Synthèse d’images

Outils mathématiques de base

Alexandre Meyer

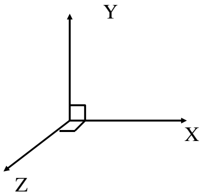
http://licence-info.univ-lyon1.fr/LIFO41

Survol

- Bases
  - Points
  - Vecteurs
  - Lignes
  - Sphères
- Matrices et transformations

Maths pour SI (*computer graphics)*

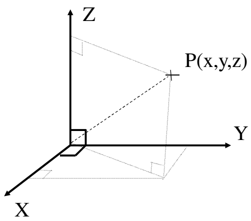
- Besoin mathématiques
  - Décrire la scène
  - Opérations : projection et transformation
  - Système de coordonnées



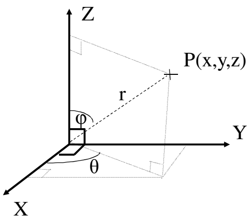
Right-Handed System
(ortho normé)

Points, P (x, y, z)

- Donne une position relative à l’origine dans notre système de coordonnées



Points, P (r,θ,φ) coordonnées polaires



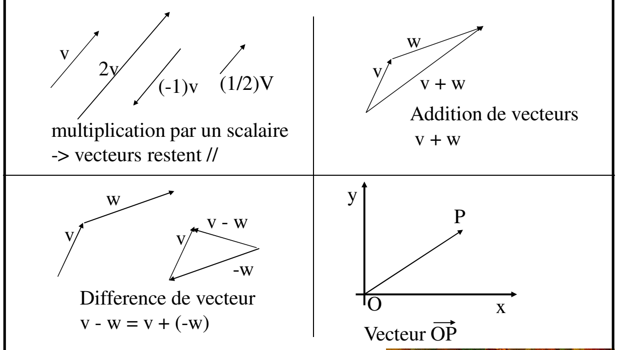
- Exercice

x=?
y=?
z=?

Vecteurs, V (x, y, z)

- Donne une direction dans l’espace 3D
- Points != Vecteurs
  - *Point – Point = Vecteur*
  - *Vecteur + Vecteur = Vecteur*
  - *Point + Vecteur = Point*
  - *Point + Point = ?*

Vecteurs, V (x, y, z)



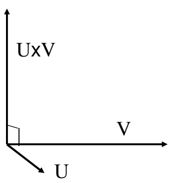
Vecteurs $\underline{V}$

- Longueur (norme) d'un vecteur $\underline{V}$ (x, y, z)
  - $|\underline{V}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
- Vecteur unitaire $\hat{V} = \frac{\text{vecteurV}}{\text{normede V}} = \frac{\underline{V}}{|\underline{V}|}$
- Produit scalaire (Dot Product)
  - $a \cdot b = |a|\ |b| \cos\theta$
    $\cos\theta = a \cdot b \,/\, |a|\ |b|$
  - $a \cdot b = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b$
  - Si les vecteurs sont unitaires ?
  - Si le produit scalaire == 0 ou == 1?

Le produit scalaire est un scalaire

Produit vectoriel (Cross Product)

- Produit vectoriel -> vecteur normal au 2 vecteurs
- $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yc - zb \\ za - xc \\ xb - ya \end{pmatrix}$



- $|a \times b| = |a|\ |b| \sin\theta$

Plan

- 3 points non alignés forme un plan unique
  - Equation : ax+by+cz+d=0
- Attention : 4 points ne sont pas forcement coplanaires

Exercices

A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)

- Vecteur normal au plan ?
- Equation du plan A,B,C ?

Exercices

A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)

- Vecteur normal au plan?
  - Calculer AB x BC par exemple
  - (-1,1,0) x (0,-1,1) = (1,1,1)
- Equation du plan A,B,C?
  - Tous les points M tq
    - N.(M-A)=0
    - avec N un vecteur normal au plan
  - (1,1,1).(x-1,y,z)=0⇔x-1+y+z=0

Equation paramétrique d'une ligne

- Soit
  - P0 = (x0, y0, z0) et
  - P1 = (x1, y1, z1)
- la ligne P passant par P0 et P1 est

$$P(t) = P_0 + t(P_1 - P_0) = \begin{cases} x(t) = x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y(t) = y_0 + t(y_1 - y_0) \\ z(t) = z_0 + t(z_1 - z_0) \end{cases}$$

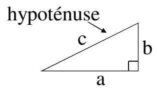
avec $-\infty < t < \infty$

Si 0<t<1 on a le segment [P0P1]

Equation d'une sphère

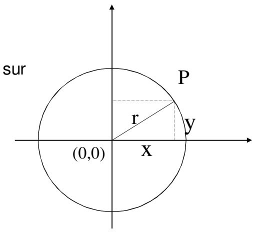
- Théorème de Pythagore

$$a^2 + b^2 = c^2$$



- Cercle de rayon (0,0), pour tout P sur le cercle :

$$x^2 + y^2 = r^2$$



Equation d'une sphère

- Théorème de Pythagore généralisé à la 3D :

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2$$

- Pour tout P sur le cercle de rayon (0,0,0) :

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = r^2}$$

- Pour tout P sur le cercle de rayon (x_c, y_c, z_c) :

$$\boxed{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 = r^2}$$

Survol

- Bases
- Matrices et transformations
  - Operations
  - Transformations
  - Compositions

Matrices

- Une Matrice (*Matrix*) est un tableau de dimensions M (lignes) par N (colonnes)
  - matrice 3 par 6
  - élément 2,3 est (3)

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 1 & -1 \\ -5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Vecteur peut être considéré comme une matrice 1 (ligne) x M (colonnes)

$$v = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$$

Types de matrices

- Matrices identité notée I

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Diagonale

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

- Symétrique

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

Opérations sur les matrices

- Addition

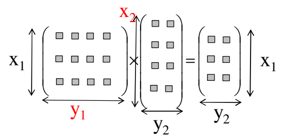
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+p & b+q \\ c+r & d+s \end{pmatrix}$$

- Transposée
  - M par N devient N par M

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 5 & 2 & 8 \\ 6 & 7 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 7 \\ 9 & 8 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Opérations sur les matrices

- Multiplication
  - Possible seulement si
    - Matrice $x_1\ y_1$ multipliée par matrice $x_2\ y_2$
    - Multiplication possible ssi $y_1 = x_2$
      - Résultat : matrice x_1 par y_2
    - Attention : si A x B est possible, cela ne veut pas dire que B x A l'est aussi !!!

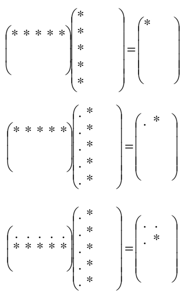


Opérations sur les matrices

- A est n par k , B est k par m
- C = A x B est définie par

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{k} a_{il} b_{lj}$$

- BxA != AxB



Exemple de multiplications

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{pmatrix}$$

Inverse

- Si A x B = I et B x A = I alors
  $A = B^{-1}$ et $B = A^{-1}$

Transformation 3D

- En 3D, un vecteur est transformé par une matrice 3 par 3 appelée <u>matrice de transformation</u>

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by+cz \\ dx+ey+fz \\ gx+hy+iz \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa+yb+zc & xd+ye+zf & xg+yh+zi \end{pmatrix}$$

ATTENTION : matrice transposée ici

Changement d'échelle

- Matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ by \\ cz \end{pmatrix}$$

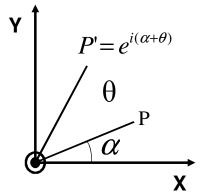
- Exemple

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -10 \end{pmatrix}$$

Rotation : exercice

- Rotation autour de l'axe des z
- Quelle est la matrice de transformation correspondante ?

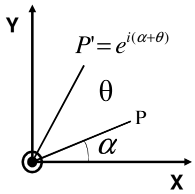
$$\begin{pmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{pmatrix}$$



$$\begin{aligned} P &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r\cos(\alpha) & r\sin(\alpha) \end{pmatrix} \\ &= r(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)) \\ &= re^{i\alpha} \end{aligned}$$

Rotation

- Rotation autour de l'axe des z



$$\begin{aligned} P' &= re^{i(\alpha+\theta)} = re^{i\alpha}e^{i\theta} \\ &= (x + iy)(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \\ &= x\cos(\theta) + xi\sin(\theta) + iy\cos(\theta) + iyi\sin(\theta) \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

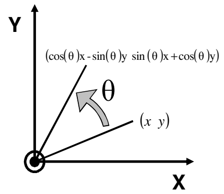
$i^2=-1$

- Remarque : Z ne change pas

Rotation

- Rotation autour de l'axe des z

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Car Z ne change pas

Rotation autour de X ou Y

- Autour de X

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

- Autour de Y

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Translation : Exercice

- Trouver la matrice qui translate un point P?
  - P $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ P' $\begin{pmatrix} x+a \\ y+b \\ z+c \end{pmatrix}$
  - M tq M.P=P' ?

Translation avec coord homogène

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a \\ y+b \\ z+c \\ 1 \end{pmatrix}$$

- On ajoute une 4ᵉ dimension « fictive » que l'on appelle coordonnée homogène

Coordonnées homogène

- Ajoute 1D, mais on la contraint à être égale à 1 (x,y,z,1)
- Homogène veut dire qu'un point de l'espace 3D peut être représenté par une infinité de points homogènes 4D
  - (2 3 4 1) = (4 6 8 2) = (3 4.5 6 1.5)
- Pourquoi ceci ?
  - 4D permet d'inclure translation/projection dans la matrice

Rotation/changement d'échelle puis translation

$$\begin{pmatrix} R_1 & R_2 & R_3 & T_1 \\ R_4 & R_5 & R_6 & T_2 \\ R_7 & R_8 & R_9 & T_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T.R$$

- R= rotation et changement d'échelle
- T = translation

Composition : exercice

Trans suivi d'une Rot / Rot suivie d'une Trans

- P(3,1,0)
- R=rot(Z,Pi/2)
- T=trans(2,0,0)
- Calculer P'=R.T.P et P"=T.R.P

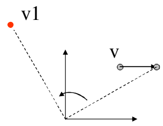
Composition : exercice

Trans suivi d'une Rot / Rot suivie d'une Trans

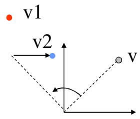
- P(3,1,0)
- R=rot(Z,Pi/2)
- T=trans(2,0,0)
- Calculer P'=R.T.P et P"=T.R.P
  - P' = R.T.P = R.(5,1,0) = (-1,5,0)
  - P"=T.R.P = T.(-1,3,0) = (1,3,0)
  - P' != P"

Composition

- L'ordre a de l'importance
  - Trans suivi d'une rot != rot suivie d'une trans
  - (RT)v != (TR)v



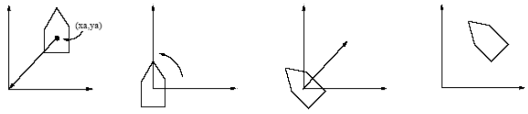
T puis R = R.T.v=v1



R puis T = T.R.v = v2

Rotation de l'objet

- Pour faire une rotation de l'objet



$$X' = MX,$$

$$M = T(x_a, y_a) \cdot R(\theta) \cdot T(-x_a, -y_a).$$

Programmation OpenGL

- *OpengGL*
  GLfloat mat[16];

  mat[0] mat[1] mat[2] mat[3]
  mat[4] mat[5] mat[6] mat[7]
  mat[8] mat[9] mat[10] mat[11]
  mat[12] mat[13] mat[14] mat[15]

- *glRotate(angle, x, y, z);* *// angle : angle de la rotation*
  // rotation faite autour du vecteur (x,y,z)
- *glTranslate(x, y, z);* *// Translation*
- *glScale(sx, sy, sz);* *// changement d'échelle*

Ouf!!! …

- On a la base …