LIFLC – Logique classique
TD5 – Termes

Licence informatique UCBL – Automne 2018–2019

Les (parties d') exercices noté(e)s avec † sont plus difficiles.

On considère la signature des termes de l'arithmétique de Peano :
- $\mathcal{C}_{peano} = \{zero\}$
- $\mathcal{F}_{peano} = \{succ/1, plus/2, mult/2\}$

Exercice 1 : Structure de termes

Dire, parmi les suites de symboles suivantes, celles qui sont des termes puis donner leur arbre de syntaxe abstraite :

1. $plus(x, zero)$
2. $plus(succ, y)$
3. $plus(mult(x, y), zero)$
4. $plus(succ(plus(x)), y)$
5. $mult(y, plus(x, succ(mult(zero, y))))$

Exercice 2 : Application de substitution

Soient les substitutions suivantes :
- $\sigma_1 = [x := succ(y), z := plus(zero, y)]$
- $\sigma_2 = [x := zero, z := plus(x, y)]$

Appliquer ces substitutions sur chacun des termes suivants :

1. $mult(x, succ(zero))$
2. $plus(x, mult(y, z))$

Exercice 3 : Filtrage de motif

Soient les motifs suivants :

$m1 = mult(x, succ(y))$

$m2 = mult(plus(x, y), zero)$

$m3 = mult(plus(x, y), x)$

Pour chacun des termes suivants, dire s'il correspond aux motifs ci-dessus. Si oui, donner la substitution correspondante :

1. $mult(zero, succ(zero))$
2. $mult(u, v)$
3. $mult(plus(zero, succ(u)), zero)$
4. $mult(plus(zero, u), u)$

Exercice 4 : Évaluation de terme

On considère les deux interprétations suivantes :

- Univers $\mathcal{U}_{\mathcal{N}} = \mathcal{N}$ entiers naturels

  $I_{\mathcal{N}}(zero) = 0$

  $I_{\mathcal{N}}(succ) = n \mapsto n + 1$

  $I_{\mathcal{N}}(plus) = n, m \mapsto n + m$

  $I_{\mathcal{N}}(mult) = n, m \mapsto n \times m$

- Univers $\mathcal{U}_{park}$: 10 places de parking en ligne

  $I_{park}(zero) =$ la place la plus à droite

  $I_{park}(succ) = p \mapsto$ la place à droite de p ou
  p s'il n'y a pas de place à droite de p

  $I_{park}(plus) = p_1, p_2 \mapsto$ la place plus proche du milieu de p_1 et p_2,
  en privilégiant la plus à gauche en cas d'égalité.

  $I_{park}(mult) = p_1, p_2 \mapsto$ la place plus proche du milieu de p_1 et p_2,
  en privilégiant la plus à droite en cas d'égalité.

Soient les deux valuations :

- ζ_1 : $x \mapsto 2$
  $y \mapsto 3$
  $z \mapsto 1$

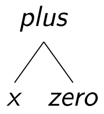
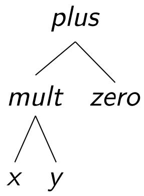
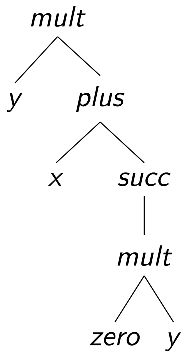
- ζ_2 : $x \mapsto$ la place la plus à gauche
  $y \mapsto$ la $3^{\text{ième}}$ place en partant de la gauche

Donner le résultat des évaluations suivantes :

1. $eval(I_{\mathcal{N}}, \zeta_1)(plus(x, succ(mult(y, z))))$
2. $eval(I_{\mathcal{N}}, \zeta_1)(plus(x, mult(zero, y)))$
3. $eval(I_{park}, \zeta_2)(plus(x, mult(zero, y)))$
4. $eval(I_{\mathcal{N}}, \zeta_2)(plus(x, mult(zero, y)))$

Corrections

Solution de l'exercice 1

1. 
2. pas un terme : *succ* attend 1 argument
3. 
4. pas un terme : *plus* attend 2 arguments
5. 

Solution de l'exercice 2

1. — $mult(x, succ(zero))\sigma_1 = mult(x\sigma_1, succ(zero)\sigma_1)$
   $= mult(\sigma_1(x), succ(zero\ \sigma_1)) = mult(succ(y), succ(zero))$
   — $mult(x, succ(zero))\sigma_2 = mult(x\sigma_2, succ(zero)\sigma_2)$
   $= mult(\sigma_2(x), succ(zero\ \sigma_2)) = mult(zero, succ(zero))$
2. — $plus(x, mult(y, z))\sigma_1 = plus(x\sigma_1, mult(y, z)\sigma_1)$
   $= plus(\sigma_1(x), mult(y\sigma_1, z\sigma_1)) = plus(succ(y), mult(y, \sigma_1(z)))$
   $= plus(succ(y), mult(y, plus(zero, y)))$
   Remarque : $y \notin dom(\sigma_1)$, donc il n'est pas changé par l'application de σ_1.
   — $plus(x, mult(y, z))\sigma_2 = plus(x\sigma_2, mult(y, z)\sigma_2)$
   $= plus(\sigma_2(x), mult(y\sigma_2, z\sigma_2)) = plus(zero, mult(y, \sigma_2(z)))$
   $= plus(zero, mult(y, plus(x, y)))$
   Remarque : même si $x \in dom(\sigma_2)$, on ne lui applique pas σ_2 dans $plus(x, y)$ car la substitution a déjà été appliquée (sur z pour obtenir $plus(x, y)$).

Solution de l'exercice 3 Remarque : faire le calcul en utilisant la fonction *match* définie slides 36 et 37 du CM. On peut juste faire le parcours en parallèle des arbres de syntaxe du motif et du terme pour voir quelle partie du terme correspond à quelle partie du motif.

$m1 = mult(x, succ(y))$

1. $mult(zero, succ(zero)) = mult(x, succ(y))[x := zero, y := zero]$
2. $mult(u, v)$ ne correspond pas à $m1$ car il est impossible de changer un terme composite ($succ(y)$) en variable (v) en appliquant une substitution.

3. $mult(plus(zero, succ(u)), zero)$ ne correspond pas à $m1$ car il est impossible de changer un terme composite ($succ(y)$) en une constante ($zero$) en appliquant une substitution.
4. $mult(plus(zero, u), u)$ ne correspond pas à $m1$ car il est impossible de changer un terme composite ($succ(y)$) en variable (u) en appliquant une substitution.

$m2 =$ $mult(plus(x, y), zero)$

1. $mult(zero, succ(zero))$ ne correspond pas à $m2$ car il est impossible de changer une constante ($zero$) en terme composite ($succ(zero)$) en appliquant une substitution.
2. $mult(u, v)$ ne correspond pas à $m2$ car il est impossible de changer une constante ($zero$) en variable (v) en appliquant une substitution. On note également un problème avec $plus(x, y)$ qui ne peut pas se changer en u.
3. $mult(plus(zero, succ(u)), zero) = mult(plus(x, y), zero)[x := zero, y := succ(u)]$
4. $mult(plus(zero, u), u)$ ne correspond pas à $m2$ car il est impossible de changer une constante ($zero$) en variable (u) en appliquant une substitution.

$m3 =$ $mult(plus(x, y), x)$

1. $mult(zero, succ(zero))$ ne correspond pas à $m3$ car il est impossible de changer un terme composite ($plus(x, y)$) en constante ($zero$) en appliquant une substitution.
2. $mult(u, v)$ ne correspond pas à $m3$ car il est impossible de changer un terme composite ($plus(x, y)$) en variable (u) en appliquant une substitution.
3. $mult(plus(zero, succ(u)), zero) = mult(plus(x, y), x)[x := zero, y := succ(u)]$
4. $mult(plus(zero, u), u)$ ne correspond pas à $m3$ il faudrait à la fois substituer x par $zero$ et par u. C'est un cas où la fonction *merge* du cours renvoie `fail`.

Solution de l'exercice 4

1. 6
2. 2
3. la $4^{\text{ième}}$ place en partant de la gauche (faire le dessin).
4. Cette évaluation n'est pas possible, car I_2 donne des valeurs dans $\mathcal{U}_{park}$ ce qui est incompatible avec $I_{\mathcal{N}}$.