

Comparaison de schémas de décomposition en ondelettes pour un traitement local des maillages surfaciques triangulaires

C. Roudet¹

F. Dupont¹

A. Baskurt²

¹Laboratoire LIRIS, UMR 5205 CNRS
Université Claude Bernard Lyon 1, Villeurbanne Cedex

²Laboratoire LIRIS, UMR 5205 CNRS
INSA Lyon, Villeurbanne Cedex

{croudet, fdupont, abaskurt}@liris.cnrs.fr

Résumé

Depuis quelques années, les objets tridimensionnels concurrencent le multimédia traditionnel (images, sons et vidéos) et sont exploités par de plus en plus d'applications. Les résultats récents en compression d'objets lisses par morceaux, représentés sous forme de maillages surfaciques, ont motivé notre recherche d'une adaptation de ces techniques aux surfaces naturelles par le biais de l'analyse multirésolution. Nous présentons une analyse des détails haute-fréquence obtenus à partir de plusieurs schémas de décomposition en ondelettes, afin d'envisager une segmentation en patches surfaciques suivie d'une décomposition adaptative de ces maillages.

Mots clefs

Modèles 3D, surfaces de subdivision, ondelettes géométriques, analyse multirésolution, compression.

1 Introduction

Grâce aux dernières avancées des techniques d'échantillonnage, les images, sons et vidéos numériques font maintenant largement partie de notre quotidien. Plus récemment, le développement de l'infographie et de la vision tridimensionnelle a ouvert la voie à la modélisation d'objets ou de scènes complexes en trois dimensions. Ceux-ci sont le plus souvent représentés sous forme de maillages surfaciques triangulaires où l'on code la position des sommets dans l'espace 3D euclidien (information géométrique) ainsi que la manière dont ils sont connectés entre eux (information topologique).

Pour répondre aux attentes de réalisme actuelles, il est nécessaire de sélectionner un grand nombre d'échantillons sur la surface de ces objets afin d'obtenir une représentation précise et détaillée. C'est pourquoi, même si les espaces de stockage des ordinateurs et la vitesse de transmission des réseaux ne cessent d'augmenter, il paraît indispensable de disposer de techniques de compression efficaces pour stocker, échanger et même visualiser de tels objets.

Pour les applications manipulant des données sensibles, des méthodes de compression sans perte sont généralement utilisées. Celles-ci se caractérisent par une réorganisation de l'information et sont les premières à avoir été proposées pour la compression d'objets 3D. Mais dans la majorité des cas, il est possible d'obtenir des taux de compression bien meilleurs en s'autorisant quelques pertes que l'on cherche à dissimuler.

L'obtention d'une séquence de bits de taille minimale n'est pas le seul objectif visé par les applications manipulant les maillages. En effet, un des enjeux actuels est de proposer une adaptation du transfert de ces données aux ressources à disposition (type de réseau et nature des terminaux utilisés pour la visualisation) ainsi qu'aux diverses demandes de l'utilisateur. Les techniques d'analyse multirésolution permettent de répondre à ces besoins car elles s'appuient sur une représentation scalable des données. Celles-ci utilisent généralement une transformée en ondelettes, outil performant qui a fait ses preuves en terme de compression d'images et de vidéos puisqu'il a notamment été intégré dans la norme JPEG2000 [1].

Actuellement ces méthodes réalisent une projection globale des maillages dans l'espace transformé, sans chercher à adapter la décomposition en ondelettes et la quantification des coefficients à la courbure, la rugosité ou la direction des textures caractérisant la surface des objets. Afin d'exploiter ces remarques, nous présentons une analyse des coefficients d'ondelettes obtenus lors l'utilisation de différents schémas de décomposition sur des surfaces plus ou moins bruitées. L'étude de leur répartition permet d'envisager une segmentation basée sur les caractéristiques surfaciques des maillages qui constituerait la première étape d'une chaîne de compression adaptative. Cette étude pourrait également être exploitée pour envisager des méthodes adaptatives de débruitage, filtrage, lissage ou tatouage de maillages.

Dans le paragraphe suivant, nous présentons brièvement plusieurs travaux récents d'analyse de maillages surfaciques. Ensuite nous détaillons notre méthode d'analyse multirésolution utilisant le potentiel des ondelettes de sec-

onde génération. Enfin nous commentons les résultats obtenus avant de présenter les perspectives de ce travail.

2 Etat de l'art

Contrairement aux images non vectorielles, aux sons et aux vidéos, les maillages se caractérisent le plus souvent par un échantillonnage irrégulier. C'est la raison pour laquelle les techniques de traitement d'images sont difficiles à étendre aux maillages. Pour l'analyse de ces données tridimensionnelles, il existe plusieurs méthodes de projection du signal afin d'obtenir une information moins redondante. Certaines proposent des concepts spécialement adaptés à cette irrégularité et se basent sur une extension de l'analyse de Fourier classique aux maillages surfaciques. Cependant ces méthodes ne proposent qu'une progressivité géométrique. C'est pourquoi beaucoup de travaux se sont tournés vers l'analyse multirésolution, qui utilise une réorganisation de la topologie ce qui permet d'adapter les techniques utilisées en traitement d'images ou de vidéos, comme la transformée en ondelettes.

2.1 Principes de l'analyse multirésolution

Le principe de ces méthodes est de réaliser une décomposition réversible d'un maillage, à l'aide de deux filtres appliqués en cascade. Durant la phase d'analyse, un filtre passe-bas (représenté par la lettre A sur la figure 1) et un filtre passe-haut (lettre B sur la figure 1) sont appliqués sur le maillage initial produisant respectivement une approximation plus grossière et un ensemble de détails haute-fréquence.

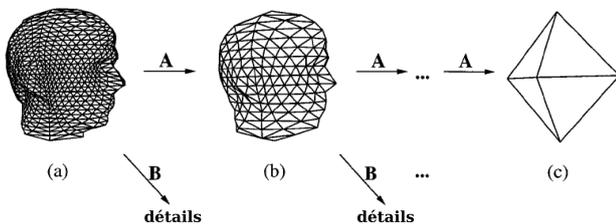


Figure 1 – Décomposition en ondelettes d'un maillage surfacique triangulaire. Image tirée de [2].

L'analyse multirésolution pour les maillages de topologie arbitraire a été introduite par Lounsbery et al. [2] qui ont choisi d'appliquer une technique de raffinement en partant d'un maillage très simple. Pour cela, ils ont utilisé une subdivision canonique des facettes ainsi qu'une transformée en ondelettes de seconde génération. L'atout principal des ondelettes est d'éliminer une grande partie de la redondance présente dans les signaux.

2.2 Les ondelettes de seconde génération

L'analyse multirésolution produit une décomposition de l'espace en une somme de sous-espaces imbriqués. Ainsi pour chaque niveau de résolution le maillage grossier et les détails sont obtenus respectivement par projection sur une

base de fonctions d'échelles et d'ondelettes. Le maillage reconstruit par synthèse est considéré comme la meilleure approximation du modèle original au sens des moindres carrés si ces fonctions sont toutes orthogonales entre elles. Or cette orthogonalité est souvent difficile à obtenir avec des outils d'analyse par bancs de filtres basés sur la transformée de Fourier. C'est pourquoi les ondelettes de seconde génération, basées sur des arguments purement spatiaux, sont très utilisées pour les maillages. Le procédé de construction de ces ondelettes appelé lifting (introduit par Sweldens [3]) permet d'élever l'ordre de l'ondelette utilisée et consiste à intervertir les phases de filtrage et de sous-échantillonnage utilisées lors de l'analyse par bancs de filtres. On limite ainsi le nombre d'opérations à effectuer et de plus l'étape de synthèse est simplement obtenue par inversion des signes et de l'ordre des filtres d'analyse.

Pour pouvoir traiter les maillages surfaciques par ondelettes, ils sont considérés alors non plus comme des objets géométriques mais comme des fonctions via une paramétrisation de celles-ci. Cette paramétrisation doit alors tenir compte du fait que l'extension de l'analyse multirésolution introduite par Lounsbery et al. [2] ne fonctionne que sur des maillages possédant une topologie particulière. Une fois cette paramétrisation déterminée, elle est alors utilisée par la phase de remaillage afin de construire un maillage semi-régulier approchant l'objet initial et possédant une topologie propice à l'application d'une décomposition en ondelettes. Les travaux en analyse multirésolution utilisant cette phase de remaillage se différencient par la façon de construire le maillage semi-régulier.

2.3 Remaillage construit par raffinement

Lounsbery et al. [2] ont d'abord proposé une technique de remaillage par raffinement d'un modèle très simple (un octaèdre par exemple). Mais il faut alors plusieurs itérations avant d'aboutir à une forme ressemblant à l'objet de départ. Afin de réduire le nombre d'itérations nécessaires lors de la reconstruction, Turk [4] a proposé de partir d'un maillage ressemblant plus à l'objet initial, qu'il construit en répartissant un nombre limité de points sur la surface de départ. Le nuage obtenu est ensuite retriangulé en préservant la topologie de l'objet. Une démarche similaire est utilisée par Eck et al. [5] qui partitionnent le modèle initial en cellules de Voronoï. La triangulation de Delaunay permet alors de construire le maillage grossier. Enfin, une amélioration de ces techniques, qui repose sur une paramétrisation respectant les caractéristiques géométriques et les propriétés visuelles du maillage, a été mise au point par Gioia et al. [6]. Celle-ci leur permet d'obtenir en moyenne 2 fois moins de coefficients d'ondelettes sur des objets naturels.

2.4 Remaillage construit par décimation

Il existe un autre type de remaillage qui consiste premièrement à appliquer une simplification séquentielle

du maillage original et ensuite à raffiner régulièrement le résultat par subdivision. Plusieurs types de simplifications séquentielles ont été introduites, dont les plus célèbres sont décrites dans [7, 8, 9]. Les techniques d'analyse multirésolution utilisant ce procédé de remaillage, se distinguent également par le schéma de subdivision utilisé qui peut être de nature approximante ou interpolante. La plupart de ces méthodes utilisent le schéma de "butterfly" lifté [2, 10] qui permet de mieux contrôler la surface résultante qu'en utilisant un schéma approximant. Mais le schéma approximant de Loop utilisé par Khodakovski et al. [11], prenant en compte un plus large voisinage que le schéma "butterfly", donne des courbes de reconstruction équivalentes en terme de taux de distorsion avec un aspect visuel globalement meilleur.

Enfin l'un des codeurs les plus efficaces actuellement [12] utilise un schéma de "butterfly" non lifté et concentre la quasi-totalité de l'information géométrique dans les composantes normales des coefficients d'ondelettes. Le fait que le schéma lifting ne donne pas de meilleurs résultats en terme de fidélité géométrique et de codage, est dû à la technique de remaillage utilisée.

Les méthodes citées précédemment proposent toutes, en plus de l'analyse, une chaîne complète de compression qui est illustrée par le schéma de la figure 2. Les résultats en terme de compression sont fortement conditionnés par le remaillage et la transformée en ondelettes choisis. Mais l'étape de quantification des coefficients est également importante pour obtenir des taux de compression intéressants. Pour preuve, Payan et al. [13] obtiennent une meilleure qualité visuelle de reconstruction que Khodakovsky et al. [12] à débit similaire grâce à une optimisation de l'étape de quantification. Cela leur permet en effet de minimiser l'erreur de reconstruction sous la contrainte d'un débit fixé.

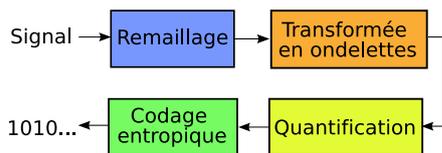


Figure 2 – Principales étapes intervenant dans toute chaîne de compression avec pertes de maillages utilisant une transformée en ondelettes.

Nous avons vu que, lors de la phase d'analyse, toutes ces méthodes appliquent une décomposition globale de l'objet. Or il peut être intéressant de chercher à traiter localement certains modèles, aussi bien en terme de décomposition en ondelettes que de quantification des coefficients surtout si leur surface est très peu uniforme.

3 Méthode d'analyse proposée

Notre approche d'analyse multirésolution repose sur la mise en place de plusieurs schémas de subdivision de nature interpolante qu'il est possible d'associer

avec différents types de transformées en ondelettes afin d'obtenir une décomposition adaptée localement aux différents aspects surfaciques des maillages.

3.1 Schémas de subdivision envisagés

Les schémas de subdivision retenus consistent d'une part à ajouter un sommet au milieu de chaque arête (transformation topologique) et d'autre part à appliquer à ces nouveaux sommets un masque de lissage tenant compte du voisinage (transformation géométrique).

Les surfaces de subdivision ont été ici retenues car elles permettent de définir facilement un schéma multirésolution et de bénéficier d'une représentation hiérarchique utile pour le codage et la transmission de modèles 3D. Elles sont très utilisées conjointement avec une transformée en ondelettes pour le codage de surfaces naturelles. Les coefficients d'ondelettes renferment alors les détails qui n'ont pas pu être pris en compte par la subdivision seule.

Les schémas interpolants sont les plus utilisés pour les maillages surfaciques triangulaires, car ils génèrent des matrices d'analyse creuses, applicables en temps linéaire. Nous avons ainsi cherché à comparer la décomposition produite pour les schémas suivants :

- le schéma "midpoint" où chaque nouveau sommet est ajouté au milieu de chaque arête ;
- le schéma "butterfly" de Dyn et al. [14] produisant une surface limite C^1 pour les maillages de topologie régulière. Ces pondérations sont indiquées en noir sur la partie droite de la figure 4 ;
- deux améliorations du schéma précédent, la première que nous avons mise au point et la seconde proposée par Zorin et al. [15]. Ces deux méthodes sont décrites dans la suite de ce paragraphe.

Le schéma de subdivision de "butterfly", introduit par Dyn et al. [14] est le schéma interpolant possédant le plus petit support, mais il produit des artéfacts indésirables sur des topologies irrégulières (visibles sur la figure 3).

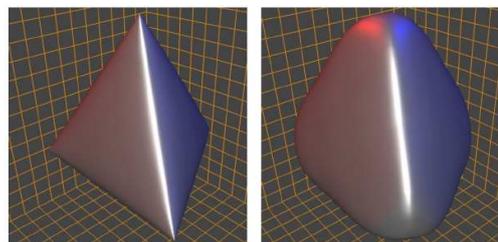


Figure 3 – Subdivision d'un tétraèdre avec le schéma de "butterfly" de Dyn et al. [14] (à gauche) et l'amélioration de Zorin et al. [15] (à droite). Image tirée de [15].

Pour éviter ces artéfacts, nous avons tout d'abord proposé un nouveau schéma qui conserve le masque introduit par

Dyn et al. [14] pour le déplacement des nouveaux sommets ayant un voisinage régulier et qui utilise le masque illustré par la partie gauche de la figure 4 dans tous les autres cas. Ce masque est tiré de la subdivision interpolante de Loop [16] et permet de s'adapter à tout type d'irrégularité de part son support restreint, tout en produisant une surface résultante globalement plus lisse.

L'amélioration proposée par Zorin et al. [15] introduit également de nouveaux masques pour les sommets irréguliers, tout en conservant la simplicité et le comportement du schéma originel. Les pondérations de ces masques, qui prennent en compte l'ensemble des voisins de chaque sommet irrégulier, ont été calculées à l'aide d'une transformée de Fourier discrète ainsi qu'une analyse en composantes principales. Ce schéma de subdivision, contrairement aux schémas interpolants classiques, donne des résultats comparables aux surfaces obtenues par des techniques approximantes en très peu d'itérations.

A la différence de l'extension proposée par Zorin et al. [15], qui utilise des pondérations adaptées à la valence, nous utilisons un unique masque pour l'ensemble des sommets irréguliers, afin d'obtenir un gain en temps d'exécution ainsi qu'une homogénéisation du traitement des irrégularités.

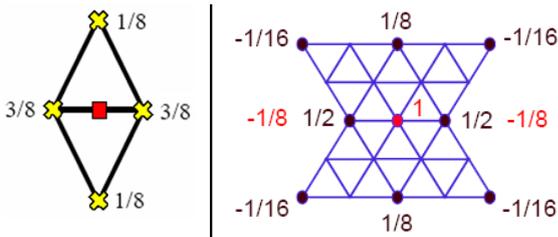


Figure 4 – A gauche : masque utilisé dans le schéma interpolant de Loop pour le déplacement des nouveaux sommets. A droite : masques du schéma de "butterfly" lifté tirés de [10]. En noir le masque de prédiction, en rouge (clair) le masque de mise à jour.

3.2 Transformées en ondelettes utilisées

Les différentes transformées en ondelettes de seconde génération utilisées conjointement aux schémas de subdivision permettent de coder les détails sous forme de vecteurs géométriques 3D. Elles consistent à appliquer les trois grandes étapes suivantes ou seulement les deux premières selon que l'on parle de schéma lifté ou non lifté :

- une opération de séparation du signal en composantes paires et impaires par l'utilisation d'ondelettes passeuses (lazy wavelets), qualifiée de transformée polyphase ;
- une opération de prédiction (appelée aussi lifting dual et représentée par la lettre P sur les figures 5 et 6) qui prédit les échantillons de rang pair à partir des échantillons de rang impair ;

- une opération de mise à jour (appelée aussi lifting primal et représentée par la lettre U sur les figures 5 et 6) qui permet de conserver sur une partie du signal la valeur moyenne de l'ensemble des informations.

Notre but étant d'obtenir les plus petits coefficients d'ondelettes possibles, nous proposons de comparer les transformées en ondelettes suivantes, qui peuvent être associées à chaque schéma décrit précédemment :

- transformée sans étape de mise à jour ;
- transformée utilisée par Lounsbery et al. [2] et plus récemment par Valette et al. [10], dont le principe est illustré sur 2 canaux par la figure 5 ;
- transformée introduite par Sweldens [3] et utilisée par Payan et al. [13], dont le principe est illustré sur 2 canaux par la figure 6.

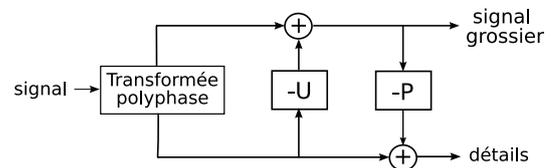


Figure 5 – Principe de l'analyse du schéma lifting à 2 canaux tiré des travaux de Lounsbery et al. [2].

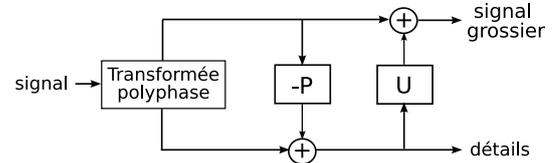


Figure 6 – Principe de l'analyse du schéma lifting à 2 canaux introduit par Sweldens [3].

4 Résultats

Pour effectuer une comparaison de ces différents masques et mener une analyse détaillée des décompositions en ondelettes, nous avons développé un outil d'analyse en C++ qui utilise la librairie géométrique CGAL (the Computational Geometry Algorithm Library). Il permet de visualiser, pour chaque niveau de résolution, l'approximation obtenue ainsi que l'amplitude et la direction des coefficients d'ondelettes sous forme de champs de vecteurs, comme le montre la figure 7.

Cette figure nous illustre également que les coefficients d'ondelettes sont principalement dirigés suivant la normale à la surface, ce qui montre bien l'intérêt de quantifier plus finement la composante normale lors d'une compression comme l'ont constaté Khodakovsky et al. [11] ainsi que Payan et al. [13].

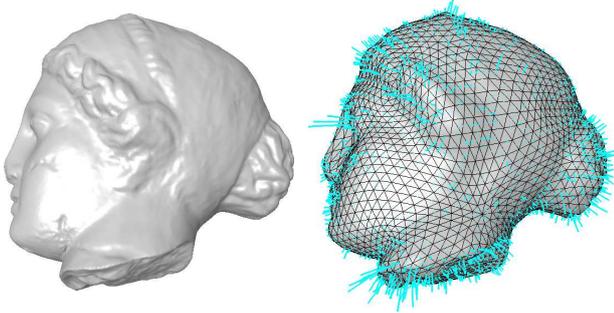


Figure 7 – Aperçu des coefficients d'ondelettes sous forme de champs de vecteurs (en bleu sur l'image de droite) après l'analyse du modèle Venus (à gauche) sur 3 niveaux de décomposition. Les coefficients ont été multipliés par un facteur 10 pour une meilleure visualisation.

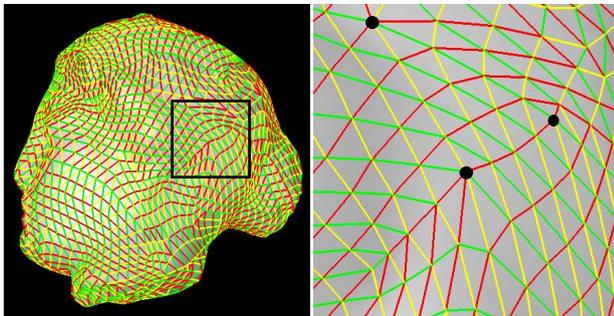


Figure 8 – Illustration de la séparation en sous-bandes haute-fréquence sur l'approximation de droite de la figure 7. On remarque l'influence des sommets irréguliers (marqué en noir sur l'image de droite) qui produisent une déviation des directions caractérisées.

On remarque enfin sur la figure 7 que les coefficients d'amplitude maximale sont situés au niveau des arêtes vives (sur le cou) et des détails haute-fréquence (yeux, chignon), puis que leur amplitude diminue au fur et à mesure que la surface devient lisse. Il est ainsi possible d'utiliser ces informations afin de procéder à une segmentation de l'objet en patches surfaciques d'aspect plus ou moins rugueux. Cette segmentation permettrait alors de procéder à une décomposition en ondelettes adaptative, suivie d'une quantification spécifique pour chaque patch, afin d'obtenir une chaîne de compression locale.

Le schéma lifting étant basé sur une grille d'échantillonnage triangulaire "par arête", il est possible de séparer les détails haute-fréquence en 3 sous-bandes. Cette différenciation est symbolisée par les 3 couleurs distinctes de la figure 8. Ce traitement permet alors de se rapprocher des techniques utilisées en traitement d'images où les composantes horizontale, verticale et diagonale des coefficients d'ondelettes sont séparés afin de les quantifier différemment et d'exploiter leurs corrélations dans ces directions lors du codage entropique.

Dans le cas des maillages, il peut ainsi être intéressant de différencier le traitement des détails en suivant des directions privilégiées propres au maillage. L'algorithme proposé dans cette optique, traite tout d'abord les arêtes incidentes à un sommet régulier choisi aléatoirement sur le maillage, puis propage les informations obtenues vers les sommets réguliers voisins. Tant que le maillage est régulier, les directions des sous-bandes restent bien distinctes comme nous pouvons le voir sur la figure 8 à gauche des 3 points noirs, mais elles sont évidemment dépendantes du remaillage choisi. On remarque également qu'une déviation se produit généralement sous l'influence des sommets irréguliers, rendant difficile la caractérisation de directions privilégiées sur l'ensemble du maillage. Pour remédier à cela et ainsi obtenir des directions reliées à la courbure, la rugosité et la texture des objets, un remaillage adapté à ces caractéristiques surfaciques sera nécessaire. Enfin, nous avons généré plusieurs objets plus ou moins bruités, regroupé sur la figure 9. Le modèle (b) a par exemple été construit par subdivision sur 4 niveaux d'un modèle de base et par ajout d'un bruit blanc additif uniforme d'amplitude ± 0.01 sur la version la plus fine (modèle (a) de la figure 10), ± 0.1 sur l'approximation intermédiaire (b) et ± 0.05 sur le modèle le plus grossier (c). L'analyse multirésolution du maillage (b) de la figure 9 est illustrée sur 3 niveaux par la figure 10.

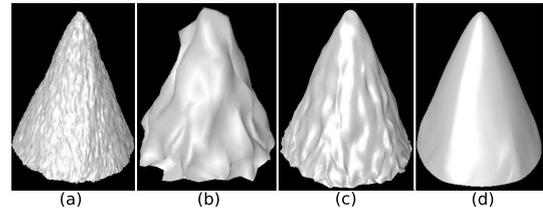


Figure 9 – Aperçu des objets générés par notre application, par subdivision et ajout d'un bruit blanc additif uniforme.

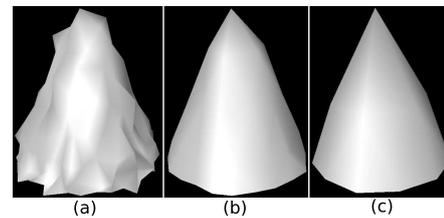


Figure 10 – Illustration de 3 niveaux de décomposition en ondelettes sur l'objet (b) de la figure 9.

Nous avons enfin analysé les coefficients d'ondelettes dans les 2 premiers niveaux de résolution décrits précédemment. Les histogrammes de la figure 11 montrent la répartition des coordonnées (x , y et z) de ces coefficients dans un repère local lié à la surface du modèle, la coordonnée z représentant leur composante normale. Nous pouvons re-

marquer que la différence d'amplitude du bruit généré lors de l'étape d'analyse en ondelettes se retrouve bien sur les histogrammes de la figure 11.

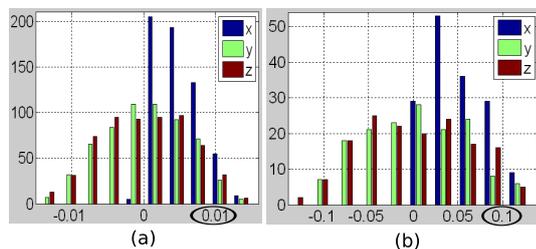


Figure 11 – Histogrammes montrant la répartition des coordonnées locales x , y et z des coefficients d'ondelettes provenant de l'analyse de la figure 10 au premier (a) et au second (b) niveau de décomposition.

5 Conclusion et perspectives

Nous avons proposé une méthode d'analyse permettant la comparaison de plusieurs schémas de décomposition et utilisant le pouvoir de décorrélation des ondelettes de subdivision. Nous avons également introduit un nouveau schéma de subdivision qui est une amélioration du schéma "butterfly" de Dyn et al. [14]. Les résultats obtenus sont encourageants car sa version liftée produit globalement des coefficients de plus faible amplitude qu'avec ce dernier, sur des objets naturels.

Nous avons enfin développé une application permettant la visualisation des coefficients d'ondelettes obtenus lors de l'analyse à différents niveaux de résolution ainsi que leur répartition sur 3 sous-bandes haute-fréquence. La séparation en sous-bandes proposée pourrait servir à éliminer une partie de la corrélation du signal non prise en compte par la plupart des méthodes actuelles.

Nous avons vu que l'analyse des coefficients d'ondelettes permet de caractériser les différents aspects de la surface des modèles 3D qui peut être plus ou moins lisse sur des objets naturels. Cette observation peut être exploitée pour réaliser une segmentation de ces objets en patches.

Une fois cette étape de segmentation réalisée, il serait alors possible de proposer une décomposition et une quantification différente pour chaque type de patch afin d'aboutir à une méthode de compression efficace.

6 Remerciements

Ce travail est soutenu par France Télécom R&D Rennes dans le cadre du projet CoSurf (Compression de surface).

References

[1] JPEG 2000 Part 1 Final Draft International Standard. ISO/IEC FDIS15444-1. December 2000.
 [2] M. Lounsbery, T. D. DeRose and J. Warren. Multiresolution analysis for surfaces of arbitrary topological

type. *ACM Transactions on Graphics*, 16(1):34–73, 1997.

[3] W. Sweldens. The lifting scheme: A construction of second generation wavelets. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 29(2):511–546, 1998.
 [4] G. Turk. Re-tiling polygonal surfaces. *Computer Graphics*, 26(2):55–64, 1992.
 [5] M. Eck, T. DeRose, T. Duchamp, H. Hoppe, M. Lounsbery and W. Stuetzle. Multiresolution analysis of arbitrary meshes. In *SIGGRAPH '95: Proceedings of the 22nd annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 173–182, New York, NY, USA, 1995.
 [6] P. Gioia. Reducing the number of wavelet coefficients by geometric partitioning. *Comput. Geom. Theory Appl.*, 14(1-3):25–48, 1999.
 [7] H. Hoppe. Progressive meshes. *Computer Graphics*, 30(Annual Conference Series):99–108, 1996.
 [8] P. Schroder L. Cowsar A. W. F. Lee, W. Sweldens and D. Dobkin. Maps: Multiresolution adaptive parameterization of surfaces. *Computer Graphics*, 32(Annual Conference Series):95–104, 1998.
 [9] W. Sweldens I. Guskov, K. Vidimce and P. Schroder. Normal meshes. In *Siggraph 2000, Computer Graphics Proceedings*, pages 95–102, 2000.
 [10] S. Valette. *Modèles de maillages déformables 2D et multirésolution surfaciques 3D sur une base d'ondelettes*. Thèse de doctorat, INSA Lyon, 2002.
 [11] A. Khodakovsky, P. Schroder and W. Sweldens. Progressive geometry compression. In *Siggraph 2000, Computer Graphics Proceedings*, pages 271–278, 2000.
 [12] A. Khodakovsky and I. Guskov. Compression of normal meshes. In *Geometric Modeling for Scientific Visualization*. Springer-Verlag, 2003.
 [13] F. Payan. *Optimisation du compromis débit-distorsion pour la compression géométrique de maillages surfaciques triangulaires*. Thèse de doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis, décembre 2004.
 [14] N. Dyn, D. Levin and J. A. Gregory. A butterfly subdivision scheme for surface interpolation with tension control. *ACM Trans. Graph.*, 9(2):160–169, 1990.
 [15] D. Zorin, P. Schroder and W. Sweldens. Interpolating subdivision for meshes with arbitrary topology. *Computer Graphics*, 30(Annual Conference Series):189–192, 1996.
 [16] C. T. Loop. Smooth subdivision surfaces based on triangles. Mémoire de D.E.A., Department of Mathematics, University of Utah, Salt Lake City, 1987.