Contrôle Terminal de LIF11 - Logique Classique

Date : 20 janvier 2014 - Durée : 1h
Le barème est donné à titre indicatif
Documents papier autorisés

I. Problème de logique propositionnelle (8 pts)

Dans cet exercice, on se limitera aux formules consituées de variables propositionnelles et des connecteurs $\neg$ et $\vee$. Si A est une formule, on note $V(A)$ l'ensemble des variables de cette formule.

On souhaite faire une partie de la démonstration de l'équisatisfiabilité des formules avec leur transformation de Tseitin.

1. Soit A une formule et soit $(L_A, A'') = tseitin(A)$. Soit I une interprétation. On veut montrer qu'il existe I' telle que $I'(p) = I(p)$ si $p \in V(A)$, $[A'']_{I'} = 1$ et $[L_A]_{I'} = [A]_I$. On fait les remarques suivantes :
   - Si $I_1(p) = I_2(p)$ pour tous les $p \in V(A)$ alors $[A]_{I_1} = [A]_{I_2}$.
   - Si $tseitin(B) = (L_B, B'')$ et $tseitin(C) = (L_C, C'')$ alors $V(B'') \cap V(C'') = V(B) \cap V(C)$.
   - $(\neg L_B \vee q) \wedge (\neg L_C \vee q) \wedge (\neg q \vee L_B \vee L_C) \equiv (q \Leftrightarrow (L_B \vee L_C))$

   Pour faire la démonstration on procédera par induction et par cas sur A. Pour le cas $A = B \vee C$, avec $tseitin(B) = (L_B, B'')$ et $tseitin(C) = (L_C, C'')$, on pourra poser I' comme suit :
   - $I'(q) = [B \vee C]_I$
   - $I'(p) = I'_B(p)$ si $p \in V(B'')$, avec I'_B l'interprétation respectant les conditions pour I et B (i.e. l'interprétation résultat de l'application de l'hypothèse d'induction sur B)
   - $I'(p) = I'_C(p)$ sinon, I'_C l'interprétation respectant les conditions pour I et C (i.e. l'interprétation résultat de l'application de l'hypothèse d'induction sur C)
2. En déduire que si une formule est satisfiable, sa transformation de Tseitin l'est.

II. Formule valide (6 pts)

Soit A la formule propositionnelle suivante :

$$(p \Rightarrow (r \wedge s)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

1. Montrer que A est valide à l'aide d'une table de vérité.
2. Montrer que le séquent $\vdash A$ est correct en utilisant le système $\mathcal{G}$.
3. On donne le résultat de la transformation de Tseitin sur $\neg A$:

$$\underbrace{\neg q_3}_{C_0} \wedge \underbrace{(\neg r \vee \neg s \vee q_0)}_{C_1} \wedge \underbrace{(\neg q_0 \vee r)}_{C_2} \wedge \underbrace{(\neg q_0 \vee s)}_{C_3}$$

$$\wedge \underbrace{(p \vee q_1)}_{C_4} \wedge \underbrace{(\neg q_0 \vee q_1)}_{C_5} \wedge \underbrace{(\neg q_1 \vee \neg p \vee q_0)}_{C_6} \wedge \underbrace{(p \vee q_2)}_{C_7} \wedge \underbrace{(\neg r \vee q_2)}_{C_8} \wedge \underbrace{(\neg q_2 \vee \neg p \vee r)}_{C_9}$$

$$\wedge \underbrace{(q_1 \vee q_3)}_{C_{10}} \wedge \underbrace{(\neg q_2 \vee q_3)}_{C_{11}} \wedge \underbrace{(\neg q_3 \vee \neg q_1 \vee q_2)}_{C_{12}}$$

   (a) Indiquer pour chaque sous-formule de $\neg A$ le littéral qui lui correspond dans le résultat ci-dessus. Pour cela, on dessinera l'arbre de syntaxe abstraire de $\neg A$ et on annotera les noeuds de cet arbre avec les littéraux correspondants.

   (b) On pourra remarquer que cette CNF contient une clause unitaire. Effectuer itérativement la propagation unitaire à partir de cette clause en indiquant pour chaque littéral déduit la clause qui a servi à cette déduction. Conclure sur la non satisfiabilité de $\neg A$.

T.S.V.P $\rightarrow$

III. Du français à la formule (6 pts)

On considère l'alphabet suivant : symboles de constantes : $debut, verification, scanner$; symboles de fonctions : $suivant/1$; symboles de prédicats : $realise/2, etape/1, apres/2$.

On suppose que l'on veut exprimer des formules sur une chaîne de production avec des machines réalisant des étapes de fabrication d'un objet. On considère l'interprétation intuitive suivante où les éléments du domaine peuvent être des machines ou des étapes. Les constantes $debut$ et $verification$ sont des étapes ; la constante $scanner$ est une machine. La fonction $suivant/1$ désigne la machine suivante sur la ligne de production ou l'étape de fabrication suivante. Le prédicat $realise/2$ est vrai si son premier argument est une machine, si son deuxième argument est une étape et si la machine réalise l'étape. Le prédicat $etape/1$ est vrai si son argument est une étape, faux si c'est une machine. Le prédicat $apres/2$ indique que son premier argument se situe après son second argument.

Donner des formules logiques basées sur cet alphabet pour traduire les phrases suivantes en s'appuyant sur cette interprétation intuitive :

1. La dernière étape de fabrication est la vérification et la machine qui la réalise est le scanner.
2. Si x réalise y alors x est une machine et y est une étape.
3. Une étape y est après une étape x si y est le suivant de x ou si on peut trouver une étape après x ayant y comme suivant.
4. Question bonus (2 pts) : L'étape qui suit l'étape réalisée par le scanner est la vérification.

Annexe

Règles du système $\mathcal{G}$

$$(\vee_G)\ \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \qquad\qquad (\vee_D)\ \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}$$

$$(\wedge_G)\ \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \qquad\qquad (\wedge_D)\ \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}$$

$$(\Rightarrow_G)\ \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta} \qquad\qquad (\Rightarrow_D)\ \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta}$$

$$(\neg_G)\ \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \qquad\qquad (\neg_D)\ \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}$$

$$(Axiome)\ \frac{}{\Gamma, A \vdash \Delta, A}$$

Transformation de Tseitin

Si $tseitin(A) = (L, A'')$ alors le résultat de la transformation de A est $A'' \wedge L$, avec :

- $tseitin(p) = (p, \top)$
- $tseitin(\top) = (q, q)$ avec q une variable fraîche.
- $tseitin(\bot) = (q, \neg q)$ avec q une variable fraîche.
- Si $tseitin(B) = (L, B'')$, alors $tseitin(\neg B) = (\neg L, B'')$.
- Si $tseitin(C) = (L_B, B'')$, si $tseitin(C) = (L_C, C'')$ et si q est une variable fraîche, alors :
  - $tseitin(B \vee C) = (q, B'' \wedge C'' \wedge (\neg L_B \vee q) \wedge (\neg L_C \vee q) \wedge (\neg q \vee L_B \vee L_C)$
  - $tseitin(B \wedge C) = (q, B'' \wedge C'' \wedge (\neg L_B \vee \neg L_C \vee q) \wedge (\neg q \vee L_B) \wedge (\neg q \vee L_C)$
  - $tseitin(B \Rightarrow C) = (q, B'' \wedge C'' \wedge (L_B \vee q) \wedge (\neg L_C \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg L_B \vee L_C)$
  - $tseitin(B \Leftrightarrow C) = (q, B'' \wedge C'' \wedge (\neg q \vee \neg L_B \vee L_C) \wedge (\neg q \vee L_B \vee \neg L_C) \wedge (q \vee L_B \vee L_C) \wedge (q \vee \neg L_B \vee \neg L_C)$