Logique - Contrôle 2

durée: 15 min

Nom:
Prénom:
Numéro étudiant:

Les réponses sont à donner sur la feuille

1. Soit A une formule construite uniquement à partir de variables propositionnelles et des connecteurs $\Rightarrow$ et $\wedge$. Montrer par induction que $[A]_I = 1$ si $I(p) = 1$ pour toutes les variables p de A.

/6

Form ::= $p \in P \mid F_1 \Rightarrow F_2 \mid F_1 \wedge F_2$ avec $F_1, F_2 \in$ Form

Par induct° sur Form, le ss-ensemble des formules de la logique des propositions

/1 Cas ($A = p$) : $[A]_I \overset{def}{=} [p]_I \overset{def}{=} I(p) \overset{hyp.}{=} 1$

/2 Cas ($A = B \Rightarrow C$) : $[A]_I = [B \Rightarrow C]_I = f_{\Rightarrow}([B]_I, [C]_I)$

/1 $\Rightarrow$ par hyp d'induction $[B]_I = [C]_I = 1$ (IH)

on a $[A]_I = f_{\Rightarrow}(1,1) = 1$

/2 Cas ($A = B \wedge C$) : $[A]_I = [B \wedge C]_I = f_{\wedge}([B]_I, [C]_I)$

$= f_{\wedge}(1,1) = 1$ avec la m̂ (IH)

A est-elle satisfiable ? $\{\Rightarrow, \wedge\}$ est-il fonctionnellement complet ? Justifiez brièvement.

/2 $A \in$ Form est satisfiable : d'après la question précédente, $I : P \to \{0,1\}$ définie par $I(p) = 1$ $\forall p \in P$ rend A vraie.

/2 Or, dans le cas général, il existe des formules non satisfiables, e.g. : $p \wedge \neg p$, Form ne peut pas les décrire et donc $\{\Rightarrow, \wedge\}$ n'est pas fonctionnellement complet.

2. Rappeler brièvement les définitions suivantes:

I est un modèle de A

/2

$I : P \to \{0,1\}$ et telle que $[A]_I = 1$ ou $[\_]_I$ est défini par induct° en cours. On note $I \models A$

$A_1, \ldots, A_n$ a pour conséquence logique B

/2

noté $A_1, \ldots, A_n \models B \underset{def}{\equiv} \forall I.\ [A_1]_I = 1 \ldots [A_n]_I = 1$ implique $[B]_I = 1$

A est logiquement équivalent à B soit $I \models A \Rightarrow I \models B$

/2

Si $\forall I$, $[A]_I \neq 1$ équivaut à $[B]_I = 1$, soit $A \models B$ et $B \models A$

Montrer comment les définitions précédentes permettent de déduire que pour toute interprétation I, $[A]_I = [B]_I$.

/4

Soit $A \models B$ et $B \models A$ les hypothèses nommées par la suite ① et ②

- Si $[A]_I = 0$ alors $[B]_I = 0$ d'après ② par la contraposée : en effet, si $[B]_I = 1$ on viole ②
- Si $[A]_I = 1$ alors $[B]_I = 1$ d'après ①

donc $\forall I$, $[A]_I = [B]_I$