Examen LIFLC - Logique classique - session 1 - 8 janvier 2017
Durée : 1h
Documents autorisés

**Numéro de copie :**

**Il faut rendre ces feuilles en les glissant dans votre copie anonyme.** Ne pas les utiliser comme brouillon. Ne pas enlever l'agrafe. Les réponses sont à donner sur ces feuilles, pas dans la copie. Remplir le champ ci-dessus avec le *numéro de la copie* dans laquelle vous allez la glisser. Remplir la partie d'anonymat de la copie, puis coller le coin (en humidifiant le bord pour activer la colle). Le barème est donné à titre indicatif.

## Exercice 1: Formules propositionnelles (5 points)

On considère des formules propositionnelles constituées uniquement à partir des connecteurs $\wedge$ et $\vee$, et des variables propositionnelles. Dans cet exercice, de telles formules seront appelées formules *positives*.

1. Montrer, par induction sur les formules, que pour toute formule positive $A$, il existe une interprétation $I$, telle que $[A]_I = 1$. On prendra soin d'exhiber $I$ et d'expliciter l'hypothèse d'induction pour chaque cas.

2. Donner une interprétation $I'$ telle que $[A]_{I'} = 0$ pour toute formule positive $A$ (il n'est pas demandé de démontrer que votre interprétation $I'$ convient).

3. Conclure sur la validité et la satisfiabilité des formules positives.

## Exercice 2: Du français à la formule (6 points)

Soit la signature suivante :

— pas de constantes (*i.e.* $\mathcal{C} = \emptyset$)

— pas de symboles de fonctions (*i.e.* $\mathcal{F} = \emptyset$)

— symboles de prédicats : $P = \{\texttt{sport}/1, \texttt{cinema}/1, \texttt{infos}/1, \texttt{generaliste}/1, \texttt{memeBouquet}/2, \texttt{memeGroupe}/2\}$

On considère une offre de chaînes de télévision comme interprétation de cette signature. L'univers est composé des chaînes de télévisions. Les prédicats `sport/1`, `cinema/1`, `infos/1`, `generaliste/1` indiquent le type d'une chaîne. Le prédicat `memeBouquet/2` indique qu'un bouquet contient les deux chaînes passées en argument. Le prédicat `memeGroupe/2` indique que deux chaînes font partie du même groupe de médias.

Traduire, en s'appuyant le cas échéant sur l'interprétation précédente, les énoncés suivants en formules de logique du premier ordre (attention, les bouquets et les groupes ne sont pas des objets de l'univers) :

1. On peut trouver un bouquet qui contient des chaînes de sport et de cinéma.

2. Les chaînes d'informations sont toutes dans un même bouquet.

3. Il est possible de trouver deux chaînes du même bouquet ne faisant pas partie d'un même groupe.

4. La relation `memeGroupe`/2 est symétrique et transitive.

5. Il est possible de trouver trois chaînes telles que les deux premières sont dans un premier bouquet, les deux dernières dans un second bouquet, mais qu'il n'existe pas de bouquet comprenant la première et la troisième.

6. Il existe une unique chaîne qui n'appartient à aucun bouquet.

## Exercice 3: Composition de substitutions (5 points)

Dans cet exercice, on considère la signature suivante :

— Constantes : $\mathcal{C} = \{\mathtt{a}\}$

— Symboles de fonction : $\mathcal{F} = \{\mathtt{f}/2\}$

Soient deux substitutions $\sigma_1$ et $\sigma_2$. On définit $\sigma_{1,2}$ comme suit :

— $\mathit{dom}(\sigma_{1,2}) = \mathit{dom}(\sigma_1) \cup \mathit{dom}(\sigma_2)$.

— Si $x \in \mathit{dom}(\sigma_1)$ alors $\sigma_{1,2}(x) = (\sigma_1(x))\sigma_2$ (*i.e.* l'application de $\sigma_2$ sur le terme $\sigma_1(x)$).

— Si $x \in \mathit{dom}(\sigma_2) \setminus \mathit{dom}(\sigma_1)$ alors $\sigma_{1,2}(x) = \sigma_2(x)$.

1. Donner la définition inductive de l'application $t\sigma$ d'une substitution $\sigma$ sur un terme $t$. On donnera une définition spécialisée pour la signature ci-dessus.

2. Montrer par induction sur $t$ que $(t\sigma_1)\sigma_2 = t\sigma_{1,2}$. On prendra soin d'expliciter la/les hypothèses d'induction.

## Exercice 4: Coq (4 points)

Cocher les cases appropriées pour répondre aux questions suivantes :

1. On considère l'état suivant lors de l'exécution d'une preuve Coq :

```
P : Prop
============================
forall Q : Prop, P -> Q \/ P
```

Quelle instruction/tactique Coq permet d'avancer dans la preuve ?

☐ `intro.` ☐ `assumption.`

☐ `apply P.` ☐ `destruct P.`

2. On considère l'état suivant lors de l'exécution d'une preuve Coq :

```
P, Q : Prop
H : P
============================
Q \/ P
```

Quelle instruction/tactique Coq permet d'avancer dans la preuve ?

- ☐ `destruct P.`
- ☐ `assumption.`
- ☐ `right.`
- ☐ `elim P.`

3. On considère l'état suivant lors de l'exécution d'une preuve Coq :

```
n, m : nat
============================
S n + m = S (n + m)
```

Quelle instruction/tactique Coq permet d'avancer dans la preuve ?

- ☐ `left.`
- ☐ `unfold S.`
- ☐ `apply n.`
- ☐ `induction n.`

4. On considère l'état suivant lors de l'exécution d'une preuve Coq :

```
n, m : nat
IHn : n + S m = S (n + m)
============================
S (n + S m) = S (S (n + m))
```

Quelle instruction/tactique Coq permet d'avancer dans la preuve ?

- ☐ `intro.`
- ☐ `assumption.`
- ☐ `rewrite IHn.`
- ☐ `right.`