Contrôle terminal de logique classique

mardi 13 janvier 2009

durée : 1h30 - documents interdits

Exercice 1:

Je souhaite réaliser un dessert. J'ai à ma disposition les ingrédients suivants : du chocolat, du caramel, de la chantilly, des fraises et des framboises. Mes goûts sont les suivants :

- Le caramel ne va pas avec les fruits
- La chantilly n'est bonne qu'avec du chocolat ou du caramel.
- Les fraises ne vont pas avec le chocolat, mais elles nécessitent de la chantilly
- Pas de framboises sans chantilly

Montrer, en utilisant la résolution du calcul propositionnel, que si je veux un dessert aux fruits, il comportera du chocolat. On traduira tout d'abord l'énoncé en une formule du calcul propositionnel, puis on montrera via la résolution que la négation de cette formule est insatisfiable.

Exercice 2: Séquents

Dans cet exercice, on considérera une extension du système $\mathcal{G}$ permettant de traiter le connecteur $\Leftrightarrow$.

1. Montrer que la règle suivante est correcte :

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B \qquad \Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Leftrightarrow B \vdash \Delta}(\Leftrightarrow_G)$$

2. Donner une règle $(\Leftrightarrow_D)$ ayant pour conclusion $\Gamma \vdash \Delta, A \Leftrightarrow B$. Pour trouver les prémisses de la règle, on pourra s'appuyer sur le fait que $A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$. Montrer que votre règle est correcte.
3. Montrer par induction sur la dérivation qu'un séquent $\Gamma \vdash \Delta$ est dérivable dans le système $\mathcal{G}$ auquel on ajoute $(\Leftrightarrow_G)$ et $(\Leftrightarrow_D)$ si et seulement si le séquent $\Gamma' \vdash \Delta'$ est dérivable dans le système $\mathcal{G}$ avec Γ' (resp. Δ') est obtenu à partir de Γ (resp. Δ) en remplaçant toutes les sous-formules de la forme $A \Leftrightarrow B$ par leur équivalent $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.
4. Conclure sur la complétude du système $\mathcal{G}$ auquel on ajoute $(\Leftrightarrow_G)$ et $(\Leftrightarrow_D)$.

T.S.V.P $\rightarrow$

Exercice 3:

Soit l'alphabet suivant :

- Constantes : p et s
- Symboles de fonction : $pere/1$ et $mere/1$
- Symboles de prédicats : $homme/1$ et $femme/1$

On considère les formules suivantes :

- $p \doteq pere(s) \wedge femme(s)$
- $(\exists y\ x \doteq pere(y)) \Rightarrow homme(x)$
- $homme(x) \Leftrightarrow \neg femme(x)$
- $y \doteq mere(x) \wedge z \doteq mere(x) \Rightarrow y \doteq z$

1. Dire parmi ces formules, lesquelles sont satisfiables et lesquelles sont valides.
2. Donner une structure d'interprétation qui est un modèle de toutes les formules précédentes.

Exercice 4: Substitutions en calcul de prédicats

Soit deux substitutions σ_1 et $sigma_2$ et un ensemble de variables W tels que pour toute variable x dans W, soit $\sigma_1(x) = \sigma_2(x)$, soit x n'est pas dans $dom(sigma_1)$ ni dans $dom(\sigma_2)$.

1. Montrer par induction sur les termes que si chaque variable d'un terme t est dans W ou bien n'est pas dans $dom(\sigma_1)$ ni dans $dom(\sigma_2)$, alors $t\sigma_1 = t\sigma_2$.
2. Montrer ensuite par induction que si chaque variable libre d'une formule A est dans W ou bien n'est pas dans $dom(\sigma_1)$ ni dans $dom(\sigma_2)$, alors $A\sigma_1 = A\sigma_2$.

Règles du système $\mathcal{G}$

$$(\vee_G)\quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \qquad\qquad (\vee_D)\quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}$$

$$(\wedge_G)\quad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \qquad\qquad (\wedge_D)\quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}$$

$$(\Rightarrow_G)\quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta} \qquad\qquad (\Rightarrow_D)\quad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta}$$

$$(\neg_G)\quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \qquad\qquad (\neg_D)\quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}$$

$$(Axiome)\quad \frac{}{\Gamma, A \vdash \Delta, A}$$