Contrôle de LIFLC - Logique classique - 23 octobre 2017
Durée : 1h
Documents interdits

Numéro d'étudiant :

Nom :

Prénom :

Les réponses sont à donner directement sur l'énoncé dans la case correspondant à chaque question (ou en cochant la/les cases appropriées pour les questions QCM). Ne pas enlever l'agrafe. Ne pas utiliser l'énoncé comme brouillon.

Exercice 1: Satisfiabilité et validité (6 points)

Pour chacune des formules suivantes, dire si elle est satisfiable et si elle est valide en cochant la/les cases appropriées. Si la formule est satisfiable, donner une interprétation qui le montre. Si la formule n'est pas valide, donner une interprétation qui le montre.

1. $p \wedge (q \vee \neg p)$

   ☐ Satisfiable ☐ Valide ☐ Aucun des deux

   Si la formule est satisfiable, indiquer une interprétation qui le montre :

   p : ☐ 0 ☐ 1 q : ☐ 0 ☐ 1

   Si la formule n'est pas valide, indiquer une interprétation qui le montre :

   p : ☐ 0 ☐ 1 q : ☐ 0 ☐ 1

2. $(r \wedge q \wedge \neg p) \Rightarrow \neg(r \Rightarrow (q \Rightarrow p))$

   ☐ Satisfiable ☐ Valide ☐ Aucun des deux

   Si la formule est satisfiable, indiquer une interprétation qui le montre :

   p : ☐ 0 ☐ 1 q : ☐ 0 ☐ 1 r : ☐ 0 ☐ 1

Si la formule n'est pas valide, indiquer une interprétation qui le montre :

p : ☐ 0 ☐ 1 q : ☐ 0 ☐ 1 r : ☐ 0 ☐ 1

Exercice 2: Induction sur les formules (7 points)

On rappelle la définition des formules de logique propositionnelle :

Définition 1. *L'ensemble des formules de logique propositionnelle est le plus petit ensemble stable par les règles suivantes :*

— *Si p est une variable propositionnelle, alors c'est une formule*
— *Si A est une formule, alors $(\neg A)$ est une formule*
— *Si A et B sont des formules, alors $(A \Rightarrow B)$ est une formule*[1]*.*

On définit maintenant la fonction $occ_{\Rightarrow}(A)$ qui donne le nombre d'occurrences de $\Rightarrow$ dans A comme suit :

Définition 2 ($occ_{\Rightarrow}$)**.**

— *Si $A = p$, alors $occ_{\Rightarrow}(A) = 0$*
— *Si $A = (\neg B)$, alors $occ_{\Rightarrow}(A) = occ_{\Rightarrow}(B)$*
— *Si $A = (B \Rightarrow C)$, alors $occ_{\Rightarrow}(A) = 1 + occ_{\Rightarrow}(B) + occ_{\Rightarrow}(C)$*

Question 1: Définir la fonction récursive $occ(p, A)$ qui donne le nombre d'occurrences de la variable p dans la formule A.

1. Dans cet exercice on ne considère pas les formules contenant $\perp$, $\wedge$ ou $\vee$

Question 2: Montrer par induction sur les formules que pour toute formule A et toute variable p, $occ(p, A) \leq occ_{\Rightarrow}(A) + 1$. On prendra soin d'expliciter les hypothèses d'induction.

Exercice 3: Coq (3 points)

Question 1:
On considère l'état suivant lors de l'exécution d'une preuve Coq :

```
H : P
H0 : P -> Q
============================
Q
```

Quelle instruction/tactique Coq permet d'avancer dans la preuve ?

- ☐ `intro.`
- ☐ `assumption.`
- ☐ `apply H0.`
- ☐ `destruct H0.`

Question 2:
On considère l'état suivant lors de l'exécution d'une preuve Coq :

```
H : P -> Q
H0 : Q -> R
============================
P -> R
```

Quelle instruction/tactique Coq permet d'avancer dans la preuve ?

- ☐ `intro.`
- ☐ `assumption.`
- ☐ `apply H0.`
- ☐ `destruct H0.`

Question 3:
On considère l'état suivant lors de l'exécution d'une preuve Coq :

```
H : P
============================
P
```

Quelle instruction/tactique Coq permet d'avancer dans la preuve ?

- ☐ `intro.`
- ☐ `assumption.`
- ☐ `apply H.`
- ☐ `destruct H.`

Exercice 4: Dérivation en déduction naturelle (6 points)

Donner une dérivation en déduction naturelle du séquent :

$$\vdash (p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$$