Principe de résolution en logique des propostions

1 - Système de preuves par résolution

Le principe de résolution est une méthode automatique pour montrer la validité d'une formule.
Nous allons voir les notions de clauses et de résolvant avant d'aborder le principe de résolution.

1.1 - Notion de clause

Une **clause** est une fbf qui a la forme d'une disjonction de littéraux
Cas particulier : un littéral isolé est une clause.

Exemple de clauses :

$A \vee B \vee C \vee \neg D$	CLAUSE
$\neg D$	CLAUSE

Comment obtenir à partir d'une formule bien formée un ensemble de clauses ?

Il faut d'abord transformer la formule en sa forme normale conjonctive et ensuite éliminer les connecteurs $\wedge$.
On obtient ainsi un ensemble S de clauses.

1.2 - Clause résolvante

Si C1 et C2 sont 2 clauses et si L1 = ¬L2 et L1 est dans C1 et L2 est dans C2
C est la disjonction des clauses restantes après suppression des littéraux L1 et L2.
Elle est appelée **clause résolvante** et ou résolvant de C1 et de C2.
L1 et L2 sont les **littéraux résolus**.

Exemples :

Soient C1 et C2 les deux clauses suivantes :
C1 : E1 ∨ E2
C2 : ¬E2 ∨ E3
Le résolvant de **C1** et de **C2** est **C : E1 ∨ E3**

Soient C1 et C2 les deux clauses suivantes :
C1 : P
C2 : ¬P
Le résolvant de **C1** et de **C2** est **C** : ¬ **la clause vide**

La clause Faux est notée ¬ c'est la **clause vide**
Le résolvant C de deux clauses C1 et C2 est une conséquence logique de C1 et de C2

Exercice 1

Trouver la clause résolvante dans les cas suivants :

a) C1 = ¬Q ∨ P C2 = R ∨ ¬P ∨ S
b) C1 = ¬Q ∨ P C2 = Q
c) C1 = ¬P ∨ ¬Q C2 = P ∨ S ∨ ¬R
d) C1 = P ∨ Q C2 = R ∨ P

Les corrections sont uniquement accessibles sur Internet

1.3 - Algorithme de résolution

On appelle **déduction** (ou résolution) d'une clause C à partir d'un ensemble de clauses S
= séquence finie R1, R2,... Rn = C de clauses telle que chaque Ri est:

- soit une clause de S
- soit un résolvant de clauses le précédant

S = {R ∨ Q, ¬R, ¬Q ∨ P, ¬P ∨ R}
R1 = R ∨ Q
S'il existe une déduction de la clause vide à partir de S alors S est insatisfiable

On appelle **réfutation** la déduction de la clause vide Ø à partir de S

Montrer qu'une formule bien formée **F est valide** :

- C'est équivalent à montrer que **¬F est inconsistante**
- C'est aussi équivalent à monter que **$S_{\neg F}$ insatisfiable**
- C'est aussi équivalent à monter qu'**il existe une déduction de la clause vide Ø**

Algorithme de résolution

Début
Ecrire la négation de F ;
Mettre F sous forme d'un ensemble de clauses ;
Tant que la clause vide n'est pas rencontrée et qu'il existe des paires réductibles **faire**
  Début
  Chercher des clauses résolvantes ;
  Ajouter ce résultat à la liste des clauses ;
  Fintantque ;
Si on trouve la clause vide **alors** F est valide
                sinon F est invalide
Finsi ;
Fin ;

Exemple 1

Soit $S_{\neg F}$ $=\{\neg P \vee \neg Q \vee R, \neg R, P, \neg T \vee Q, T\}$

C1 C2 C3 C4 C5

$S_{\neg F}$ est l'ensemble des clauses d'une fbf $\neg$F.
Montrons que cet ensemble est insatisfiable

$C1 = \neg P \vee \neg Q \vee R \quad \Rightarrow \quad C6 = \neg P \vee \neg Q$

$C2 = \neg R$

$C6 = \neg P \vee \neg Q \quad \Rightarrow \quad C7 = \neg Q$

$C3 = P$

$C7 = \neg Q \quad \Rightarrow \quad C8 = \neg T$

$C4 = \neg T \vee Q$

$C8 = \neg T \quad \Rightarrow \quad C9 = \varnothing$

$C5 = T$

A partir de l'ensemble des clauses de la fbf $\neg$F on a déduit la clause vide donc on peut conclure que **$\neg$F est insatisfiable** et donc que **F est valide**.

Exemple 2

Soit $S_{\neg F}$ $= \{P \vee Q, \neg Q \vee T, \neg T \vee R, \neg R, \neg P \vee R, Q \vee S, P \vee S\}$

C1 C2 C3 C4 C5 C6 C7

$S_{\neg F}$ est l'ensemble des clauses d'une fbf $\neg$F.
Montrons que cet ensemble est insatisfiable

$C1 = P \vee Q \quad \Rightarrow \quad C6 = P \vee T$

$C2 = \neg Q \vee T$

$C6 = P \vee T \quad \Rightarrow \quad C7 = P \vee R$

$C3 = \neg T \vee R$

$C7 = P \vee R \quad \Rightarrow \quad C8 = P$

C4 = ¬R

C8 = P	⇒	C9 = R
C5 = ¬P ∨ R		

C9 = R	⇒	C10 = Ø
C4 = ¬R		

A partir de l'ensemble des clauses de la fbf ¬F on a déduit la clause vide donc on peut conclure que **¬F est insatisfiable** et donc que **F est valide**.

Mais on aurait pu aussi trouver la déduction suivante :

C5 = ¬P ∨ R	⇒	C6 = ¬P
C4 = ¬R		

C6 = ¬P	⇒	C7 = Q
C1 = P ∨ Q		

C7 = Q	⇒	C8 = T
C2 = ¬Q ∨ T		

C8 = T	⇒	C9 = R
C5 = ¬T ∨ R		

C9 = R	⇒	C10 = Ø
C4 = ¬R		

Remarquons qu'une clause peut être utilisée plusieurs fois et que des clauses peuvent ne pas être utilisées pour déduire la clause vide

Exercice 2

A vous de montrer dans les cas suivants que F est valide :

a) $((P \rightarrow Q) \wedge (P \vee R)) \rightarrow (Q \vee R)$
b) $((P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)) \rightarrow (Q \wedge R)$
c) $((P \rightarrow Q) \rightarrow (R \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow P))$

Les corrections sont uniquement accessibles sur Internet

2 - Les limites et ouverture vers la logique des prédicats

La logique des propositions est limitée ; en effet dès que l'on veut manipuler des propriétés générales un peu complexes, des relations entre des objets, on peut aussi avoir besoin de quantifier en exprimant "Tous les hommes sont mortels". Rien ne nous permet de faire cela en logique des propositions.

Exemple :

Si l'on souhaite exprimer que "**Socrate est un homme**", on a la possibilité de donner la proposition suivante : **SOCRATE_HOMME**.
Si maintenant on souhaite exprimer que "**Platon est un homme**", on a la proposition **PLATON_HOMME**.
On se trouve avec deux assertions distinctes et aucune similitude entre Socrate et Platon.
On souhaiterait une meilleure représentation qui nous permettrait de dire que Socrate et Platon sont tous les deux des hommes dans le genre :
HOMME(Socrate), HOMME(Platon)

Le prédicat est le concept qui pallie ce problème. Il exprime une relation dans un contexte.

Exemples :

"Quelqu'un a chanté quelque chose "
on peut définir le prédicat : **A_CHANTE** avec deux arguments ou termes : celui qui chante et ce qu'il chante

A_CHANTE(MARIA_CALLAS,TRAVIATA)

Quand on veut traduire la phrase **"La maison est verte"**, on a plusieurs possibilités quant au choix du prédicat et de son arité :

- **EST_VERTE(maison)**
- ou **COULEUR(maison,verte)**
- ou **VALEUR(couleur,maison,verte)**

Si on a besoin d'exprimer des relations ou propriétés, des fonctions la logique des propositions ne le permet pas. Aussi, **le calcul des prédicats possède la notion de fonction**.

Exemple :

"Le frère de Paul travaille avec le frère de Jacques" peut se traduire par le prédicat **TRAVAILLER** avec deux arguments et par le symbole de fonction **frere** :
TRAVAILLER(frere(paul),frere(jacques))