

Dynamisme géométrique et physique appliqué aux Masses-Tenseurs

Florian CAILLAUD

Laboratoire d'InfoRmatique en Image et Systèmes d'information (LIRIS)

Résumé Nous proposons un modèle basé masse-tenseur permettant la simulation adaptative d'objets déformables. L'objectif de cette approche est d'améliorer les performances durant la simulation par rapport aux modèles non adaptatifs déjà existant. La détermination de plusieurs critères pertinents concernant la qualité de la simulation rend possible la prédiction de l'erreur commise par les éléments d'un maillage initial simplifié. Cette prédiction s'accompagne d'un changement de la loi de déformation de l'élément fautif afin d'apporter plus de réalisme physique à son comportement et ainsi optimiser la simulation.

Keywords: simulation physique, modèle masse-tenseur, maillage adaptatif, critères de qualité.

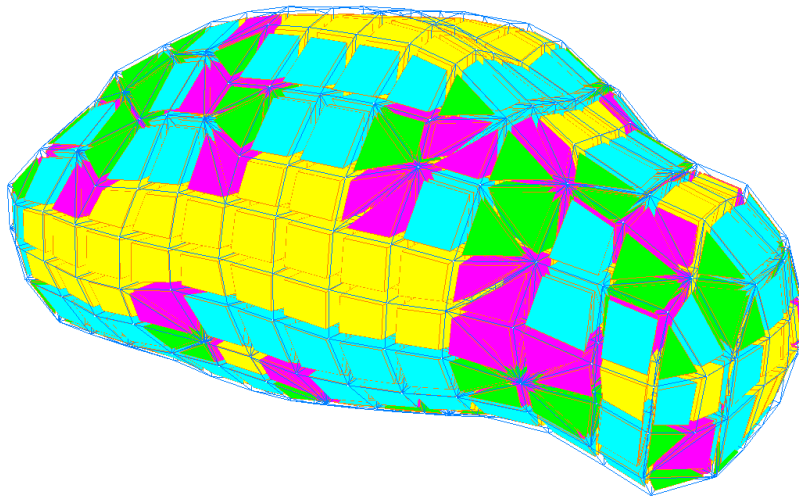


FIGURE 1. Simulation d'un maillage mixte modélisant le thorax humain en position allongée.

1 Introduction

Ce stage est entrepris au sein de l'équipe de recherche SAARA du LIRIS [Saa13] sous l'encadrement de Fabrice Jaillet et le co-encadrement de Xavier Faure. Il s'inscrit dans l'objectif du projet européen ETOILE. Ce projet vise à mettre en œuvre les moyens et les technologies permettant de guérir certaines tumeurs grâce à l'hadronthérapie [LPJS⁺07]. Cette nouvelle approche oncologique permet, en utilisant un faisceau de particules, de détruire les cellules cancéreuses radio-résistantes et inopérables.

Contrairement à la radiothérapie conventionnelle, l'hadronthérapie est plus agressive et plus ciblée. Elle nécessite donc une parfaite localisation de la tumeur tout au long du temps, afin de préserver les tissus sains périphériques lors de l'irradiation. Dans le cas d'une tumeur statique, le suivi n'est pas nécessaire pour l'opération. Une localisation préliminaire par CT-scan, IRM, ou autres systèmes de radiographie est suffisante.

En revanche, le mouvement du thorax et du diaphragme lors de la respiration et sa non cyclicité rend ce cas dynamique et imprévisible. La localisation d'une tumeur dans les poumons ou ses environs demande donc plus d'attentions. Un modèle de simulation en temps réel d'une précision adaptée au domaine médical est alors obligatoire, afin de connaître la position de la tumeur de façon exacte.

Ce modèle repose sur un compromis entre vitesse et précision. Généralement, les applications médicales s'appuient sur des modèles de simulation fiables tels que la méthode des éléments finis (MEF). Malheureusement, les MEF sont très coûteuses en temps. Les modèles non physiques ou simplement non continus, connus pour leur vélocité, sont encore peu utilisés pour ce genre d'applications en raison de leur difficulté à fournir un réalisme physique satisfaisant. Il existe, néanmoins, d'autres modèles continus, encore peu connus.

La méthode choisie ici est appelée la méthode des masses-tenseurs (MMT). Elle a l'avantage d'être précise mais surtout flexible. Cette dernière caractéristique nous permet de concilier au mieux vitesse de calcul et réalisme, en plus des optimisations déjà mises en place pour obtenir une interaction en temps réel. C'est en s'appuyant sur cette problématique et en utilisant les outils fournis par la MMT que nous avons développé une extension du modèle. Nous proposons une adaptation dynamique du modèle. Le caractère adaptatif s'applique sur la topologie du maillage déformé, mais également sur la loi de comportement affectée à chacun de ses éléments indépendamment de son voisinage.

Afin d'opérer ces changements, il nous a fallu déterminer des critères pertinents concernant la qualité du maillage ainsi que l'erreur de la solution, de manière locale. Ces critères, qu'ils aient un sens géométrique ou physique, ont pour rôle de garantir la qualité de la simulation en tout élément du maillage. La combinaison de plusieurs critères entre eux conduit à une perception assez précise de la déformation subie par le maillage. Ainsi, suite à une déformation, une région de mauvaise qualité pourra subir des modifications afin de rétablir son indice de qualité.

Les changements opérés sur les éléments du maillage peuvent être de deux natures. Premièrement, la loi de comportement affectée à un élément peut être

complexifiée, pour assurer une plus grande fidélité au détriment du temps de calcul pour cet élément. Deuxièmement, la MMT couplée avec la formulation développée au LIRIS [FZJM12] permet la gestion d'un maillage mixte (cohabitation de plusieurs types d'éléments géométriques). Cette polyvalence donne la possibilité au maillage d'être raffiné localement dans les régions principalement touchées par la déformation.

2 État de l'art

2.1 Simulation biomécanique

Depuis plusieurs décennies, les chercheurs ont bien compris l'intérêt de mettre en place des modèles mathématiques permettant d'obtenir des comportements de déformation réalistes [BN95,Gib97]. Mais Demetri Terzopoulos fut le premier à faire le lien entre le domaine mécanique et celui de la simulation 3D, en concevant un modèle basé sur des lois physiques [TPBF87]. Avant cela, il était difficile de trouver un modèle générique puisque la plupart s'inspiraient fortement des connaissances a priori du système en présence.

Ce souci de généralisation est depuis adopté dans la majorité des modèles traitant de simulations réalistes. La simulation biomécanique d'organes du corps humain a ainsi pu prendre son essor avec certains travaux pionniers décrits dans [NMK⁺06]. Depuis quelques années, ces modèles sont de plus en plus fins.

2.2 Systèmes masse-ressort

Un des premiers modèles utilisés fut le système masse-ressort (SMR). En utilisant une discrétisation de l'objet sous forme de maillage et une masse pour chacun de ses nœuds, ce système repose alors sur une modélisation des interactions entre nœuds voisins par des liens élastiques similaires à des ressorts. Ce principe permet aux SMR d'être rapides et légers. De plus, l'interaction avec les nœuds est grandement facilitée par leur nature même.

Les SMR sont utilisés depuis 1987 pour plusieurs types d'applications. Le comportement de textiles de toutes sortes est un des grands domaines concerné. On trouve d'ailleurs régulièrement des implémentations usant de systèmes de particules plutôt que de maillages, avec différentes façons de modéliser les liens élastiques entre nœuds [BHW94], ce qui illustre bien la flexibilité de ces modèles. Plusieurs approches ont été développées dans la simulation médico-chirurgicale avec de bons résultats au niveau du réalisme visuel [CEO⁺93].

Néanmoins, il s'agit d'un système discret et il est difficile d'y intégrer, de façon exacte, les caractéristiques physiques voulues. Les SMR perdent donc en précision à cause de cette incomplétude. Cela ne leur permet que difficilement de représenter des déformations réalistes.

2.3 Modèles basés MEF

Les simulations basées sur des méthodes continues sont souvent préférées pour des applications nécessitant un réalisme important. Parmi celles-ci, nous retrouvons les éléments de frontière, les différences finies ou encore les volumes finis.

La méthode des éléments finis fait également partie de cette famille. Elle est répandue car, en plus d'être générique et particulièrement bien adaptée aux déformations mécaniques, elle offre une précision élevée lors de la simulation. Cette méthode est maintenant largement utilisée dans l'animation 3D comme le montrent Wicke *et al.* [WRK⁺10] avec des objets élasto-plastiques ou encore Bargteil *et al.* [BWHT07] avec des objets visco-plastiques. Mais elle est également très utilisée dans le domaine médical pour des simulations de chirurgie, principalement destinées à l'éducation de jeunes chirurgiens. Nous découvrons ainsi des modèles de simulation du foie [CDA99] ou encore du diaphragme [SLB⁺12]. En effet, ce type d'application nécessite une exactitude des résultats afin de préserver le maximum de réalisme face à des situations d'apprentissage sérieux.

Même si les modèles basés éléments finis font preuve d'une grande justesse, ils se montrent particulièrement gourmands en temps de calcul pour des comportements complexes (hyperélasticité, viscoplasticité, etc.) et souvent très peu flexibles. Cela ne semble pas poser de problème pour ce qui touche à l'animation 3D. En revanche, les applications ne pouvant se passer d'une résolution et d'interaction en temps réel souffrent de cette lourdeur. Afin de s'affranchir de ces longs temps de calculs, certains utilisent des accélérations par pré-calculs, ou par approximation [BNC96]. D'autres tentent d'agir sur le modèle lui-même, en utilisant des structures de données mieux adaptées [KTY09]. Ces optimisations peuvent, quelques fois, diminuer drastiquement la précision de la méthode, enlevant ainsi partiellement l'intérêt d'un tel choix. La rigueur de ces modèles, quant à elle, oblige leurs auteurs à ne se cantonner qu'à une seule loi de comportement et à un seul type d'éléments géométriques (ex : tétraèdres, hexaèdres) pour l'ensemble du maillage. Ce dernier point est particulièrement gênant lorsque le maillage doit être raffiné (§ 4.3).

2.4 Modèles basés MMT

Stéphane Cotin [CDA⁺98] s'est intéressé aux qualités et aux défauts de ces deux approches. Ainsi, il a introduit en informatique graphique un modèle permettant d'allier rapidité, précision et changements topologiques en s'inspirant des SMR mais en restant dans un système continu.

La méthode des masses-tenseurs, nommée en référence au système masse-ressort, est ainsi très proche de la MEF, de par son aspect continu et son respect des lois mécaniques, mais calcule la force sur chacun des nœuds du maillage de manière assez semblable au SMR, plutôt que sur ses éléments.

Cotin *et al.* [CDA⁺98] ont créé un modèle rapide, en partie grâce au fait que la loi de déformation utilisée est linéaire (relation linéaire entre tenseur de déformation et tenseur de contrainte). Picinbono *et al.* [PDA02] proposent d'étendre

le modèle à des lois non-linéaires comme St Venant-Kirchhoff (StVK), afin de corriger la dilatation commise à tort lors de rotations. Ces travaux permettent de simuler la déformation d'un foie (environ 2000 tétraèdres) à 30 Hz avec un réalisme accru.

Fort de ce succès, Schwartz [Sch03] a appliqué ce modèle à des lois linéaires et non-linéaires, afin de pouvoir, de façon générique, simuler le comportement d'un objet, peu importe ses propriétés physiques. Son application permet la simulation d'une cryochirurgie du foie en temps réel et est un des premiers outils médicaux utilisant ce modèle.

Comme les MEF, néanmoins, l'utilisation de lois non-linéaires augmente considérablement le temps de calcul. Afin de pouvoir mettre en place une simulation en temps réel, parfois avec interface haptique, il est judicieux d'optimiser ce modèle. La MMT permet toutefois, à l'instar du SMR, de s'appuyer facilement sur un maillage géométriquement mais également physiquement adaptatif.

2.5 Estimateurs d'erreur

L'intérêt de l'approche adaptative concernant les modèles masse-tenseur est de pouvoir gagner du temps en simplifiant géométriquement et physiquement le maillage dans les régions peu déformées. Pour ce faire, il est essentiel de pouvoir déterminer l'erreur commise par cette simplification au sein de chaque élément pour pouvoir, au besoin, raffiner, changer de loi de déformation ou de méthode d'intégration lorsque l'erreur devient trop importante.

La qualité géométrique du maillage est donc un critère prédominant dans ce calcul d'erreur. Il est montré que l'optimalité des résultats, en ce qui concerne les modèles continus, dépend partiellement de la régularité des éléments du maillage pris en compte [BA76]. Plusieurs papiers proposent des réponses mathématiquement poussées [Ber99,Knu01]. De manière applicative, néanmoins, il est rare de trouver des critères si élaborés. En effet, la plupart des modèles nécessitant un calcul dynamique de critères n'utilisent que de simples *aspect ratios* [WRK⁺10], par souci de légèreté et de rapidité.

Il existe une autre façon de déterminer l'erreur commise par un élément du maillage, cette fois physiquement. En effet, calculer l'énergie de déformation ou le stress appliqué à un élément permet de savoir à quel point il est déformé. Une grande déformation pourra impliquer plus d'erreur, dans le cas d'une loi de déformation linéaire par exemple. Wu *et al.* [WDGT01] se sert donc du champ de stress appliqué au maillage (et de son gradient) afin de déterminer les zones à raffiner. Il fait également la différence entre une déformation locale qui entraîne un raffinement et une déformation uniforme qui ne nécessite pas de complexification. Il met également en place un estimateur rudimentaire dépendant du rapport entre longueur d'arête initiale et courante qui donne un sens géométrique à la déformation.

3 Méthode des Masses-Tenseurs

3.1 Discrétisation

La MMT est basée sur un modèle continu, de la même façon que la MEF. Comme cette dernière, elle nécessite une discrétisation de l'objet déformé en éléments géométriques simples, appelé éléments finis. Théoriquement, ces éléments peuvent prendre la forme de n'importe quel polygone, en deux dimensions (2D), ou polyèdre, en trois dimensions (3D).

De manière pratique, en revanche, la discrétisation de l'objet se fait sous forme de maillage plan (en 2D) ou volumique (en 3D). Ce type de structure s'obtient plus facilement en utilisant des éléments simples. En outre, plus un élément est complexe, plus les temps de calcul de la simulation en pâtissent (§ 5.6). Pour ces deux raisons, les triangles, carrés, tétraèdres ou hexaèdres sont souvent préférés.

Le principe de la MMT est de calculer l'influence d'un élément sur un nœud et non, comme pour la MEF, sur un élément. Ces nœuds forment l'ensemble discret des points du système en lesquels les propriétés physiques sont calculées. Les nœuds ne sont pas forcément les sommets des éléments. Il peut également s'agir de points d'interpolation (voir Figure 2), situés sur les arêtes ou les faces, augmentant le degré de la fonction d'interpolation évaluant le champ de déplacement en tout point de l'élément en fonction de ses nœuds.

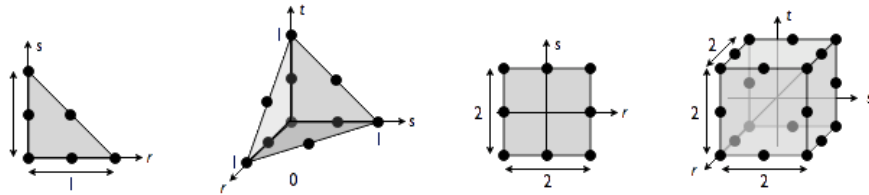


FIGURE 2. Représentation (de gauche à droite) d'un triangle 6 nœuds, d'un tétraèdre 10 nœuds, d'un quadrilatère 8 nœuds et d'un hexaèdre 20 nœuds.

3.2 Fonctions de forme

Afin d'obtenir le champ de force sur les nœuds du maillage, suivant le principe de la MMT, il est nécessaire de déterminer le champ de déplacement à l'intérieur de ses éléments. Ce champ est calculé à partir de la fonction de forme $A(x)$ de l'élément. Elle permet de déduire l'influence du déplacement de chaque nœud dans le déplacement du point x , à la manière de coordonnées barycentriques. Chaque type géométrique d'élément a sa propre fonction de forme. Ainsi, le

champ de déplacement $\mathbf{U}(x)$ en tout point x contenu dans l'élément est défini par :

$$\mathbf{U}(x) = \sum_{j=0}^n \Lambda_j(x) \mathbf{U}_j \quad (3.1)$$

où n est le nombre de nœuds de l'élément. \mathbf{U}_j est le déplacement du j -ème nœud de l'élément.

3.3 Champ de force

Le champ de déformation $\mathbf{U}(x)$ permet alors de calculer le tenseur de Green-Lagrange $\mathbf{E}(x)$ décrivant l'état de déformation de l'élément en fonction de ses nœuds :

$$\mathbf{E}(x) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^t + \nabla \mathbf{U}^t \cdot \nabla \mathbf{U}) \quad (3.2)$$

où $\nabla \mathbf{U}$ est le gradient du champ \mathbf{U} et $\nabla \mathbf{U}^t$ sa transposée.

La loi de déformation appliquée à un élément \mathcal{E} est la relation entre \mathbf{E} et l'énergie de déformation $W_{\mathcal{E}}$ de l'élément en question. Par exemple, l'énergie de déformation selon la loi de StVK s'écrit de la façon suivante :

$$W(x) = \frac{\lambda}{2} \text{tr}(\mathbf{E}(x))^2 + \mu \text{tr}(\mathbf{E}(x)^2) \quad (3.3)$$

$$W_{\mathcal{E}} = \int_{\mathcal{E}} W(x) dx \quad (3.4)$$

Le champ de force en chaque nœud P_i est ensuite obtenu avec la dérivée partielle de l'énergie $W_{\mathcal{E}}$ par le champ de déplacement \mathbf{U}_i .

$$\mathbf{F}_i(x) = \frac{\partial W_{\mathcal{E}}}{\partial \mathbf{U}_i} \quad (3.5)$$

En développant l'équation 3.5, on obtient des termes de différents degrés. Picinbono *et al.* [PDA02] identifient ces termes et notent que l'utilisation des termes de degré 1 équivaut à utiliser une variante linéaire de la loi de déformation choisie.

4 Travaux antérieurs

4.1 Framework SOFA

Les simulations mécaniques se construisent dans un environnement qui se trouve être relativement semblable pour les différentes méthodes exposées dans la section 2. C'est la raison pour laquelle il est possible de généraliser cet environnement en formant un framework de simulation efficace.

SOFA (Simulation Open Framework Architecture) est ce type de framework [Sof11]. Il a été créé dans l'intention d'aider à la mise en place de simulations mécaniques en temps réel. Ses auteurs ont tout particulièrement eu le souci de son adéquation avec les simulations médicales.

SOFA permet d'utiliser de nouvelles méthodes de simulation, ou de les combiner avec d'autres déjà en place sur la plate-forme. Pour cela, l'utilisateur doit implémenter son propre module d'extension dans lequel il définira son modèle. La prise en charge de ce modèle et l'affichage de la simulation seront effectués par SOFA.

Cette plate-forme a été utilisée pour les travaux antérieurs sur lesquels s'appuie ce stage [FZJM12], et donc également lors de ce travail concernant leur extension aux maillages mixtes et à l'adaptation géométrique et physique.

4.2 Calcul formel appliqué à la MMT

La thèse en cours, sur laquelle repose l'extension proposée, porte sur la déformation des tissus mous (principalement des poumons) en temps réel à l'aide de la MMT.

L'intérêt de ces travaux réside dans son utilisation du calcul formel afin de mettre en forme les équations nécessaires au calcul de forces (3.5). Les équations sont pré-établies avant la simulation en fonction des éléments disponibles. La méthode utilise les forces $\mathbf{F}_{i_{\mathcal{E}}}$ des points des éléments \mathcal{E} et leurs dérivées afin de calculer la force en chaque point du maillage.

$$\mathbf{F}_i = \sum_{\mathcal{E} \in \mathcal{V}(P_i)} \mathbf{F}_{i_{\mathcal{E}}} \quad (4.6)$$

où $\mathcal{V}(P_i)$ correspond aux éléments incidents au point P_i .

On remarque que $\mathbf{W}_{\mathcal{E}}$ est dépendant de \mathcal{E} et de sa loi de déformation. L'énergie de déformation peut donc être pré-établie sous la forme de calcul formel pour ce couple loi-élément. Les équations ainsi formées n'ont plus que le déplacement des nœuds de l'élément comme variable. Le calcul des forces et de leurs dérivées est accéléré. Le temps de calcul est donc principalement dû à l'intégration du système, particulièrement dans le cas d'une résolution implicite ou semi-implicite (par la méthode des gradients conjugués).

Chacun des éléments du maillage fait partie d'une association Loi-Élément-Split (LES) implémentée sous la forme d'un conteneur. Chaque conteneur correspond à un couple d'équations (calcul de la force et de sa dérivée). La Loi représente la loi de déformation de l'élément. L'Élément donne le type géométrique de l'élément en question. Enfin, le Split indique la manière de séparer les équations obtenues. Les équations obtenues par calcul formel sont souvent trop grandes pour être compilées dans un seul fichier. Elles doivent être séparées par termes, au sein de la longue somme que représente le calcul.

Les fichiers d'équations sont générés après l'utilisation de plusieurs modules. Le calcul formel des équations liées aux conteneurs LES nécessite dans un premier temps la description des fonctions de forme appropriées, mais également

des renseignements concernant les éventuels points d'interpolation utilisés pour approximer le champ de déplacement au sein de l'élément. Ces informations sont standard, mais propres à chaque type d'élément.

Le modèle est testé sur des poutres, qui ont des propriétés physiques et géométriques plus simples, et pour lesquelles il est aisé de déterminer une solution analytique comparative. Pour l'expérimentation, un module de création de maillage de poutres a été implémenté. Il permet de générer une poutre de n cubes de longueur et de m cubes de section. Chacun de ces cubes peut alors être composé des éléments choisis par l'utilisateur (tétraèdres, prismes, pyramides ou aucun pour des hexaèdres). La loi de déformation de chaque élément est également précisée. La poutre peut être composée de plusieurs phases (Voir Figure 3).

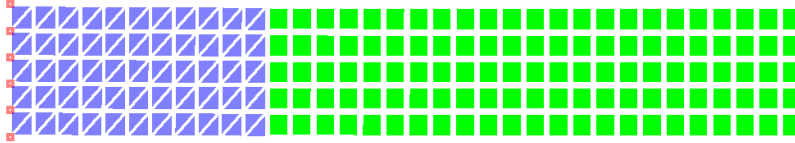


FIGURE 3. Simulation d'une poutre fixée sur son côté gauche, soumise à la gravité et composée de 30% de triangles associés à une loi de StVK et 70% de quadrilatères associés à une loi de Hooke.

Ce modèle permet ainsi de faire cohabiter plusieurs lois de déformation et plusieurs types d'éléments dans le même maillage. Le caractère indépendant de chaque élément autorise même théoriquement de changer la géométrie ou la physique d'un élément au cours de la simulation.

4.3 Génération de maillages mixtes

La MMT, comme le montre [CDA⁺98], permet les changements de topologie. Jusqu'à maintenant, il ne s'agissait que de changement de connectivité, pour des découpes ou des fusions. La gestion simultanée de plusieurs types d'éléments apportée par [FZJM12] va plus loin. Elle permet le raffinement local du maillage.

Dans le cas d'un maillage plan en 2D, le raffinement d'un quadrilatère en plus petits quadrilatères fait apparaître des incohérences topologiques (Figure 4-a). L'utilisation d'autres types d'éléments facilite l'obtention d'un raffinement de qualité (Figure 4-b).

Un raffinement en 3D est, lui, plus complexe et impose idéalement de disposer des éléments suivants : tétraèdres, hexaèdres, pyramides et prismes.

La thématique des maillages mixtes est étudiée depuis une vingtaine d'années, depuis [HCF93]. Récemment, Lobos *et al.* [LBHP08,L⁺12] font état de gé-

nération de maillages mixtes avec résolution adaptative à partir d'un maillage surfacique (Figure 5).

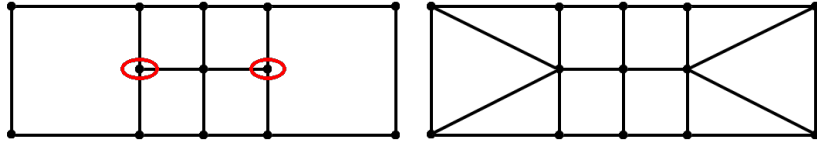


FIGURE 4. a) À gauche, le raffinement du quadrilatère central crée une irrégularité chez ses voisins (cerclée en rouge), ces derniers ne partagent pas les nouveaux sommets apparus. b) À droite, le raffinement est étendu aux voisins afin de préserver la conformité du maillage.

Le maillage en entrée est utilisé pour déterminer l'intérieur et l'extérieur de l'objet à modéliser de manière volumique. Un premier maillage cubique est obtenu sous forme d'un octree, se révélant très utile afin d'augmenter la résolution dans les régions d'intérêt (RI) ou aux interfaces. Des motifs de raffinement sont alors mis en place afin d'obtenir, d'une part, une surface similaire au maillage en entrée, et d'autre part, des éléments donnant la meilleure qualité possible au maillage en sortie.

La notion de RI abordée par Lobos *et al.* est primordiale pour le domaine de la simulation médicale. En effet, il paraît plus intéressant d'économiser l'attention portée à l'ensemble du maillage pour se concentrer sur une tumeur et/ou un champ opératoire. La possibilité de raffiner le maillage selon des motifs prédéfinis, afin d'obtenir une résolution adaptative, est également essentielle et est débattue dans la partie 5.6.

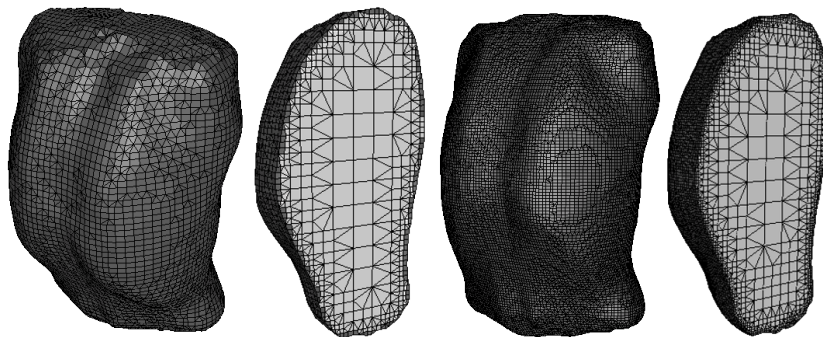


FIGURE 5. À gauche, un maillage mixte modélisant un thorax humain à la résolution maximale de $1/8^5$ et sa coupe. À droite, un maillage mixte modélisant un thorax humain à la résolution maximale de $1/8^6$ et sa coupe.

4.4 Les objectifs du stage

Après avoir rassemblé tous les éléments décrits dans les parties 4.2 et 4.3, la conclusion suivante s'impose. La modélisation biomécanique appliquée au domaine médical nécessite des modèles précis et rapides. La MMT apporte cette précision de par sa nature même, mais nécessite certaines accélérations, tout comme la MEF, afin de satisfaire la contrainte d'interactivité. La séparation entre le calcul de la force en chaque point et le couple loi-élément proposé dans [FZJM12] permet, une fois les équations voulues générées, de permuter le couple associé à un élément indépendamment du reste du maillage, sans surcoût.

L'intérêt d'une telle flexibilité est de permettre la mise en place d'un modèle basé MMT adaptatif. En effet, les régions les moins concernées par la déformation, nécessitent moins d'attention. A contrario, les RI se doivent d'apporter à l'utilisateur la précision recherchée. Ce stage a pour but de mettre en place les outils nécessaires à un modèle adaptatif.

Deux voies sont explorées. Premièrement, l'adaptation physique permettrait d'utiliser des lois de déformations simples dans les régions les moins déformées et augmenter le degré de ces lois pour chaque élément en fonction de la déformation appliquée à l'objet. Deuxièmement, des opérations locales telles que le raffinement et la simplification du maillage permettraient d'obtenir une précision satisfaisante dans les RI tout en conservant un nombre d'éléments raisonnable et ainsi réduire le temps de calcul.

Ces deux pistes nécessitent la mise en place de critères de qualité de maillage et d'estimation d'erreur afin de pouvoir interpréter au mieux la déformation et en déduire les changements à opérer sur le maillage afin d'optimiser le rapport précision/vitesse.

5 Réalisation

L'un des objectifs principaux de ce stage est la création d'un modèle de simulation adaptatif. Ce modèle devra ainsi permettre des changements de différentes natures sur le maillage concerné. Afin d'opérer ces changements, il est important de définir une méthode de prédiction donnant les informations nécessaires sur le moment et l'endroit des modifications. Intuitivement, il paraît utile de débiter la simulation avec un maillage simplifié, tant géométriquement que physiquement. Un maillage peu raffiné ou n'utilisant pas de loi de déformation assez réaliste peut induire des erreurs lors de la simulation. Ces erreurs, si elles sont détectées à l'avance, peuvent être corrigées avant qu'elles ne viennent perturber la simulation. Le gain de cette méthode est de n'utiliser que les ressources nécessaires afin d'obtenir une simulation d'une précision égale à celle d'un modèle non adaptatif.

5.1 Détermination des critères

La prédiction des erreurs commises durant la simulation est une partie très importante de nos travaux. Elle se traduit par l'utilisation de critères permettant

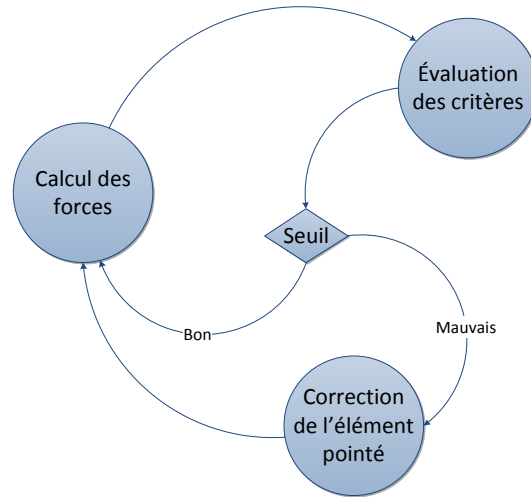


FIGURE 6. Représentation du concept de modèle de simulation adaptatif. À chaque pas de temps, on évalue l'erreur commise, si cela est nécessaire, le modèle est corrigé, puis la force en chaque point est calculée.

d'évaluer le risque qu'a la simulation de s'éloigner de la réalité. Un élément passant le seuil préétabli au regard d'un de ces critères entrainera une action visant à corriger la simulation. Au travers de l'état de l'art (§ 2.5), j'ai répertorié plusieurs critères de qualité de maillage et d'estimation d'erreurs.

La sélection, parmi la liste obtenue, des critères à utiliser au sein du modèle adaptatif est influencé par deux paramètres. D'abord, chaque critère se doit de fournir une évaluation cohérente, même si elle n'est pas totale, de la qualité de la simulation. Ensuite, pour que le gain de la méthode soit optimal, le critère doit être efficace et donc rapide à calculer. Le calcul de tous ces critères se fait lors de la simulation et ne doit pas freiner son déroulement.

Nous avons exploré deux pistes en choisissant, d'un côté, plusieurs critères géométriques, et un critère physique, de l'autre. Ces deux approches ont été adoptées afin d'obtenir la compréhension la plus complète possible des changements appliqués au maillage durant la simulation et ainsi mieux prédire les erreurs.

Nous avons retenu, en ce qui concerne les critères géométriques : le rapport sur la longueur des arêtes de l'élément, le rapport sur son volume, ainsi que le rapport du volume sur la longueur des arêtes (*aspect ratio*). Tous ces évaluateurs ont cela en commun qu'ils sont simples et rapides à calculer. Mais ils ont tous un sens bien différent.

Le rapport \mathcal{R}_{EL} est le maximum des rapports de la différence de longueur des arêtes d'un élément sur leurs longueurs initiales :

$$\mathcal{R}_{EL} = \max\left(\frac{|l_i^{initiale} - l_i^{actuelle}|}{l_i^{initiale}}\right) \quad (5.7)$$

où $l_i^{initiale}$ est la longueur initiale d'une arête i de l'élément et $l_i^{actuelle}$ est sa longueur actuelle.

Il peut alerter d'une élongation de l'élément, mais ne donne pas d'information sur son sens. L'élongation peut alors être anisotrope, dans le cas d'un étirement ou d'une compression, ce qui pourrait traduire un comportement normal de l'objet. Elle peut également être uniforme et révéler une augmentation de surface ou de volume. Le critère suivant est alors suffisant pour détecter ce cas.

Le rapport \mathcal{R}_V de la différence de volume ou surface de l'élément sur son volume ou sa surface initial(e) permet de déterminer lorsque le volume ou la surface augmente ou diminue :

$$\mathcal{R}_V = \frac{|v^{initial} - v^{actuel}|}{v^{initial}} \quad (5.8)$$

où $v^{initial}$ est le volume (3D) ou la surface (2D) initial(e) de l'élément et v^{actuel} est son volume ou sa surface actuel(le).

Il est admis que l'utilisation de lois de déformations linéaire entraîne, dans le cas d'une rotation, une augmentation non voulue du volume ou de la surface des éléments concernés. Cela en fait donc un critère utile pour ce modèle, afin de prévenir les limites d'un tel comportement.

Le rapport \mathcal{R}_{VL} , quant à lui, est une simple division du volume ou de la surface par la longueur moyenne des arêtes de l'élément :

$$\mathcal{R}_{VL} = \frac{v^{actuel}}{\bar{l}^3} \quad \mathcal{R}_{VLX} = 6\sqrt{2} \cdot v^{actuel} \cdot \frac{l^{harm}}{\bar{l}^4} \quad (5.9)$$

où \bar{l} est la longueur moyenne des arêtes de l'élément et l^{harm} en est la moyenne harmonique.

C'est le seul critère qui préfigure de la qualité géométrique de l'élément. Cette qualité est essentielle pour la précision de la simulation. Il donnera une bonne idée de l'aspect de l'élément et de sa régularité. Le rapport \mathcal{R}_{VLX} tiré de [WRK⁺10] a également été utilisé. Il s'agit d'une modification de \mathcal{R}_{VL} donnant de meilleurs résultats.

Du côté des critères physiques, il aurait semblé intéressant de s'appuyer sur les informations de stress, d'énergie de déformation mais également, et de manière à avoir un aperçu global, de champ de stress ou d'énergie. Seul le calcul du stress \mathcal{R}_S a été retenu. L'énergie, étant proportionnelle au stress, n'apporte aucune information supplémentaire et est plus coûteuse à déterminer. Le calcul global de ces deux grandeurs a été laissé à des travaux postérieurs.

$$\mathcal{R}_S = \frac{1}{v^{actuel}} \cdot \sum_{i=0}^{n_g} w_i \sum_{j=0}^n \Lambda_j(g_i) F_j \quad (5.10)$$

où n_g est le nombre de points de Gauss associés à l'élément, n est le nombre de sommets de l'élément, g_i et w_i sont le i -ème point de Gauss et son poids, et F_j est la force appliquée au sommet i .

Le stress \mathcal{R}_S d'un élément peut être très facilement calculé. Les w_i et les $A_j(g_i)$ peuvent être précalculés et ne changent pas pendant la simulation. Ce critère exprime l'intensité de la déformation subie par l'élément et permet donc de déterminer très précisément les zones de déformation de l'objet.

5.2 Mise en place des critères

L'implémentation de ces critères s'est effectuée au sein même du code pré-existant. Il a fallu les insérer au niveau du calcul des forces en chaque point afin de pouvoir facilement interagir avec le maillage. Chaque critère héritant de la même classe MQCriterion (Mesh Quality Criterion), il a été facile de mettre en place un objet CriteriaList permettant de réunir l'ensemble des critères choisis pour la simulation dans une unique collection.

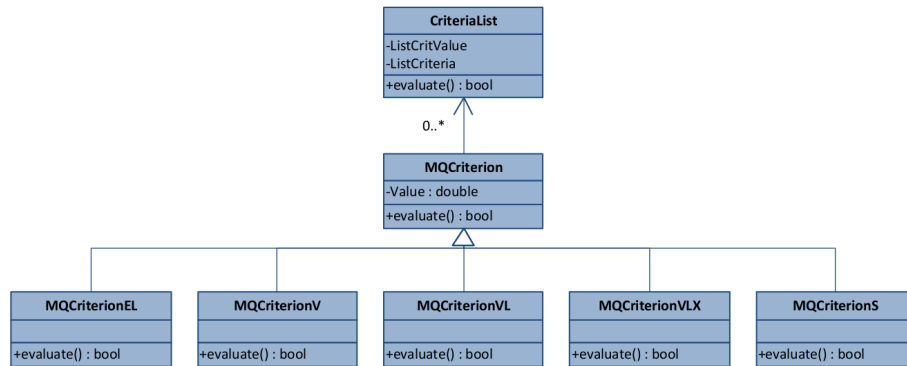


FIGURE 7. Diagramme de classe représentant le module d'évaluation d'erreur mis en place.

Chaque MQCriterion possède une méthode $evaluate(Element)$ qui dépend de l'élément passé en paramètre. Cette fonction renvoie vrai si le critère en question ne dépasse pas la limite indiquée dans le fichier de paramètre, faux sinon. La fonction $evaluate(Element)$ de CriteriaList se contente alors de faire un ET logique entre les différents critères afin de déterminer si l'élément doit être changé ou non.

Afin d'obtenir une visualisation enrichie de l'évolution des différents critères, l'instance de CriteriaList utilisée conserve une liste de la valeur maximum des critères appliqués à chaque élément pour chaque boucle de calcul des forces. Ainsi, on obtient un maillage coloré en fonction de l'erreur estimée. Les valeurs de la liste conservée sont par la suite normalisées. Cela permet d'avoir une transition

de la couleur d'un élément uniforme du vert, pour une qualité excellente, au rouge, pour une forte probabilité d'erreur, puis un passage soudain au bleu, pour indiquer qu'un changement a été opéré (Figure 8).

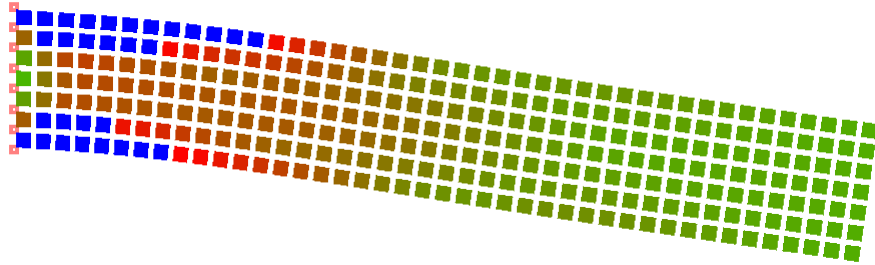


FIGURE 8. Simulation d'une poutre fixée sur son côté gauche et soumise à la gravité, enrichie des informations sur les valeurs du critère \mathcal{R}_{EL} . Une couleur verte indique que $\mathcal{R}_{EL} = 0$, une couleur rouge que $\mathcal{R}_{EL} = 1$ et une couleur bleu signale que la loi de comportement de l'élément est passée de Hooke à StVK.

Par contre, la normalisation du stress \mathcal{R}_S n'est pas optimale car il est très difficile de transformer son intervalle de définition en un intervalle $[0, 100]$ comme pour les autres critères. La raison de cette complication est le manque de référentiel associé à cette mesure.

Les MQCriteria, ainsi que la CriteriaList, ont été munis d'un chronomètre afin de pouvoir calculer leur temps d'exécution. Cette mesure permettra de juger si le critère est efficace compte tenu du gain de temps apporté. Toutefois, chaque calcul de critère est en complexité $O(n)$ où n est le nombre de sommets de l'élément. n étant faible, on admet que cette complexité est constante et donc que le nombre de sommet de l'élément n'influe pas sur le temps de calcul des critères.

5.3 Détermination des actions engendrées

Les critères de qualité de maillage et d'estimation d'erreur indiquent les éléments pouvant écarter la simulation de la réalité. Afin de remédier à cette déviation, il est possible d'agir sur le maillage de deux manières différentes.

La première méthode, la plus aisée, est d'agir physiquement sur l'élément pointé du doigt. En effet, comme décrit dans la partie 4.2, le calcul formel appliqué à la MMT rend possible le changement de loi de déformation d'un élément en temps réel indépendamment de ses voisins. Ce changement permet d'utiliser une loi de plus haut degré afin d'affiner les calculs et donc de réduire l'erreur commise.

La deuxième méthode est une réponse géométrique qui aura pour but de raffiner l'élément. La concentration de plusieurs éléments, plus petits, augmen-

tera localement la précision de la simulation. Cette solution est néanmoins plus complexe car le raffinement de l'élément seul entrainerait une non conformité du maillage due au non partage des nouveaux sommets créés par les éléments voisins (voir Figure 4). Il est donc impératif de propager le raffinement sur le voisinage de la manière la plus locale possible.

Les travaux de Lobos *et al.* [L⁺12] vont en ce sens. Leur implémentation de patrons de raffinement serait utile afin de pouvoir raffiner un élément quelconque en éléments de différentes géométries. La conservation de la conformité du maillage est un aspect très important qui pourrait être ainsi respecté.

La difficulté se trouve dans le choix des actions à réaliser. Il est alors important de se pencher sur le sens donné par le dépassement de chaque critère. \mathcal{R}_V indique une augmentation de volume très anormale dans le cas de matériaux incompressibles ou quasi incompressibles comme les organes humains (Figure 9). Cela exprime une défaillance d'une loi de déformation linéaire lors d'une rotation. L'augmentation du degré de cette loi est donc préférée.

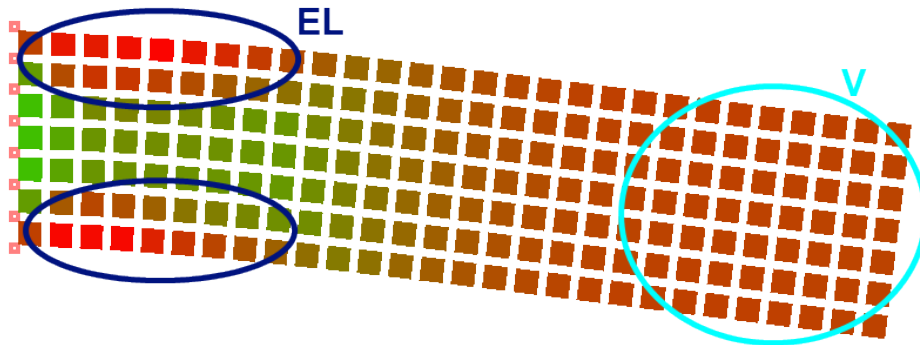


FIGURE 9. Une poutre fixée sur son côté gauche et soumise à la gravité, évaluée par \mathcal{R}_{EL} et \mathcal{R}_V .

\mathcal{R}_{VL} décrit la qualité de l'élément. Un élément de mauvaise qualité ne nécessitera pas de changement de loi car, généralement, cela n'améliorera pas sa qualité. Un raffinement de l'élément en plus petits éléments plus réguliers paraît plus indiqué. Ce critère n'est pas utile dans le cas d'une poutre soumise à la gravité car dans ce cas les éléments restent globalement de bonne qualité. Il serait plus indiqué lors de déformations plus complexes.

\mathcal{R}_S , quant à lui, permet de connaître les zones de déformations (Figure 10). Ces zones s'apparentent à des RI susceptibles de devoir apporter une précision accrue. Ce type de précision sera plus logiquement amené par une solution géométrique. Le sens de \mathcal{R}_{EL} est plus flou. Il est possible qu'il faille l'articuler avec un autre critère pour pouvoir tirer les bonnes conclusions. Ce raisonnement donne lieu à une réflexion sur la possible combinaison de critères et son apport vis-à-vis du sens donné à la déformation.

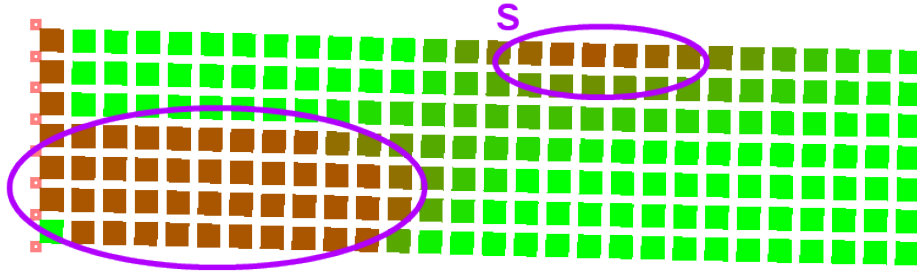


FIGURE 10. Une poutre fixée sur son côté gauche et soumise à la gravité, évaluée par \mathcal{R}_S .

Dans l'état actuel des choses, chaque dépassement de critère conduit à une augmentation du degré de la loi de déformation pour l'élément concerné. En pratique, la simulation débute avec un ensemble d'éléments soumis à la loi de Hooke, qui est une loi élastique linéaire. L'augmentation de cette loi se traduit par le remplacement de celle-ci par la formulation de StVK appliquée aux matériaux hyperélastiques. La déformation de ce type de matériau n'est plus linéaire en fonction de la force exercée.

5.4 Mise en place des actions

Le changement de la loi de déformation associée à un élément est possible à la seule condition de disposer préalablement des équations concernant l'entité LES. Il faut donc prévoir à l'avance les éléments et les lois qui seront utilisées et générer en conséquence les équations.

Les équations générées sont écrites sous la forme de classes C++ qui permettent, une fois compilées, d'être correctement liées au programme. Si les équations sont disponibles, intervertir la loi d'un élément équivaut à changer le pointeur de fonction de l'ancienne loi vers la nouvelle. L'opération est simple et ne nécessite que quelques mises à jour de la structure, notamment lorsque l'entité LES voulue n'a pas encore été créée.

La manipulation provoque une discontinuité dans le calcul de la force. Généralement, l'irrégularité est imperceptible mais, dans le cas d'un matériau très mou, des soubresauts peuvent apparaître. La mise en place d'une transition douce entre les deux lois serait la solution à ce problème. Pour cela, une interpolation linéaire pourrait suffire.

L'implémentation du raffinement géométrique des éléments n'est pas abordée dans le cadre de ce travail, mais certaines pistes sont déjà données. En effet, la possibilité d'ajouter de nouveaux éléments pendant la simulation est actuellement discutée. Théoriquement la MMT autorise ce type de changement topologique. Néanmoins le raffinement en éléments quelconques peut paraître moins accessible. Quoiqu'il en soit, le principal prérequis à cette opération est la gestion de maillages mixtes (voir aussi § 4.3).

5.5 Création de maillages mixtes

Afin de pouvoir raffiner à volonté le maillage au cours de la simulation, nous avons pris le parti de travailler avec des maillages mixtes. Cette décision a été motivée par un constat simple. Comme énoncé dans le paragraphe 4.3, le raffinement optimal d'une partie du maillage s'accompagne automatiquement de l'apparition de plus petits éléments de types géométriques différents.

L'un de mes objectifs fut alors d'interagir avec les travaux décrits dans [L⁺12] afin de comprendre et de maîtriser la méthode de génération de maillage énoncée. La possession d'un maillage mixte à l'état initial de la simulation n'est pas une obligation. Cela permet seulement de disposer d'un maillage de bonne qualité. Néanmoins, la génération d'un tel type de maillage a permis de valider la partie 5.6.

Ainsi, ces travaux m'ont permis de créer, à partir d'un maillage surfacique fermé, un maillage volumique mixte de très bonne qualité. À ce moment là, la résolution de la solution produite était uniforme, mais celle-ci a évolué en une résolution adaptative dépendante principalement des interfaces. Cet état convient particulièrement bien à la simulation, au moins dans son état initial, car cela donne une bonne précision aux frontières et prévient les interactions extérieures tout en économisant le nombre d'éléments.

5.6 Adaptation de la MMT aux maillages mixtes

La MMT adaptée par [FZJM12] donne les outils nécessaires à la simulation de maillages mixtes. Néanmoins, la simulation simultanée de différents types d'éléments ne peut être accomplie sans la génération des équations décrivant le comportement de tels éléments selon les lois de déformation associées.

Le modèle de simulation utilisé ne permettait pas, en l'état, de gérer certains éléments. Ceux-ci étant essentiels dans notre démarche, il a été nécessaire de les introduire dans le modèle. Pour ce faire, il faut effectuer un enchaînement d'actions obligatoires (Figure 11). Tout d'abord, il est nécessaire d'ajouter une nouvelle classe associée au futur élément ou simplement compléter une préexistante (par exemple pour créer un triangle 6-nœuds alors que le triangle 3-nœuds se trouve déjà implémenté).

Après avoir mis à jour le modèle en tenant compte de cette nouvelle classe, il est important de générer les équations qui détermineront son comportement lors de la simulation. Cela commence par décrire l'élément de référence (Figure 11-a). En effet, c'est cet élément qui sera pris en compte par la fonction de forme. Il est donc utile de reporter les coordonnées de ses sommets ou de ses nœuds d'interpolation (points de Gauss) accompagnés de leurs poids. Les points de Gauss permettront d'obtenir une interpolation plus ou moins précise, selon leur nombre, de la fonction de forme. Pour certains éléments complexes, ces équations peuvent devenir impossibles à gérer sans l'aide de ces points de Gauss. Ils sont essentiels car leur utilisation permet de réduire significativement la taille des équations produites.

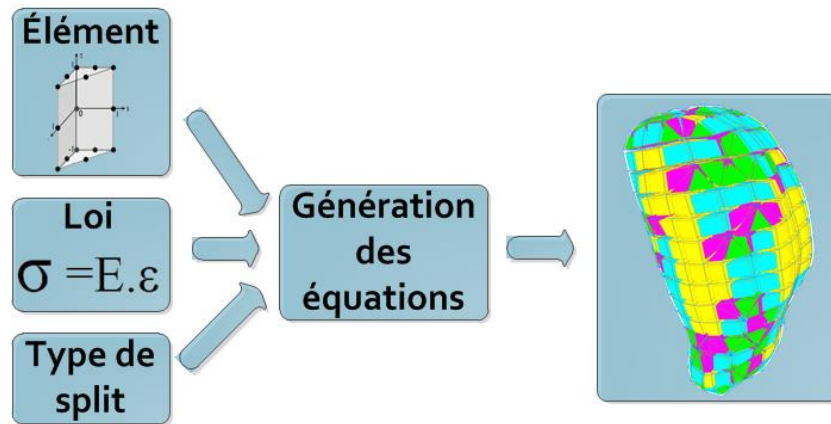


FIGURE 11. Schéma représentant le processus d'insertion d'un nouveau type d'élément au sein du modèle afin de pouvoir gérer son comportement lors de la simulation. Les modules en entrée de cette procédure sont a) l'élément, b) la loi et c) le type de séparation.

Pour finir, la génération de la fonction de forme puis des équations décrivant le comportement de l'élément selon une loi donnée (Figure 11-b) clôt le processus. Une fois cette procédure menée à terme, le modèle est en mesure de gérer ce couple loi-élément. Pour pouvoir déformer l'élément avec une autre loi de comportement, il suffit de répéter la dernière étape avec la relation voulue.

Le calcul formel génère des formules démesurées (~ 500 Mo pour les équations concernant le prisme) qui sont liées au programme (Annexe 8) et doivent ensuite être compilées. Généralement, ces équations sont trop longues et ne peuvent être prises en charge par le compilateur. L'astuce consiste alors à séparer les calculs (sous forme d'une longue suite d'addition) en termes. Cette séparation peut s'appliquer sur plusieurs parties, et son type doit donc être mentionné au même moment que la relation de déformation (Figure 11-c). Pour autoriser l'utilisation des maillages mixtes, il nous a fallu ajouter au modèle la gestion des prismes et des pyramides, celles des tétraèdres et des hexaèdres étant déjà implémentées. En suivant la procédure décrite, il est théoriquement possible d'ajouter n'importe quel élément. La limite pratique, rencontrée lors de nos travaux, est la taille des équations engendrées qui est proportionnelle à la complexité de l'élément.

À ce stade, il est possible de modéliser le mouvement d'un objet représenté par un maillage mixte. Les outils, au niveau de la géométrie du maillage, sont ainsi mis à disposition pour la suite des travaux concernant l'adaptation du modèle au cours de la simulation.

6 Résultats

Les résultats que nous allons vous présenter ont été obtenus avec une implémentation des critères et des actions de réponse réalisée uniquement sur CPU

qui n'est, de ce fait, pas optimale en temps. Les simulations ont été effectuées au sein de la plateforme SOFA mise à disposition pour ce projet.

L'objectif du cheminement entrepris lors de ce stage est de réduire significativement le rapport vitesse/précision. Le modèle adaptatif mis en place ici doit, pour cela, vérifier deux points. Le premier est la diminution du temps de la simulation à paramètres égaux. Le deuxième est le maintien du réalisme physique.

6.1 Gain de vitesse

Nous montrons, avec le tableau 1, les temps de simulation obtenus lors de nos expérimentations. On peut y retrouver les performances de la MMT dans différents contextes et à différentes résolutions. Tous les tests présentés ici ont été effectués sur des poutres 2D constituées de quadrilatères (voir un exemple Annexe 8).

| | 600 éléments | | | 300 éléments | | |
|----------------------------|--------------|-------|-------|--------------|-------|-------|
| Hooke | 0.102 | | | 0.031 | | |
| Critère \mathcal{R}_{EL} | 2.690 | 0.561 | 0.125 | 1.028 | 0.212 | 0.048 |
| Critère \mathcal{R}_V | 4.093 | 1.396 | 0.190 | 2.143 | 0.753 | 0.110 |
| Critère \mathcal{R}_S | 8.668 | 8.058 | 7.067 | - | - | - |
| StVK | 16.273 | | | 9.011 | | |

TABLE 1. Tableau des temps obtenus pendant expérimentation. En première et en dernière lignes, les temps moyens d'un pas de temps lors d'une simulation sans critère ni action avec les lois de Hooke et de StVK. Ensuite, les temps acquis pour \mathcal{R}_{EL} et \mathcal{R}_V avec les valeurs 1.5, 3.0 et 6.0, et pour \mathcal{R}_S avec les valeurs 15, 30 et 60.

L'idée qu'une simulation utilisant un modèle adaptatif est plus lente qu'une simulation utilisant uniquement une loi de Hooke, mais plus rapide qu'une avec une loi de StVK, plus complexe, est bien maintenue. En effet, nous arrivons à diminuer significativement le pas de temps moyen de la simulation, même avec des valeurs de seuil associés aux critères très bas. Le gain de temps paraît proportionnel à la résolution. Il reste au moins deux fois plus rapide quel que soit le niveau de détail voulu.

6.2 Maintien du réalisme physique

Le modèle masse-tenseur que nous proposons est principalement à l'intention du domaine médical. Il convient donc de conserver une très grande précision dans les simulations réalisées. La figure 12 montre les résultats acquis à l'aide de ce modèle. On peut remarquer que les différents critères donnent au réalisme de la simulation différents comportements. Chacun possède un profil particulier. Ce profil définit clairement l'intervalle de seuillage optimal utilisable, pour chaque critère, lors de la simulation. La courbe décrivant le comportement de \mathcal{R}_{EL} est

légèrement chaotique après les valeurs de seuil 3 et 6. Le manque de transition douce lors du changement de loi de déformation peut expliquer ce bilan.

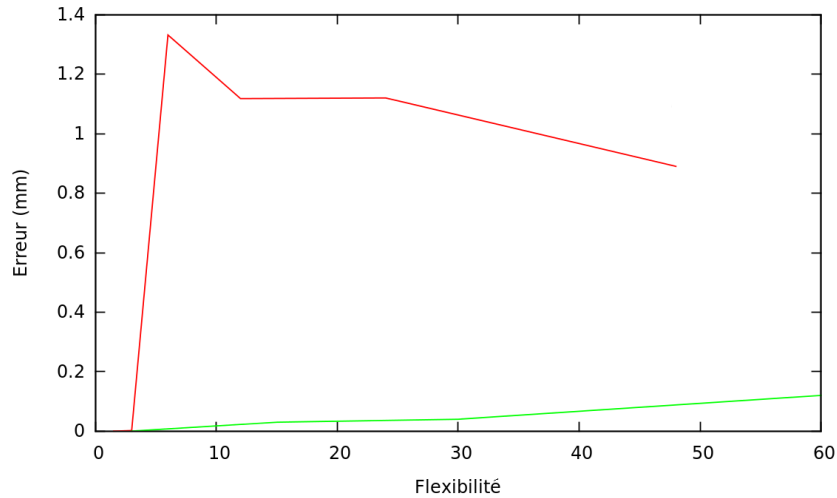


FIGURE 12. Graphique représentant les courbes d'erreur commises par rapport à une simulation réalisée sans critère ni action avec la loi de StVK. La courbe rouge (supérieure) est celle obtenue en utilisant le critère \mathcal{R}_{EL} à différentes valeurs de seuil. La verte (courbe inférieure) est obtenue avec le critère \mathcal{R}_S .

La validation du modèle, en ce qui concerne le gain de temps et le maintien du réalisme physique, est partiellement établie par ces résultats portant sur la simulation d'une poutre 2D. Des résultats similaires ont été obtenus lors de simulations 3D de poutres constituées de tétraèdres, d'hexaèdres et d'un assemblage des deux.

7 Conclusion

Nous avons introduit un modèle basé masse-tenseur adaptatif permettant de simuler des représentations en maillages mixtes d'objets déformables. L'approche entreprise au cours de ce stage s'est avérée prometteuse. En effet, avec des critères simples, tels que l'aspect ratio ou encore le stress d'un élément, il est possible de diminuer le temps de calcul lors d'une simulation. Les résultats montrent également que la méthode est toujours applicable au monde de la médecine grâce à la conservation du réalisme physique avec l'utilisation d'intervalles de seuillage valides.

La mise en place de l'adaptation dynamique des éléments du maillage permet de profiter au maximum des moyens fournis par l'extension de la MMT aux calculs formels. Ces travaux ont prouvé la faisabilité et l'intérêt d'une telle

approche. Ils ouvrent ainsi de larges perspectives pour la MMT, en particulier, et le champ de la simulation adaptative, en général.

Plusieurs points restent néanmoins à traiter lors de travaux futurs. Tout d’abord, la gestion du raffinement géométrique est essentielle afin d’obtenir un modèle adaptatif complet et pourrait donner de bien meilleurs résultats. Une implémentation en deux dimensions, utilisant des patrons de raffinement simples, sera prochainement réalisée afin d’évaluer la pertinence du raffinement géométrique dans le modèle. Les opérations inverses (diminution du degré de la loi, simplification) pourront également être réfléchies. Enfin, l’implémentation de la méthode complète sur GPU pourra donner lieu à des simulations d’objets déformables d’une résolution adaptée au domaine médical en temps réel.

8 Remerciements

Je tiens à remercier chaleureusement Fabrice Jaillet pour son accompagnement et son attention durant ces cinq mois de stage. Il a su me guider naturellement vers le monde de la simulation biomécanique et plus généralement vers celui de la recherche informatique. Un grand merci à Xavier Faure pour son secours et sa bonne humeur qui m’a permis d’endurer les moments délicats. Pour finir, je remercie Claudio Lobos, Elsa Fléchon et Quentin Momal pour leur participation fructueuse à ce stage.

Références

- [BA76] Ivo Babuška and A Kadir Aziz. On the angle condition in the finite element method. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 13(2) :214–226, 1976.
- [Ber99] Martin Berzins. Mesh quality : a function of geometry, error estimates or both? *Engineering with Computers*, 15(3) :236–247, 1999.
- [BHW94] David E Breen, Donald H House, and Michael J Wozny. Predicting the drape of woven cloth using interacting particles. In *Proceedings of the 21st annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 365–372. ACM, 1994.
- [BN95] Morten Bro-Nielsen. Modelling elasticity in solids using active cubes—application to simulated operations. In *Computer Vision, Virtual Reality and Robotics in Medicine*, pages 533–541. Springer, 1995.
- [BNC96] Morten Bro-Nielsen and Stephane Cotin. Real-time volumetric deformable models for surgery simulation using finite elements and condensation. In *Computer graphics forum*, volume 15, pages 57–66. Wiley Online Library, 1996.
- [BWHT07] Adam W Bargteil, Chris Wojtan, Jessica K Hodgins, and Greg Turk. A finite element method for animating large viscoplastic flow. In *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, volume 26, page 16. ACM, 2007.
- [CDA⁺98] Stéphane Cotin, Hervé Delingette, Nicholas Ayache, et al. Efficient linear elastic models of soft tissues for real-time surgery simulation. 1998.

- [CDA99] Stéphane Cotin, Hervé Delingette, and Nicholas Ayache. Real-time elastic deformations of soft tissues for surgery simulation. *Visualization and Computer Graphics, IEEE Transactions on*, 5(1) :62–73, 1999.
- [CEO⁺93] Steven A Cover, Norberto F Ezquerra, James F O’Brien, Richard Rowe, Thomas Gadacz, and Ellen Palm. Interactively deformable models for surgery simulation. *Computer Graphics and Applications, IEEE*, 13(6) :68–75, 1993.
- [FZJM12] Xavier Faure, Florence Zara, Fabrice Jaillet, and Jean-Michel Moreau. An implicit tensor-mass solver on the gpu for soft bodies simulation. In *Workshop on Virtual Reality Interaction and Physical Simulation*, pages 1–10. The Eurographics Association, 2012.
- [Gib97] Sarah F Gibson. 3d chainmail : a fast algorithm for deforming volumetric objects. In *Proceedings of the 1997 symposium on Interactive 3D graphics*, pages 149–ff. ACM, 1997.
- [HCF93] Nancy Hitschfeld, Paolo Conti, and Wolfgang Fichtner. Mixed element trees : a generalization of modified octrees for the generation of meshes for the simulation of complex 3-d semiconductor device structures. *Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, IEEE Transactions on*, 12(11) :1714–1725, 1993.
- [Knu01] Patrick M Knupp. Algebraic mesh quality metrics. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 23(1) :193–218, 2001.
- [KTY09] Ryo Kikuuwe, Hiroaki Tabuchi, and Motoji Yamamoto. An edge-based computationally efficient formulation of saint venant-kirchhoff tetrahedral finite elements. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 28(1) :8, 2009.
- [L⁺12] Claudio Lobos et al. A set of mixed-elements patterns for domain boundary approximation in hexahedral meshes. *Studies in health technology and informatics*, 184 :268–272, 2012.
- [LBHP08] Claudio Lobos, Marek Bucki, Nancy Hitschfeld, and Yohan Payan. Mixed-element mesh for an intra-operative modeling of the brain tumor extraction. In *Proceedings of the 16th International Meshing Roundtable*, pages 387–404. Springer, 2008.
- [LPJS⁺07] Mark Lodge, Madelon Pijls-Johannesma, Lisa Stirk, Alastair J. Munro, Dirk De Ruysscher, and Tom Jefferson. A systematic literature review of the clinical and cost-effectiveness of hadron therapy in cancer. *Radiotherapy and Oncology*, 83(2) :110 – 122, 2007.
- [NMK⁺06] Andrew Nealen, Matthias Müller, Richard Keiser, Eddy Boxerman, and Mark Carlson. Physically based deformable models in computer graphics. In *Computer Graphics Forum*, volume 25, pages 809–836. Wiley Online Library, 2006.
- [PDA02] Guillaume Picinbono, Hervé Delingette, and Nicholas Ayache. Modèle déformable élastique non linéaire pour la simulation de chirurgie en temps réel. *Comptes Rendus Biologies*, 325(4) :335–344, 2002.
- [Saa13] Saara. Saara - simulation, analyse, animation pour la réalité augmentée. <http://liris.cnrs.fr/~saara/>, March 2013.
- [Sch03] Jean-Marc Schwartz. *Calcul rapide de forces et de déformations mécaniques non-linéaires et visco-élastiques pour la simulation de chirurgie*. PhD thesis, Université Laval, 2003.

- [SLB⁺12] Jacques Saadé, Hamid Ladjal, Shariat Behzad, M Beuve, Joseph Azencot, et al. Modélisation biomécanique du diaphragme humain : du ct-4d au modèle du mouvement. In *Actes de la conférence RFIA 2012*, 2012.
- [Sof11] Sofa. Sofa - simulation open framework architecture. <http://www.sofa-framework.org/>, December 2011.
- [TPBF87] Demetri Terzopoulos, John Platt, Alan Barr, and Kurt Fleischer. Elastically deformable models. *SIGGRAPH Comput. Graph.*, 21(4) :205–214, August 1987.
- [WDGT01] Xunlei Wu, Michael S Downes, Tolga Goktekin, and Frank Tendick. Adaptive nonlinear finite elements for deformable body simulation using dynamic progressive meshes. In *Computer Graphics Forum*, volume 20, pages 349–358. Wiley Online Library, 2001.
- [WRK⁺10] Martin Wicke, Daniel Ritchie, Bryan M Klingner, Sebastian Burke, Jonathan R Shewchuk, and James F O’Brien. Dynamic local remeshing for elastoplastic simulation. *ACM Transactions on graphics (TOG)*, 29(4) :49, 2010.

Annexe A

```
(D[0]*(D[1]*(D[2]*u[3][0]+D[3]*u[2][0]+D[4]*u[1][0]+D[4]*(-1.0)*u[0][0])
+D[5]*powI((D[2]*u[3][0]+D[3]*u[2][0]+D[4]*u[1][0]+D[4]*(-1.0)*u[0][0]),
2.0)+D[6]*powI((D[4]*u[3][0]+D[3]*u[2][0]+D[2]*u[1][0]+D[4]*(-1.0)*u[0][
0]),2.0)+D[7]*(D[4]*u[3][1]+D[3]*u[2][1]+D[2]*u[1][1]+D[4]*(-1.0)*u[0][1]
)+D[5]*powI((D[2]*u[3][1]+D[3]*u[2][1]+D[4]*u[1][1]+D[4]*(-1.0)*u[0][1])
,2.0)+D[6]*powI((D[4]*u[3][1]+D[3]*u[2][1]+D[2]*u[1][1]+D[4]*(-1.0)*u[0][
1]),2.0))*(D[8]+D[9]*(D[2]*u[3][0]+D[3]*u[2][0]+D[4]*u[1][0]+D[4]*(-1.0)
*u[0][0])+D[10]*(D[4]*u[3][0]+D[3]*u[2][0]+D[2]*u[1][0]+D[4]*(-1.0)*u[0][
0]))+D[0]*(D[1]*(D[2]*u[3][0]+D[3]*u[2][0]+D[4]*u[1][0]+D[4]*(-1.0)*u[0][
0])+D[5]*powI((D[2]*u[3][0]+D[3]*u[2][0]+D[4]*u[1][0]+D[4]*(-1.0)*u[0][
0]),2.0)+D[6]*powI((D[3]*u[3][0]+D[4]*u[2][0]+D[4]*(-1.0)*u[1][0]+D[2]*u[
0][0]),2.0)+D[7]*(D[3]*u[3][1]+D[4]*u[2][1]+D[4]*(-1.0)*u[1][1]+D[2]*u[
0][1])+D[5]*powI((D[2]*u[3][1]+D[3]*u[2][1]+D[4]*u[1][1]+D[4]*(-1.0)*u[0][
1]),2.0)+D[6]*powI((D[3]*u[3][1]+D[4]*u[2][1]+D[4]*(-1.0)*u[1][1]+D[2]*u[
0][1]),2.0))*(D[8]+D[9]*(D[2]*u[3][0]+D[3]*u[2][0]+D[4]*u[1][0]+D[4]*(-1.
0)*u[0][0])+D[11]*(D[3]*u[3][0]+D[4]*u[2][0]+D[4]*(-1.0)*u[1][0]+D[2]*u[
0][0]))+D[0]*(D[1]*(D[4]*(-1.0)*u[3][0]+D[4]*u[2][0]+D[3]*u[1][0]+D[2]*u[
0][0])+D[5]*powI((D[4]*(-1.0)*u[3][0]+D[4]*u[2][0]+D[3]*u[1][0]+D[2]*u[
0][0]),2.0)+D[6]*powI((D[3]*u[3][0]+D[4]*u[2][0]+D[4]*(-1.0)*u[1][0]+D[
2]*u[0][0]),2.0)+D[7]*(D[3]*u[3][1]+D[4]*u[2][1]+D[4]*(-1.0)*u[1][1]+D[2]
)*u[0][1])+D[5]*powI((D[4]*(-1.0)*u[3][1]+D[4]*u[2][1]+D[3]*u[1][1]+D[2]*u[
0][1]),2.0)+D[6]*powI((D[3]*u[3][1]+D[4]*u[2][1]+D[4]*(-1.0)*u[1][1]+D[2]
)*u[0][1]),2.0))*(D[12]+D[13]*(D[4]*(-1.0)*u[3][0]+D[4]*u[2][0]+D[3]*u[1][
0]+D[2]*u[0][0])+D[11]*(D[3]*u[3][0]+D[4]*u[2][0]+D[4]*(-1.0)*u[1][0]+
D[2]*u[0][0]))+D[0]*(D[1]*(D[4]*(-1.0)*u[3][0]+D[4]*u[2][0]+D[3]*u[1][0]+
D[2]*u[0][0])+D[5]*powI((D[4]*(-1.0)*u[3][0]+D[4]*u[2][0]+D[3]*u[1][0]+
D[2]*u[0][0]),2.0)+D[6]*powI((D[4]*u[3][0]+D[3]*u[2][0]+D[2]*u[1][0]+D[4]
)*(-1.0)*u[0][0]),2.0)+D[7]*(D[4]*u[3][1]+D[3]*u[2][1]+D[2]*u[1][1]+D[4]
)*(-1.0)*u[0][1])+D[5]*powI((D[4]*(-1.0)*u[3][1]+D[4]*u[2][1]+D[3]*u[1][1]
)+D[2]*u[0][1]),2.0)+D[6]*powI((D[4]*u[3][1]+D[3]*u[2][1]+D[2]*u[1][1]+D[4]
)*(-1.0)*u[0][1]),2.0))*(D[12]+D[13]*(D[4]*(-1.0)*u[3][0]+D[4]*u[2][0]+D[
3]*u[1][0]+D[2]*u[0][0])+D[10]*(D[4]*u[3][0]+D[3]*u[2][0]+D[2]*u[1][0]+
D[4]*(-1.0)*u[0][0]))
```

FIGURE 13. Exemple partiel des équations générées pour déterminer le comportement d'un quadrilatère soumis à la loi de StVK. Ce code est tiré du fichier "FSaintVenant-Quad4N2DI4NoSplitForce0C0_00.h" (SaintVenant = loi de déformation, Quad = type d'élément, 4N = 4 sommets, 2D = 2 dimensions, I4 = 4 nœuds d'interpolation, NoSplitForce = type de séparation et 0C0_00 = numéro du fichier source).

Annexe B

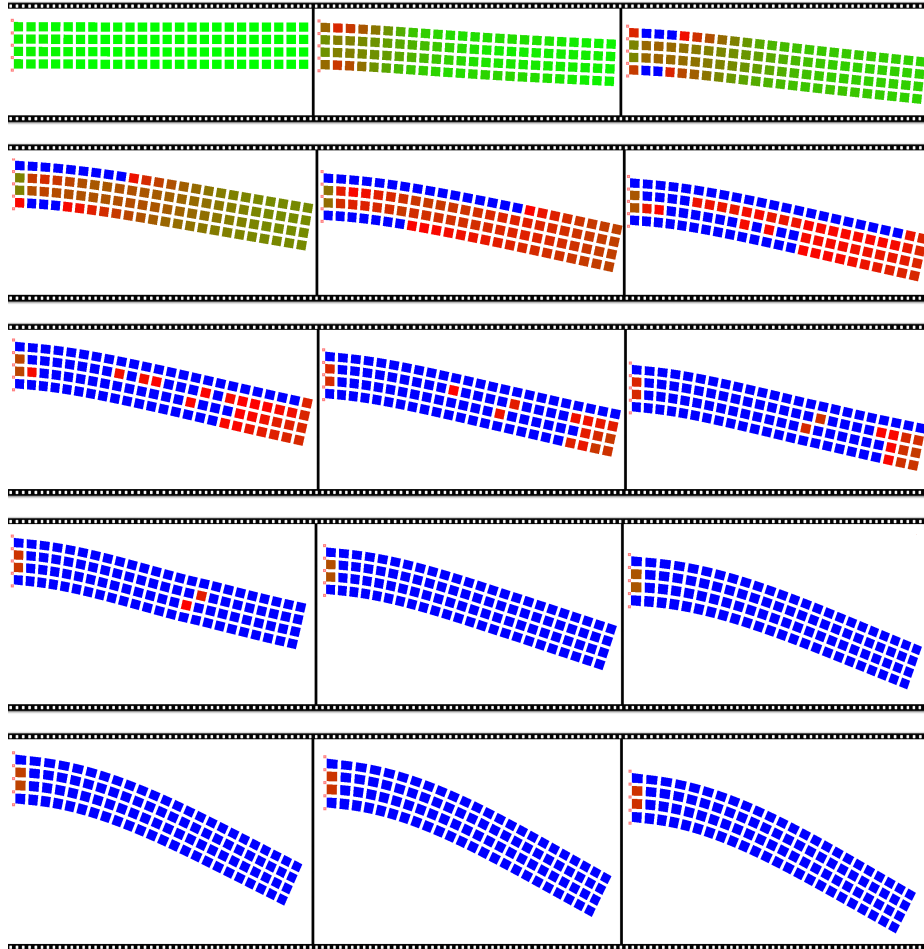


FIGURE 14. Déroulement de la simulation d'une poutre fixée sur son côté gauche et soumise à la gravité, enrichie des informations sur les valeurs du critère \mathcal{R}_{EL} .