

Bornes de Cramér-Rao en Estimation Fréquentielle 3-D

B. Akssase¹

M. Ouanan¹

¹ Equipe ASIA (Analyse des Systèmes et Informatique Appliquée)

Université Moulay Ismail, Faculté des Sciences et Techniques, Errachidia
BP 509, Boutalamine, 52000 Errachidia, Maroc

{ouanan_mohammed@yahoo.fr, baksasse@yahoo.com}

Résumé

Dans ce travail nous considérons le problème de l'estimation des fréquences d'un mélange de sinusoides noyées dans un bruit additif dans le cas tridimensionnel (3-D). La méthode d'estimation des fréquences est de type ESPRIT en utilisant les statistiques de second ordre (SSO) en l'occurrence la fonction d'autocorrélation lorsque le bruit additif est blanc gaussien (BABG). Lorsque le bruit additif est coloré gaussien (BACG), une version de la méthode ESPRIT 3-D qui exploite les statistiques d'ordre supérieures (SOS) est utilisée. Pour le souci d'efficacité des estimateurs des fréquences 3-D, la borne de Cramér-Rao (BCR) asymptotique est calculée, ainsi l'erreur quadratique moyenne des fréquences s'approche asymptotiquement de la BCR ce qui prouve l'efficacité de la méthode d'estimation.

Mots clefs

Borne de Cramér-Rao (BCR), méthode ESPRIT, bruit additif blanc gaussien (BABG), bruit additif coloré gaussien (BACG), rapport signal sur bruit (RSB).

1 Introduction

La modélisation des signaux par une somme d'exponentielles perturbées par un bruit additif est utilisée dans plusieurs applications telles les télécommunications, le traitement d'antennes, l'analyse d'images par résonance magnétiques, ou encore le traitement d'images sismiques. Ce type de modélisation implique le problème fondamental de l'estimation des paramètres : fréquences, amplitudes et ordre du modèle. L'estimation des fréquences est souvent effectuée par des méthodes dites à

haute résolution (HR). Ces méthodes exploitent le modèle du signal et la décomposition de l'espace des observations en deux sous-espaces orthogonaux à savoir le sous-espace signal et le sous-espace bruit. L'idée de base des méthodes HR analytiques d'estimation fréquentielle 1-D est la méthode ESPRIT (Estimation of Signal Parameters via Rotation Invariant Technique) qui s'appuie sur la propriété de l'invariance par rotation du sous-espace signal [1]. Différentes extensions de cette méthode aux cas des signaux 2-D et 3-D ont été développées récemment. Nous pouvons citer par exemple la méthode MEMP 2-D (Matrix Enhancement and Matrix Pencil) [2], la méthode ESPRIT 2-D [3], et leur extension au cas 3-D développées dans [4], [5]. Ces méthodes exploitent la structure bloc Toeplitz de la matrice d'autocorrélation. Bien qu'elles fournissent de bons résultats en présence d'un bruit additif de type blanc gaussien (BABG), les performances de ces méthodes utilisant les statistiques d'ordre deux se dégradent de manière significative en présence d'un bruit additif coloré gaussien (BACG). Ceci est dû principalement au fait que les statistiques d'ordre deux sont sensibles aux bruits additifs gaussiens (BAG) [6], [7], [8].

L'objectif de cet article est double : d'une part, il s'agit d'améliorer les performances des méthodes HR 3-D en présence d'un bruit additif coloré gaussien (BACG) en utilisant les statistiques d'ordres supérieurs. La méthode proposée est une extension de la méthode ESPRIT présenté dans [4] qui exploite les caractéristiques fréquentielles des cumulants d'ordre 4. D'autre part et pour évaluer les performances de la méthode, nous développons aussi les expressions analytiques des bornes de Cramér-Rao (BCR) asymptotiques associées aux paramètres du processus ou signal utile non bruité. Ce développement étend au cas 3-D, pour le problème considéré, les expressions des BCR 1-D et 2-D introduites dans [9], [10] et [11].

2 Modèle du signal

Soit Y un volume de données 3-D, de taille $M_1 \times M_2 \times M_3$, considéré comme une réalisation d'un processus stationnaire noté $\{y(m_1, m_2, m_3)\}$ pour $0 \leq m_1 \leq M_1 - 1, 0 \leq m_2 \leq M_2 - 1, 0 \leq m_3 \leq M_3 - 1$. Chaque point nommé voxel $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$ est décrit par :

$$y(\mathbf{m}) = x(\mathbf{m}, \boldsymbol{\theta}_x) + b(\mathbf{m}, \boldsymbol{\theta}_b) \quad (1)$$

Le bruit additif $b(\mathbf{m}, \boldsymbol{\theta}_b)$ est supposé coloré gaussien, indépendant statistiquement de $x(\mathbf{m}, \boldsymbol{\theta}_x)$, et défini par un vecteur de paramètre noté $\boldsymbol{\theta}_b$. Le signal utile non bruité est un processus décrit par la somme d'exponentielles complexes tridimensionnelles (SEC 3-D) suivant:

$$x(\mathbf{m}, \boldsymbol{\theta}_x) = \sum_{k=1}^K c_k \exp[j(2\pi \mathbf{m} f_k^T + \varphi_k)] \quad (2)$$

où les triplets $f = (f_{1k}, f_{2k}, f_{3k})$ sont les fréquences 3-D, les paramètres c_k et φ_k représentent respectivement l'amplitude à valeur réelle et la phase de la $k^{\text{ième}}$ composante harmonique. Le vecteur $\boldsymbol{\theta}_x$ contient tous les paramètres inconnus du signal $x(\mathbf{m}, \boldsymbol{\theta}_x)$

$$\boldsymbol{\theta}_x = [c_1, \varphi_1, f_{11}, f_{21}, f_{31}, \dots, c_K, \varphi_K, f_{1K}, f_{2K}, f_{3K}]^T \quad (3)$$

3 Estimation des fréquences

La méthode d'estimation HR développée dans cet article utilise les cumulants à l'ordre 4 définis pour tout $\mathbf{k}, \mathbf{h}, \mathbf{l} \in \mathbf{Z}^3$ par :

$$c_{4y}(\mathbf{h}, \mathbf{k}, \mathbf{l}) = \text{cum}[y(\mathbf{m}), y^*(\mathbf{m} + \mathbf{h}), y(\mathbf{m} + \mathbf{k}), y^*(\mathbf{m} + \mathbf{l})] \quad (4)$$

Où la fonction $(.)^*$ représente l'opérateur adjoint pour les quantités à valeurs complexes. En effet, puisque les cumulants d'ordre quatre des processus gaussiens sont nuls, les cumulants d'ordre quatre des observations coïncident théoriquement avec ceux des observations non bruitées

$$c_{4y}(\mathbf{h}) = c_{4x}(\mathbf{h}) \quad (5)$$

De plus, les cumulants d'ordre quatre du processus 3-D considéré sont décrits par une somme d'exponentielles complexes avec les mêmes fréquences recherchées [8]:

$$c_{4x}(\mathbf{h}, \mathbf{k}, \mathbf{l}) = -\sum_{k=1}^K c_k^4 \exp[j(-\mathbf{h} + \mathbf{k} + \mathbf{l})2\pi f_k^T] \quad (6)$$

L'expression (6) n'est pas directement exploitable car les cumulants d'ordre quatre sont fonction de trois variables à trois composantes donc neuf variables au total $(\mathbf{h}, \mathbf{k}, \mathbf{l}) = (h_1, h_2, h_3, k_1, k_2, k_3, l_1, l_2, l_3)$. Pour cette raison, nous considérons uniquement la "diagonale des cumulants d'ordre quatre", ne dépendant que d'une seule variable 3-D, définie de la façon suivante:

$$c_{4x}(\mathbf{h}) = c_{4x}(\mathbf{h}, \mathbf{h}, \mathbf{h}), \text{ avec } \mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3) \quad (7)$$

Les équations (5), (6) et (7) nous montrent que la diagonale des cumulants d'ordre quatre des observations contient toute l'information utile pour estimer les fréquences 3-D (f_{1k}, f_{2k}, f_{3k}) pour $k = 1, 2, \dots, K$:

$$c_{4y}(\mathbf{h}) = -\sum_{k=1}^K c_k^4 \exp[j2\pi \mathbf{h} f_k^T] \quad (8)$$

Cette dernière relation est à la base de la méthode ESPRIT 3-D [12] fondée sur les statistiques d'ordre supérieur, rappelée dans cet article. En effet, l'équation (9) permet d'obtenir les fréquences en décomposant une matrice des cumulants \mathbf{C}_y en sous-espaces signal et bruit. Cette dernière a une structure Toeplitz Bloc Bloc Toeplitz (TBBT) et se décompose sous la forme suivante :

$$\mathbf{C}_y = \mathbf{S}\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{S})^H \quad (9)$$

où, $\boldsymbol{\Psi}$ est une matrice diagonale et \mathbf{S} est la matrice de Vandermonde 3-D formée à partir des composantes fréquentielles. Sous certaines conditions sur la taille de la matrice \mathbf{C}_y , son rang est exactement le nombre de fréquences K . Ainsi, la décomposition en éléments propres de la matrice estimée des cumulants $\hat{\mathbf{C}}_y$ permet d'accéder à la matrice de Vandermonde 3-D \mathbf{S} et d'estimer les fréquences (f_{1k}, f_{2k}, f_{3k}) pour $k = 1, 2, \dots, K$

4 Borne de Cramér-Rao

Dans ce paragraphe, nous allons développer l'expression analytique de la borne de Cramer-Rao asymptotique pour le vecteur des paramètres du signal utile non bruité $\boldsymbol{\theta}_x$. Pour cela on considère les hypothèses additionnelles suivantes:

A1 : la densité spectrale $S_b(f)$ du bruit additif est continue et ne présente pas de maxima localisés aux fréquences $f_k, k = 1, \dots, K$.

A2 : les vecteurs paramètres $\boldsymbol{\theta}_x$ et $\boldsymbol{\theta}_b$ n'ont aucun élément commun.

Sous ces conditions, nous montrons tout d'abord que les BCR exactes pour un estimateur sans biais $\hat{\boldsymbol{\theta}} = [\hat{\boldsymbol{\theta}}_x, \hat{\boldsymbol{\theta}}_b]^T$ est une matrice diagonale par bloc donnée par :

$$BCR(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \begin{bmatrix} BCR(\hat{\boldsymbol{\theta}}_b) & 0 \\ 0 & BCR(\hat{\boldsymbol{\theta}}_x) \end{bmatrix} \quad (10)$$

Le (k,l) ^{ème} élément de la BCR associée au vecteur $\boldsymbol{\theta}_x$ est donné par la relation suivante :

$$[BCR(\hat{\boldsymbol{\theta}}_x)]_{kl}^{-1} = 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial \mathbf{x}^H(\boldsymbol{\theta}_x)}{\partial (\boldsymbol{\theta}_x)_k} \boldsymbol{\Gamma}_{\theta_b}^{-1} \frac{\partial \mathbf{x}(\boldsymbol{\theta}_x)}{\partial (\boldsymbol{\theta}_x)_l} \right\} \quad (11)$$

Où $\operatorname{Re}\{\cdot\}$ désigne la partie réelle de la quantité complexe en question et $\boldsymbol{\Gamma}_{\theta_b}$ est la matrice d'auto corrélation du bruit. Le vecteur des observations non bruitées $\mathbf{x}(\boldsymbol{\theta}_x)$ est :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\boldsymbol{\theta}_x) = & [\mathbf{x}(0,0,0, \boldsymbol{\theta}_x), \dots, \mathbf{x}(M_1 - 1, 0, 0, \boldsymbol{\theta}_x), \dots, \\ & \mathbf{x}(0, M_2 - 1, 0, \boldsymbol{\theta}_x), \dots, \mathbf{x}(M_1 - 1, M_2 - 1, 0, \boldsymbol{\theta}_x), \\ & \dots, \mathbf{x}(M_1 - 1, M_2 - 1, M_3 - 1, \boldsymbol{\theta}_x)]^T \end{aligned} \quad (12)$$

Pour le problème considéré, la BCR asymptotique est donnée par la limite suivante :

$$AsBCR(\hat{\boldsymbol{\theta}}_x) = \lim_{M \rightarrow \infty} \mathbf{K}_M BCR(\hat{\boldsymbol{\theta}}_x) \mathbf{K}_M \quad (13)$$

où $M = M_1 M_2 M_3$ et \mathbf{K}_M est une matrice de normalisation, diagonale par bloc, de taille $5K \times 5K$ définie par

$$\mathbf{K}_M = \mathbf{I}_K \otimes \mathbf{D} \quad (14)$$

avec \mathbf{I}_K la matrice identité de taille K ,

$$\mathbf{D} = \operatorname{diag}(\sqrt{M}, \sqrt{M}, M_1 \sqrt{M}, M_2 \sqrt{M}, M_3 \sqrt{M})$$

et \otimes désigne le produit de Kronecker.

En développant les dérivées du vecteur $\mathbf{x}(\boldsymbol{\theta}_x)$, nous montrons que l'expression (11) s'écrit sous la forme suivante :

$$BCR(\hat{\boldsymbol{\theta}}_x) = \frac{1}{2} \left[\operatorname{Re} \left\{ \mathbf{G}^H \boldsymbol{\Gamma}_{\theta_b}^{-1} \mathbf{G} \right\} \right]^{-1} \quad (15)$$

où \mathbf{G} est la matrice de taille $M \times 5K$ donnée par la concaténation des vecteurs gradients

$$\mathbf{g}(\mathbf{m}, \boldsymbol{\theta}_x) = \frac{\partial \mathbf{x}(m_1, m_2, m_3, \boldsymbol{\theta}_x)}{\partial \boldsymbol{\theta}_x}$$

où

$$\mathbf{g}(\mathbf{m}, \boldsymbol{\theta}_x) = [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_K]^T$$

$$\mathbf{g}_k = [1, \mathbf{j}c_k, \mathbf{j}c_k 2\pi m_1, \mathbf{j}c_k 2\pi m_2, \mathbf{j}c_k 2\pi m_3]^T e^{j(2\pi m f_k^T + \phi_k)} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G} = & [\mathbf{g}(0,0,0, \boldsymbol{\theta}_x), \dots, \mathbf{g}(M_1 - 1, 0, 0, \boldsymbol{\theta}_x), \dots, \\ & \mathbf{g}(0, M_2 - 1, 0, \boldsymbol{\theta}_x), \dots, \mathbf{g}(M_1 - 1, M_2 - 1, 0, \boldsymbol{\theta}_x), \\ & \dots, \mathbf{g}(M_1 - 1, M_2 - 1, M_3 - 1, \boldsymbol{\theta}_x)]^T \end{aligned} \quad (17)$$

En utilisant les deux équations (11) et (15), l'équation (13) devient :

$$AsBCR(\hat{\boldsymbol{\theta}}_x) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \lim_{M \rightarrow \infty} \mathbf{K}_M \mathbf{G}^H \boldsymbol{\Gamma}_{\theta_b}^{-1} \mathbf{G} \mathbf{K}_M \right\}^{-1} \quad (18)$$

L'expression analytique de la matrice \mathbf{G}^H obtenue à partir des équations (16) et (18), et la structure TBBT de la matrice d'autocorrélation du bruit additif $\boldsymbol{\Gamma}_{\theta_b}$, nous permet de montrer que la matrice des BCR asymptotiques est donnée par :

$$AsBCR(\hat{\boldsymbol{\theta}}_x) = \begin{bmatrix} [AsBCR]_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & [AsBCR]_k & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & [AsBCR]_K \end{bmatrix} \quad (19)$$

où chaque sous bloc $[AsBCR]_k$ est donné en fonction de la densité spectrale du processus bruit additif $b(\mathbf{m})$ comme suit :

$$[AsBCR]_k = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} S_b(w_k) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 \frac{S_b(w_k)}{c_k^2} & -6 \frac{S_b(w_k)}{c_k^2} & -6 \frac{S_b(w_k)}{c_k^2} & -6 \frac{S_b(w_k)}{c_k^2} \\ 0 & -6 \frac{S_b(w_k)}{c_k^2} & 12 \frac{S_b(w_k)}{c_k^2} & 0 & 0 \\ 0 & -6 \frac{S_b(w_k)}{c_k^2} & 0 & 12 \frac{S_b(w_k)}{c_k^2} & 0 \\ 0 & -6 \frac{S_b(w_k)}{c_k^2} & 0 & 0 & 12 \frac{S_b(w_k)}{c_k^2} \end{bmatrix} \quad (20)$$

Ainsi, pour $k = 1, \dots, K$, les expressions des BCR asymptotiques du $[\hat{c}_k, \hat{\phi}_k, \hat{f}_{1k}, \hat{f}_{2k}, \hat{f}_{3k}]$ sont les éléments diagonaux de la matrice $[AsBCR]_k$. On remarque que les BCR relatives aux fréquences et à la phase sont inversement proportionnelles aux rapports signal sur bruit (RSB) locale $RSB_k = c_k^2 / S_b(f_k)$.

5 Simulation numériques

5.1 Estimation des fréquences par ESPRIT 3-D dans le cas de BABG

Dans cette partie, nous allons considérer le scénario suivant : Le signal harmonique est constitué de deux modes dont les paramètres sont :

$$K=2, f_1 = (f_{11}, f_{21}, f_{31}) = (0.21, 0.21, 0.21),$$

$$f_2 = (f_{12}, f_{22}, f_{32}) = (0.22, 0.22, 0.22),$$

Les amplitudes des sinusoides complexes sont des unitaires, les phases sont uniformément distribuées dans l'intervalle $]0, 2\pi[$.

Le bruit additif est un iid à distribution normale de moyenne nulle et de variance σ_b^2 choisit de telle sorte que le rapport signal sur bruit soit 10 dB. La figure 1 montre la distribution de la première composante estimée \hat{f}_{11} pour 100 essais Monté Carlo. La méthode utilisée est celle présentée dans [4].

5.2 Estimation des fréquences par ESPRIT 3-D dans le cas de BACG

Dans cette partie, nous allons considérer le scénario suivant : Le signal harmonique est constitué toujours de deux modes dont les paramètres sont :

$$K=2, f_1 = (f_{11}, f_{21}, f_{31}) = (0.21, 0.21, 0.21),$$

$$f_2 = (f_{12}, f_{22}, f_{32}) = (0.22, 0.22, 0.22).$$

Les amplitudes des sinusoides complexes sont choisies de telle sorte à fixer un niveau du rapport signal sur bruit à 10 dB. Les phases sont uniformément distribuées dans l'intervalle $]0, 2\pi[$.

Le bruit additif coloré est la sortie d'un filtre AR 3-D à support quart d'espace (quarter space region of support). L'ordre du modèle AR 3-D est (1,1,1) dont les paramètres transverses sont donnés dans le tableau 1 ci-dessous excité en entrée par un iid à distribution normale de moyenne nulle et de variance $\sigma_b^2 = 1$. La figure 2 montre la distribution de la première composante estimée \hat{f}_{11} par ESPRIT 3-D en utilisant les autocorrélations [4]. La figure 3 montre les résultats en utilisant les cumulants d'ordre quatre [12].

a_{000}	a_{001}	a_{010}	a_{011}
1	-0.78	-0.23	0.1794

a_{100}	a_{101}	a_{110}	a_{111}
-0.65	0.5070	0.1495	-0.1166

Tableau 1 : les paramètres transverses du modèle AR 3-D (1, 1, 1) utilisé pour générer le BACG.

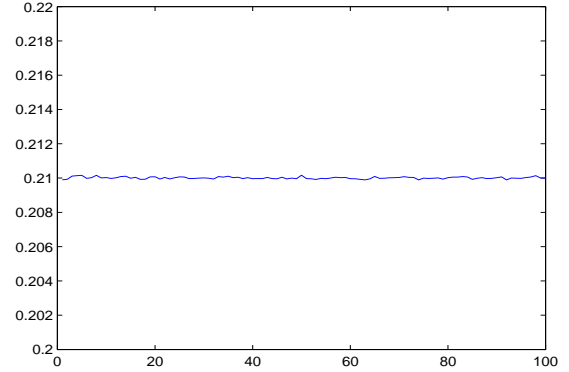


Figure 1 : Distribution d'estimation de la composante fréquentielle 3-D \hat{f}_{11} pour 100 Monté Carlo essais; pour un BABG en utilisant les autocorrélations.

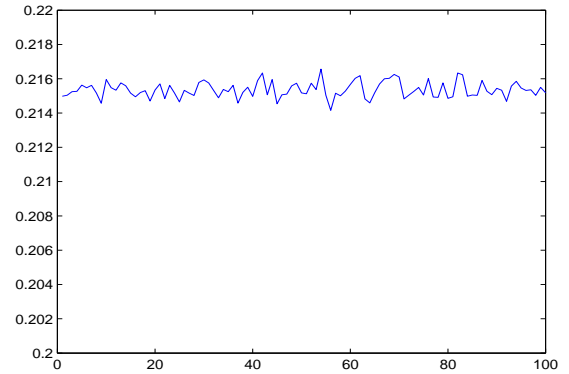


Figure 2 : Distribution d'estimation de la composante fréquentielle 3-D \hat{f}_{11} pour 100 Monté Carlo essais pour un BACG en utilisant les autocorrélations.

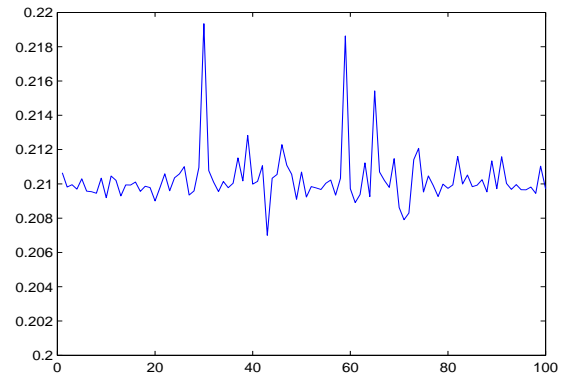


Figure 3 : Distribution d'estimation de la composante fréquentielle 3-D \hat{f}_{11} pour 100 Monté Carlo essais pour un BACG en utilisant les cumulants d'ordre 4.

A partir de ces figures, il apparaît que l'estimation de la composante fréquentielle 3-D \hat{f}_{11} pour un BABG en utilisant les statistiques du second ordre est non biaisée

(figure 1). En outre, une fois le bruit est coloré (BACG), les autocorrélations sont inefficaces. Le recours aux statistiques d'ordre supérieur (cumulants d'ordre 4) est une bonne alternative, en effet, la moyenne de \hat{f}_{11} pour la figure 3 est : 0.2103 et celle de la figure 2 est 0.2154. L'existence des deux pics dans la figure 3 peut s'expliquer par l'échec de la méthode de mise en triplet des fréquences estimées (appariement des fréquences 3-D). Attribuer \hat{f}_{21} à \hat{f}_{11} , va nous pousser à améliorer la méthode d'appariement automatique des fréquences .

5.3 BCR asymptotique vs EQM

Dans cette partie, nous allons considérer le deuxième scénario de la section 5.2 avec le rapport signal sur bruit virant de -15 dB à 15 dB. La taille des observations est fixé à $32 \times 32 \times 32$. La figure 4 montre la borne de Cramér-Rao asymptotique et l'erreur quadratique moyenne de l'estimée \hat{f}_{11} pour 100 essais Monté Carlo avec ESPRIT 3-D en utilisant les autocorrélations et en fin la figure 5 illustre les performances de l'erreur quadratique moyenne (EQM) par rapport à la BCR asymptotique en utilisant les cumulants d'ordre quatre.

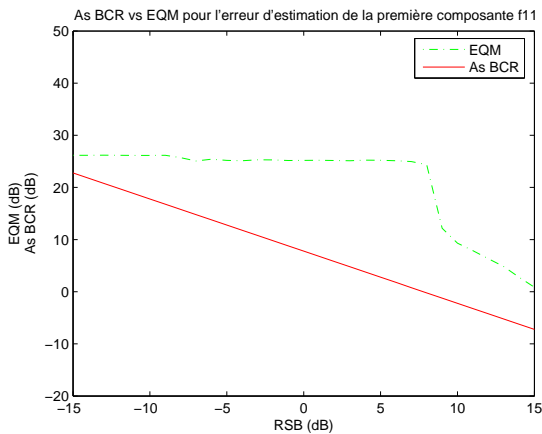


Figure 4 : BCR asymptotique vs EQM pour l'erreur d'estimation de la composante fréquentielle 3-D \hat{f}_{11} en utilisant l'autocorrélation .

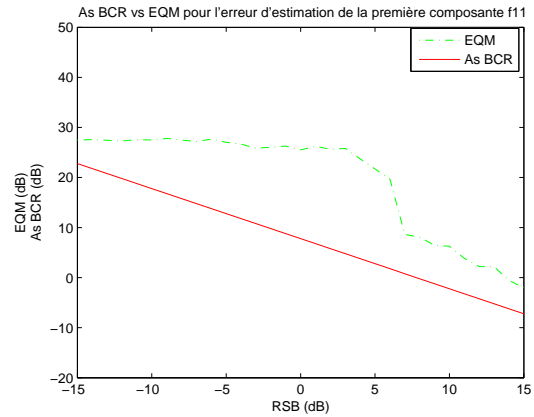


Figure 5 : BCR asymptotique vs EQM pour l'erreur d'estimation de la composante fréquentielle 3-D \hat{f}_{11} en utilisant des cumulants d'ordre 4.

Pour des valeurs de RSB négatifs ou petits, (c'est-à-dire la contribution du bruit est forte), l'EQM est au dessus de la BCR asymptotique, la qualité d'estimation est mauvaise, et lorsque le rapport RSB est grand (c'est-à-dire la contribution du bruit est négligeable) l'EQM approche la BCR ainsi la qualité de l'estimateur de fréquences 3-D par la méthode ESPRIT 3-D est efficace. L'utilisation des statistiques d'ordre supérieures en l'occurrence les cumulants d'ordre quatre améliorent la qualité d'estimation par rapport à l'utilisation de l'autocorrélation, mais le prix à payer pour cela réside dans la surcharge de calcul induite. En plus, la taille de l'échantillon doit être grande (asymptotique) pour que la qualité des cumulants soit consistante, au contraire si la taille de l'échantillon est réduite, l'estimateur basé sur l'autocorrélation peut donner des résultats meilleurs que les cumulants d'ordre 4.

5.4 Conclusion

Dans ce travail, nous avons présenté une méthode d'estimation des fréquences 3-D dans le cas sinusoïdes complexes noyées soit dans un bruit additif blanc gaussien ou coloré gaussien.

Le développement des expressions théoriques de la borne de Cramér-Rao asymptotique des paramètres du modèle en particulier des fréquences 3-D est présenté.

En terme de perspective on envisage améliorer la méthode d'appariement des fréquences estimées.

Références

- [1] Richard Roy, Thomas Kailath. ESPRIT : Estimation of signal parameters via rotational invariance techniques. *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Processing*, 7(37) : 984-995, July 1989.
- [2] Yingbo. Hua. Estimating two-dimensional frequencies by matrix enhancement and matrix

- pencil. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 9(40) : 2267-2280, September 1992.
- [3] Stéphanie Rouquette and Mohamed. Najim. Estimation of frequencies and damping factors by 2-D ESPRIT type methods. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1(49) : 237-245, Jan. 2001.
 - [4] Brahim Aksasse, Mohamed El Ansari, Yannick Berthomieu, and Mohamed Najim. High resolution 3D spectral estimation. Dans *Proc EUSIPCO02*, vol. II, pages 391-394, Sept 3-6, 2002, Toulouse, France.
 - [5] Martin Haardt and Josef A. Nosssek. 3D unitary ESPRIT for joint 2D angle carrier estimation. Dans *Proc. IEEE ICASSP97*, pages 255-258, April 21-24, 1997, Munich, Germany.
 - [6] Ananthram Swami and Jerry M. Mendel. Cumulant-based approach to the harmonic retrieval and related problem. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal, Processing*, 5(39) : 1099-1109, May 1991.
 - [7] Hosny M. Ibrahim, Reda R. Gharieb. Estimating two-dimensional frequencies by a cumulant-based FBLP method. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1(47) : 262-266, January 1999
 - [8] Youssef Stitou, Flavious Turcu, Mohamed Najim, and Larbi Radouane. 3-D Texture characterization based on Wold decomposition and higher order Statistics. Dans *Proc IEEE ICASSP05*, vol. 2, pages 165-168, March 18-23,2005, Philadelphia, USA
 - [9] Petre Stoica, Andreas Jacobsson. and Jian Li, Cisoid parameter estimation in the colored noise case: Asymptotic Cramér-Rao Bound, maximum likelihood, and nonlinear least squares. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 8(45) : 2048-2059, August 1997.
 - [10] Amit Mitra, and Petre. Stoica. The Asymptotic Cramér-Rao Bound for 2-D superimposed exponential signals. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, (13) : 317-331, 2002.
 - [11] Josepf M. Francos. Cramér-Rao Bound on the estimation accuracy of complex-valued homogeneous Gaussian random fields. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 3(50) : 710-724, March 2002.
 - [12] Youssef Stitou, Brahim Aksasse, and Mohamed Najim. Cumulant Matrix Pencil Method for three-Dimensional Frequency Estimation in colored Gaussian Noise. Dans *Proc. Second International Symposium on Communication, Control and Signal Processing (ISCCSP 2006)*, 13-15 March 2006, Marrakech, Morocco.