borné et le plus souvent normalisé:

  u ∈ [0, 1]

- Ceci est intéressant pour les applications où l'on traite des morceaux de courbes

Introduction: géométrie différentielle

- Paramètre sur une courbe : $u \in [0,1]$ ou abscisse curviligne : $s \in [0,\ell]$.
  - s est la longueur parcourue le long de la courbe depuis son origine.



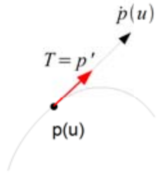
Vecteur tangente

- Vecteur tangente unitaire :

$$T = \frac{dp}{ds} = p' \qquad T = \lim_{\partial s \to 0} \frac{p(s+\partial s) - p(s)}{\partial s}$$

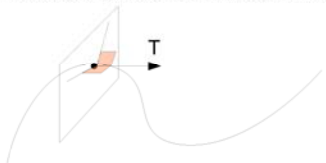
  - En général on calcule :

$$\dot{p}(u) = \frac{dp}{du} = T\,\|\dot{p}(u)\|$$



Vecteur normale principale

- Problème : on connaît la tangente à la courbe et il existe une infinité de vecteur qui lui sont orthogonaux.

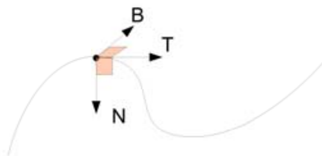


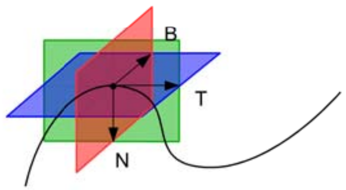
- Le vecteur normal principal **N** est défini à partir de la variation du vecteur tangente unitaire :

$$T = \frac{dP}{ds} \qquad \|T\| = \left\|\frac{dP}{ds}\right\| = 1 \ \forall\, u \qquad v = \frac{dT}{ds} = \frac{d^2P}{ds^2} \qquad N = \frac{v}{\|v\|}$$

Repère de Frénet

- C'est un repère local en un point de la courbe :
- On évalue les vecteurs T, N et B au point P et le repère (trièdre) de Frénet est le repère (T,N,B), centré en P.





- **(T,N)** définit le plan osculateur
- **(B,T)** définit le plan rectificateur (tangent)
- **(N,B)** définit le plan normal

Repère de Frénet

- Vecteur tangente unitaire **T** et vitesse **v** :

$$v=\frac{dp}{du}=\dot{p}=\left[\frac{dx}{du},\frac{dy}{du},\frac{dz}{du}\right] \qquad T=\frac{\dot{p}}{\|\dot{p}\|}$$

- Vecteur Binormal unitaire **B** et accélération **a** :

$$a=\frac{d^2p}{du^2}=\ddot{p} \qquad B=\frac{\dot{p}\wedge\ddot{p}}{\|\dot{p}\wedge\ddot{p}\|}$$

- Vecteur « Normal principal »: $N=B\wedge T$

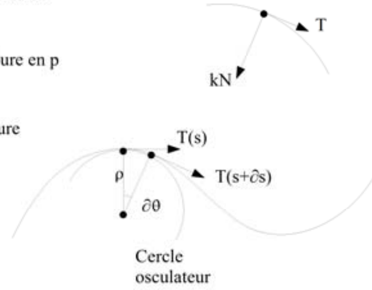
- Le vecteur **N** pointe dans la direction du centre de courbure, ainsi, de part et d'autre d'un point d'inflexion, le repère « flip ».

Courbure

- Par définition, le vecteur normal principal N est :

$$\frac{d^2p}{ds^2}=\frac{dT}{ds}=kN$$ où k est la courbure en p

$$k=\frac{1}{\rho}$$ où ρ est le rayon de courbure



Torsion

- Vecteur torsion : $\frac{dB}{ds}=\tau N$

- Torsion : c'est la variation du vecteur binormal.

$$\tau=\frac{\dot{p}.(\ddot{p}\wedge\dddot{p})}{\|\dot{p}\wedge\ddot{p}\|^2}$$

- Si la torsion est nulle tout au long de la courbe, la courbe est plane.

Cubiques

- Ce sont les courbes polynomiales paramétriques de degrés 3. Leur représentation algébrique est la suivante:

$$p(u)=au^3+bu^2+cu+d \qquad , \quad u\in[0,1]$$

qui doit être comprise de la façon suivante:

$$p(u):\begin{cases} x(u)=a_x u^3+b_x u^2+c_x u+d_x \\ y(u)=a_y u^3+b_y u^2+c_y u+d_y \\ z(u)=a_z u^3+b_z u^2+c_z u+d_z \end{cases}$$

- Comment un utilisateur peut-il tracer la courbe qu'il imagine ????
  - C'est quasi impossible si la cubique est manipulée sous cette forme
  - Il est nécessaire d'introduire des paramètres de contrôle qui sont intuitifs et facile à manipuler

Cubique d'Hermite

- L'équation de la cubique est reformulée en fonction de paramètres géométriques qui sont : son point de départ P_0 (u=0), son point d'arrivée P_1 (u=1) et leurs tangentes respectives V_0 (= $\dot{p}(0)$) et V_1 (= $\dot{p}(1)$).
  - Coefficients géométriques:

$$\begin{cases} P_0 = p(0) = d \\ P_1 = p(1) = a+b+c+d \\ V_0 = \dot{p}(0) = c \\ V_1 = \dot{p}(1) = 3a+2b+c \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} d = P_0 \\ c = V_0 \\ b = -3P_0 + 3P_1 - 2V_0 - V_1 \\ a = 2P_0 - 2P_1 + V_0 + V_1 \end{cases}$$

  - Ce qui nous donne la représentation géométrique en remplaçant a, b, c et d par leur correspondance en fonction de P0, P1, V0 et V1

$$p(u) = F_1(u)P_0 + F_2(u)P_1 + F_3(u)V_0 + F_4(u)V_1 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} F_1(u) = 2u^3 - 3u^2 + 1 \\ F_2(u) = -2u^3 + 3u^2 \\ F_3(u) = u^3 - 2u^2 + u \\ F_4(u) = u^3 - u^2 \end{cases}$$

$$p(u) = au^3 + bu^2 + cu + d \qquad , \quad u \in [0,1]$$

Cubique d'Hermite : forme matricielle

- Ceci nous amène à une forme matricielle d'une cubique :

$$p(u) = UMB = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ V_0 \\ V_1 \end{bmatrix}$$

- Cette représentation est souvent appelée « cubique d'Hermite »

Cubique d'Hermite : dérivées

- La dérivée (vitesse) de la cubique est une fonction ayant la forme matricielle suivante :

$$\dot{p}(u) = U\dot{M}B = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -6 & 3 & 3 \\ -6 & 6 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ V_0 \\ V_1 \end{bmatrix}$$

- La dérivée seconde (accélération) de la cubique est une fonction linéaire ayant la forme matricielle suivante :

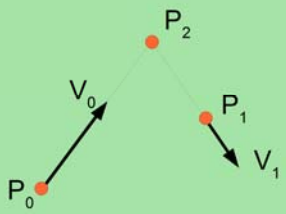
$$\ddot{p}(u) = U\ddot{M}B = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & -12 & 6 & 6 \\ -6 & 6 & -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ V_0 \\ V_1 \end{bmatrix}$$

Hermite- Exercice I

- Calculez p(1/2). A l'aide des paramètres de contrôle de la cubique et de p(1/2), tracez la cubique d'Hermite dans les cas suivant :
  1. P_0 (0,0), P_1 (2,0), V_0 (1,1), V_1 (1,-1)
  2. P_0 (0,0), P_1 (2,0), V_0 (4,4), V_1 (4,-4)
  3. P_0 (0,0), P_1 (2,0), V_0 (8,8), V_1 (8,-8)
  4. P_0 (0,0), P_1 (2,0), V_0 (4,0), V_1 (4,0)
  5. P_0 (0,0), P_1 (2,0), V_0 (-4,0), V_1 (4,0)
  6. P_0 (0,0), P_1 (2,0), V_0 (-4,0), V_1 (-4,0)

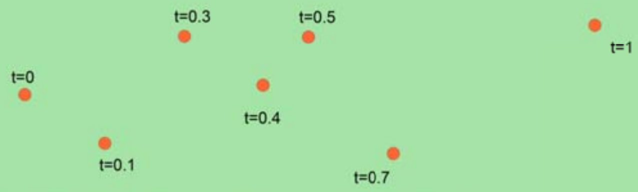
Hermite- Exercice II

- Calculez $\dot{p}\left(\frac{1}{2}\right)$
  - Que vaut $\dot{p}\left(\frac{1}{2}\right)$ si $V_0 = 4\,\rho\,(P_2\text{-}P_0)$ et $V_1 = 4\,\rho\,(P_1\text{-}P_2)$, $\rho \in R$
  - Qu'en déduisez vous ?

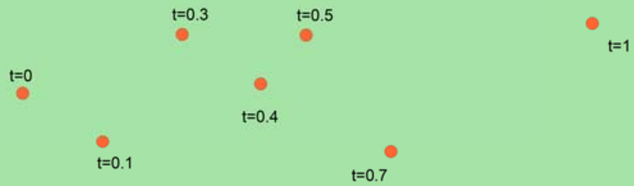


Exercice III- Interpolation

- Reconstruisez une courbe de continuité C^0 à partir des positions obtenues à différents temps t :



- Reconstruisez une courbe de continuité C^1 à partir de des mêmes positions :



Exercice IV- Raccordement C^2

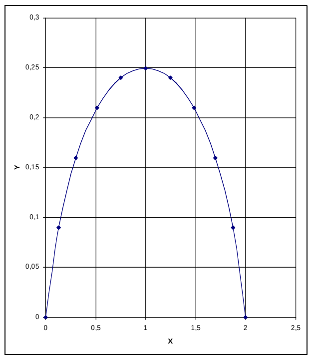
- Exercice :
  - Donnez les conditions sur les paramètres de contrôle de deux cubiques d'Hermite pour qu'elles soient raccordées avec une continuité C^2.
  - Si les courbes sont raccordées avec une continuité C^2, que peut on dire de la variation de la courbure le long des deux courbes ?

I- Exercices sur Hermite

- 1-

P(1/2)x =	1
P(1/2)y=	0,25

P0x	0
P0y	0
P1x	2
P1y	0
V0x	1
V0y	1
V1x	1
V1y	-1



I- Exercices sur Hermite

- 2 : P_0 (0,0), P_1 (2,0), V_0 (4,4), V_1 (4,-4)

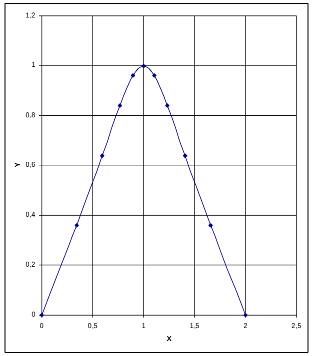
P(1/2)x =	1
P(1/2)y=	1

P0x	0
P0y	0

P1x	2
P1y	0

V0x	4
V0y	4

V1x	4
V1y	-4



I- Exercices sur Hermite

- 3 : P_0 (0,0), P_1 (2,0), V_0 (8,8), V_1 (8,-8)

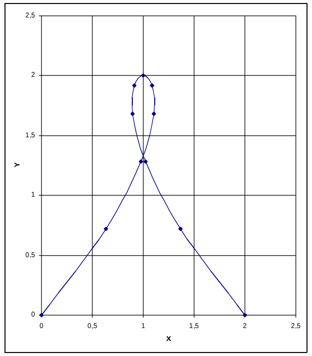
P(1/2)x =	1
P(1/2)y=	2

P0x	0
P0y	0

P1x	2
P1y	0

V0x	8
V0y	8

V1x	8
V1y	-8



I- Exercices sur Hermite

- 4 : P_0 (0,0), P_1 (2,0), V_0 (4,0), V_1 (4,0)

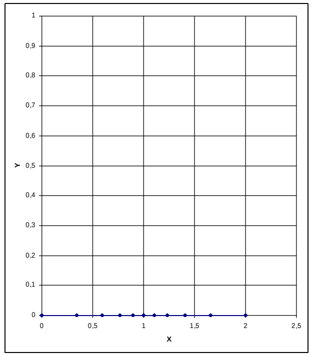
P(1/2)x =	1
P(1/2)y=	0

P0x	0
P0y	0

P1x	2
P1y	0

V0x	4
V0y	0

V1x	4
V1y	0



I- Exercices sur Hermite

- 5 : P_0 (0,0), P_1 (2,0), V_0 (-4,0), V_1 (4,0)

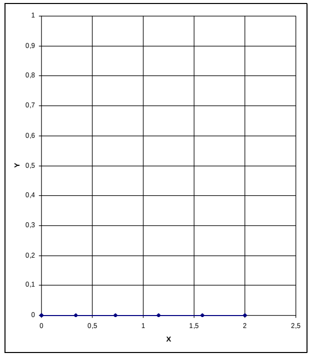
P(1/2)x =	0
P(1/2)y=	0

P0x	0
P0y	0

P1x	2
P1y	0

V0x	-4
V0y	0

V1x	4
V1y	0

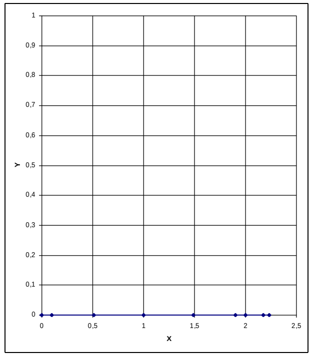


I- Exercices sur Hermite

- 6 : P_0 (0,0), P_1 (2,0), V_0 (-4,0), V_1 (-4,0)

P(1/2)x =	1
P(1/2)y=	0

P0x	0
P0y	0
P1x	2
P1y	0
V0x	-4
V0y	0
V1x	-4
V1y	0

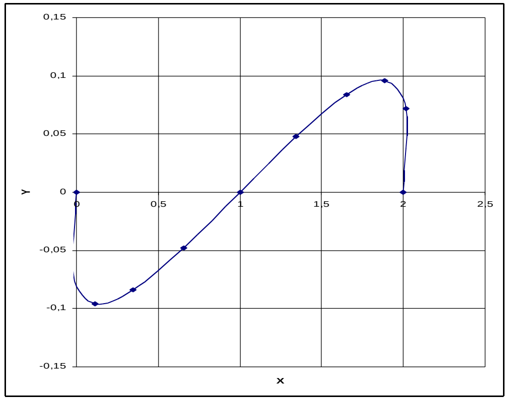


I- Exercices sur Hermite

- Autre exemple

P(1/2)x =	1
P(1/2)y=	0

P0x	0
P0y	0
P1x	2
P1y	0
V0x	-1
V0y	-1
V1x	-1
V1y	-1



Exo 2- Hermite

- Calculez
  - Que vaut $\dot{p}\left(\frac{1}{2}\right)$ si $V_0 = 4\,\rho\,(P_2 - P_0)$ et $V_1 = 4\,\rho\,(P_1 - P_2)$, $\rho \in R$
  - Qu'en déduisez vous ?
  - Solution :
    - La formule ci-dessous permet de connecter les deux vecteurs V0 et V1 grâce à un point P2. La direction est donc donnée par ce point. ρ sert juste à pondérer.
    - On pourrait donc utiliser cette formule afin de définir une courbe grâce à 3 points PO, P1 et P2.

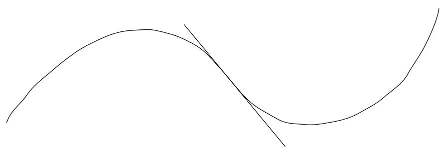
Exercice IV- Raccordement C^2

- Exercice :
  - Donnez les conditions sur les paramètres de contrôle de deux cubiques d'Hermite pour qu'elles soient raccordées avec une continuité C^2.
  - Si les courbes sont raccordées avec une continuité C^2, que peut on dire de la variation de la courbure le long des deux courbes ?
- Recollement :
  - On cherche à recoller 2 segments de courbes,
    - C1, paramétrée par M1(t), t appartient à [0,1]
    - C2, paramétrée par M2(t), t appartient à [0,1]
  - Si M1(1)=M2(0) il y a continuité G^0

Exercice IV- Raccordement C^2

- Si de plus la tangente à C1 en $M_1(1)$= la tangent à C2 en $M_2(0)$
  - Il y a continuité G^1

$$\frac{(d\,\overrightarrow{OM_1})}{dt}(1)=k*(\frac{(d\,\overrightarrow{OM_2})}{dt})(0)$$



Exercice IV- Raccordement C^2

- Si de plus les vecteurs vitesses sont égaux,
  - Il y a continuité C^1
  - $\frac{(d\,\overrightarrow{OM_1})}{dt}(1)=\frac{(d\,\overrightarrow{OM_2})}{dt}(0)$
  -
- Si de plus les vecteurs dérivées seconde sont égaux, continuité C^2
- Remarque $C^2 \Rightarrow C^1 \Rightarrow G^1 \Rightarrow G^0$

Exercice IV- Solution - Raccordement C^2

- Continuité C^2 si les vecteurs dérivées seconde sont égaux
- La courbure entre les deux morceaux sera constante.