

# Régularisation sur graphe pour le traitement d'images couleur

O. Lezoray

A. Elmoataz

S. Bougleux

<sup>1</sup> LUSAC EA 2607, IUT SRC, 120 Rue de l'exode, 50000 SAINT-LÔ

<sup>2</sup> GREYC CNRS UMR 6072, Groupe Image, ENSICAEN, 6 Bd. Maréchal Juin, F-14050 CAEN

olivier.lezoray@unicaen.fr, {abder.elmoataz,sebastien.bougleux}@greyc.ensicaen.fr

## Résumé

*Le traitement d'images couleur est un problème important en vision par ordinateur et les formulations variationnelles fournissent un cadre formel pour celui-ci. Les solutions de modèles variationnels peuvent être obtenues en minimisant des fonctions d'énergies appropriées et cette minimisation est habituellement réalisée à l'aide d'équations aux dérivées partielles (EDP). Le problème est considéré comme un problème de régularisation. Dans cet article, nous proposons un cadre général de régularisation discrète opérant sur des graphes pondérés de topologie arbitraire, ceci peut être vu comme un analogue discret de la théorie classique de régularisation. A l'aide de cette formulation nous proposons une famille de filtres linéaires et non linéaires anisotropes simples et rapides qui ne nécessitent pas d'EDP. L'approche que nous proposons peut être utile pour des problèmes de restauration, de simplification ou bien de segmentation.*

## Mots clefs

Régularisation, couleur, graphe, simplification, segmentation.

## 1 Introduction

Beaucoup d'approches existent pour le traitement d'images couleur et les modèles variationnels ont été extrêmement utilisés pour une grande variété de problèmes de vision par ordinateur. Les solutions de modèles variationnels peuvent être obtenues en minimisant des fonctions d'énergies appropriées et cette minimisation est habituellement réalisée à l'aide d'équations aux dérivées partielles (EDP). Les EDP sont définies en continu et lorsque l'existence et l'unicité d'une solution ont été prouvées, elles sont discrétisées afin d'obtenir une solution numérique. Soit  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une image (nous supposons que  $\Omega$  est un rectangle de  $\mathbb{R}^2$ ) et soit  $f^0$  une version dégradée (bruitée) de  $f$  :

$$f^0 = Lf + \eta \quad (1)$$

$L$  est un opérateur linéaire représentant le flou et  $\eta$  est un bruit additif de variance  $\sigma^2$ . Pour restaurer l'image (le but est de reconstruire  $f$  à partir de  $f^0$ ), nous devons résoudre (1) pour  $f$  qui est un problème inverse mal posé [1]. Ceci peut être résolu par une approche variationnelle et trouver  $f^0$  peut être formulé comme la minimisation d'une énergie

de la forme suivante, où  $\lambda \geq 0$  est un multiplicateur de Lagrange [2],

$$E(f, f^0, \lambda) = E_{smooth}(f) + \lambda E_{fidelity}(f, f^0) \quad (2)$$

Cette idée a été initialement introduite par Tikhonov [3].  $E_{smooth}$  est un terme de régularisation,  $E_{fidelity}$  est un terme d'attache aux données et  $\lambda$  est un poids qui contrôle le ratio entre les deux termes. Dans la suite, nous nous restreignons à la famille suivante de problèmes variationnels ( $p \in \{1, 2\}$ ) :

$$\min_{f \in \mathcal{H}} \left\{ E_p(f, f^0, \lambda) = \int_{\Omega} (\|\nabla f\|^p + \lambda \|f - f^0\|_{\mathcal{H}}^2) \right\} \quad (3)$$

Le terme de régularisation dans  $E_p$  mesure la  $p$ -régularité de  $f$  sur le domaine  $\Omega$  de l'image. Le terme de fidélité est la norme au carré dans un espace de Hilbert donné  $\mathcal{H}$ . L'image régularisée  $f$  qui minimise (3) peut être obtenue par une descente de gradient avec l'équation d'Euler-Lagrange de  $E_p$ . L'EDP résultante est discrétisée et résolue par des algorithmes de calculs numériques. Les EDP ont été très utilisées ces dernières années (voir dans [4] pour une revue très complète) et se différencient par l'utilisation ou non d'un terme d'attache aux données. Parmi les travaux les plus connus citons ceux de Perona et Malik [5] pour la diffusion non linéaire basée uniquement sur un terme de régularisation et la variation totale (TV variation) proposée par Rudin, Osher et Fatemi [6] basée sur la régularisation et l'attache aux données afin de préserver les contours. Dans (3), quand  $p = 1$  et  $\mathcal{H} = L^2$ ,  $E_{smooth}$  est la variation totale (TV), et  $E_1$  correspond au modèle non linéaire de Rudin, Osher et Fatemi (ROF). Quand  $p = 2$ ,  $E_2$  correspond à la régularisation de Tikhonov. Nous n'effectuerons pas ici de revue des modèles variationnels car ceci est hors de la portée de cet article, le lecteur intéressé se référera à [4] et à [7, 8, 9] pour le cas de la couleur. Les modèles variationnels ont été étudiés d'un point de vue théorique et pratique [4]. Ils ont cependant un certain nombre de désavantages. Tout d'abord ils sont définis en continu et leur résolution nécessite une discrétisation. Or le domaine de l'image est par nature discret, et peut se représenter par des graphes réguliers ou de topologie arbitraire, sur lesquels les méthodes classiques ne fonctionnent pas (des nuages de points par exemple). Deuxièmement les EDP ont un comportement extrêmement local et même avec des schémas numériques

efficaces, les algorithmes les mettant en oeuvre sont relativement lents. Troisièmement les schémas numériques mis en oeuvre pour la discrétisation des EDP nécessitent que les données à régulariser aient une répartition selon une grille et les EDP ne sont donc pas adaptées pour effectuer la régularisation de données arbitraires, par exemple dans le cas où celles-ci sont représentées par des graphes de topologies arbitraires : la régularisation en continu n'est pas directement applicable. Les méthodes discrètes semblent donc plus appropriées que les EDP dans certains cas. L'idée est de considérer la régularisation discrète d'image sur des graphes, qui peut se réduire à la résolution de systèmes linéaires ou non-linéaires par des méthodes itératives. Nous transcrivons donc le cadre de la régularisation continue par EDP dans le domaine discret défini sur des graphes de topologies arbitraires. La minimisation discrète est un problème analogue au problème (3) et est formalisée par ( $p \in \{1, 2\}$ ) :

$$\min_{f \in \mathcal{H}(V)} \left\{ E_p(f, f^0, \lambda) = \sum_{v \in V} \|\nabla f(v)\|^p + \lambda \|f - f^0\|_{\mathcal{H}(V)}^2 \right\} \quad (4)$$

où  $V$  est un ensemble de noeud,  $\mathcal{H}(V)$  est un espace de Hilbert défini sur  $V$  et  $\|\nabla f(v)\|$  est la norme d'un gradient discret donné. Le principal avantage de notre approche est que nous n'avons pas à résoudre une EDP et nous pouvons appliquer notre méthode sur n'importe quel type de données pour peu qu'elles puissent être représentées sous forme de graphes dont la topologie peut être arbitraire. Nous proposons donc un formalisme général de régularisation discrète sur graphes. La régularisation discrète sur graphe a déjà été utilisée sur des graphes réguliers (TV Digital filter [10]) pour le traitement d'images et sur des graphes arbitraires pour la classification semi-supervisée [11]. En nous basant sur ces travaux, nous proposons un cadre général pour la régularisation opérant sur des graphes pondérés de topologies arbitraires qui mène à une famille de filtres anisotropiques linéaires et non-linéaires simples et rapides. Nous rappelons tout d'abord les définitions usuelles sur les graphes puis nous définissons une géométrie différentielle sur ceux-ci. Enfin nous proposons un cadre général pour la régularisation discrète sur graphes et nous montrons comment ceci peut être appliqué à différents problèmes de traitement d'images couleur.

## 2 Graphes pondérés

Un graphe est une structure de données utilisée afin de représenter un ensemble et les relations deux à deux entre des éléments de cet ensemble. Les éléments de l'ensemble sont appelés des noeuds et les relations des arêtes. Nous rappelons quelques éléments concernant la théorie des graphes [12]. Un graphe  $\mathcal{G}$  est un couple  $\mathcal{G} = (V, E)$  où  $V$  est un ensemble de noeuds et  $E \subseteq V \times V$  un ensemble d'arêtes. Deux noeuds  $u$  et  $v$  sont adjacents si l'arête  $(u, v) \in E$ , une arête  $e \in E$  est incidente à un noeud  $u$  si  $u$  est une de ses extrémités. Un chemin  $p$  est

un ensemble de noeuds  $p = (v_1, v_2, \dots, v_k)$  tel qu'il existe une arête entre deux noeuds successifs du chemin ( $\forall i \in [1, k],$  l'arête  $(v_i, v_{i+1}) \in E$ ). Un chemin est simple si chaque arête n'est parcourue qu'une seule fois. Un cycle  $c = (v_1, \dots, v_k)$  est un chemin simple terminant en son noeud de départ ( $v_1 = v_k$ ). Un graphe est connexe ssi il existe un chemin entre chaque paire de sommets. Un graphe est non orienté quand l'ensemble des arêtes est symétrique : à chaque arête  $(u, v) \in E$  correspond une arête  $(v, u) \in E$ . Dans tout le reste de cet article nous ne considérerons que des graphes simples pour lesquels maximum une arête peut joindre deux noeuds. Ces graphes sont supposés être connexes, non orientés et sans cycles. Ces graphes peuvent être pondérés si une fonction de pondération  $w$  est associée à chaque arête,  $w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  satisfaisant  $w(u, v) > 0$  si  $(u, v) \in E$ ,  $w(u, v) = 0$  si  $(u, v) \notin E$  et  $w(u, v) = w(v, u)$ . Une fonction de pondération mesure donc la similarité entre deux noeuds. Le degré d'un noeud  $\delta : V \rightarrow \mathbb{R}^+$  est défini comme  $\delta(v) = \sum_{u \sim v} w(u, v)$  où  $u \sim v$  désigne l'ensemble des noeuds  $u$  adjacents au noeud  $v$ . Nous pouvons maintenant définir l'espace des fonctions sur graphes. Soit  $\mathcal{H}(V)$  l'espace de Hilbert des fonctions à valeurs réelles sur les noeuds dans lequel chaque fonction  $f : V \rightarrow \mathbb{R}^+$  attribue une valeur réelle  $f(v)$  à chaque noeud  $v$ . L'espace des fonctions  $\mathcal{H}(V)$  peut être muni du produit scalaire usuel  $\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}(V)} = \sum_{v \in V} f(v)g(v)$  où  $f$  et  $g$  sont deux fonctions de  $\mathcal{H}(V)$ . Une fonction  $f$  de  $\mathcal{H}(V)$  peut être vue comme un vecteur de  $\mathbb{R}^{|V|}$ . La norme d'une fonction  $f$  obtenue à partir du produit scalaire est  $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ . De même, nous pouvons définir  $\mathcal{H}(E)$  l'espace des fonctions à valeurs réelles sur les arêtes dans lequel chaque fonction  $h : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  attribue une valeur réelle à chaque arête  $e$ . Cet espace de fonctions peut être muni du produit scalaire usuel  $\langle h, l \rangle_{\mathcal{H}(E)} = \sum_{(u,v) \in E} h(u, v)l(u, v)$  où  $h$  et  $l$  sont deux fonctions de  $\mathcal{H}(E)$ . Les graphes sont des structures de données très utiles pour représenter des données provenant d'images. Une image est une grille discrète à laquelle on peut associer un graphe, les arêtes dépendant de la connexité considérée entre les pixels (4 ou 8 connexité) : c'est le plus bas niveau de représentation d'une image par un graphe. Des représentations de plus haut niveau, sous forme de graphe, de données provenant d'images sont par exemple le graphe d'adjacence de régions ou le graphe d'adjacence de couleurs [13]. Un graphe d'adjacence de régions est le graphe associé à une partition d'une image (la connexité spatiale des régions est considérée). A chaque représentation d'une image couleur on peut donc associer un graphe et nous considérons le traitement d'images couleur comme celui de graphes dont les modèles de noeuds et d'arêtes sont liés aux propriétés colorimétriques de l'image. La topologie du graphe dépend du problème que l'on veut résoudre : des grilles pour la restauration, des graphes d'adjacence de régions pour la simplification et la segmentation, des pyramides irrégulières pour les hiérarchies de partitions et des graphes

d'adjacence de couleurs pour la coalescence. La topologie des graphes considérés est donc arbitraire mais le principe de la régularisation discrète que nous proposons restera le même.

### 3 Géométrie Différentielle sur Graphes

Nous avons introduit l'espace des fonctions sur graphes et dans cette section nous présentons l'expression d'une géométrie différentielle sur graphes [11, 14, 15] qui est une discrétisation de la géométrie différentielle classique en continu.

#### 3.1 Gradient et divergence

Dans cette section nous présentons le gradient et la divergence sur graphes. L'opérateur de différence  $d : \mathcal{H}(V) \rightarrow \mathcal{H}(E)$  sur  $\mathcal{G} = (V, E)$  d'une fonction  $f \in \mathcal{H}(V)$  sur une arête  $(u, v)$  liant deux noeuds  $u$  et  $v$  est définie  $\forall (u, v) \in E$  par

$$(df)(u, v) = (df)_{uv} = \sqrt{w(u, v)} (f(v) - f(u)) \quad (5)$$

La dérivée  $\left. \frac{\partial f}{\partial e} \right|_v : \mathcal{H}(V) \rightarrow \mathbb{R}^+$  d'une fonction  $f$  au noeud  $v$  selon une arête  $e = (u, v)$  est définie par

$$\partial_v f(u) = \left. \frac{\partial f}{\partial e} \right|_v = (df)(u, v)$$

Pour une fonction  $f \in \mathcal{H}(V)$  et un noeud  $v$ , le gradient de  $f$  au noeud  $v$  est l'opérateur vectoriel défini par  $\nabla : V \rightarrow \mathbb{R}^N$

$$\nabla f(v) = \nabla_v f = (\partial_v f(u) : (u, v) \in E, u \sim v)^T \quad (6)$$

La norme du gradient sur graphe  $\nabla f$  au noeud  $v$  est défini par  $\|\nabla\| : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^+$

$$\|\nabla_v f\| = \sqrt{\sum_{u \sim v} (\partial_v f(u))^2} = \sqrt{\sum_{u \sim v} w(u, v) (f(v) - f(u))^2} \quad (7)$$

La norme du gradient mesure la régularité d'une fonction autour d'un noeud. Soit  $\mathcal{R}$  une fonctionnelle sur  $\mathcal{H}(V)$ , pour chaque  $p \in [1, +\infty)$ , définie par  $\mathcal{R}_p(f) = \sum_{v \in V} \|\nabla_v f\|^p$ . Cette fonctionnelle  $\mathcal{R}_p$  peut être vue comme une mesure de régularité de  $f$  puisque c'est la somme des variations locales en chaque noeud. La divergence sur graphe est un opérateur  $div : \mathcal{H}(E) \rightarrow \mathcal{H}(V)$  qui satisfait

$$\langle df, h \rangle_{\mathcal{H}(E)} = \langle f, -div(h) \rangle_{\mathcal{H}(V)}$$

avec  $f \in \mathcal{H}(V)$  et  $h \in \mathcal{H}(E)$ . Cet opérateur  $-div$  est l'opérateur adjoint  $d^*$  de l'opérateur de différence  $d$ . A partir de la définition des produits scalaires dans  $\mathcal{H}(V)$  et  $\mathcal{H}(E)$  et l'équation (5), on peut prouver que la divergence sur graphe d'une fonction  $h \in \mathcal{H}(E)$  au noeud  $v$  peut s'exprimer comme

$$(-div(h))(v) = \sum_{u \sim v} \sqrt{w(v, u)} (h(u, v) - h(v, u)) \quad (8)$$

#### 3.2 Le p-Laplacien

La laplacien sur graphe peut être vu comme un analogue discret de l'opérateur de Laplace-Beltrami pour des variétés Riemanniennes. Le laplacien sur graphe est un opérateur  $\Delta : \mathcal{H}(V) \rightarrow \mathcal{H}(V)$  défini par  $\Delta f = -div(df) = d^*(df)$ . La laplacien sur graphe est un opérateur linéaire car le gradient et la divergence sont tous deux linéaires. En outre il est auto adjoint :

$$\langle \Delta f, g \rangle_{\mathcal{H}(V)} = \langle df, dg \rangle_{\mathcal{H}(E)} = \langle f, \Delta g \rangle_{\mathcal{H}(V)}$$

et semi-défini positif :

$$\langle \Delta f, f \rangle_{\mathcal{H}(V)} = \langle df, df \rangle_{\mathcal{H}(E)} = \mathcal{R}_p(f) \geq 0$$

ce qui implique que

$$\Delta f = \frac{\partial \mathcal{R}_p(f)}{\partial f} \quad (9)$$

La courbure sur graphe est un opérateur non linéaire  $\kappa : \mathcal{H}(V) \rightarrow \mathcal{H}(V)$  défini par  $\kappa f = -div\left(\frac{df}{\|\nabla f\|}\right) = d^*\left(\frac{df}{\|\nabla f\|}\right)$ . Nous pouvons généraliser le laplacien et la courbure sur graphe en un opérateur qui peut être vu comme un analogue discret du p-Laplacien. Le p-Laplacien sur graphe est un opérateur  $\Delta_p : \mathcal{H}(V) \rightarrow \mathcal{H}(V)$  avec  $p \in [1, +\infty)$  défini par

$$\Delta_p f = -div\left(\|\nabla f\|^{p-2} df\right) = d^*\left(\|\nabla f\|^{p-2} df\right) \quad (10)$$

Clairement nous avons  $\Delta_1 = \kappa$  et  $\Delta_2 = \Delta$ . En substituant (5) et (8) dans la définition (10) de  $\Delta_p f$ , nous obtenons :

$$(\Delta_p f)(v) = \sum_{u \sim v} \gamma(u, v) (f(v) - f(u)) \quad (11)$$

où  $\gamma(u, v)$  est la fonction définie par

$$\gamma(u, v) = w(u, v) \left( \|\nabla f(v)\|^{p-2} + \|\nabla f(u)\|^{p-2} \right) \quad (12)$$

ce qui généralise le laplacien et la courbure classiques sur graphes. En général  $\Delta_p$  est non linéaire (sauf dans le cas où  $p = 2$ ) et est positif semi-défini. Afin d'éviter d'avoir un dénominateur à zéro lors du calcul de la courbure, le gradient sur graphe  $\|\nabla_v f\|^{p-2}$  est remplacé par sa version régularisée  $(\epsilon + \|\nabla_v f\|^{p-2})$  avec  $\epsilon \rightarrow 0$ .

### 4 Régularisation sur graphes

Dans cette section nous proposons un cadre général pour la régularisation sur graphes, un graphe étant une représentation discrète de données dont la dimensionnalité et la topologie sont arbitraires. Dans un soucis de clarté, nous présentons ce cadre pour le cas des images scalaires mais le principe reste le même pour des images couleur. Dans ce cas une image couleur  $f$  est composée de trois composantes  $f_1, f_2, f_3$  et la régularisation est appliquée sur chaque composante indépendamment.

## 4.1 Cadre général

Etant donné un graphe  $\mathcal{G} = (V, E)$  auquel est associée une fonction de pondération  $w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ , nous désirons effectuer la  $p$ -régularisation d'une fonction  $f^0 \in \mathcal{H}(V)$  en utilisant le  $p$ -Laplacien. Cela consiste à chercher une fonction  $f^* \in \mathcal{H}(V)$  qui est non seulement suffisamment lisse sur  $\mathcal{G}$  mais également suffisamment proche de la fonction  $f$ . Ceci peut être formalisé par le problème d'optimisation suivant comme la minimisation d'une somme pondérée de deux énergies :

$$f^* = \min_{f \in \mathcal{H}(V)} \left\{ E_p = \mathcal{R}_p(f) + \lambda \|f - f^0\|^2 = \sum_{v \in V} \|\nabla_v f\|^p + \lambda \sum_{v \in V} \|f - f^0\|^2 \right\} \quad (13)$$

Le premier terme est le terme de régularité qui impose que  $f$  ne change pas trop entre des noeuds proches. Le second terme est l'attache aux données qui impose que  $f$  ne soit pas trop éloignée de  $f^0$ .  $\lambda \geq 0$  est un paramètre de fidélité aux données initiales qui spécifie le compromis entre ces deux termes d'énergie. Les deux termes de l'énergie  $E_p$  sont des fonctions strictement convexes de  $f$  et ce problème a une solution unique pour  $p = 1$  or  $2$  qui satisfait :

$$\frac{\partial E_p}{\partial f} \Big|_v = 0, \forall v \in V \quad (14)$$

En utilisant la propriété (9) du  $p$ -Laplacien pour calculer la dérivée du premier terme de  $E_p$ , l'équation (14) peut être réécrite ainsi :

$$(\Delta_p f^*)(v) + 2\lambda (f^*(v) - f^0(v)) = 0, \forall v \in V \quad (15)$$

La solution  $f$  du problème (13) est aussi la solution de (15). En substituant l'expression du  $p$ -Laplacien dans (15), on obtient,  $\forall v \in V$  :

$$\left( 2\lambda + \sum_{u \sim v} \gamma_{uv} \right) f^*(v) - \sum_{u \sim v} \gamma(u, v) f^*(u) = 2\lambda f^0(v) \quad (16)$$

Parmi toutes les méthodes de résolution de (16), nous utilisons l'algorithme itératif de Gauss-Jacobi. Soit  $t$  le numéro d'itération et  $f^{(t)}$  la solution de (16) à l'itération  $t$ . La fonction initiale  $f^{(0)}$  peut être initialisée avec  $f^0$ . L'itération correspondante est donnée par,  $\forall v \in V$  :

$$f^{(t+1)}(v) = \frac{2\lambda}{2\lambda + \sum_{u \sim v} \gamma^{(t)}(u, v)} f^0(v) + \frac{\sum_{u \sim v} \gamma^{(t)}(u, v) f^{(t)}(u)}{2\lambda + \sum_{u \sim v} \gamma^{(t)}(u, v)} \quad (17)$$

où  $\gamma^{(t)}$  est la fonction  $\gamma(u, v)$  à l'itération  $t$ . On notera que la valeur de  $f(v)$  à une itération donnée ( $t + 1$ ) dépend de deux quantités : la valeur originale de  $f$  en  $v$  (soit  $f^0(v)$ ) et les valeurs à l'itération  $t$  dans le voisinage de  $v$ . Ces quantités sont pondérées par des poids dont les valeurs dépendent de la somme des variations locales. L'algorithme complet pour calculer la solution de (13) prend en entrée un graphe

$\mathcal{G} = (V, E)$ , la fonction de pondération  $w$ , le paramètre  $\lambda$ , le degré de régularité  $p$ , la fonction initiale  $f^0 = f^{(0)}$  et le nombre d'itérations  $i$ . Tout d'abord, les poids sont initialisés pour chaque arête de  $E$ . Ensuite, pour chaque itération  $t = 0, \dots, i$  :

- pour chaque  $v \in V$ ,  $f^{(t+1)}(v)$  est calculé selon (17),
- pour chaque arête  $(u, v) \in E$ , la fonction  $\gamma^{(t+1)}(u, v)$  est mise à jour selon (12).

Ce filtre est non linéaire à part pour  $p = 2$  qui est linéaire et dont les coefficients  $\gamma$  n'ont pas à être mis à jour à chaque itération. Dans ce cas et si  $\lambda \neq 0$ , la solution optimale peut être obtenue en répétant (a) jusqu'à convergence, c'est à dire jusqu'à ce que  $|f^{(t+1)} - f^{(t)}| < \epsilon$ , avec  $\epsilon \rightarrow 0$ .

## 4.2 Régularisation pour $p = 2$

Quand  $p = 2$ , en utilisant (15) on en déduit que la solution de (13) est basée sur le Laplacien et satisfait

$$\Delta f^* + 2\lambda (f^* - f^0) = 0 \quad (18)$$

Ceci peut être vu comme un analogue discret de l'équation d'Euler-Lagrange. Dans ce cas le filtre de la section 4.1 est linéaire et si  $\lambda \neq 0$ , il converge vers la solution de (13). Le schéma itératif utilisé pour résoudre ceci est exprimé par,  $\forall v \in V$  :

$$\begin{cases} f^0 = f \\ f^{(t+1)}(v) = \frac{2\lambda}{2\lambda + \sum_{u \sim v} w(u, v)} f^0(v) + \frac{\sum_{u \sim v} w(u, v) f^t(u)}{2\lambda + \sum_{u \sim v} w(u, v)} \end{cases} \quad (19)$$

où  $t$  indique le numéro de l'itération. Nous définissons la fonction  $c : V \rightarrow \mathbb{R}^+$  par  $c(v) = \frac{1}{2\lambda + \sum_{u \sim v} w(u, v)}$  et le schéma itératif s'exprime alors ainsi,  $\forall v \in V$  :

$$f^{(t+1)}(v) = 2\lambda c(v) f^0(v) + c(v) \sum_{u \sim v} w(u, v) f^t(u) \quad (20)$$

On peut constater qu'à chaque itération, la nouvelle valeur d'un noeud est obtenue à partir des valeurs pondérées de ses voisins et de la sienne. Le filtre correspondant est un filtre passe-bas dont le comportement s'adapte à l'image à traiter grâce aux valeurs de  $w(u, v)$  calculées à partir de  $f^0$ . Quand  $\lambda = 0$  et  $w(u, v) = 1 \forall (u, v) \in E$ , c'est l'analogue discret de la diffusion sur des variétés Riemanniennes [7].

## 4.3 Régularisation pour $p = 1$

Quand  $p = 1$ , en utilisant (15) on en déduit que la solution de (13) est basée sur l'opérateur non linéaire de courbure  $\kappa$  et satisfait

$$\kappa f^* + 2\lambda (f^* - f^0) = 0 \quad (21)$$

Le schéma itératif utilisé pour résoudre ceci est exprimé par, avec  $f^0 = f, \forall(u, v) \in E, \forall v \in V$  :

$$\begin{cases} f^0 = f \\ \gamma^{(t+1)}(u, v) = \\ w(u, v) = \left( \frac{1}{\epsilon + \|\nabla f^{(t+1)}(v)\|} + \frac{1}{\epsilon + \|\nabla f^{(t+1)}(u)\|} \right) \\ f^{(t+1)}(v) = \frac{2\lambda}{2\lambda + \sum_{u \sim v} \gamma^t(u, v)} f^0(v) + \frac{\sum_{u \sim v} \gamma^t(u, v) f^t(u)}{2\lambda + \sum_{u \sim v} \gamma^t(u, v)} \end{cases} \quad (22)$$

De même que pour  $p = 2$ , nous pouvons définir la fonction  $c : V \rightarrow \mathbb{R}^+$  par  $c^t(v) = \frac{1}{2\lambda + \sum_{u \sim v} \gamma^t(u, v)}$  et le schéma itératif utilisé pour calculer les nouvelles valeurs de  $f^t$  s'exprime ainsi,  $\forall v \in V$  :

$$f^{(t+1)}(v) = 2\lambda c^t(v) f^0(v) + c^t(v) \sum_{u \sim v} \gamma^t(u, v) f^t(u) \quad (23)$$

Si l'on compare ceci avec l'algorithme itératif dans le cas de  $p = 2$ , c'est également un filtre passe-bas mais dont les coefficients sont mis à jour de façon adaptative au cours des itérations en plus de mettre à jour la fonction  $f$ . Pour  $p = 1$ , si  $\forall(u, v) \in E, w(u, v) = 1$ , ce filtre itératif sur un graphe de type grille régulière correspond au TV digital filter [10] ( $TV+L^2$ ).

## 5 Applications

Nous montrons dans cette section différentes applications possibles de la méthode de régularisation sur graphe proposée pour le traitement d'images couleur. Soit  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  une image couleur. Pour appliquer la régularisation sur graphe à une image couleur, il faut lui associer une structure de graphe. Pour la restauration, nous considérons des graphes de type grille régulière en 4-connexité. A chaque noeud est associé la couleur du pixel correspondant, donc pour  $f \in \mathcal{H}(V)$ , nous avons  $f : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ . La régularisation est effectuée sur chaque composante de l'image couleur indépendamment et donc le p-Laplacien est différent pour chaque composante, on a  $\gamma_i(u, v) = w(u, v) \left( \|\nabla f_i(v)\|^{p-2} + \|\nabla f_i(u)\|^{p-2} \right)$  pour la  $i^{ieme}$  composante. Dans le cas de  $p = 2$  il est identique pour toutes les composantes, mais pour  $p = 1$ , il est différent. Afin d'éviter ce problème de non-couplage de la restauration entre les composantes et prendre en compte l'aspect vectoriel des données colorimétriques, le p-Laplacien est considéré comme étant le même pour les trois régularisations, mais en utilisant une norme vectorielle dans le cas où  $p = 1$  :

$$\gamma(u, v) = w(u, v) \left( \|\nabla f(v)\|_{3D}^{p-2} + \|\nabla f(u)\|_{3D}^{p-2} \right) \\ \|\nabla f(v)\|_{3D} = \sqrt{\|\nabla f_1(v)\|^2 + \|\nabla f_2(v)\|^2 + \|\nabla f_3(v)\|^2}$$

La méthode de régularisation s'applique donc sur chaque composante indépendamment avec une pondération des

arêtes et un gradient vectoriel qui agissent tous deux comme un couplage entre les composantes. Nous avons considéré la même fonction de pondération pour toutes les applications présentées dans cet article, à savoir  $w(u, v) = \frac{1}{\epsilon + \|f_i(u) - f_i(v)\|}, \epsilon \rightarrow 0$  et  $\|f(u) - f(v)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \|f_i(u) - f_i(v)\|^2}$ . La figure 1 présente deux exemples de restauration d'images couleur dans le cas de bruit gaussien ou poivre et sel. En comparaison avec les EDP, notre méthode de régularisation est aussi efficace tout en étant plus simple et plus rapide. Notre méthode

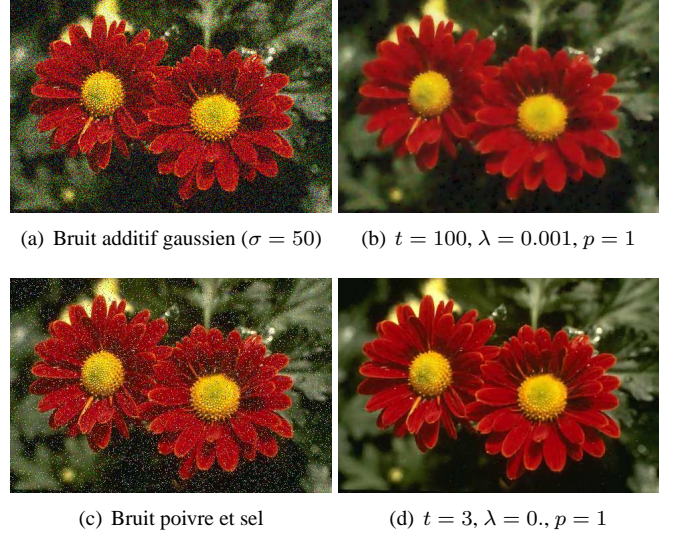


Figure 1 – Exemples de Restauration.

régularisation peut s'avérer également extrêmement utile pour la simplification d'images. Partant d'une partition fine d'une image (une partition sur-segmentée mais proche de l'image originale), nous pouvons, en contruisant le graphe d'adjacence des régions, opérer une régularisation directement sur ce graphe. A chaque noeud est associé la couleur moyenne de la région et à chaque arête la distance entre deux régions connexes. Ceci permet d'effectuer une simplification d'image sans déplacement des contours (Figure 2). Utiliser la régularisation sur graphe est une alternative rapide et intéressante à la simplification classique d'images. Enfin la régularisation peut servir à la construction de hiérarchies de partitions : la régularisation tend à faire se rapprocher des modèles similaires et ceux-ci peuvent fusionner au fur et à mesure des itérations. Le principe (voir [16]) revient à alterner diffusion (regularisation sans attache aux données, soit  $\lambda = 0$ ) et fusion de régions selon un critère donné (voir dans [16] pour différents critères). Les critères peuvent être fixes, évolutifs ou adaptatifs. Ceci permet de générer des partitions de finesses différentes à partir d'une partition initiale, ce qui constitue une hiérarchie de partitions utile pour la segmentation. La figure 3 présente des segmentations obtenues pour différents critères de fusion à savoir un critère fixe (seuil égal à 1), un critère évolutif



(a) Image originale (150072 pixels) (b) Zones homogènes (3011 régions)



(c)  $t = 5, p = 1, \lambda = 0.01$

(d)  $t = 5, p = 2, \lambda = 0.$

Figure 2 – Simplification d’une image couleur à partir de son graphe d’adjacence de régions.

(qui augmente selon le niveau de la pyramide irrégulière) et un critère adaptatif [17] ( $p = 2$  et la partition fine a été générée par les zones homogènes de niveau 1 [16]).

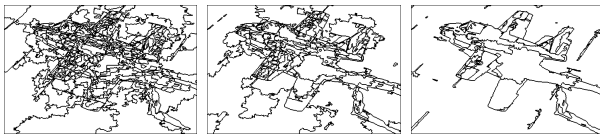


Figure 3 – Une hiérarchie de partition par régularisation et fusion par différents critères : les frontières des régions.

## 6 Conclusion

Nous avons proposé un cadre général de régularisation discrète basé sur une géométrie différentielle sur graphes. Une famille de filtres linéaires et non linéaires en dérive et ceci permet le traitement d’images couleur via l’utilisation de graphes pour représenter des données colorimétriques. Nous n’avons considéré dans cet article que des connexités dans le domaine de l’image pour définir le graphe (adjacence spatiale dans l’image). L’algorithme de régularisation d’images couleur que nous avons proposé est générique, efficace et facile à mettre en oeuvre. Nous comptons l’appliquer à différents problèmes de vision tels que la coalescence colorimétrique (connexité dans l’espace colorimétrique), les contours actifs, la retouche d’image, la décomposition structure-texture, etc.

## Références

[1] A. Bakushinsky et A. Goncharky. *Ill-Posed Problems : Theory and Applications*. Kluwer Academic Publishers, 1994.

[2] G. Aubert et P. Kornprobst. *Mathematical Problems in Image Processing*. Springer-Verlag, 2002.

[3] A.N. Tikhonov et V.Y. Arsenin. *Solution of Ill-posed Problems*. Winston & Sons, 1977.

[4] T.F. Chan et J. Shen. *Image Processing and Analysis - Variational, PDE, wavelet, and stochastic methods*. SIAM, 2005.

[5] P. Perona et J. Malik. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Transactions on Pattern Analysis Machine Intelligence.*, 12 :629–639, 1990.

[6] L. Rudin, S. Osher, et E. Fatemi. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D*, 60 :259–268, 1992.

[7] G. Sapiro et D. Ringach. Anisotropic diffusion of multivalued images with applications to color filtering. *IEEE Transactions on Image Processing*, 10(5) :1582–1586, 1996.

[8] P. Blomgren et T.F. Chan. Color tv : total variation methods for restoration of vector-valued images. *IEEE Transactions on Image Processing*, 7(3) :304–309, 1998.

[9] A. Brook, R. Kimmel, et N. Sochen. Variational restoration and edge detection for color images. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 18 :247–268, 2003.

[10] T. Chan, S. Osher, et J. Shen. The digital tv filter and nonlinear denoising. *IEEE Transactions on Image Processing*, 10 :231–241, 2001.

[11] D. Zhou et B. Schölkopf. A regularization framework for learning from graph data. Dans *ICML Workshop on Statistical Relational Learning and Its Connections to Other Fields*, pages 132–137, 2004.

[12] R. Diestel. *Graph Theory*, volume 173. Springer-Verlag, 2005.

[13] J. Matas, R. Marik, et J. Kittler. The color adjacency graph representation of multi-coloured objects. Rapport technique VSSP-TR-1/95, University of Surrey, Surrey, Great Britain, 1995.

[14] A. Bensoussan et J-L. Menaldi. Difference equations on weighted graphs. *Journal of Convex Analysis*, 12, 2005.

[15] S. Bogleux et A. Elmoataz. Image smoothing and segmentation by graph regularization. Dans *International Symposium on Visual Computing*, volume LNCS 3804, pages 745–752, 2005.

[16] O. Lezoray, C. Meurie, P. Belhomme, et A. Elmoataz. Multi-scale image segmentation in a hierarchy of partitions. Dans *EUSIPCO*, 2006.

[17] R. Nock et F. Nielsen. Statistical region merging. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 26(11) :1452–1458, 2004.