



SPIM

Thèse de Doctorat



école doctorale sciences pour l'ingénieur et microtechniques

UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE

# Partitionnement, recouvrement et colorabilité dans les graphes

■ Nicolas GASTINEAU



# SPIM

## Thèse de Doctorat



école doctorale sciences pour l'ingénieur et microtechniques

U N I V E R S I T É D E B O U R G O G N E

N° X X X

THÈSE présentée par

Nicolas GASTINEAU

pour obtenir le

Grade de Docteur de  
l'Université de Bourgogne

Spécialité : **Informatique**

## Partitionnement, recouvrement et colorabilité dans les graphes

Unités de Recherche :

Université de Bourgogne, CNRS, Le2i, UMR6306, France,

Université de Lyon, CNRS, Université Lyon 1, LIRIS, UMR5205, F-69622, France

Soutenue le 8 Juillet 2014 devant le Jury :

Hao LI	Rapporteur	Directeur de Recherche CNRS, Paris XI
Éric SOPENA	Rapporteur	Professeur à l'Université de Bordeaux
Hamamache KHEDDOUCI	Directeur de thèse	Professeur à l'Université Claude Bernard - Lyon 1
Olivier TOGNI	Directeur de thèse	Professeur à l'Université de Bourgogne
Alexandre PINLOU	Examinateur	Maitre de Conférence à l'Université Paul Valéry - Montpellier 3



# REMERCIEMENTS

Dans la plupart des mémoires, les auteurs ont tendance à remercier leurs proches. Mes proches ont énormément compté dans ma vie à tout âge et tout moment de ma vie. Malgré tout, je me demande si le mémoire est un endroit adéquat pour l'écrire. C'est pour cette raison que je commence par remercier des réalisateurs. Ceux-ci m'ont toujours inspiré que ça soit dans la vie personnelle ou professionnelle. Pour ne pas déroger à la règle, je vais dans une dernière partie remercier mes proches.

Je vais commencer par remercier des réalisateurs français, qui de part leurs créativité rendent, je pense, les gens moins idiots. Ces réalisateurs comprennent Eric Rohmer, Claude Chabrol, Alain Resnais et Jean Renoir.

Ensuite, je vais remercier quelques réalisateurs américains de genres que j'apprécie comme Alfred Hitchcock (bien qu'il soit Anglais), John Ford et David Cronenberg (bien qu'il soit Canadien). De plus, je vais remercier un réalisateur coréen que j'apprécie énormément : Hong Sang-soo et un réalisateur japonais que j'apprécie tout autant : Hirokazu Kore-eda.

Si certains réalisateurs sont unanimement reconnus, d'autres réalisateurs capables de produire des films contenant un nombre étonnant d'aberrations cinématographiques sont moins reconnus. Leurs films ont des vertus pédagogiques non négligeables et font comprendre à quel point l'humanité est capable de se dépasser perpétuellement. Je remercie donc Jean-Marie Pallardy, Uwe Boll, Yann Moix et Godfrey Ho.

Pour finir, je remercie des auteurs non reconnus en tant que tels, les producteurs de vidéos sur Youtube : Howtobasic et FPSRussia. De plus, je remercie tous ceux qui réalisent des vidéos comprenant des chats, des ninjas ou des chats ninjas.

Je me dois de remercier les institutions qui ont financé mon doctorat : la région Bourgogne qui m'a financé un an et demi et l'équipe GrAMA du laboratoire Liris qui m'a financé dix mois. Je tiens à remercier le laboratoire Le2i, spécifiquement l'équipe de Combinatoire et l'ensemble de ses membres, mais aussi, le laboratoire Liris, spécifiquement l'équipe GrAMA et l'ensemble de ses membres.

De plus, je me dois de remercier mes sponsors officieux, l'ensemble des bars et pubs de Dijon (en fait, il y en a pas plus que trois), de Lyon et de Paris.

Je remercie tout d'abord toutes les personnes que j'ai côtoyé dans ma petite ville de banlieue en Seine-et-Marne : Combs-la-ville. Ces personnes comprennent Hugo, Aurélien, Stéphane et Thomas. Je remercie les membres du Liris que j'ai côtoyé, à savoir André, Maxime, Matthis, Sébastien, Fairouz, Rana, Kamel et Brahim. De plus, je remercie les gens de Dijon que j'ai côtoyé, à savoir Wahabou, Armen, Arnaud, Ian, Germain et Stéphane. Je remercie tous mes collègues de mon Master 2 Logique Mathématique et Fondements de l'Informatique, des gens que je côtoie encore énormément. Il s'agit de Shain, Romain, Raphael, Samy, Sébastien, Nadja, Benjamin, Benoît, Jean-Philippe et Catherine.

Je remercie enfin les chercheurs avec lesquels j'ai travaillé : Benoît Darties et Premek Holub. De plus, je remercie mes rapporteurs Eric Sopena et Hao Li qui ont eut la patience et le courage de lire ce mémoire.

Pour finir, je remercie mes encadrants. Déjà Hamamache Kheddouci, qui m'a beaucoup encouragé dans mes recherches et énormément poussé à travailler. Sa vision des sciences m'a aidé à aborder des domaines qui étaient inconnus pour moi. Je remercie tout particulièrement Olivier Togni pour sa patience, sa passion des graphes, sa modestie et son soutien autant scientifique que moral. Sans sa disponibilité et son investissement, l'ensemble des travaux présentés dans ce mémoire n'aurait jamais vu jour.

# SOMMAIRE

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>9</b>
1.1	Définitions de base et notation . . . . .	9
1.2	Thématiques abordées . . . . .	12
1.3	Opérations sur les les graphes . . . . .	15
1.4	Quelques classes de graphes . . . . .	16
1.5	Boule, densité et partitionnement d'un packing . . . . .	17
1.6	Définitions de base en complexité algorithmique . . . . .	19
1.7	Vue d'ensemble . . . . .	21
<b>2</b>	<b>Coloration de packing, distance coloration et <math>S</math>-coloration</b>	<b>23</b>
2.1	Résultats sur la $S$ -coloration d'un graphe quelconque . . . . .	23
2.2	Nombre $S$ -chromatique de quelques classes de graphes . . . . .	25
2.3	$S$ -coloration des chemins . . . . .	32
2.4	$S$ -coloration des cycles . . . . .	35
2.5	$S$ -coloration des arbres . . . . .	37
<b>3</b>	<b>Dichotomie à propos de la complexité algorithmique de la <math>S</math>-coloration</b>	<b>41</b>
3.1	Étude de la complexité de $S$ -COL pour une liste croissante de trois entiers et différentes classes de graphes . . . . .	43
3.2	Classe de complexité de quelques instances de $S$ -COL, pour $ S  > 3$ . . . . .	50
3.3	Dichotomie pour $ S  = 4$ . . . . .	56
<b>4</b>	<b><math>S</math>-coloration des grilles</b>	<b>63</b>
4.1	Densité d'un packing dans les différentes grilles . . . . .	65
4.2	Partition d'un packing dans $\mathcal{H}$ , $\mathbb{Z}^2$ , $\mathcal{T}$ et $\mathcal{R}$ . . . . .	68
4.3	$S$ -coloration des grilles . . . . .	76
4.4	$S_{(d,n)}$ -coloration des grilles . . . . .	81
<b>5</b>	<b><math>S</math>-coloration des graphes subcubiques</b>	<b>91</b>
5.1	$(1, k, \dots, k)$ -coloration des graphes subcubiques . . . . .	92
5.2	$(1, 1, 2, \dots)$ -coloration des graphes subcubiques . . . . .	98

5.3	(1, 2, 3, ...) -coloration des graphes subcubiques . . . . .	102
<b>6</b>	<b>Sur le nombre de Grundy des graphes <math>r</math>-réguliers et de degré borné</b>	<b>105</b>
6.1	Résultats généraux . . . . .	106
6.2	Nombre de Grundy des graphes cubiques . . . . .	108
6.3	Propriétés sur le nombre de Grundy des graphes $r$ -réguliers . . . . .	112
6.4	Nombre de Grundy des graphes 4-réguliers sans $C_4$ induit . . . . .	114
6.5	Un algorithme FPT pour déterminer le nombre de Grundy . . . . .	120
<b>7</b>	<b>Contribution et autres travaux</b>	<b>125</b>
7.1	Contribution . . . . .	125
7.2	Autres travaux . . . . .	125
7.3	Thématiques non abordées . . . . .	126

# INTRODUCTION

## 1.1/ DÉFINITIONS DE BASE ET NOTATION

### 1.1.1/ GRAPHE

Les graphes [7, 8] sont une structure mathématique capable d'exprimer un nombre conséquent de concepts et de problèmes combinatoires. Les graphes ont été introduits à la base pour exprimer des problèmes combinatoires tels que le problème des sept ponts de Königsberg ou le problème des quatre couleurs. Ces problèmes n'ont d'ailleurs pas été exprimés initialement en utilisant le concept de graphe. Les graphes ont retrouvé une seconde jeunesse dans le cadre de l'informatique. En effet, certaines structures de données informatiques peuvent être représentées par des graphes. De plus, certains problèmes de graphes sont «difficiles» du point de vue de l'informatique. Les graphes sont devenus au fil du temps un domaine majeur de recherche en informatique. Nombre de pays classent la théorie des graphes et plus généralement la combinatoire dans le domaine des mathématiques ; ce n'est pas le cas en France. Ce mémoire, comme dans la pure tradition française, va donc traiter de la théorie des graphes. Nos propos seront accompagnés de preuves et on s'intéressera aux conséquences «informatiques» des propriétés trouvées.

**Définition 1.1.** *Un graphe  $G$  est un ensemble d'éléments  $V(G)$  muni d'une relation binaire  $E(G)$  défini sur  $V(G)$ . Les éléments de  $V(G)$  sont appelés sommets et les éléments de  $E(G)$  sont appelés arêtes.*

- Si  $E(G)$  est une relation non symétrique, le graphe est qualifié d'orienté.
- Si  $E(G)$  est une relation non anti-réflexive, le graphe contient des boucles.
- Si  $E(G)$  n'est pas un multi-ensemble, le graphe est qualifié de simple.
- Si  $E(G)$  est un multi-ensemble, le graphe est appelé multi-graphe.

*Les arêtes sont habituellement désignées par  $uv$  (qui correspond à  $u$  et  $v$  sont en relation), les extrémités de  $uv$  sont les sommets  $u$  et  $v$ . L'ordre d'un graphe, noté  $|V(G)|$ , est la cardinalité de l'ensemble  $V(G)$ .*

Dans ce mémoire, les graphes considérés sont simples, sans boucles et non orientés. Dans certains cas, les graphes considérés pourront être des multi-graphes, si cela est précisé.

Plus simplement un graphe est un objet graphique très facile à représenter dans un plan :

il s'agit d'un ensemble de points sur le plan et de traits reliant certaines paires de points.

### 1.1.2/ NOTIONS DE BASE

On se servira des définitions suivantes dans les différentes parties. Les notations et les termes utilisés sont les plus usuels possibles.

**Définition 1.2.** *Un sous-graphe d'un graphe  $G$  est un graphe  $H$  tel que  $V(H) \subseteq V(G)$  et  $E(H) \subseteq E(G)$ . Si pour toute paire de sommets  $\{u, v\} \in V(H)^2$  telle que  $uv \in E(G)$ , on a  $uv \in E(H)$ , alors le graphe  $H$  est dit induit par  $V(H)$ . Un sous-graphe  $H$  est dit induit dans  $G$ , s'il existe un sous-ensemble de sommets qui induit  $H$ .*

Plus simplement un sous-graphe d'un graphe est un graphe obtenu en «gommant» des arêtes et des sommets isolés.

**Définition 1.3.** *Soit  $G$  un graphe et soit  $\{u, v\} \in V(G)^2$  une paire de sommets. Un chemin de longueur  $n$  entre  $u$  et  $v$  est une suite de sommets  $u_0, u_1, \dots, u_n$  telle que pour tout  $i$ , avec  $0 \leq i < n$ , on a  $u_i u_{i+1} \in E(G)$ , avec  $u_0 = u$  et  $u_n = v$ .*

**Définition 1.4.** *La distance entre deux sommets  $u$  et  $v$  est le nombre d'arêtes dans le plus court (plus petite longueur) chemin entre  $u$  et  $v$ . La distance entre  $u$  et  $v$  dans un graphe  $G$  est notée  $d_G(u, v)$ . La distance entre un sommet  $u$  et une arête  $e = vv'$ , notée  $d_G(e, u)$ , est  $\min(d_G(u, v), d_G(u, v'))$ . Dans le cas où  $u$  et  $v$  ne sont reliés par aucun chemin, on a  $d_G(u, v) = \infty$ .*

**Définition 1.5.** *Le diamètre d'un graphe  $G$ , noté  $\text{diam}(G)$ , est  $\max\{d_G(u, v) \mid \{u, v\} \in V(G)^2\}$ .*

**Définition 1.6.** *Soit  $G$  un graphe. Un sommet  $u$  est dit adjacent à  $v$  dans  $G$  si  $uv \in E(G)$ . On considère que  $u$  n'est pas adjacent à lui-même. Une arête  $e \in E(G)$  est incidente à  $u$  s'il existe un sommet  $v \in V(G)$  tel que  $e = uv$ . Deux arêtes sont adjacentes si elles ont une extrémité en commun.*

**Définition 1.7.** *Le degré de  $u$ , noté  $d_G(u)$ , dans  $G$  est le nombre de sommets adjacents à  $u$  dans  $G$ . Par  $\Delta(G)$ , on désigne le maximum des degrés des sommets de  $G$  et par  $\delta(G)$ , on désigne le minimum des degrés des sommets de  $G$ .*

**Définition 1.8.** *Soit  $G$  un graphe. Le graphe  $G$  à la puissance  $k$ , noté  $G^k$ , est le graphe obtenu à partir de  $G$  en rajoutant l'arête  $uv$  pour toute paire de sommets  $\{u, v\} \in V(G)^2$  telle que  $d_G(u, v) \leq k$ .*

Voici une liste de définitions et notations spécifiques utilisées tout au long de ce mémoire.

**Définition 1.9.** *Soit  $G$  un graphe.*

- *Le voisinage d'un sommet  $u$  dans  $G$ , noté  $N_G(u)$ , est l'ensemble des sommets adjacents à  $u$ .*
- *La boule de rayon  $d$  et de centre  $u$  dans  $G$ , notée  $B_d(u)$ , est l'ensemble  $\{v \in V(G) \mid d_G(u, v) \leq d\}$ .*
- *La sphère de rayon  $d$  et de centre  $u$  dans  $G$ , notée  $\partial B_d(u)$ , est l'ensemble  $\{v \in V(G) \mid d_G(u, v) = d\}$ .*

**Définition 1.10.** *Un graphe  $G$  est dit connexe si pour toute paire de sommets  $\{u, v\}$ , on a  $d_G(u, v) \neq \infty$ .*

Dans ce mémoire, les graphes sont considérés connexes, sauf si le contraire est mentionné.

**Définition 1.11.** Soit  $G$  un graphe et soit  $n \geq 3$  un entier.

- Un  $n$ -cycle ou tout simplement un cycle, si le  $n$  n'est pas précisé, noté  $C_n$ , est le graphe 2-régulier suivant :  $V(C_n) = \{0, \dots, n-1\}$ ,  $E(C_n) = \{(i, i+1) | i \in \{0, \dots, n-2\} \cup \{n-1, 0\}\}$ .
- L'ordre du plus petit  $n$ -cycle qui est sous-graphe dans  $G$  est appelé maille de  $G$  et est noté  $m(G)$ . Si  $G$  ne contient pas de cycle, on pose  $m(G) = \infty$ .
- Un graphe acyclique est un graphe sans  $n$ -cycle en tant que sous-graphe.

**Définition 1.12.** Un ensemble de sommets où toute paire de sommets est adjacente est appelé une clique. L'ordre du plus grand sous-ensemble de sommets qui est une clique dans un graphe  $G$  est appelé le nombre de clique, noté  $\omega(G)$ .

**Définition 1.13.** Soit  $G$  un graphe.

- Un sous-ensemble de sommets  $D$  est dominant si pour tout sommet  $u$  de  $G$ , on a  $u \in D$  ou  $N(u) \cap D \neq \emptyset$ .
- Un sous-ensemble de sommets  $C \subseteq V(G)$  est une couverture de sommets de  $G$  si pour toute arête  $uv \in E(G)$ ,  $u \in C$  ou  $v \in C$ .
- Le nombre transversal de  $G$ , noté  $\beta(G)$ , est la taille de la plus petite couverture de sommets de  $G$ .

**Définition 1.14.** Soit  $G$  un graphe. Un couplage dans  $G$  est un sous-ensemble d'arêtes  $M \subseteq E(G)$  n'ayant aucune extrémité en commun. Un couplage parfait est un couplage tel que pour tout sommet  $u \in V(G)$ , il existe un sommet  $v$  tel que  $uv \in M$ .

Dans certains contextes la référence au graphe pourra être omise dans les notations  $d_G(u)$ ,  $d_G(u, v)$  et  $N_G(u)$ .

### 1.1.3/ COLORATION

Les colorations enrichissent la structure de graphe de telle façon qu'un bon nombre de problèmes combinatoires deviennent exprimables dans cette structure. La coloration est le thème principal de ce mémoire.

**Définition 1.15.** – Une coloration propre de sommets d'un graphe  $G$  est une fonction, notée habituellement  $c$ , de  $V(G)$  dans  $\mathbb{N}^*$  telle que pour toute paire de sommets adjacents  $\{u, v\}$ , on a  $c(u) \neq c(v)$ .

- Par colorer  $u$  de la couleur  $i$ , on désigne le fait de donner la valeur  $i$  à  $c(u)$ .
- La classe de couleur de  $i$  dans  $G$ , notée  $C_i$ , est le sous-ensemble des sommets colorés  $i$ ,  $C_i = \{u \in V(G) | c(u) = i\}$ .
- Un graphe est  $k$ -colorable s'il existe une coloration propre de sommets de  $V(G)$  dans  $\{1, \dots, k\}$ .
- Le nombre chromatique d'un graphe  $G$ , noté  $\chi(G)$ , est le plus petit  $k$  tel que  $G$  est  $k$ -colorable.
- Une coloration propre d'arêtes d'un graphe  $G$  est une fonction  $c$  de  $E(G)$  dans  $\mathbb{N}^*$  telle que pour toute paire d'arêtes adjacentes  $(e, e')$ , on a  $c(e) \neq c(e')$ . Un graphe est  $k$ -arête colorable s'il existe une coloration propre d'arêtes de  $E(G)$  dans  $\{1, \dots, k\}$ .

FIGURE 1.1 – Une  $(3, 3, 5, 5, 5)$ -coloration de  $P_{12}$ .

## 1.2/ THÉMATIQUES ABORDÉES

### 1.2.1/ $S$ -COLORATION (DE *packing*)

La coloration suivante est le sujet principal de ce mémoire. Une  $S$ -coloration de *packing* est une coloration propre de sommets avec des conditions supplémentaires. On suppose que l'on fournit une liste croissante d'entiers, par exemple  $(3, 3, 5, 5, 5)$ , et un graphe, on va dire une ligne de douze sommets (voir la figure 1.1). Il s'agit de colorer le graphe avec cinq couleurs que l'on nommera  $3_a$ ,  $3_b$ ,  $5_a$ ,  $5_b$  et  $5_c$  de telle façon que les sommets colorés de la même couleur 3 sont séparés par au moins quatre arêtes (à distance mutuelle plus grande que 3) et les sommets colorés de la même couleur 5 sont séparés par au moins six arêtes (à distance mutuelle plus grande que 5). La figure 1.1 fournit une coloration d'un tel graphe.

On va donner une définition mathématique à notre coloration. Le lecteur est invité à retenir plus particulièrement ces définitions qui feront l'objet de la plus grosse partie de ce mémoire.

**Définition 1.16.** Soit  $G$  un graphe.

- Un sous-ensemble de sommets de  $V(G)$  où aucune paire de sommets n'est adjacente est appelé un ensemble stable.
- Un sous-ensemble d'arêtes de  $E(G)$  est un couplage si aucune paire d'arêtes n'a d'extrémité en commun.
- L'ordre du plus grand sous-ensemble de sommets formant un stable de  $G$  est appelé le nombre de stabilité, noté  $\alpha(G)$ .
- Un  $i$ -packing est un sous-ensemble de sommets  $X$  de  $V(G)$  tel que pour chaque paire de sommets  $\{u, v\} \in X$ , on a  $d(u, v) > i$ . Un  $i$ -packing sera habituellement noté  $X_i$ .
- Le cardinal du plus grand  $i$ -packing d'un graphe  $G$  est appelé le nombre d' $i$ -packing, noté  $\alpha^i(G)$ .
- Le cardinal du plus grand sous-ensemble de sommets qui peut être partitionné en  $k$  sous-ensembles stables est noté  $\alpha(G, k)$ .

Il faut noter que  $\alpha(G) = |V(G)| - \beta(G)$ . On note que l'on préfère utiliser le terme  $i$ -packing à la place de  $i$ -stable (assez commun). Dans la littérature le terme  $i$ -stable est de temps en temps utilisé pour désigner d'autres propriétés. Nous évitons donc toute ambiguïté par ce choix. Dans certains contextes, on désignera par *packing*, un  $i$ -packing pour un  $i$  quelconque.

**Définition 1.17.** Soit  $G$  un graphe.

- Une coloration à distance  $d$  de  $G$  est une coloration propre des sommets de  $G^d$ .
- Une coloration de *packing* est une coloration propre des sommets telle que tout ensemble coloré  $i$  est un  $i$ -packing.

Soit  $S = \{s_i \mid i \in \mathbb{N}^*\}$  une série croissante d'entiers, c'est à dire un multi-ensemble infini d'entiers trié dans l'ordre croissant. Une  $S$ -coloration de *packing* est une coloration propre de sommets telle que tout ensemble coloré  $i$  est un  $s_i$ -packing.

La notion de  $k$ -colorable pour ces différentes colorations sera notée  $S_{d^k}$ -colorable pour la coloration à distance  $d$  en  $k$  couleurs,  $k$ -packing colorable pour la coloration de packing en  $k$  couleurs et  $(s_1, \dots, s_k)$ -colorable pour la  $S$ -coloration en  $k$  couleurs.

- Le nombre chromatique à distance  $d$  de  $G$ , noté  $\chi^d(G)$ , est le plus petit  $k$  tel que  $G$  est  $S_{d^k}$ -colorable.
- Le nombre chromatique de packing (ou nombre de packing) de  $G$ , noté  $\chi_\rho(G)$ , est le plus petit  $k$  tel que  $G$  est  $k$ -packing colorable.
- Le nombre  $S$ -chromatique de  $G$ , noté  $\chi_\rho^S(G)$ , est le plus petit  $k$  tel que  $G$  est  $(s_1, \dots, s_k)$ -colorable.

Les notions de couleurs et d'ensembles colorés restent inchangées pour ce type de coloration.

Ce concept a été introduit par Goddard *et al.* [45] sous le nom de coloration diffusante. Plus tard, la plupart des chercheurs ont préféré utiliser le terme de coloration de *packing*. Par souci de clarté, on utilisera aussi le terme couleur  $s_i$  pour désigner la couleur  $i$ . Bien que les couleurs  $s_i$  et  $s_j$ , avec  $i \neq j$ , peuvent désigner le même nombre, ce terme sera utilisé pour mettre en avant le fait qu'une classe de couleur forme un  $s_i$ -packing et sera très utile pour prouver des propriétés de  $S$ -coloration de *packing* pour une liste  $S$  non fixée. On abrègera le terme  $S$ -coloration de *packing* en  $S$ -coloration dans la suite de ce mémoire.

On peut noter que la  $S$ -coloration généralise la coloration propre de sommets (si  $s_i = 1$ , pour tout  $i$ ), la coloration à distance  $d$  (si  $s_i = d$ , pour tout  $i$ ) et la coloration de *packing* (si  $s_i = i$ , pour tout  $i$ ).

### 1.2.2/ NOTATIONS ET CONVENTIONS À PROPOS DE LA $S$ -COLORATION

On utilisera les notations suivantes dans les différents chapitres sur la  $S$ -coloration. Dans une  $S$ -coloration, le  $S$  peut être indépendamment une série croissante d'entiers ou une liste croissante d'entiers. Une liste est toujours supposée finie et une série est toujours supposée infinie. On notera toujours le premier élément de cette liste d'entiers ou série d'entiers  $s_1$  et l'élément numéro  $i$ ,  $s_i$ . Dans le cas où  $S$  est une liste croissante d'entiers, on note  $|S|$  la *taille de la liste* et  $s_{|S|}$  le dernier élément de la liste. De plus, si  $S'$  est une autre liste ou série croissante d'entiers, ses éléments seront désignés par  $s'_1, \dots$ . On note habituellement  $X_i$ , un  $i$ -packing dans une  $S$ -coloration. Soit  $i$  un entier positif. Le nombre d'occurrences de l'entier  $i$  dans la liste  $S$  est noté  $N_i(S) = |\{j \in \mathbb{N}^* | s_j = i\}|$ . On utilisera les symboles  $i_a, i_b, \dots$  pour désigner les différentes couleurs  $i$  dans une  $S$ -coloration.

De plus, on rajoute un ordre partiel sur les listes et séries croissantes d'entiers.

**Définition 1.18.** On définit un ordre partiel, noté  $\leq$ , sur les listes et les séries croissantes d'entiers ainsi :

- Soient  $S$  et  $S'$  deux séries. On a  $S \leq S'$  si pour tout entier  $i > 0$ , on a  $s'_i \leq s_i$ .
- Soient  $S$  et  $S'$  deux listes d'entiers. On a  $S \leq S'$ , si on a  $|S| \leq |S'|$  et pour tout entier  $i$ , avec  $0 < i < |S|$ , on a  $s'_i \leq s_i$ .

On laisse au lecteur le soin de prouver que cette relation est une relation d'ordre. Cette relation d'ordre n'est pas la relation d'ordre usuelle sur les listes. Malgré tout, elle est naturelle pour la  $S$ -coloration. Si une liste  $S$  est plus petite qu'une liste  $S'$ , alors il y a moins de graphes  $S$ -colorables que de graphes  $S'$ -colorables.

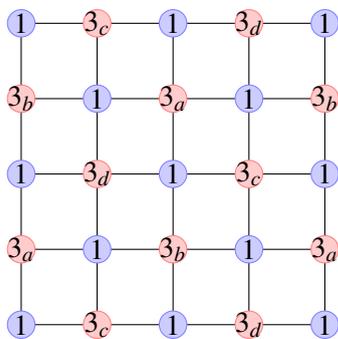


FIGURE 1.2 – Une  $(1, 3, 3, 3, 3)$ -coloration de  $P_5 \square P_5$ .

**Définition 1.19.** Soit  $G$  un graphe et soit  $S$  une liste croissante d'entiers,  $G$  est  $S$ -chromatique, si  $G$  est  $S$ -colorable et pour toute liste  $S'$  telle que  $S' \leq S$  et  $S' \neq S$ ,  $G$  n'est pas  $S'$ -colorable.

Notons que pour certains graphes, par exemple un graphe composé d'une seule arête, la notion de  $S$ -chromatique n'a pas de sens car le graphe n'est  $S$ -chromatique pour aucune liste, étant  $S$ -colorable pour toute liste de taille 2. Il peut être utile de définir une convention pour ce type de propriétés.

**Définition 1.20.** On note  $S_{d^k}$  la liste composée de  $k$  entiers  $d$  et on note  $S_{(d,n)}$  la série pour laquelle  $s_i = d + \lfloor (i - 1)/n \rfloor$ .

Cette série et cette liste seront étudiés plus précisément dans ce mémoire.

Un des exemples d'applications de la  $S$ -coloration dans les graphes est celui du placement d'antennes sur un territoire. On suppose que l'on a un quadrillage de taille 5 par 5 sur un territoire et que l'on veut recouvrir le territoire d'antennes de telle façon que chaque antenne soit placée que sur une intersection. Ces antennes ont des distances de diffusion différentes (une antenne diffuse à distance  $d$  si on peut la capter à  $d$  intersections près). On suppose que l'on a une liste de types d'antennes qui ont des interférences entre elles accompagnée de leurs distances de diffusion. Cette liste est dans notre exemple  $(1, 3, 3, 3, 3)$ . On veut placer des antennes à chaque intersection de sorte qu'aucune paire d'antennes de même type ne provoque d'interférence, c'est à dire que toute paire d'antenne de même sorte est à distance mutuelle au moins  $d + 1$ . Ce problème correspond à une  $S$ -coloration de la grille 5 par 5. La figure 1.2 fournit une coloration d'une telle grille.

### 1.2.3/ COLORATION DE GRUNDY ET $b$ -COLORATION

La coloration suivante est le second sujet de ce mémoire. Une *coloration de Grundy* est une coloration propre de sommets avec des conditions supplémentaires. On suppose que l'on doit colorer un graphe avec un maximum de couleurs de telle façon que quand on colore un sommet de la couleur  $k$  alors le sommet doit être adjacent à un sommet de chaque couleur inférieure à  $k$ . Par exemple, si un sommet est coloré 4, il faut qu'il soit adjacent à un sommet coloré 3, un sommet coloré 2 et un sommet coloré 1. La figure 1.3 fournit une coloration de Grundy du graphe de Petersen.

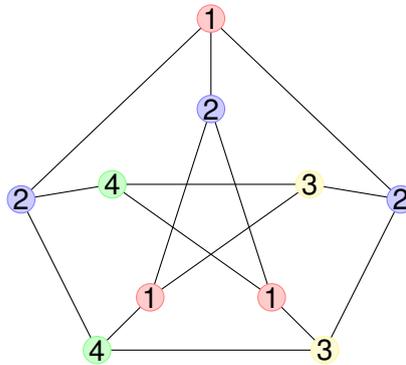


FIGURE 1.3 – Une coloration de Grundy du graphe de Petersen.

**Définition 1.21.** Soit  $G$  un graphe. Une coloration de Grundy est une coloration propre de sommets telle que pour tout sommet  $u \in C_i$ ,  $u$  est adjacent à un sommet coloré  $j$ , pour chaque  $j < i$ . La notion de  $k$ -colorable sera notée  $k$ -Grundy colorable pour la coloration de Grundy en  $k$  couleurs. Le nombre de Grundy de  $G$ , noté  $\Gamma(G)$  est le plus grand entier  $k$  tel que  $G$  est  $k$ -Grundy colorable.

**Définition 1.22.** Une  $b$ -coloration est une coloration propre de sommets telle qu'il existe pour chaque  $i$  un sommet  $u \in C_i$ , avec  $u$  adjacent à un sommet coloré  $j$ , pour chaque  $j \neq i$ . La notion de  $k$ -colorable sera notée  $k$ - $b$ -colorable pour la  $b$ -coloration en  $k$  couleurs. Le nombre  $b$ -chromatique de  $G$ , noté  $b(G)$  est le plus grand entier  $k$  tel que  $G$  est  $k$ - $b$ -colorable.

La coloration de Grundy a été introduite par Grundy [48] en 1939, dans le cadre de la théorie des jeux. Il faut noter que  $\Gamma(G) \leq \Delta(G) + 1$  et  $b(G) \leq \Delta(G) + 1$ , pour n'importe quel graphe  $G$ . De plus, aucun de ces deux paramètres de graphes ne minore l'autre.

### 1.3/ OPÉRATIONS SUR LES LES GRAPHEs

Voici différentes opérations de base sur les graphes.

**Définition 1.23.** Soit  $G$  un graphe.

- Par  $G - uv$ , on dénote le graphe obtenu à partir de  $G$  par suppression de l'arête  $uv$ .
- Par  $G - v$ , on dénote le graphe obtenu à partir de  $G$  par suppression du sommet  $v$  et des arêtes incidentes à  $v$ .
- Par  $G - A$ , on dénote le graphe obtenu à partir de  $G$  par suppression des sommets de  $A$  et des arêtes incidentes à un sommet de  $A$ .
- Le complémentaire de  $G$ , noté  $\bar{G}$ , est le graphe tel que  $V(\bar{G}) = V(G)$  et  $E(\bar{G}) = \{uv \mid uv \notin E(G)\}$ .

**Définition 1.24.** Soit  $G$  un graphe et soit  $\{u, v\}$  une paire de sommets dans  $V(G)$ . La fusion de  $u$  et  $v$  est une opération sur le graphe  $G$  qui consiste à créer un nouveau graphe  $G'$  tel que  $V(G') = V(G - \{u, v\}) \cup w$  et  $E(G') = \{u'v' \in E(G) \mid u' \neq u, v \wedge v' \neq u, v\} \cup \{wu' \mid (uu' \in E(G) \wedge u' \neq v) \vee (vu' \in E(G) \wedge u' \neq u)\}$ . Un graphe  $G'$  est un mineur de  $G$  s'il existe une suite de suppressions de sommets, de suppressions d'arêtes et de fusions de deux sommets adjacents de telle façon que l'on peut obtenir  $G'$  à partir de  $G$ .

Les produits de graphes sont des opérations qui construisent, à partir de deux graphes, un nouveau graphe. Les produits de graphes ont une grande utilité pour les propriétés de décompositions ou pour définir des classes de graphes.

**Définition 1.25.** La jointure de deux graphes  $G_1, G_2$ , notée  $G_1 \bowtie G_2$  est le graphe ayant pour ensemble de sommets  $V(G_1) \cup V(G_2)$  et pour ensemble d'arêtes, l'ensemble  $E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{v_1v_2 | v_1 \in V(G_1), v_2 \in V(G_2)\}$ .

**Définition 1.26.** Le produit cartésien de deux graphes  $G_1, G_2$ , noté  $G_1 \square G_2$  est le graphe ayant pour ensemble de sommets  $V(G_1) \times V(G_2)$  et pour ensemble d'arêtes, l'ensemble  $\{(u_1, u_2)(v_1, v_2) | (u_1v_1 \in E(G_1) \wedge u_2 = v_2) \vee (u_1 = v_1 \wedge u_2v_2 \in E(G_2))\}$ .

**Définition 1.27.** Le graphe subdivisé de  $G$ , pour  $G$  possiblement un multi-graphe, noté  $S(G)$ , est le graphe  $G$  où pour chaque arête  $uv \in E(G)$ , on supprime  $uv$  et on rajoute un sommet  $w$  et deux arêtes  $uw$  et  $wv$ .

Dans le graphe subdivisé de  $G$ , on appelle sommet subdivisé, un sommet rajouté et sommets issus de  $A \subseteq V(G)$ , les sommets qui proviennent d'un sous-ensemble de sommets  $A \subseteq V(G)$ . Un graphe  $G$  est une subdivision s'il existe un graphe  $G'$  tel que  $G = S(G')$ .

## 1.4/ QUELQUES CLASSES DE GRAPHES

Pour les différents problèmes de graphes abordés dans ce mémoire, on étudie les problèmes sur des classes de graphes particulières. Cette partie a pour but d'introduire les différentes classes de graphes utilisées dans ce mémoire.

**Définition 1.28.** – Un graphe est dit  $r$ -régulier si tous les sommets sont de degré  $r$ . Un graphe 3-régulier est aussi appelé un graphe cubique.

– Un graphe subcubique est un graphe de degré maximum 3.

– Un graphe  $G$  est  $r$ -irrégulier si  $\Delta(G) \leq r$  et l'ensemble des sommets de degré  $r$  est un ensemble stable.

**Définition 1.29.** – Un graphe acyclique connexe est un arbre.

– Une étoile est un arbre où seul un sommet est de degré supérieur à 1.

**Définition 1.30.** Un graphe qui ne contient pas de  $n$ -cycles, avec  $n$  impair, en tant que sous-graphe est un graphe biparti.

Avoir un nombre chromatique de 2 et être biparti sont des propriétés équivalentes.

**Définition 1.31.** Soit  $n$  un entier. Le graphe  $P_n$  est le chemin d'ordre  $n$ . Ce graphe est défini par  $V(P_n) = \{0, 1, \dots, n-1\}$  et  $E(P_n) = \{i(i+1) | i \in \{0, \dots, n-2\}\}$ .

Par  $P_\infty$  on désigne le chemin infini, c'est à dire le graphe avec comme ensemble de sommets  $V(P_\infty) = \mathbb{Z}$  et ensemble d'arêtes  $E(P_\infty) = \{i(i+1) | i \in \mathbb{Z}\}$ .

**Définition 1.32.** – Le graphe complet  $K_n$  est le graphe tel que  $V(K_n)$  est une clique d'ordre  $n$ .

– Soient  $n$  un entier et  $k_1, \dots, k_n$  des entiers. Le graphe complet  $n$ -parti  $K_{k_1, \dots, k_n}$  est le graphe  $I_{k_1} \bowtie \dots \bowtie I_{k_n}$ , où  $I_k$  est un ensemble de sommets formant un stable d'ordre  $k$ .

**Définition 1.33.** Soit  $k$  un entier strictement positif. L'hypercube de dimension  $k$ , noté  $H_k$ , est le produit cartésien de  $k$  graphes  $P_2$ .

**Définition 1.34.** Un graphe est planaire s'il existe une façon de le dessiner dans le plan sans qu'aucune arête ne se coupe.

Une caractérisation équivalente [60] est que le graphe ne contient pas  $K_{3,3}$  et  $K_5$  en tant que mineur.

**Définition 1.35.** Le graphe de Petersen est le graphe de la figure 1.3.

Il faut noter que le graphe de Petersen sera un graphe récurrent pour nos deux colorations. Il s'agit du plus petit graphe cubique non  $(1, 2, 2, 2, 2, 2)$ -colorable et du plus petit graphe cubique non  $(1, 1, 2, 2)$ -colorable (on suppose même qu'il s'agit du seul dans les deux cas). Il s'agit aussi d'un cas à traiter à part pour prouver qu'un graphe 4-régulier sans carré induit a un nombre de Grundy égal à 5.

## 1.5/ BOULE, DENSITÉ ET PARTITIONNEMENT D'UN PACKING

Dans certaines propositions les graphes considérés pourront être infinis. Au cours des différents chapitres, on pourra faire appel au théorème de De Bruijn-Erdős suivant :

**Théorème 1.1** ([24]). Tout graphe infini  $G$  admet une coloration en  $k$  couleurs si et seulement si tout sous-graphe fini de  $G$  admet une coloration en  $k$  couleurs.

Pour que le théorème de De Bruijn-Erdős soit vrai, on doit supposer que l'axiome du choix est vrai. Malgré tout, la version de l'axiome du choix utilisée dans notre cas est l'axiome du choix dénombrable. On supposera que l'axiome du choix dénombrable est vrai dans la suite de ce mémoire. Il faut noter que le théorème de Bruijn-Erdős est une conséquence directe du théorème de compacité.

**Définition 1.36.** Soit  $G$  un graphe possiblement infini. La densité d'un ensemble de sommets  $X \subseteq V(G)$  est  $d(X) = \limsup_{l \rightarrow \infty} \max_{x \in V(G)} \left\{ \frac{|X \cap B_l(x)|}{|B_l(x)|} \right\}$ .

La densité n'a un sens que dans les graphes localement finis, c'est à dire dans les graphes où  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial B_n(x)}{B_n(x)} = 0$ , pour tout sommet  $x$  dans  $V(G)$ . On ne considérera que des graphes infinis localement finis dans ce mémoire.

**Définition 1.37.** Soit  $G$  un graphe possiblement infini. La densité maximale d'un  $i$ -packing, notée  $d_{max}^i(G)$ , est la densité du plus grand  $i$ -packing dans  $G$ , c'est à dire  $\frac{\alpha^i(G)}{|V(G)|}$ , dans le cas où  $G$  est fini et  $\max\{d(X_i)\}$  avec  $X_i$  un  $i$ -packing, dans le cas où  $G$  est infini.

Un packing est maximum s'il est de densité maximale dans  $G$ .

**Définition 1.38.** Soit  $G$  un graphe infini de diamètre non borné et soit  $S$  une liste croissante d'entiers. Une liste  $S$  est étroite sur  $G$  si  $\sum_{i=1}^{|S|} d_{max}^i(G) = 1$ .

Notons que si  $G$  admet une  $S$ -coloration pour une liste  $S$  étroite sur  $G$ , alors  $G$  est  $S$ -chromatique.

**Proposition 1.1** ([34]). *Soit  $G$  un graphe, soit  $i$  un entier, soit  $x$  un sommet de  $V(G)$  et soit  $S$  une liste croissante d'entiers. Si  $G$  est  $S$ -colorable, alors  $\sum_{i=1}^{|S|} d_{\max}^{S_i}(G) \geq 1$ .*

La notion de  $k$ -aire a été introduite par Fiala *et al.* [34], sous la forme suivante :

**Définition 1.39** ([34]). *Soit  $G$  un graphe infini, soit  $x \in V(G)$  et soit  $k$  un entier positif. La  $k$ -aire  $A(x, k)$  assignée à  $G$  est définie par :*

$$A(x, k) = \begin{cases} |B_{k/2}(x)|, & \text{pour } k \text{ pair;} \\ |B_{\lfloor k/2 \rfloor}(x)| + \sum_{u \in \partial B_{\lfloor k/2 \rfloor}(x)} \frac{|N(u) \cap B_{\lfloor k/2 \rfloor}(x)|}{\deg(u)}, & \text{pour } k \text{ impair.} \end{cases}$$

On propose une définition un peu modifiée par rapport à la définition initiale.

**Définition 1.40.** *Soit  $G$  un graphe, soit  $x \in V(G)$  et soit  $n$  un entier positif. Soit  $X$  un sous-ensemble de sommets de  $V(G)$  et soit  $u$  un sommet dans  $\partial B_n(x)$ . On définit la fonction  $f$  suivante :  $f_n(x, X, u) = \max\{|Y| + 1 \mid Y \subseteq X \wedge \forall y \in Y, u \in \partial B_n(y)\}$ . De plus, on définit la fonction suivante à partir de  $f$  :  $\text{inter}_n(x) = \max\{\sum_{u \in \partial B_n(x)} \frac{1}{f_n(x, X, u)} \mid X \subseteq V(G), X \text{ est un } 2n\text{-packing}\}$ . La  $k$ -aire  $A(x, k)$  assignée à  $G$  est définie par :*

$$A(x, k) = \begin{cases} |B_{k/2}(x)| & \text{pour } k \text{ pair;} \\ |B_{\lfloor k/2 \rfloor}(x)| + \sum_{u \in \partial B_{\lfloor k/2 \rfloor}(x)} \frac{|N(u) \cap B_{\lfloor k/2 \rfloor}(x)|}{\deg(u)} + \text{inter}_{\lfloor k/2 \rfloor}(x), & \text{pour } k \text{ impair.} \end{cases}$$

On note une  $k$ -aire  $A(k)$ , dans le cas où le graphe est sommet-transitif.

Notons déjà que  $\text{inter}_{n+1}(x) \geq \sum_{u \in \partial B_{n+1}(x)} \frac{|N(u) \cap B_n(x)|}{\deg(u)}$ . En effet, chaque sommet de degré  $k$

dans  $\partial B_{n+1}$ , ayant  $k'$  voisins dans  $B_n$ , ne peut être voisin de plus de  $\lfloor \frac{k'}{k} \rfloor$  boules. La fonction  $\text{inter}_n(x)$  n'étant pas toujours facile à calculer, on prendra juste des bornes inférieures de cette valeur dans les cas difficiles. La motivation de notre amélioration de la définition de  $k$ -aire avec l'introduction de la fonction  $\text{inter}$  est d'avoir des bornes un peu plus fines que celles obtenues par la définition initiale de  $k$ -aire. Pour la grille carrée la notion coïncide avec la définition initiale. Cependant, pour la grille triangulaire la borne est plus petite : la définition de Fiala *et al.* [34] donne  $A(1) = 2$  alors que notre définition nous donne  $A(1) = 3$ , car on a  $\text{inter}_{n+1}(x) = 1$ . La figure 1.4 développe cet exemple en donnant une couverture de la grille triangulaire par des boules de rayon 1. Dans un cas (sur la gauche), les boules sont disjointes et dans le second cas (sur la droite), chaque sphère peut être partagée entre plusieurs boules. On observe dans le second cas que chaque sommet  $u$  dans la sphère centrée en  $x$  est à l'intersection de trois boules au maximum et cette configuration est possible pour chaque sommet dans la sphère. On a donc  $A(1) = 1 + 6 \frac{1}{3} = 3$ , alors que la définition initiale donne  $A(1) = 1 + 6 \frac{1}{6} = 2$ .

**Proposition 1.2.** *Soit  $G$  un graphe sommet transitif et soit  $i$  un entier strictement positif. Si  $X_i$  est un  $i$ -packing dans  $G$ , alors  $d(X_i) \leq \frac{1}{A(i)}$  et donc  $d_{\max}^i(G) \leq \frac{1}{A(i)}$ .*

*Démonstration.* On observe que pour des sommets arbitraires  $x$  et  $y$  d'un  $i$ -packing  $X_i$ , les ensembles  $B_{\lfloor i/2 \rfloor}(x)$  et  $B_{\lfloor i/2 \rfloor}(y)$  sont disjoints car les sommets  $x$  et  $y$  sont à distance plus grande que  $i$ . On a donc  $d(X_i) \leq \frac{1}{|B_{\lfloor i/2 \rfloor}(x)|}$ . On suppose que  $i$  est un nombre impair. Soit  $u$  un sommet à distance  $\lceil i/2 \rceil$  de  $x$ . Le sommet  $u$  ne peut être à distance  $\lceil i/2 \rceil$  de plus de  $\text{inter}_{\lceil i/2 \rceil}(x)$  sommets dans  $X_i$ , par définition. On a donc  $d(X_i) < \frac{1}{A(i)}$ .  $\square$

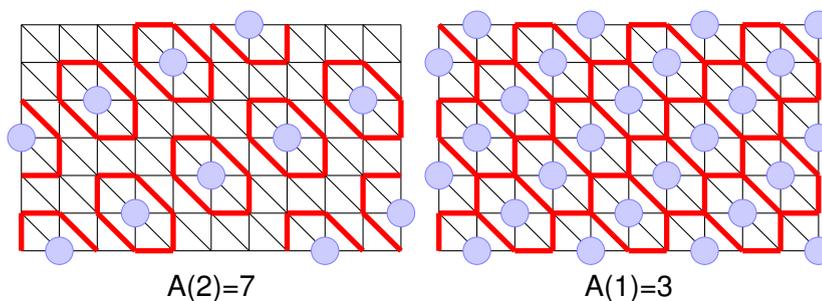


FIGURE 1.4 – Exemples de  $k$ -aires dans  $\mathcal{T}$ .

Notre version modifiée de la notion de  $k$ -aire ne sera utilisée que pour colorer deux grilles : la grille triangulaire et la grille du roi. Dans les autres cas on suppose que l'on utilise la notion initiale de  $k$ -aire, celle-ci nous donnant d'aussi bonnes bornes.

**Corollaire 1.3.** Soit  $G$  un graphe, soit  $i$  un entier strictement positif, soit  $x$  un sommet de  $G$  et soit  $S$  une liste ou une série croissante d'entiers. Si  $G$  est  $S$ -colorable, alors  $\sum_{i=1}^{|S|} \frac{1}{A(x,s_i)} \geq 1$ , dans le cas où  $S$  est une liste. De plus, si  $G$  a un nombre  $S$ -chromatique fini, alors  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{A(x,s_i)} \geq 1$  dans le cas où  $S$  est une série.

**Définition 1.41.** Soit  $S$  une liste croissante d'entiers. On note  $S_{i \rightarrow k,j}$  la liste croissante d'entiers  $S$  où un entier  $i \in S$  est enlevé et  $k$  entiers  $j$  sont rajoutés à  $S$ .

**Exemple 1.1.** Si on pose  $S = (1, 1, 2, 2, 2)$ , alors  $S_{1 \rightarrow 3,4} = (1, 2, 2, 2, 2, 4, 4, 4)$ .

**Définition 1.42.** Soit  $G$  un graphe, soit  $S$  une liste croissante d'entiers et soit  $s_i$  un entier dans  $S$ . Pour une  $S$ -coloration  $c$  de  $G$ , un  $s_i$ -packing  $X_{s_i} \subseteq V(G)$  est subdivisible en  $k$   $j$ -packings s'il existe une  $S_{s_i \rightarrow k,j}$ -coloration de  $G$  qui diffère seulement de  $c$  sur l'ensemble coloré  $s_i$ .

**Exemple 1.2.** Soit  $G$  un graphe. On définira dans les chapitres suivants des familles  $\mathcal{S}(G)$  de listes correspondant à un graphe  $G$  de la façon suivante :

- $S \in \mathcal{S}(G)$  pour certaines listes  $S$  telles que  $G$  est  $S$ -colorable ;
- Si  $S \in \mathcal{S}(G)$  et s'il existe une  $S$ -coloration où un  $i$ -packing est subdivisible en  $k$   $j$ -packings, alors  $S_{i \rightarrow k,j} \in \mathcal{S}(G)$ .

De plus, si  $\mathcal{S}(G)$  ne contient que des listes étroites sur  $G$ , on note l'ensemble  $\mathcal{S}_=(G)$ .

## 1.6/ DÉFINITIONS DE BASE EN COMPLEXITÉ ALGORITHMIQUE

Les problèmes de graphes sont des problèmes qui tiennent une place importante au sein de l'informatique. Un certain nombre d'algorithmes se servent de concept de graphes, que ce soit en réseau, en économie ou en biologie. La complexité algorithmique des problèmes sert à classer les différents problèmes algorithmiques dans des classes de problèmes. Ces classes de problèmes servent à différencier les différents problèmes en fonction de l'efficacité des algorithmes à résoudre ces problèmes. Par efficacité, on entend que suivant la taille de l'entrée, l'algorithme ne mettra pas énormément de temps.

La classe typique des problèmes de coloration de graphes est la classe NP. La classe typique des jeux sur un graphe est la classe PSPACE. Une bonne formalisation des problèmes de complexités passe par la définition de *machine de Turing*. Cependant, par souci de concision, on se passe de cette définition.

**Définition 1.43.** – *Un problème de décision est un problème qui a deux réponses possibles : vrai et faux.*

- *Pour une fonction donnée  $g(n)$ , la notation  $O(g(n))$  signifie :  $O(g(n)) = \{f(n) : 0 \leq f(n) \leq cg(n), \forall n \geq n_0\}$ , pour certaines constantes positives  $c$  et  $n_0$ .*
- *Une instance d'un problème de décision est le codage d'une entrée pour laquelle on pose le problème de décision comme question.*
- *Une instance d'un problème de décision est vraie si la réponse au problème de décision est vraie.*
- *La taille d'une instance est le nombre de bits qui la composent.*
- *Un algorithme produit une solution en temps  $g(n)$ , si le nombre d'opérations effectuées par l'algorithme pour une entrée de taille  $n$  est borné par  $g(n)$ .*

**Définition 1.44.** – *Un algorithme résout un problème de décision en temps  $O(T(n))$  si quand une instance du problème  $i$  de taille  $n$  est donnée en entrée, l'algorithme produit une solution en temps  $O(T(n))$ .*

- *Un problème peut être résolu en temps polynomial, s'il existe un algorithme qui résout le problème en temps  $O(n^k)$ , pour une constante  $k$ .*
- *Un problème peut être résolu en temps linéaire, s'il existe un algorithme qui résout le problème en temps  $O(n)$ .*
- *La classe de complexité P est la classe des problèmes de décisions résolubles en temps polynomial.*

**Définition 1.45.** – *Un algorithme de vérification est un algorithme qui a deux arguments, une instance du problème  $i$  de taille  $n$  et un certificat  $x$ . De plus, l'algorithme de vérification doit vérifier que, pour toute instance vraie du problème, cette instance est bien vraie à l'aide du certificat qui dépend de l'instance.*

- *Un problème est dans NP s'il existe un algorithme de vérification en temps polynomial en  $n$ .*

**Définition 1.46.** – *Un problème de décision  $P_1$  se réduit à un problème de décision  $P_2$ , noté  $P_1 \leq_p P_2$ , s'il existe un algorithme en temps polynomial qui calcule une fonction  $f$  telle que pour toute instance  $x$  de  $P_1$ ,  $x$  une instance vraie de  $P_1$  si et seulement si  $f(x)$  est une instance vraie de  $P_2$ .*

- *On dit qu'un problème de décision  $P$  est NP-dur si  $P' \leq_p P$ , pour tout problème de décision  $P' \in NP$ .*
- *Un problème de décision  $P$  est NP-complet si  $P$  est NP-dur et dans NP.*

Le lecteur pourra se référer aux livres de références sur la complexité algorithmique [5, 66] pour avoir plus de détails sur ces notions.

**Définition 1.47.** *Un problème de décision  $P$  est dans XP avec comme paramètre  $p$  s'il existe un algorithme qui résout le problème en temps  $O(f(p) n^{g(p)})$ , pour une instance de taille  $n$  de  $P$  et deux fonctions  $f$  et  $g$  calculables.*

**Définition 1.48.** *Un problème de décision  $P$  est dans FPT avec comme paramètre  $p$  s'il existe un algorithme qui résout le problème en temps  $O(f(p) n^k)$ , pour une instance de taille  $n$  de  $P$ , une constante  $k$  et une fonction  $f$  calculable.*

Le lecteur pourra se référer au livre sur la complexité paramétrée [25] pour avoir plus de détails sur ces notions.

**Théorème** <sup>1,2</sup> ([20, 61]). *Les problèmes de décisions suivants sont NP-complets : 3SAT,  $k$ -COL et NAE 3SAT.*

Le problème  $k$ -COL correspond à déterminer si un graphe est oui ou non  $k$ -colorable. Les problèmes 3SAT et NAE 3SAT sont détaillés dans le chapitre 3.

## 1.7/ VUE D'ENSEMBLE

Le sujet majeur de cette thèse est la  $S$ -coloration. La thèse a aussi un sujet mineur : la coloration de Grundy. Ces sujets sont connectés entre eux par le graphe de Petersen. De plus, pour la grille carrée ( $P_\infty \square P_\infty$ ), on peut noter qu'une 5-coloration à distance 2 est aussi une 5-coloration de Grundy. Néanmoins, ces rapprochements entre paramètres sont arbitraires ; un seul rapprochement fait sens : ces deux paramètres sont des colorations propres. La  $S$ -coloration donnera lieu à quatre chapitres. Dans le deuxième chapitre, un rappel de l'état de l'art sera fait. De plus la  $S$ -coloration des chemins, cycles et arbres sera étudiée cette partie. Ensuite, l'étude de la complexité de différentes instances du problème de  $S$ -coloration sera traitée dans le troisième chapitre. La  $S$ -coloration des grilles infinies sera étudiée dans le quatrième chapitre. La  $S$ -coloration des graphes cubiques sera le sujet du cinquième chapitre. Pour finir, la coloration de Grundy donnera lieu à un dernier chapitre.

Ces travaux ont fait l'objet de soumissions et publications [37, 40, 41, 42]. Tous les travaux traités dans ce mémoire n'ont pas été publiés ou soumis. Ces travaux donneront lieu à un certain nombre de soumissions. D'autres travaux non présentés dans ce mémoire font l'objet de soumission [23, 39].



# COLORATION DE PACKING, DISTANCE

## COLORATION ET $S$ -COLORATION

Dans ce chapitre, on présente dans un premier temps quelques résultats généraux prouvés par différents auteurs qui ont travaillé sur la coloration de *packing*, la  $S$ -coloration ou la coloration à distance  $d$ . L'état de l'art de Kramer et Kramer [59] s'est avéré très utile pour rédiger ce chapitre, certains résultats ayant été publiés dans des revues italiennes, il n'aurait pas été facile de retrouver l'origine de ces différents résultats sans celui-ci. La  $S$ -coloration étant plus générale que la coloration de *packing*, différents résultats de coloration de *packing* ou de coloration à distance  $d$  sont généralisés en résultats sur la  $S$ -coloration.

Ensuite, on étudie spécifiquement la  $S$ -coloration pour trois classes de graphes : les chemins, les cycles et les arbres. Après un rappel de l'état de l'art, on apportera nos contributions à propos de ces classes de graphes.

Dans une première partie, on rappelle des résultats généraux sur la  $S$ -coloration des graphes. Dans une deuxième partie, on présente les résultats trouvés pour la  $S$ -coloration de quelques classes de graphes. Les trois dernières parties sont consacrées aux chemins, cycles et arbres.

### 2.1/ RÉSULTATS SUR LA $S$ -COLORATION D'UN GRAPHE QUELCONQUE

#### 2.1.1/ GÉNÉRALITÉS

Cette section contient des propriétés générales sur la  $S$ -coloration et la coloration de *packing*. On commence par rappeler ce qu'apporte l'ordre que l'on a mis sur les listes.

**Affirmation 2.1.** *Soient  $S$  et  $S'$  deux listes croissantes d'entiers et  $G$  un graphe. Si  $S \leq S'$  et  $G$  est  $S$ -colorable, alors  $G$  est  $S'$ -colorable. Cette propriété implique que si  $S$  et  $S'$  sont deux listes et  $S \leq S'$ , alors  $\chi_S(G) \geq \chi_{S'}(G)$ .*

Les prochains résultats viennent des articles de Goddard *et al.* [45, 46] qui sont à l'origine du concept.

**Proposition 2.1** ([46]). *Soit  $G$  un graphe, soit  $S$  une série croissante d'entiers et soit  $k$  un entier strictement positif.*

1. *Si  $s_1 = 1$ , alors  $\chi_\rho^S(G) \leq |V(G)| - \alpha(G) + 1 = \beta(G) + 1$ , avec l'égalité si  $s_2 \geq \text{diam}(G)$  ;*
2. *Si  $s_k = 1$ , alors  $\chi_\rho^S(G) \leq |V(G)| + \alpha(G, k) - \min(k, \chi(G))$ .*

**Proposition 2.2** ([45]). *Soit  $G$  un graphe biparti de diamètre 3, soit  $S$  une série croissante d'entiers et soit  $k$  un entier strictement positif. Si  $s_1 = 1$  et  $s_k = 2$ , alors  $\beta(G) - k - 2 \leq \chi_\rho^S(G) \leq \beta(G) + 1$ .*

**Proposition 2.3** ([45]). *Soit  $G$  un graphe et soit  $S$  une série croissante d'entiers. On a  $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \chi_\rho^S(G)$ .*

**Proposition 2.4** ([45]). *Soit  $G$  un graphe et soit  $S$  une série croissante d'entiers telle que  $s_1 = 1$ ,  $s_2 = 2$  et  $s_3 \geq 3$ . Si  $\chi(G) = \chi_\rho^S(G)$ , alors  $\omega(G) \geq \chi(G) - 2$ .*

## 2.1.2/ $S$ -COLORATION POUR DES PETITES LISTES D'ENTRIERS

Les prochaines propositions donnent une caractérisation des graphes qui ont un petit nombre  $S$ -chromatique, pour une liste  $S$  spécifique. Ces résultats sont parus dans des articles de Goddard *et al.* [45, 46], pour ce qui concerne le nombre de *packing* ou le nombre  $S$ -chromatique, et dans l'article de Kramer et Kramer [57], pour ce qui concerne le nombre chromatique à distance  $d$ .

**Observation 2.1** ([46]). *Soit  $G$  un graphe d'ordre  $n$  et soit  $S$  une série croissante d'entiers.*

1.  $1 \leq \chi_\rho^S(G) \leq n$  ;
2.  $\chi_\rho^S(G) = 1$  si et seulement si  $G$  n'a pas d'arêtes ;
3.  $\chi_\rho^S(G) = n$  si et seulement si  $G$  est connexe et  $\text{diam}(G) \leq s_1$ .

**Proposition 2.5** ([46]). *Soit  $G$  un graphe connexe et soit  $S$  une série croissante d'entiers.*

1. *Si  $s_1 = s_2 = 1$ , alors  $\chi_\rho^S(G) = 2$  si et seulement si  $G$  est biparti ;*
2. *Si  $s_1 = 1 < s_2$ , alors  $\chi_\rho^S(G) = 2$  si et seulement si  $G$  est une étoile ;*
3. *Si  $s_1 > 1$ , alors  $\chi_\rho^S(G) = 2$  si et seulement si  $G$  est  $K_2$ .*

Ajouter des feuilles sur un sommet  $v$  est une opération qui consiste à ajouter un ensemble de sommets formant un stable  $X$ , et de faire la jointure entre les sommets de  $X$  et  $v$ . Un  $T$ -ajout sur un sommet  $v$  est une opération qui consiste à ajouter un sommet  $w_v$ , un ensemble de sommets formant un stable  $X_v$ , l'arête  $vw_v$  et des arêtes entre  $\{v, w_v\}$  et  $X_v$ .

Nous avons trouvé le résultat suivant avant la publication de l'article de Goddard *et al.* [46], au cours de notre travail sur la complexité de la  $S$ -coloration, résumé dans le chapitre 3. Il est à noter que nous ne contestons pas la paternité dudit résultat.

**Proposition 2.6** ([45],[46]). *Soit  $G$  un graphe et soit  $S$  une série croissante d'entiers. Si  $s_1 = 1$ ,  $2 \leq s_2 \leq 3$ ,  $s_3 = 3$ , on a  $\chi_\rho^S(G) = 3$  si et seulement si  $G$  est un graphe subdivisé  $S(H)$  avec  $H$  un multi-graphe biparti de bipartition  $V(H) = V_1 \cup V_2$ , où on a ajouté sur  $G$  des feuilles sur des sommets non subdivisés. De plus, on peut faire un  $T$ -ajout sur certains sommets issus de  $V_1$ , si  $s_2 = 2$ .*

**Proposition 2.7** ([57]). *Soit  $S$  une série croissante d'entiers telle que  $s_1 = s_{d+1} = d$  et soit  $G$  un graphe. On a  $\chi_\rho^S(G) = d + 1$  si et seulement si une des trois conditions est vraie à propos de  $G$  :*

- $|V(G)| \leq d + 1$  ;
- $G$  est un chemin ;
- $G$  est un  $n$ -cycle, avec  $n$  un multiple de  $d + 1$ .

### 2.1.3/ MONOTONIE ET MAXIMISATION

Pour une coloration de *packing*  $c$  d'un graphe  $G$ , on note  $c_i$  le nombre de sommets colorés par la couleur  $i$ . Une  $k$ -coloration de *packing* est monotone si  $c_i \leq c_{i+1}$ , pour tout entier  $i > 0$ . La question de la monotonie d'une coloration de *packing* est un sujet intéressant introduit par Bresar *et al.* [14].

**Proposition 2.8** ([14]). *Soit  $G$  un graphe et soit  $m$  un entier tel que  $m \leq \lfloor \chi_\rho(G)/2 \rfloor$ . Il existe une coloration de *packing* de  $G$  telle que  $c_n \leq c_m$ , pour tout  $n \geq 2m$ .*

**Proposition 2.9** ([14]). *Il existe au moins un arbre  $T$  qui n'a pas de coloration de *packing* monotone en  $\chi_\rho(T)$  couleurs.*

Caractériser des classes de graphes pour lesquelles il existe toujours des colorations de *packing* monotones est un sujet très intéressant.

Soit  $G$  un graphe. Pour une  $S$ -coloration de  $G$ , un  $s_i$ -packing est maximum s'il est de densité maximum dans  $G$ . Le résultat suivant provient d'un article récent de Goddard et Xu [47].

**Proposition 2.10** ([47]). *Il existe une liste  $S$  où pour toute  $S$ -coloration de  $P_\infty$ ,  $s_1$  n'est pas un  $s_i$ -packing maximum.*

## 2.2/ NOMBRE $S$ -CHROMATIQUE DE QUELQUES CLASSES DE GRAPHERS

Cette deuxième section s'intéresse au nombre  $S$ -chromatique pour quelques classes de graphes diverses. Ces classes vont des plus spécifiques (cliques, peignes) aux plus générales (degré borné, planaire).

### 2.2.1/ GRAPHERS COMPLETS $n$ -PARTIS

Les résultats suivants concernent les graphes complets  $n$ -partis et proviennent de l'article de Goddard et Xu [46].

**Observation 2.2**. *Soit  $n$  un entier et soit  $S$  une série croissante d'entiers, on a  $\chi_\rho^S(K_n) = n$ .*

**Proposition 2.11** ([46]). *Soient  $n$  et  $m$  des entiers. On a :*

$$\chi_\rho^S(K_{n,m}) = \begin{cases} 2, & \text{si } s_1 = s_2 = 1 ; \\ m + 1, & \text{si } s_1 = 1 \text{ et } s_1 < s_2 ; \\ m + n, & \text{si } s_1 > 1. \end{cases}$$

On rajoute cette petite proposition concernant les graphes complets  $n$ -partis.

**Proposition 2.12.** *Soient  $k > 2$ ,  $n_1 \leq \dots \leq n_k$  des entiers et soit  $S$  une série croissante d'entiers. On a :*

$$\chi_\rho^S(K_{n_1, \dots, n_k}) = \begin{cases} k, & \text{si } N_1(S) \geq k ; \\ n_{N_1(S)+1} + \dots + n_k + N_1(S), & \text{si } 0 < N_1(S) < k ; \\ n_1 + \dots + n_k, & \text{si } s_1 > 1. \end{cases}$$

*Démonstration.* Le graphe  $K_{n_1, \dots, n_k}$  est de diamètre 2. Par conséquent, chaque couleur supérieure à 1 ne peut être utilisée qu'une unique fois. En fonction du nombre de 1 dans la série  $S$ , on colore les ensembles stables par ordre décroissant de taille. On obtient donc le résultat désiré.  $\square$

De plus, on prouve ces résultats à propos des graphes  $n$ -partis auxquels on enlève un couplage.

**Proposition 2.13.** *Soit  $M$  un couplage parfait dans  $K_{2n}$  et soit  $S$  une série croissante d'entiers. On a :*

$$\chi_\rho^S(K_{2n} - M) = \begin{cases} n, & \text{si } N_1(S) \geq n \\ 2n - N_1(S), & \text{sinon.} \end{cases}$$

*Démonstration.* Le graphe  $K_{2n} - M$  est de diamètre 2. Par conséquent, chaque couleur supérieure à 1 ne peut être utilisée qu'une unique fois. En fonction du nombre de 1 dans la série  $S$ , on colore le plus possible d'ensembles stables.  $\square$

**Proposition 2.14.** *Soit  $M$  un couplage parfait dans  $K_{n,n}$  et soit  $S$  une série croissante d'entiers. On a :*

$$\chi_\rho^S(K_{n,n} - M) = \begin{cases} 2, & \text{si } N_1(S) \geq 2 ; \\ 1 + n, & \text{si } N_1(S) = 1 \text{ et } N_2(S) < n ; \\ n, & \text{si } N_1(S) = 0 \text{ et } N_2(S) \geq n ; \\ 2n - N_2(S), & \text{sinon.} \end{cases}$$

*Démonstration.* Le graphe  $K_{n,n} - M$  est de diamètre 3. Par conséquent, chaque couleur supérieure à 2 ne peut être utilisée qu'une unique fois. En fonction du nombre de 1 dans la série  $S$ , on colore les deux sous-ensembles stables. Si on a  $N_1(S) = 0$ , on colore le plus possible de 2-packings avec les couleurs 2 dans la série  $S$ .  $\square$

## 2.2.2/ AUTRES CLASSES DE GRAPHES

Dans cette sous-section, il est question de classes de graphes un peu moins communes. Le graphe *roue*  $W_n$  est obtenu à partir de la jointure d'un sommet et d'un  $(n - 1)$ -cycle.

**Proposition 2.15** ([46]). *Soit  $n \geq 4$  un entier et soit  $S$  une série croissante d'entiers. On a :*

$$\chi_\rho^S(W_n) = \begin{cases} 3, & \text{si } s_1 = s_2 = 1 \text{ et } n \text{ est impair ;} \\ 4, & \text{si } s_1 = s_2 = 1 \text{ et } n \text{ est pair ;} \\ \lceil n/2 \rceil + 2, & \text{si } s_1 = 1 \text{ et } s_1 < s_2 ; \\ n, & \text{si } s_1 > 1. \end{cases}$$

Une chenille est un arbre tel que tout sommet est à distance au plus 1 des sommets d'un même chemin. Un homard est un arbre tel que tout sommet est à distance au plus 2 des sommets d'un même chemin. Les chenilles et les homards ont été étudiés par Argiroffo [3].

**Proposition 2.16** ([3]). *Soit  $T$  une chenille, avec  $|V(T)| \geq 3$ , soit  $a$  un entier strictement positif et soit  $S$  une série d'entiers telle que  $S = a, a + 1, \dots$*

1. Si  $a \leq 2$ ,  $\chi_\rho^S \leq 7 + (a - 1)4^{\Delta(G)-2}$  ;
2. Si  $a \geq 3$ ,  $\chi_\rho^S \leq 7 + (a - 2)4^{\Delta(G)-1}$ .

Soit  $L(T) = |\{v \in V(T) | d(v) \geq 4\}|$ .

**Proposition 2.17** ([3]). *Soit  $T$  un homard. Si  $L(T) = 0$ , alors  $\chi_\rho(T) \leq 15$ . Sinon, on a  $\chi_\rho(T) \leq 7 + 2^{2L(T)+1}$ .*

Un peigne  $P_n^+$  est un chemin d'ordre  $n$  auquel on rajoute sur chaque sommet une feuille.

**Proposition 2.18** ([82]). *Pour tout  $n \geq 8$ ,  $\chi_\rho(P_n^+) \leq 5$ .*

Dans l'article de William et Roy [82], un bon nombre de classes de graphes sont étudiées. Ces classes de graphes comprennent les cycles avec un sommet en commun (moulin à vent).

### 2.2.3/ HYPERCUBES

La théorie des hypercubes fait partie des sujets spécifiques au sein de la théorie des graphes. En effet, nous pouvons ne plus utiliser les graphes et travailler uniquement avec des codes binaires. Cette partie n'est pas très développée mais contient la plupart des résultats qui concernent la coloration de *packing* des hypercubes. Ces résultats sont parus dans les article de Goddard *et al.* [45] et Torres [79].

**Proposition 2.19** ([45]).  $\chi_\rho(Q_1) = 1, \chi_\rho(Q_2) = 2, \chi_\rho(Q_3) = 3, \chi_\rho(Q_4) = 7$  et  $\chi_\rho(Q_5) = 15$ .

**Proposition 2.20** ([45]). *Soit  $k$  un entier. On a  $\chi_\rho(Q_k) \sim (1/2 - O(1/k))2^k$ .*

**Proposition 2.21** ([79]).  $\chi_\rho(Q_6) = 25, \chi_\rho(Q_7) = 49$  et  $\chi_\rho(Q_8) = 95$ .

**Proposition 2.22** ([79]). *Soit  $k \geq 4$  un entier. On a  $\chi_\rho(Q_k) \leq 3 + 2^k(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{\lceil \log_2 k \rceil}}) - 2\lfloor \frac{k-4}{2} \rfloor$ .*

On ne met qu'un résultat récent en ce qui concerne la coloration à distance  $d$  mais la littérature à propos de ce sujet est vaste.

**Proposition 2.23** ([36]). *Soit  $k$  un entier strictement positif. On a  $\chi^4(Q_{2^{k+1}-1}) = 2^{2k+1}$  et  $\chi^5(Q_{2^{k+1}}) = 4^{k+1}$ .*

### 2.2.4/ GRAPHES SUBDIVISÉS

Les graphes subdivisés sont étudiés au cours de ce mémoire dans les chapitres 3 et 5, on rappelle ces résultats généraux parus dans l'article de Bresar *et al.* [14].

**Proposition 2.24** ([14]). *Soit  $G$  un graphe avec  $|V(G)| \geq 3$  et soit  $S$  une série croissante d'entiers telle que  $s_1 = 1$  et  $s_1 < s_2$ . On a  $\omega(G) + 1 \leq \chi_\rho^S(S(G)) \leq \chi_\rho^S(G)$ .*

**Proposition 2.25** ([14]). *Soit  $n$  un entier et soit  $S$  une série croissante d'entiers. On a :*

$$\chi_\rho^S(S(K_n)) = \begin{cases} 2, & \text{si } N_1(S) \geq 2; \\ n + 1, & \text{si } N_1(S) = 1; \\ n + \binom{n}{2}, & \text{si } s_1 > 1. \end{cases}$$

### 2.2.5/ GRAPHES DE DEGRÉ BORNÉ

On rappelle le théorème de Brooks [15] sur la coloration propre de sommets des graphes de degré borné.

**Théorème 2.1** ([15]). *Pour tout graphe  $G$  connexe, on a  $\chi(G) \leq \Delta(G)$ , sauf si  $G$  est un graphe complet ou un cycle de longueur impaire, auquel cas  $\chi(G) = \Delta(G) + 1$ .*

Les propositions suivantes viennent du travail de Kramer et Kramer [58].

**Proposition 2.26** ([58]). *Soient  $G$  un graphe biparti,  $M = 2(1 + \Delta(G)(\Delta(G) - 1))$  et  $S$  une série croissante d'entiers telle que  $s_1 = s_M = 3$ . On a  $\chi_\rho^S(G) \leq M$ . On a même l'égalité pour certains graphes avec  $\Delta(G) = 2$ ,  $\Delta(G) = 3$  ou  $\Delta(G) = 4$ .*

**Proposition 2.27** ([58]). *Soit  $G$  un graphe subcubique biparti et soit  $S$  une série croissante d'entiers telle que  $s_1 = s_{14} = 3$ . On a  $\chi_\rho^S(G) \leq 14$ .*

Voici un petit rappel sur la borne de Moore [51].

**Définition 2.1**. *Soient  $r$  et  $d$  des entiers strictement positifs. On note  $n(d, r) = 1 + r \sum_{i=0}^{d-1} (r-1)^i$  la borne de Moore [51]. Un graphe  $G$  est de Moore s'il est  $r$ -régulier, de diamètre  $d$  et si  $|V(G)| = n(d, r)$ .*

On note que le graphe de Petersen est un graphe de Moore.

**Observation 2.3**. *Pour tout graphe de Moore  $G$  tel que  $|V(G)| = n(d, r)$  pour deux entiers  $r$  et  $d$ , on a  $\chi^d(G) = n(d, r)$ .*

Les résultats suivants ont été prouvés dans la version liste de la coloration propre (version plus restrictive que la coloration propre). Récemment, Cranston *et al.* [22] ont prouvé que n'importe quel graphe subcubique différent du graphe de Petersen, est  $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$ -colorable, ainsi que certains graphes subcubiques planaires (avec restriction sur le  $mad$ <sup>1</sup> ou la maille) sont  $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$ -colorables.

**Proposition 2.28** ([22]). *Soit  $G$  un graphe subcubique différent du Petersen et soit  $S$  une série croissante d'entiers telle que  $s_1 = s_8 = 2$ . On a  $\chi_\rho^S(G) \leq 8$ .*

Encore plus récemment une conjecture a été proposée dans le cas général par Miao et Fan [65].

1. le  $mad$  d'un graphe  $G$  est donné par la formule suivante  $mad(G) = \max_{H \subseteq G} 2 \frac{|E(H)|}{|V(H)|}$ .

**Conjecture 2.1** ([65]). Soient  $r$  et  $d$  deux entiers strictement positifs, avec  $d \geq 3$ ,  $M = n(d, r) - 1$  et  $S$  une série croissante d'entiers telle que  $s_1 = s_M = d$ . Soit  $G$  un graphe tel que  $\Delta(G) \leq r$ . On a  $\chi_\rho^S(G) \leq M$ .

Cette conjecture n'est pas restée longtemps non prouvée. En effet, Bonamy et Bousquet [11] ont prouvé cette conjecture.

**Proposition 2.29** ([11]). Soient  $r$  et  $d$  deux entiers strictement positifs, avec  $d \geq 3$ ,  $M = n(d, r) - 1$  et  $S$  une série croissante d'entiers telle que  $s_1 = s_M = d$ . Soit  $G$  un graphe tel que  $\Delta(G) \leq r$ . On a  $\chi_\rho^S(G) \leq M$ .

### 2.2.6/ GRAPHERS PLANAIRES

La classe des graphes planaires est peut-être la classe la plus anciennement étudiée pour la coloration à distance  $d$ . Nous donnons ces deux résultats concernant les graphes subcubiques planaires. Ces résultats proviennent de Wegner [81] et Borodin [13].

**Proposition 2.30** ([81]). Soit  $G$  un graphe subcubique planaire et soit  $S$  une série croissante d'entiers telle que  $s_1 = s_8 = 2$ . On a  $\chi_\rho^S(G) \leq 8$ .

**Proposition 2.31** ([13]). Soit  $G$  un graphe subcubique planaire sans face plus grande que cinq et soit  $S$  une série croissante d'entiers telle que  $s_1 = s_7 = 2$ . On a  $\chi_\rho^S(G) \leq 7$ .

La conjecture à propos des graphes subcubiques planaires est la suivante.

**Conjecture 2.2** ([81]). Soit  $G$  un graphe subcubique planaire et soit  $S$  une série croissante d'entiers telle que  $s_1 = s_7 = 2$ . On a  $\chi_\rho^S(G) \leq 7$ .

Des résultats similaires ont été trouvés pour la coloration à distance 3 des graphes subcubiques planaires, ces résultats proviennent de Kramer et Kramer [58].

**Proposition 2.32** ([58]). Soit  $G$  un graphe subcubique biparti planaire et soit  $S$  une série croissante d'entiers telle que  $s_1 = s_8 = 3$ . On a  $\chi_\rho^S(G) \leq 8$ .

Jendrol [54] a trouvé le majorant suivant pour un graphe planaire de degré borné.

**Proposition 2.33** ([54]). Soit  $G$  un graphe planaire,  $M = 6 + \frac{3M'+3}{M'-2}((M' - 1)^{d-1} - 1)$ , avec  $M' = \max\{8, \Delta(G)\}$ , et  $S$  une série croissante d'entiers telle que  $s_1 = s_M = d$ . On a  $\chi_\rho^S(G) \leq M$ .

De plus, Wong [83], Van den Heuvel *et al.* [50] et Molloy *et al.* [63] ont trouvé plus récemment des résultats supplémentaires pour la coloration à distance 2 d'un graphe planaire de degré borné (ce degré peut être grand).

**Proposition 2.34** ([83]). Soit  $G$  un graphe planaire,  $M = 3\Delta(G) + 5$  et soit  $S$  une série croissante d'entiers telle que  $s_1 = s_M = 2$ . On a  $\chi_\rho^S(G) \leq M$ .

**Proposition 2.35** ([50]). Soit  $G$  un graphe planaire tel que  $\Delta(G) \geq 20$ ,  $M = 2\Delta(G) + 25$  et soit  $S$  une série croissante d'entiers telle que  $s_1 = s_M = 2$ . On a  $\chi_\rho^S(G) \leq M$ .

**Proposition 2.36** ([63]). Soit  $G$  un graphe planaire tel que  $\Delta(G) \geq 241$ ,  $M = \lceil \frac{5}{3}\Delta(G) \rceil + 25$  et soit  $S$  une série croissante d'entiers telle que  $s_1 = s_M = 2$ . On a  $\chi_\rho^S(G) \leq M$ .

Il existe un certain nombre de résultats sur les graphes planaires avec restriction sur la maille [12, 26]. Ces différents résultats sont prouvés grâce à des techniques de déchargement.

### 2.2.7/ GRAPHE À MINEURS OU SOUS-GRAPHE EXCLUS

Les graphes à mineurs exclus sont un sujet très intéressant mais peu étudié dans le cadre de la coloration à distance  $d$  des graphes non planaires. Ce minorant a été obtenu par Antonucci [2].

**Proposition 2.37** ([2]). *Soit  $G$  un graphe sans 3-cycle ni 4-cycle,  $M = \frac{|V(G)|^3}{|V(G)|^3 - 4|E(G)|^3}$  et soit  $S$  une série croissante d'entiers telle que  $s_1 = s_M = d$ . On a  $\chi_\rho^S(G) \geq M$ .*

Ces différentes propositions parues dans les articles de Gionfriddo [43, 44] affirment que la présence d'un sous-graphe de grand ordre et de diamètre  $d$  n'influe pas sur la coloration à distance  $d$ .

**Proposition 2.38** ([43]). *Soit  $d_t = \max\{|X| \mid X \subseteq V(G), \text{diam}(X) \leq t\}$ . Pour tout entier  $t$  et  $r$ , il existe un graphe  $G$  tel que  $\chi^1(G) \geq d_t + r$ .*

**Proposition 2.39** ([44]). *Soit  $d_t = \max\{|X| \mid X \subseteq V(G), \text{diam}(X) \leq t\}$ . Pour tout entier  $r$ , il existe un graphe  $G$  tel que  $\chi^2(G) = d_2 + r$ .*

Pour finir, voici le seul résultat connu à propos de la 2-coloration et la présence d'un mineur exclu. Ce résultat provient de Lih *et al.* [62].

**Proposition 2.40** ([62]). *Soit  $G$  un graphe sans graphe  $K_4$  en tant que mineur. On a :*

- $\chi^2(G) \leq \Delta(G) + 3$  si  $2 \leq \Delta(G) \leq 3$  ;
- $\chi^2(G) \leq \lfloor \frac{3\Delta(G)}{2} \rfloor + 1$  si  $\Delta(G) \geq 4$  ;

### 2.2.8/ PRODUIT CARTÉSIEN DE GRAPHE

Bresar *et al.* [14] ont trouvé les propriétés suivantes à propos de la coloration de *packing* des produits cartésiens de graphes.

**Proposition 2.41** ([14]). *Soient  $G$  et  $H$  des graphes connexes avec au moins deux sommets. On a  $\chi_\rho(G \square H) \geq (\chi_\rho(G) + 1)|V(H)| - \text{diam}(G \square H)(|V(H)| - 1) - 1$ .*

**Corollaire 2.42** ([14]). *Soit  $n \geq 2$  un entier et soit  $G$  un graphe. On a  $\chi_\rho(G \square K_n) \geq n\chi_\rho(G) - (n - 1)\text{diam}(G)$ .*

**Proposition 2.43** ([14]). *Soit  $G$  un graphe connexe et soit  $H$  un graphe biparti connexe. On a  $\chi_\rho(G \square H) \leq |V(G)||V(H)| - \frac{\alpha_2(G)|V(H)|}{2} + 1$ .*

### 2.2.9/ GRAPHE DE DISTANCE

Soit  $u_1, \dots, u_k$  une liste de  $k$  entiers strictement positifs. Le graphe de distance  $D(u_1, \dots, u_k)$  est le graphe avec comme ensemble de sommets  $\mathbb{Z}$  et deux sommets  $u$  et  $v$  sont adjacents si et seulement si  $|u - v| = u_i$ , pour un certain  $i$ , avec  $1 \leq i \leq k$ . Les graphes de distance ont été étudiés dans une série d'articles [29, 30, 78]. Les quatre propositions suivantes sont issues de ces articles.

**Proposition 2.44** ([29, 30, 78]). *Pour les graphes de distance  $D(t, k)$ , les bornes déterminées sur le nombre de *packing* sont résumées dans le tableau 2.1. Les nombres en gras sont les valeurs exactes et toutes les paires de valeurs représentent les bornes inférieures et supérieures. De plus, dans certains cas, le graphe de distance est isomorphe à un graphe de distance précédent.*

$k \setminus t$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	<b>8</b>	<b>9</b>	14 - 15	<b>12</b>	15 - 23	14 - 15	15 - 25	13 - 18	?
2		<b>13</b>	$D(1, 2)$	14 - 22	$D(1, 3)$	15 - 27	$D(1, 4)$	12 - 31	$D(1, 5)$
3			14 - 19	<b>13</b>	$D(2, 3)$	16 - 32	$D(1, 2)$	15 - 32	13 - 29
4				13 - 22	$D(2, 3)$	16 - 32	$D(1, 2)$	15 - 32	$D(2, 5)$
5					15 - 29	13 - 20	14 - 32	13 - 23	$D(1, 2)$
6						15 - 29	$D(3, 4)$	$D(2, 3)$	$D(3, 5)$
7							14 - 34	12 - 23	12 - 40
8								12 - 37	$D(4, 5)$
9									12 - 42

TABLE 2.1 – Bornes déterminées à propos du nombre de *packing* des graphes de distance [29, 30, 78].

**Proposition 2.45** ([78]). *Soit  $t$  un entier.*

1. *Si  $t \geq 447$  et  $t$  est impair, alors  $\chi_\rho(D(1, t)) \leq 40$  ;*
2. *Si  $t \geq 448$  et  $t$  est pair, alors  $\chi_\rho(D(1, t)) \leq 81$ .*

**Proposition 2.46** ([29]). *Soit  $t$  un entier strictement positif.*

1. *Si  $t \geq 575$  et  $t$  est impair, alors  $\chi_\rho(D(1, t)) \leq 35$  ;*
2. *Si  $t \geq 648$  et  $t$  est pair, alors  $\chi_\rho(D(1, t)) \leq 56$  ;*
3. *Pour n'importe quel  $t$ , alors  $12 \leq \chi_\rho(D(1, t))$ .*

**Proposition 2.47** ([30]). *Soient  $k$  et  $t$  des entiers premiers entre eux strictement positifs.*

1. *Si  $t \geq 825$  et  $t$  est impair, on a  $\chi_\rho(D(k, t)) \leq 30$  ;*
2. *Si  $t \geq 898$  et  $t$  est pair et  $k$  impair, on a  $\chi_\rho(D(k, t)) \leq 56$  ;*
3. *Si  $t \geq 923$  et  $t$  est pair et  $k$  pair, on a  $\chi_\rho(D(k, t)) \leq 56$  ;*
4. *Si  $t \geq 9$ , on a  $12 \leq \chi_\rho(D(k, t))$ .*

### 2.2.10/ PRODUITS CARTÉSIENS DE CHEMINS, CYCLES ET CHEMIN ET CYCLE

On rappelle les différentes bornes déterminées pour la coloration à distance 2 des différentes grilles finies. Ces résultats sont issus de quatre articles [17, 55, 64, 76].

**Proposition 2.48**. *Soient  $d, k, i$  et  $n$  des entiers positifs tels que  $n \equiv i \pmod{d+1}$ ,  $0 \leq i \leq d$  et  $n = k(d+1) + i$ . On a  $\chi(C_n^d) = d+1 + \lceil \frac{i}{k} \rceil$ .*

**Proposition 2.49** ([17, 55, 64, 76]). *Pour les produits cartésiens de chemins, cycles et chemin et cycle, les bornes déterminées pour le nombre chromatique à distance 2 sont résumées dans le tableau 2.2.*

**Proposition 2.50** ([45, 56]). *Pour les produits cartésiens de chemins et chemin et cycle les bornes déterminées pour le nombre de packing sont résumées dans le tableau 2.3. Les nombres en gras sont les valeurs exactes et toutes les paires de valeurs représentent les bornes inférieures et supérieures.*

**Proposition 2.51** ([82]). *Soit  $k$  un entier strictement positif. On a  $\chi_\rho(C_2 \square C_{6k}) \leq 5$ .*

Graphe	$G$	$\chi^2(G)$	Référence
Grille	$P_n \square P_m$ $2 \leq n \leq m$	4, si $n = 2$ ; 5, sinon.	[64]
Cylindre	$C_n \square P_m$ $2 \leq n \leq m$	4, si $n = 2$ et $m = 0 \pmod{4}$ ; 6, si $n = 2$ et $m = 3$ ou $m = 6$ ; 6, si $n \geq 3$ et $m \neq 0 \pmod{5}$ ; 5, sinon.	[17]
Grille Torique de dimension 2	$C_n \square C_m$ $2 \leq n \leq m$	9, si $n = m = 3$ ; 5, $n \equiv 0 \pmod{5}$ ou $m \equiv 0 \pmod{5}$ . $\leq 7$ , si $n \geq 12$ et $m \geq 18$ .	[64] [76]
	$C_{3k} \square C_m$	$\leq 6$ , si $n$ et $m$ sont divisibles par 6. $\leq 6$ , si $n \geq 40$ et $m \geq 40$ .	[76] [72]
	$C_{4k} \square C_m$	$\leq 6$ , si $m$ est pair ; $\leq 7$ , si $m$ est impair et $m \geq 7$ ; $\leq 8$ , si $m = 5$ ; $\leq 9$ , si $m = 2$ .	[76]
	$C_{5k} \square C_m$	$\leq 6$ , si $m$ est divisible par 3 ; $\leq 8$ , si $m = 4$ ; $\leq 7$ , sinon.	[76]
Grille Torique de dimension 3	$C_n \square C_n \square C_n$ $n \geq 3$	$\leq 5$ , si $m$ est divisible par 5 ; $\leq 7$ , si $m = 7$ ; $\leq 6$ , sinon.	[76]
		$\leq 9$ , si $n = 3, 5, 6$ ; $\leq 8$ , si $n$ est divisible par 4 ; $\leq 9$ , si $n$ est divisible par 3 ou 5 ; $\leq 7$ , si $n$ est divisible par 7.	[55]

TABLE 2.2 – Bornes déterminées à propos du nombre chromatique à distance 2 des produits cartésiens de chemins, cycles et chemin et cycle [17, 55, 64, 76].

Quelques résultats ont été trouvés par Goddard et Xu [47] pour d'autres listes que  $(1, 2, 3, \dots)$ .

**Proposition 2.52** ([47]). *Le graphe  $P_2 \square P_\infty$  est  $S$ -colorable pour  $S = (1, 1)$ ,  $S = (2, 2, 2, 2)$ ,  $S = (2, 2, 2, 3, 3)$  et  $S = (1, 3, 3, 5, 5)$ .*

**Proposition 2.53** ([47]). *On a  $(e^2 - 1)(a - 1) \leq \chi_\rho^S(P_2 \square P_\infty) \leq 8a + 12$ , pour  $S = (a, a + 1, \dots)$ . Si  $a = 2$ , alors on a  $10 \leq \chi_\rho^S(P_2 \square P_\infty) \leq 14$ .*

## 2.3/ $S$ -COLORATION DES CHEMINS

### 2.3.1/ RÉSULTATS EXISTANTS

On commence par rappeler les différents résultats à propos de la  $S$ -coloration des chemins.

$k$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$P_k \square P_\infty$	5	7	8	9	10	? - 11	? - 12	? - 13	? - 14	? - 14	? - 15	? - 15
$C_k \square P_\infty$			9		? - 13		? - 15		? - 22		? - 17	

TABLE 2.3 – Bornes déterminées à propos du nombre de *packing* des produits cartésiens de chemins et chemin et cycle [45, 56].

**Proposition 2.54** ([57]). Soient  $d$  et  $n$  des entiers strictement positifs. On a :

$$\chi_\rho^d(P_n) = \begin{cases} n, & \text{si } n \leq d; \\ d + 1, & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Proposition 2.55** ([34]). Si  $X_i \subseteq V(P_\infty)$  est un  $i$ -packing de  $P_\infty$ , alors  $d(X_i) \leq \frac{1}{i+1}$ . De plus, on a  $d_{max}^i(P_\infty) = \frac{1}{i+1}$ .

**Proposition 2.56** ([46]). Soit  $S$  une série croissante d'entiers. Si  $\chi_\rho^S(P_\infty)$  est fini, alors  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{s_{i+1}} \geq 1$ .

**Proposition 2.57** ([46]). Soit  $S$ , une liste croissante d'entiers :

1.  $\chi_\rho^S(P_\infty) = 2$  si et seulement si  $s_1 = s_2 = 1$  ;
2.  $\chi_\rho^S(P_\infty) = 3$  si et seulement si  $S = (1, 2, 3, \dots)$  ou  $S = (1, 3, 3, \dots)$  ou  $S = (2, 2, 2, \dots)$ .

On dit qu'une liste  $S$  est une liste *minimale* de packing de taille  $k$  pour  $G$ , si pour toute série  $S'$  commençant par  $S$ ,  $\chi_\rho^{S'}(G) = k$ . De plus, on dit qu'une liste  $S$  est divisible si  $S$  est obtenue à partir de  $S = (0)$  en remplaçant un élément  $i$  par  $r$  copies de  $r(i+1) - 1$ , par récurrence.

**Proposition 2.58** ([47]). Toutes les listes minimales de taille  $k \leq 5$  pour  $P_\infty$  sont divisibles sauf  $(2, 4, 4, 4, 6)$ ,  $(2, 3, 4, 4, 9)$ ,  $(2, 3, 3, 8, 8)$  et  $(2, 3, 3, 4, 12)$ .

**Proposition 2.59** ([45]). Soit  $S = (a, a+1, a+2, \dots)$ . On a  $(e-1)a \leq \chi_\rho^S(P_\infty) \leq 2a+3$ .

**Proposition 2.60** ([46]). Soit  $S = (a, a+d, a+2d, \dots)$ . Il existe un entier  $k$  tel que

$$k \geq \chi_\rho^S(P_\infty) \geq \begin{cases} (e^d - 1)(a - d + 1)/d, & \text{si } a \geq d; \\ ((a+1)e^{\frac{d}{1+1/a}} - (a-d+1))/d, & \text{sinon.} \end{cases}$$

De plus, si  $d = 1$ , alors  $(e-1)a \leq \chi_\rho^S(P_\infty) \leq 2a+3$ .

**Proposition 2.61** ([46]). Soit  $u_i = 2^i - 1$ , pour  $i \in \mathbb{N}^*$ .

1. Si pour tout  $i$ ,  $s_i \geq u_i$ , alors  $\chi_\rho^S(P_\infty) = \infty$  ;
2. Si pour tout  $i < l$ ,  $s_i \leq u_i$  et  $s_l < 2^l - 1$ , pour un certain  $l \geq 1$ , alors  $\chi_\rho^S(P_\infty) = l$ .

### 2.3.2/ MAXIMISATION RELATIVE DES PACKINGS DANS UNE $S$ -COLORATION

On considère  $P_\infty$  muni d'une  $S$ -coloration et soit  $v$  un sommet de  $P_\infty$  coloré  $i$ . On définit  $N(i, v)$  comme l'ensemble des sommets (cet ensemble ne contient pas plus de deux sommets) qui ont la couleur  $i$  et tel que dans le chemin entre  $v$  et un sommet de  $N(i, v)$ , aucun sommet n'est coloré  $i$ .



FIGURE 2.1 – Une  $(3, 3, 5, 5, 5)$ -coloration de  $P_\infty$ .

**Proposition 2.62.** *Soit  $S$  une liste croissante d'entiers. Pour toute  $S$ -coloration de  $P_\infty$ , il existe une autre  $S$ -coloration de  $P_\infty$  telle que pour tout sommet  $v$ , si  $v$  est coloré  $s_i$ , pour un certain  $i$ , alors tous les sommets dans  $N(s_i, v)$  sont à distance au plus  $2s_i$  de  $v$ .*

*Démonstration.* Supposons que deux sommets  $u$  et  $v$  colorés  $s_i$  sont tels que  $d(u, v) \geq 2s_i + 1$  et aucun sommet n'est coloré  $s_i$  dans le chemin entre  $u$  et  $v$ . On pose  $l = \lceil \frac{d(u,v)}{s_i} - 1 \rceil$ . Soient  $u_1, \dots, u_{d(u,v)-1}$  les sommets dans le chemin entre  $u$  et  $v$ . Par ajouter un sommet entre  $u$  et  $v$ , on entend supprimer  $uv$ , ajouter un sommet  $w$  et relier  $w$  à  $u$  et  $v$ . On ajoute un sommet coloré  $s_i$  entre les sommets  $u_{l's_i}$  et  $u_{l's_i+1}$ , pour chaque entier  $l'$  tel que  $1 \leq l' < l$ . En itérant, on obtient une  $S$ -coloration telle que pour tout sommet  $v$  coloré  $s_i$ , tous les sommets dans  $N(s_i, v)$  sont à distance au plus  $2s_i$  de  $v$ .  $\square$

**Corollaire 2.63.** *Soit  $S$  une liste croissante d'entiers avec  $s_1 = 1$ . Pour toute  $S$ -coloration de  $P_\infty$ , il existe une autre  $S$ -coloration où l'ensemble coloré 1 est un ensemble stable maximum.*

**Proposition 2.64.** *Soit  $S$  une liste croissante d'entiers avec  $s_1 = 1$ . Si  $\sum_{i=1}^{|S|} \frac{1}{2^{\lceil (s_i+1)/2 \rceil}} < 1$ , alors  $P_\infty$  n'est pas  $S$ -colorable.*

*Démonstration.* On suppose que  $P_\infty$  est  $S$ -colorable et que  $s_1 = 1$ . Le corollaire 2.63 permet de conclure que  $P_\infty$  admet une  $S$ -coloration où  $C_1$ , l'ensemble des sommets coloré 1, est l'un des deux ensembles qui forment une bipartition de  $P_\infty$ . Une des conséquences est que chaque  $i$ -packing, avec  $i$  pair, est aussi un  $(i+1)$ -packing. On obtient que si  $P_\infty$  est  $S$ -colorable, alors, par la proposition 2.55,  $\sum_{i=1}^{|S|} \frac{1}{2^{\lceil (s_i+1)/2 \rceil}} \geq 1$  (la formule ajoute 1 au nombre lorsqu'il est pair).  $\square$

### 2.3.3/ PARTITIONNEMENT D'UN PACKING

**Proposition 2.65.** *Toutes les listes de l'ensemble  $\mathcal{S}_{\neq}^0(P_\infty)$  défini ci-dessous sont étroites sur  $P_\infty$  :*

- Si  $S$  est telle que  $s_1 = s_i + 1 = i$  et  $|S| = i + 1$ , pour un entier positif  $i$ , alors  $S \in \mathcal{S}_{\neq}^0(P_\infty)$  ;
- Si  $S$  est telle que  $s_1 = s_k = i$  et  $s_{k+1} = s_{k+l} = j$ ,  $|S| = k + l$  et il existe un entier  $a$  tel que  $a$  divise  $(i + 1)$  et  $(j + 1)$ ,  $k = i + 1 - (i + 1)/a$  et  $l = (j + 1)/a$ , pour des entiers positifs  $i, j, k$  et  $l$ , alors  $S \in \mathcal{S}_{\neq}^0(P_\infty)$ .

*Démonstration.* Dans le premier cas on alterne les couleurs  $i$  toutes les  $i + 1$  fois. On définit une coloration  $c$  comme suit :  $c(u) = s_j$ , avec  $u \equiv j \pmod{i + 1}$  et  $1 \leq j \leq i + 1$ . Dans le deuxième cas on alterne les couleurs  $i$  toutes les  $i + 1$  fois et les couleurs  $j$  toutes les  $j + 1$  fois. On définit une coloration  $c$  comme suit :  $c(u) = s_{j'}$ , si  $u \equiv i' \pmod{i + 1}$ ,  $1 \leq i' \leq i$  et  $a$  ne divise pas  $u$  et  $c(u) = s_{j'}$ , si  $u \equiv j' \pmod{j + 1}$ ,  $1 \leq j' \leq j + 1$  et  $a$  divise  $u$  (ou  $u = 0$ ). La figure 2.1 représente une telle  $(3, 3, 5, 5, 5)$ -coloration de  $P_\infty$ . Notons que ces listes sont étroites sur  $P_\infty$  car  $(i + 1)d_{max}^i(P_\infty) = 1$  et car  $kd_{max}^i(P_\infty) + ld_{max}^j(P_\infty) = 1 - \frac{1}{a} + \frac{1}{a} = 1$ .  $\square$

Goddard et Xu [47] ont montré qu'il existe un moyen de subdiviser un packing dans  $P_\infty$ .

**Proposition 2.66** ([47]). *Soit  $S$  une liste croissante d'entiers et soit  $i$  un entier dans  $S$ . Dans une  $S$ -coloration de  $P_\infty$ , on peut subdiviser un  $i$ -packing en  $k(k(i+1)-1)$ -packings, avec  $k$  un entier strictement positif.*

**Proposition 2.67**. *Soit  $S$  une liste croissante d'entiers et soit  $i$  un entier dans  $S$ . Si  $S$  est une liste étroite sur  $P_\infty$ , alors  $S_{i \rightarrow k, k(i+1)-1}$  est une liste étroite sur  $P_\infty$ , avec  $k$  un entier strictement positif.*

*Démonstration.* Notons que  $kd_{max}^{k(i+1)-1}(P_\infty) = \frac{1}{i+1} = d_{max}^i(P_\infty)$ . □

**Définition 2.2**. *En s'inspirant de l'exemple 1.2, on définit une famille de listes étroites  $\mathcal{S}_=(P_\infty)$  sur  $P_\infty$  de la façon suivante*

- Si  $S \in \mathcal{S}_=(P_\infty)$ , alors  $S \in \mathcal{S}_=(P_\infty)$ ;
- Si  $S \in \mathcal{S}_=(P_\infty)$ , alors  $S_{i \rightarrow k, k(i+1)-1} \in \mathcal{S}_=(P_\infty)$ , pour tout entier strictement positif  $k$ .

**Théorème 2.2**. *Si  $S \in \mathcal{S}_=(P_\infty)$ , alors le graphe  $P_\infty$  est  $S$ -chromatique.*

## 2.4/ $S$ -COLORATION DES CYCLES

### 2.4.1/ RÉSULTATS EXISTANTS ET DENSITÉ

**Proposition 2.68** ([57]). *Soient  $d, k, i$  et  $n$  des entiers positifs tels que  $n \equiv i \pmod{d+1}$ ,  $0 \leq i \leq d$  et  $n = k(d+1) + i$  et  $S$  une liste croissante d'entiers telle que  $s_j = d$ , pour tout  $j \in \mathbb{N}^*$ . On a  $\chi_\rho^S(C_n) = d+1 + \lceil \frac{i}{k} \rceil$ .*

**Proposition 2.69** ([45]). *Soit  $S = (1, 2, 3, \dots)$  et soit  $n \geq 3$  un entier.*

$$\chi_\rho^S(C_n) = \begin{cases} 3, & \text{si } n \text{ est divisible par } 4; \\ 4, & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Proposition 2.70**. *Soient  $i$  et  $n \geq 3$  des entiers. On a :*

$$\alpha^i(C_n) = \begin{cases} 1, & \text{si } n < i+1; \\ \lfloor \frac{n}{i+1} \rfloor, & \text{sinon.} \end{cases}$$

*Démonstration.* Comme  $\text{diam}(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ , on a  $\alpha^i(C_n) = 1$ , pour  $n < 2(i+1)$ . Sinon pour  $n \geq 2(i+1)$ , on peut colorer les sommets d'indices  $k(i+1)$  avec la couleur  $i$ , pour  $0 \leq k < \lfloor \frac{n}{i+1} \rfloor$  et on ne peut pas colorer plus de  $\lfloor \frac{n}{i+1} \rfloor$  sommets. On a donc  $\alpha^i(C_n) = \lfloor \frac{n}{i+1} \rfloor$ . □

On pose  $I^+$  la fonction telle que  $I^+$  est l'identité sur  $\mathbb{N}^*$  et  $I^+(0) = 1$ .

**Proposition 2.71**. *Soit  $S$  une liste croissante d'entiers,  $n$  un entier. Si  $\sum_{i=1}^{|S|} I^+(\lfloor \frac{n}{s_i+1} \rfloor) \frac{1}{n} < 1$ , alors  $C_n$  n'est pas  $S$ -colorable.*

*Démonstration.* La proposition est une simple conséquence de la proposition 2.70. □

## 2.4.2/ COLORATION DES CYCLES POUR CERTAINES LISTES

**Proposition 2.72.** Soit  $S = (1, 1, \dots)$  une série croissante d'entiers et soit  $n \geq 3$  un entier. On a :

$$\chi_\rho^S(C_n) = \begin{cases} 2, & \text{si } n \text{ est pair;} \\ 3, & \text{sinon.} \end{cases}$$

*Démonstration.* Si  $n$  est pair,  $C_n$  étant biparti,  $C_n$  est donc  $(1, 1)$ -colorable. Si  $n$  est impair, on colore un sommet  $s_3$  et le reste des sommets formant un graphe biparti sont colorés par les deux couleurs 1 restantes.  $\square$

**Proposition 2.73.** Soit  $S = (1, 2, 2, \dots)$  une série croissante et soit  $n$  un entier. On a :

$$\chi_\rho^S(C_n) = \begin{cases} 3, & \text{si } n \neq 5 \text{ et } n \geq 4 \text{ ou si } n = 3; \\ 4, & \text{sinon.} \end{cases}$$

*Démonstration.* On colore  $C_n$ , pour  $n \neq 5$ , à l'aide de deux motifs : le motif  $1, 2_a, 2_b$  de taille 3 et le motif  $1, 2_a, 1, 2_b$  de taille 4. On obtient donc une coloration de  $C_n$  pour tout  $n \geq 6$ , car il existe des entiers positifs  $k$  et  $k'$  tels que  $n = 3k + 4k'$ . Pour  $n = 5$ , on colore deux sommets de la couleur 1 et le reste des sommets par des couleurs  $2_a, 2_b$  et  $s_4$ . Le graphe  $C_5$  n'est pas  $(1, 2, 2)$ -colorable, car  $C_5$  est de diamètre 2.  $\square$

**Proposition 2.74.** Soit  $S = (1, 3, 3, \dots)$  une série croissante et soient  $n \geq 3$  et  $r$  des entiers tels que  $n \equiv r \pmod{4}$ , pour  $0 \leq r \leq 3$ . On a :

$$\chi_\rho^S(C_n) = \begin{cases} 3, & \text{si } r = 0 \text{ et } n \geq 4 \text{ ou si } n = 3; \\ 4, & \text{si } r = 1; 2 \vee (n \geq 2(s_4 + 1) \wedge r \neq 0); \\ 5, & \text{sinon.} \end{cases}$$

*Démonstration.* On colore  $C_n$ , pour  $r = 0$ , à l'aide du motif  $1, s_2, 1, s_3$  de taille 4. Pour  $r = 1, 2$ , on colore tous les sommets sauf  $r$  en utilisant le motif précédent. Si  $r = 1$ , on colore le dernier sommet  $s_4$ . Si  $r = 2$ , on colore les deux derniers sommets par 1 et  $s_4$ . Si  $n \geq 2(s_4 + 1)$ , on peut colorer deux sommets  $s_4$  dans  $C_n$ , et on colore le reste des sommets en utilisant le motif précédent (un voisin d'un des sommets coloré  $s_4$  doit, en plus, être coloré 1). Dans le dernier cas, on colore tous les sommets sauf 3 en utilisant le motif précédent et on colore les trois derniers sommets 1,  $s_4$  et  $s_5$ . Si  $r \neq 0$ ,  $C_n$  n'est pas  $(1, 3, 3)$ -colorable, par la proposition 2.71. Si  $r = 3$  et  $n < 2(s_4 + 1)$ , alors  $\sum_{i=1}^4 I^+(\lfloor \frac{n}{s_i+1} \rfloor) \frac{1}{n} = (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2\lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1) \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} < 1$ .  $\square$

**Proposition 2.75.** Soit  $S = (1, 3, k, k', \dots)$  une série croissante tel que  $5 \leq k \leq 7$  et  $6 \leq k' \leq 7$  et soient  $n \geq 3$  et  $r$  des entiers tels que  $n \equiv r \pmod{8}$ , pour  $0 \leq r \leq 7$ . On a :

- $\chi_\rho^S(C_n) = n$ , si  $n = 3$  ;
- $\chi_\rho^S(C_n) = 3$ , si  $n = 4$  ;
- $\chi_\rho^S(C_n) = 4$ , si  $r = 0$  ou  $n = 5, 6$  ;
- $\chi_\rho^S(C_n) \geq 4$ , sinon.

*Démonstration.* Si  $n = 3$ , on colore tous les sommets différemment. Dans le cas  $n = 4$ , on colore deux sommets de la couleur 1 et les autres sommets de couleurs différentes. Si  $n$  est un multiple de 8, on colore le graphe à l'aide du motif  $1, 3, 1, k, 1, 3, 1, k', 1$  de taille 8. Dans le cas  $n = 5, 6$ , on colore le maximum de sommets par la couleur 1 et le reste des sommets par des couleurs 3,  $k$  et  $k'$ . Dans les autres cas,  $C_n$  n'est pas  $(1, 3, k)$ -colorable, par la proposition 2.71. En effet,  $\sum_{i=1}^3 I^+(\lfloor \frac{n}{s_i+1} \rfloor) \frac{1}{n} \leq (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{4} \rfloor + \lfloor \frac{n}{8} \rfloor) \frac{1}{n} < 1$ , pour  $n \geq 7$ .  $\square$

### 2.4.3/ PARTITIONNEMENT D'UN PACKING

**Proposition 2.76.** Soit  $\mathcal{S}=(P_\infty)$  l'ensemble de listes du théorème 2.2. Si  $S \in \mathcal{S}=(P_\infty)$  et  $s_i + 1$  divise  $n$ , pour tout  $i, 1 \leq i \leq |S|$ , alors  $C_n$  est  $S$ -colorable.

*Démonstration.* Comme  $s_i + 1$  divise  $n$ , pour tout  $1 \leq i \leq |S|$ , alors le motif de coloration est facilement transposable pour  $C_n$  en prenant la coloration des sommets allant de 0 à  $n - 1$ .  $\square$

## 2.5/ $\mathcal{S}$ -COLORATION DES ARBRES

### 2.5.1/ RÉSULTATS EXISTANTS ET DENSITÉ

**Proposition 2.77** ([45]). Soit  $T$  un arbre de diamètre 4 et soit  $v$  un sommet à distance au plus 2 de tous les autres sommets de  $V(T)$ . Pour  $i = 1, 2, 3$ , on note  $n_i$  le nombre de voisins de  $v$  de degré  $i$  et  $L$  le nombre de voisins de degré au moins 4.

$$\chi_\rho(T) = \begin{cases} 4, & \text{si } n_3 \geq 2, n_1 + n_2 + n_3 \geq 3 \text{ et } L = 0; \\ 3, & \text{si } n_3 < 2, n_1 + n_2 + n_3 < 3 \text{ et } L = 0; \\ L + 3, & \text{si } n_3 \geq 1, n_1 + n_2 + n_3 \geq 2 \text{ et } L > 0; \\ L + 1, & \text{si } n_1 + n_2 + n_3 = 0 \text{ et } L > 0; \\ L + 2, & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Proposition 2.78** ([45]). Soit  $T$  un arbre qui n'est pas  $P_4$ . On suppose que  $T$  contient un chemin  $t, u, v, w$  où  $t$  est de degré 1 et  $u$  et  $v$  sont de degré 2. On a  $\chi_\rho(T) = \chi_\rho(T - t)$ .

**Proposition 2.79** ([45]). Soit  $T$  un arbre. On a  $\chi_\rho(T) \geq \frac{|V(T)|+7}{4}$ , sauf quand  $|V(T)| = 4$  ou  $|V(T)| = 8$ , dans ce cas la borne est augmentée de  $\frac{1}{4}$ , et ces bornes sont atteintes pour certains arbres.

**Définition 2.3.** – L'arbre complet  $k$ -aire, noté  $T'_k$ , est l'arbre infini où tous les sommets, sauf un sommet de degré  $k$ , sont de degré  $k + 1$ .

– L'arbre complet  $r$ -régulier, noté  $T_r$ , est l'arbre infini où tous les sommets sont de degrés  $r$ .

**Remarque 2.1.** Soit  $S$  une liste croissante d'entiers. Comme chaque sous-graphe de  $T_r$  est un sous-graphe de  $T'_{r-1}$  et vice-versa, à l'aide du théorème de De Bruijn-Erdős on a  $\chi_\rho(T_r) = \chi_\rho^S(T'_{r-1})$ .

**Proposition 2.80** ([75]). On a :

1.  $\chi_\rho(T'_k) \leq 7$ , si  $k = 2$ ;
2.  $\chi_\rho(T'_k) = \infty$ , si  $k \geq 3$ .

**Proposition 2.81.** Soit  $T_r$  l'arbre complet  $r$ -régulier, soit  $x$  un sommet de  $T_r$  et soit  $n$  un entier strictement positif. On a :

1.  $|\partial B_n(x)| = r(r-1)^{n-1}$ ;
2.  $|B_n(x)| = 1 + \frac{r((r-1)^n - 1)}{r-2}$ .

*Démonstration.* 1. On a trivialement,  $|\partial B_0(x)| = 1$  et  $|\partial B_1(x)| = r$ . Si  $|\partial B_{n-1}(x)| = r(r-1)^{n-1}$ , alors, comme chaque sommet est de degré  $r$ , on a  $|\partial B_n(x)| = r(r-1)^n$ .

2. On a  $|B_n(x)| = 1 + \sum_{i=1}^n |\partial B_i(x)| = 1 + r \sum_{i=1}^n (r-1)^{i-1} = 1 + \frac{r((r-1)^n - 1)}{r-2}$ .  $\square$

**Proposition 2.82.** Soit  $T_r$  l'arbre complet  $r$ -régulier et soit  $k$  un entier strictement positif. On a :

1.  $A(2k) = 1 + \frac{r((r-1)^k - 1)}{r-2}$ ;
2.  $A(2k+1) = 1 + \frac{(r-1)^k(2r-2)-r}{r-2}$ .

*Démonstration.* 1. La première propriété résulte de la proposition 2.81.

2. Si  $n = 2k+1$ , la proposition 2.81 donne  $|B_k(x)| = 1 + \frac{r((r-1)^k - 1)}{r-2}$ . Un sommet  $y \in \partial B_{k+1}(x)$ , pour un certain sommet  $x$ , ne possède qu'un voisin dans  $B_k(x)$ . On a donc  $A(2k+1) = 1 + \frac{r((r-1)^k - 1)}{r-2} + \frac{r(r-1)^k}{r} = 1 + \frac{(r-1)^k(2r-2)-r}{r-2}$ .  $\square$

**Corollaire 2.83.** Soit  $S$  une liste croissante d'entiers et soit  $r$  un entier, avec  $r \geq 3$ . Si  $\sum_{i=1, s_i \equiv 0 \pmod{2}}^{|S|} (1 + \frac{r((r-1)^{\frac{s_i}{2}} - 1)}{r-2}) + \sum_{i=1, s_i \not\equiv 0 \pmod{2}}^{|S|} (1 + \frac{(r-1)^{\frac{s_i-1}{2}}(2r-2)-r}{r-2}) < 1$ , alors  $T_r$  n'est pas  $S$ -colorable.

**Corollaire 2.84.** Soit  $T_r$  l'arbre complet  $r$ -régulier et soit  $k$  un entier strictement positif. On a :

1.  $\chi^d(T_r) \geq 1 + \frac{r((r-1)^{\frac{d}{2}} - 1)}{r-2}$ , pour  $d$  pair;
2.  $\chi^d(T_r) \geq 1 + \frac{(r-1)^{\frac{d-1}{2}}(2r-2)-r}{r-2}$ , pour  $d$  impair.

## 2.5.2/ $d$ -DISTANCE COLORATION DES ARBRES $k$ -AIRES

**Théorème 2.3.**

$$\chi^d(T_r) = 1 + \frac{r((r-1)^{\frac{d}{2}} - 1)}{r-2}, \text{ pour } d \text{ pair};$$

$$\chi^d(T_r) = 1 + \frac{(r-1)^{\frac{d-1}{2}}(2r-2)-r}{r-2}, \text{ pour } d \text{ impair}.$$

*Démonstration.* On crée une coloration de  $T'_{r-1}$  avec  $A(d)$  couleurs  $d$  par induction sur les différents niveaux de  $T'_{r-1}$  :

On commence par colorer la racine de n'importe quelle couleur. On suppose que les sommets du niveau 0 à  $i-1$  sont colorés et que l'on veut colorer un sommet  $v$  du niveau  $i$ . De plus, on suppose sans perte de généralité, que tous les autres sommets du niveau  $i$  sont colorés.

**Cas 1.**  $d$  est pair : Soit  $w$  le sommet à distance  $\frac{d}{2}$  de  $v$  dans le niveau  $i - \frac{d}{2}$ . Remarquons que l'ensemble des sommets à distance inférieure ou égale à  $\frac{d}{2}$  de  $w$  est aussi l'ensemble des sommets à distance inférieure ou égale à  $d$  de  $v$ , qui sont dans les niveaux 0 à  $i$ . De plus, on a  $|B_{\frac{d}{2}}(w)| = 1 + \frac{r((r-1)^{\frac{d}{2}-1})}{r-2}$ . Comme  $v$  est dans  $B_{\frac{d}{2}}(w)$ , on a donc toujours une couleur disponible pour colorer  $v$ .

**Cas 2.**  $d$  est impair : Soit  $w$  le sommet à distance  $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$  de  $v$  dans le niveau  $i - \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ . Soit  $w'$ , le sommet à distance  $\lceil \frac{d}{2} \rceil$  de  $v$  dans le niveau  $i - \lceil \frac{d}{2} \rceil$ . Remarquons que l'ensemble des sommets à distance inférieure ou égale à  $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$  de  $w$  ou  $w'$  est aussi l'ensemble des sommets à distance inférieure ou égale à  $d$  de  $v$  qui sont dans les niveaux 0 à  $i$ . L'ensemble des sommets à distance inférieure ou égale à  $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$  de  $w$  ou  $w'$  qui sont dans les niveaux 0 à  $i$ , comprend  $r(r-1)^k$  sommets de plus par rapport au cas pair. On a donc  $|B_{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}(w) \cup B_{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}(w')| = 1 + \frac{r((r-1)^{\frac{d-1}{2}-1})}{r-2} + (r-1)^{\frac{d-1}{2}} = 1 + \frac{(r-1)^{\frac{d-1}{2}}(2r-2)-r}{r-2}$ . Comme  $v$  est dans  $B_{\frac{d}{2}}(w) \cup B_{\frac{d}{2}}(w')$ , on a donc toujours une couleur disponible pour colorer  $v$ .

□

Ce théorème est aussi une conséquence du théorème des graphes parfaits [18].

## QUESTIONS OUVERTES

Cette dernière partie contient une liste de problèmes ouverts à propos des divers graphes étudiés.

Dans ce chapitre, on a caractérisé des listes étroites sur  $P_\infty$ . Existe-t-il un algorithme en temps polynomial pour déterminer les listes  $\mathcal{S}$  étroites sur un graphe ?

- i) *Peut-on caractériser toutes les listes  $\mathcal{S}$  étroites sur  $P_\infty$  ?*
- ii) *Peut-on caractériser des propriétés de partitionnement d'un packing pour  $P_\infty \square P_n$  ou l'arbre complet  $r$ -régulier ?*



# DICHOTOMIE À PROPOS DE LA COMPLEXITÉ ALGORITHMIQUE DE LA $S$ -COLORATION

## INTRODUCTION

Dans ce chapitre, le symbole  $S$  représentera toujours une liste d'entiers. On s'intéresse à la complexité du problème de décision suivant :

### $S$ -COL

**Entrée** : Un graphe  $G$  et une liste croissante d'entiers  $S$ .

**Question** : Est-ce que  $G$  admet une  $S$ -coloration ?

Plus particulièrement, au cours de ce chapitre, on s'intéressera au problème  $S$ -COL, où la liste  $S$  est fixée.

Ce chapitre comprend trois parties. Dans la première partie, on étudie le problème  $S$ -COL pour une liste de trois entiers sur des classes de graphes plus précises que celles étudiées par Goddard *et al.* [46]. Ces classes de graphes comprennent les graphes cubiques, subcubiques, bipartis et les arbres. Dans la seconde partie, on donne des instances de  $S$ -COL résolubles en temps polynomial et d'autres instances de  $S$ -COL qui sont NP-complètes pour des tailles de listes arbitraires. Le problème  $S$ -COL est résoluble en temps polynomial lorsque certains graphes ne sont pas  $S$ -colorables et NP-complet pour des listes ayant certaines propriétés. Dans la troisième partie, on caractérise une dichotomie entre problèmes résolubles en temps polynomial et problème NP-complets pour les listes de taille 4.

**Remarque** <sup>3.1</sup>. *Pour n'importe quelle liste croissante d'entiers  $S$ , on a  $S$ -COL  $\in$  NP : étant donné un graphe  $G$ , si  $G$  est  $S$ -colorable, il existe un certificat (une  $S$ -coloration) qui permet de déterminer en temps polynomial si le graphe  $G$  est  $S$ -colorable.*

Fiala *et al.* [33] se sont intéressés au problème  $S$ -COL sous la forme suivante :

**$S$ - $k$ -COL****Entrée** : Un graphe  $G$  et un entier  $k$ .**Paramètre** : Une série croissante d'entiers  $S$ .**Question** : Est-ce que  $G$  admet une  $(s_1, \dots, s_k)$ -coloration ?

Le problème PCOL est le problème  $S$ - $k$ -COL pour la série  $S = (1, 2, 3, \dots)$ . On rappelle ces résultats sur la complexité du problème  $S$ -COL

**Proposition 3.1** ([45]). *Le problème PCOL est polynomial pour  $k \leq 3$  et NP-complet pour  $k \geq 4$ .*

**Proposition 3.2** ([4, 3]). *Le problème PCOL est polynomial pour les graphes à partenaire limité, une classe de graphes qui inclut les cographes, les  $P_4$ -sparse graphes et les  $P_4$ -tidy graphes. Le problème PCOL est polynomial pour les  $(q, q-4)$ -graphes (les graphes tels qu'aucun ensemble de  $q$  sommets n'induisent plus de  $q-4$  graphes  $P_4$ ).*

Le lecteur est invité à lire les articles d'Argiroffo [3, 4] pour avoir plus de détails sur ces classes de graphes.

**Théorème 3.1** ([33]). *Le problème PCOL est NP-complet pour les arbres.*

On rappelle le résultat de Sharp [73] sur la complexité du problème  $S$ -COL pour la liste  $S_{d^k} = (d, \dots, d)$ , avec  $|S_{d^k}| = k$ .

**Théorème 3.2** ([73]). *Le problème  $S_{d^k}$ -COL est NP-complet pour  $k \geq \lceil 3d/2 \rceil$  et résoluble en temps polynomial dans les autres cas.*

**Remarque 3.2.** *Si  $|S| = 2$ , seuls les graphes bipartis (si  $S = (1, 1)$ ), les étoiles (si  $S = (1, k)$ ,  $k > 1$ ) ou  $K_2$  (si  $S \neq (1, k)$ ,  $k \geq 1$ ) sont  $S$ -colorables. Par conséquent  $S$ -COL est résoluble en temps polynomial.*

Le résultat suivant établit une dichotomie entre problèmes NP-complets et problèmes résolubles en temps polynomial, pour  $|S| = 3$ .

**Théorème 3.3** ([46]). *Soit  $k \geq 1$  un entier. Les problèmes  $(1, 1, k)$ -COL et  $(1, 2, 2)$ -COL sont tous les deux NP-complets. À l'exception de ces deux problèmes,  $S$ -COL est résoluble en temps polynomial pour  $|S| = 3$ .*

Notre but au sein de cette partie est de déterminer des propriétés de dichotomie similaires à celle du théorème précédent, pour diverses classes de graphes et types de listes.

On rappelle la définition de la *largeur arborescente* et de la *largeur linéaire*. Ces définitions seront utiles avec l'aide des deux théorèmes suivants pour prouver qu'un problème est résoluble en temps polynomial.

**Définition 3.1.** *Une décomposition arborescente d'un graphe  $G = (V, E)$  est un triplet  $(T, F, Y)$  qui consiste en un arbre non-orienté  $(T, F)$  et une fonction  $Y : T \rightarrow 2^{|V|}$  qui associe à chaque sommet  $i \in T$ , un sous-ensemble  $Y_i \subseteq V$  tel que :*

1.  $V = \bigcup_{i \in T} Y_i$  ;
2. Pour toute arête  $uv \in E$ , il existe  $i \in T$  tel que  $u$  et  $v$  sont dans  $Y_i$  ;
3. Si  $j$  est dans le chemin entre  $i$  et  $k$  dans  $(T, F)$ , alors  $Y_i \cap Y_k \subseteq Y_j$ .

La largeur de  $(T, F, Y)$  est  $\max_{i \in T} (|Y_i| - 1)$ . La largeur arborescente de  $G$  est le minimum des largeurs arborescentes de toutes les décompositions arborescentes de  $G$ . La largeur linéaire est le minimum des largeurs arborescentes de toutes les décompositions arborescentes de  $G$  où  $(T, F)$  est un chemin.

**Observation 3.1.** Soit  $G$  un graphe. La largeur arborescente de  $G$  est bornée par la largeur linéaire de  $G$ .

Le théorème suivant est un résultat de Bienstock *et al.* [9]. Il permettra à l'aide du résultat de Fiala *et al.* [33] de montrer que certaines instances de  $S$ -COL sont des problèmes qui admettent un algorithme en temps polynomial.

**Théorème 3.4** ([9]). Pour n'importe quelle forêt  $F$ , tout graphe sans mineur isomorphe à  $F$  a une largeur linéaire au plus  $|V(F)| - 2$ .

**Théorème 3.5** ([33]). Soit  $S$  une liste croissante d'entiers. Le problème  $S$ -COL est résoluble en temps polynomial pour un graphe de largeur arborescente bornée.

Ce résultat a été généralisé au problème  $S$ - $k$ -COL, pour les séries  $S$  bornées par une constante [33]. Le résultat de Fiala *et al.* [33] est une conséquence d'un résultat de Courcelle [21]. En effet,  $S$ -COL est une propriété définissable dans la logique monadique du second ordre.

**Théorème 3.6** ([21]). Toute propriété de graphe définissable dans la logique monadique du second ordre peut être déterminée en temps linéaire pour les graphes de largeur arborescente bornée.

### 3.1/ ÉTUDE DE LA COMPLEXITÉ DE $S$ -COL POUR UNE LISTE CROISSANTE DE TROIS ENTIERS ET DIFFÉRENTES CLASSES DE GRAPHES

On commence par caractériser des dichotomies pour les listes de trois entiers et diverses classes de graphes.

#### 3.1.1/ ARBRES $S$ -COLORABLES, POUR $|S| = 3$

Dans [46], la famille des graphes qui admettent une  $S$ -coloration, pour  $|S| = 3$ , est décrite dans le cas où  $S$ -COL est résoluble en temps polynomial. On rappelle en premier lieu qu'ajouter des feuilles sur un sommet  $v$  est une opération qui consiste à ajouter un ensemble de sommets formant un stable  $X$ , puis de faire la jointure entre les sommets de  $X$  et  $v$  et que subdiviser une arête  $uv$  consiste à rajouter un sommet de degré 2 entre  $u$  et  $v$ .

**Proposition 3.3** ([46]). Soit  $S$  une liste croissante de trois entiers. Si  $s_2 = 1$ , alors tous les arbres sont  $S$ -colorables. On a de plus :

1. Si  $s_1 = 3$ , alors les seuls graphes  $S$ -colorables sont les chemins d'ordre  $n$ , avec  $n \leq 3$  ;
2. Si  $s_1 = 2$  et  $s_2 > 2$ , alors les seuls graphes  $S$ -colorables sont les chemins d'ordre  $n$ , avec  $n \leq 4$  ;

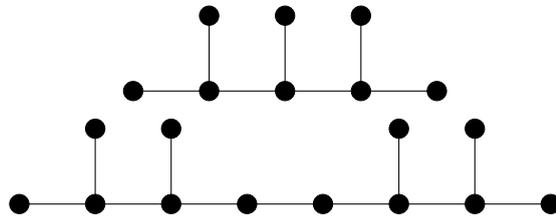


FIGURE 3.1 – Les arbres  $T_1$  (en haut) et  $T_2$  (en bas).

3. Si  $s_1 = s_2 = 2$  et  $s_3 > 2$ , alors les seuls graphes  $S$ -colorables sont les chemins d'ordre  $n$ , avec  $n \leq 5$  ;
4. Si  $s_1 = s_3 = 2$ , alors les seuls graphes  $S$ -colorables sont les chemins et les cycles d'ordre  $n$  avec  $n \equiv 0 \pmod{3}$ .

**Proposition 3.4** ([46]). Soit  $S$  une liste croissante de trois entiers.

1. Si  $s_1 = 1$ ,  $s_2 = 3$  et  $s_3 > 3$ , les seuls arbres  $S$ -colorables sont des étoiles où chaque arête est subdivisée et où des feuilles sont rajoutées sur les sommets non subdivisés ;
2. Si  $s_1 = 1$ ,  $s_2 = 2$  et  $s_3 > 3$ , les seuls arbres  $S$ -colorables sont des étoiles où chaque arête est subdivisée sauf au plus une et où des feuilles sont rajoutées sur les sommets non subdivisés.

Ajouter une multi-feuille sur un sommet  $v$  est une opération qui consiste à ajouter des feuilles sur  $v$  et à ajouter des feuilles sur une feuille précédemment ajoutée.

**Proposition 3.5** ([46]). Soit  $S = (1, k, 3)$  une liste croissante de trois entiers avec  $k > 1$  et soit  $G$  un graphe. Le graphe  $G$  est  $S$ -colorable si et seulement si une des deux conditions est vraie :

1.  $\beta(G) \leq 2$  ;
2. Le graphe  $G$  est obtenu à partir d'un multi-graphe biparti  $G' = (A, B)$  où chaque arête est subdivisée une fois et où on rajoute des gadgets de la façon suivante :
  - (a) On peut rajouter des feuilles sur les sommets issus de  $A$  ou  $B$  ;
  - (b) Si  $s_2 = 2$ , on peut rajouter une multi-feuille sur les sommets issus de  $A$ .

**Observation 3.2.** Les arbres  $T_1$  et  $T_2$  de la figure 3.1 ne sont pas  $(1, 2, 2)$ -colorables.

**Proposition 3.6.** Un arbre  $T$  est  $(1, 2, 2)$ -colorable si et seulement s'il ne contient aucun des deux arbres  $T_1$  et  $T_2$  de la figure 3.1 en tant que sous-graphe.

*Démonstration.* D'après l'observation 3.2, si  $T$  contient le graphe  $T_1$  ou  $T_2$  en tant que sous-graphe, alors  $T$  n'est pas  $(1, 2, 2)$ -colorable. Si  $T$  ne contient pas  $T_1$ , alors un sommet de degré au moins 3 ne peut pas être adjacent à deux sommets de degré au moins 3. Un  $3^+$ -sommets est un sommet de degré au moins 3 dans  $V(T)$ . Deux  $3^+$ -sommets sont chemin-connectés dans  $T$ , s'il n'y a que des sommets de degré 2 dans le chemin entre ces deux sommets. Il y a deux sortes de  $3^+$ -sommets : les  $3^+_a$ -sommets, qui sont adjacents à un autre  $3^+$ -sommets et les  $3^+_b$ -sommets, qui ne sont pas adjacents à un autre  $3^+$ -sommets.

On construit une  $(1, 2, 2)$ -coloration de  $T$  comme suit : on commence par colorer un  $3^+$ -sommets  $u$ , ainsi que son possible  $3^+$ -sommets voisin, en leur donnant une couleur arbitraire. On étend la coloration aux  $3^+$ -sommets chemin-connectés à  $u$  (ainsi qu'aux sommets dans le chemin entre  $u$  et ces  $3^+$ -sommets). Le processus doit être répété à partir des  $3^+$ -sommets nouvellement colorés. Si  $T$  ne contient pas de  $3^+$ -sommets, le graphe est  $(1, 2, 2)$ -colorable, un chemin étant toujours  $(1, 2, 2)$ -colorable. Soient  $v_1$  et  $v_2$  des  $3^+$ -sommets chemins connectés à distance  $i$  l'un de l'autre. On suppose de plus que  $v_1$  est coloré  $2_a$  et que l'on veut colorer le sommets  $v_2$ , ainsi que les sommets dans le chemin entre  $v_1$  et  $v_2$ .

Si  $i$  est pair, alors la coloration peut être étendue à  $v_2$  en utilisant le motif  $1, 2_b, 1, 2_a, \dots, 1$  pour les sommets dans le chemin entre  $v_1$  et  $v_2$ . La couleur  $2_a$  ou  $2_b$  (dépend de la valeur de  $i$  modulo 4) est donnée à  $v_2$ . Si  $i > 3$  est impair, alors la coloration peut être étendue à  $v_2$  en utilisant le motif  $1, 2_b, 2_a, 1, 2_b, 1, 2_a, \dots, 1$  pour les sommets dans le chemin entre  $v_1$  et  $v_2$ . La couleur  $2_a$  ou  $2_b$  (dépend de la valeur de  $i$  modulo 4) est donnée à  $v_2$ . Si  $i = 3$ , comme  $T$  ne contient pas  $T_2$  en tant que sous-graphe, alors  $v_1$  et  $v_2$  ne sont pas tous les deux des  $3^+_a$ -sommets. Sans perte de généralité, on suppose que  $v_1$  est un  $3^+_a$ -sommets et que  $v_2$  est un  $3^+_b$ -sommets. On donne la couleur 1 et  $2_b$  aux deux sommets dans le chemin entre  $v_1$  et  $v_2$  et la couleur  $2_a$  à  $v_2$ . On obtient donc toujours une  $(1, 2, 2)$ -coloration de  $G$  dans le cas où  $G$  ne contient pas  $T_1$  ni  $T_2$  en tant que sous-graphe.  $\square$

### 3.1.2/ NP-COMPLÉTUDE DE $S$ -COL POUR $|S| = 3$

Le résultat de dichotomie entre problèmes NP-complets et problèmes résolubles en temps polynomial a été publié par Goddard *et al.* [46]. Cependant, indépendamment de leurs travaux, nous avons trouvé des résultats similaires [38] que nous avons présentés plusieurs mois avant la publication de leur article. Pour le résultat sur  $(1, 1, k)$ -COL, Goddard *et al.* ont fait une réduction à partir de 3-COL. À partir d'un graphe de degré maximum  $\Delta$ , le graphe produit est de degré maximum  $2\Delta$ . Comme 3-COL est résoluble en temps polynomial pour un petit  $\Delta$ , la preuve ne peut pas facilement être changée pour avoir des graphes subcubiques.

Pour le résultat sur  $(1, 2, 2)$ -COL, Goddard *et al.* ont fait une réduction à partir de NAE SAT et le graphe produit est de degré maximum  $\Delta$ , avec  $\Delta$  le nombre de fois qu'une variable peut apparaître positivement ou négativement.

Nos réductions initiales ont été réutilisées pour produire une dichotomie sur les graphes subcubiques, cubiques et bipartis. Ces résultats font apparaître de larges différences entre  $(1, 1, k)$ -COL et  $(1, 2, 2)$ -COL, ces problèmes n'étant pas NP-complets sur les mêmes classes de graphes.

**Définition 3.2.** Soit  $S$  une liste croissante d'entiers et soient  $s_i$  et  $s_j$  deux entiers dans cette liste.

Un  $s_i$ - $s_j$ -transmetteur (un  $s_i$ - $s_j$ -antitransmetteur, respectivement) est un graphe  $L$  tel qu'il existe deux sommets  $u$  et  $v$  appelés connecteurs et dans chaque  $S$ -coloration de  $L$ ,  $u$  et  $v$  ont la même couleur parmi  $\{s_i, s_j\}$  (des couleurs différentes parmi  $\{s_i, s_j\}$ , respectivement). De plus, il doit exister une  $S$ -coloration de  $L$  telle que chaque sommets (autre que  $u$  et  $v$ ) coloré  $c$  doit être à distance plus grande que  $\lfloor c/2 \rfloor$  de  $u$  et  $v$ .

Un  $s_i$ - $s_j$ -simulateur de clause est un graphe  $H$  tel qu'il existe trois sommets  $u_1, u_2$  et  $u_3$  appelés connecteurs, et dans chaque  $S$ -coloration de  $H$ ,  $u_1, u_2$  et  $u_3$  ont des couleurs

parmi  $\{s_i, s_j\}$  et jamais  $u_1, u_2$  et  $u_3$  n'ont la même couleur. De plus, il doit exister des  $S$ -colorations de  $H$  telles que chaque sommet (autre que  $u_1, u_2$  et  $u_3$ ) coloré  $c$  doit être à distance plus grande que  $\lfloor c/2 \rfloor$  de  $u_1, u_2$  et  $u_3$ , pour chaque configuration de couleur possible des connecteurs.

**Lemme 3.7.** Soit  $S$  une liste croissante d'entiers et soient  $s_i$  et  $s_j$  deux entiers dans cette liste. S'il existe un  $s_i$ - $s_j$ -transmetteur  $L$ , un  $s_i$ - $s_j$ -antitransmetteur  $J$  et un  $s_i$ - $s_j$ -simulateur de clause  $H$ , alors  $S$ -COL est NP-complet.

*Démonstration.* On suppose qu'il existe un transmetteur  $L$ , un antitransmetteur  $J$  et un simulateur de clause  $H$ . Connecter deux sommets  $u$  et  $v$  par  $L$  (par  $J$ , respectivement) correspond à ajouter une copie du graphe  $L$  (du graphe  $J$ , respectivement) et à fusionner un connecteur avec  $u$  et l'autre connecteur avec  $v$ . Les sommets originaux correspondent aux sommets  $u$  et  $v$ . Un  $L - k$ -cycle est un  $k$ -cycle où toutes les arêtes sont remplacées par  $L$  (cela signifie que pour chaque arête  $uv$ , on enlève l'arête, puis on connecte les sommets  $u$  et  $v$  par  $L$ ).

La preuve est par réduction à partir de NAE 3SAT :

Un *littéral* est soit une variable  $x$  (une occurrence positive de  $x$ ), soit la négation d'une variable (une occurrence négative de  $x$ ). Une *clause* est une disjonction de littéraux et la *taille* d'une clause est son nombre de littéraux. Une *assignation de vérité* donne des valeurs (vrai ou faux) à chaque variable. Pour une assignation de vérité sur un ensemble de clauses, si dans chaque clause un littéral est vrai et un littéral est faux, alors l'ensemble de clauses est satisfait non également.

### Not-all-equal 3-satisfiability (NAE 3SAT)

**Instance** : Un ensemble  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$  de clauses sur un ensemble fini de  $n$  variables tel que  $|c_i| = 3$ , pour  $1 \leq i \leq m$ .

**Question** : Y a-t-il une assignation de vérité qui satisfait non également toutes les clauses dans  $C$  ?

Soit  $C$  un ensemble de clauses. Soit  $m$  le nombre de clauses et soit  $n$  le nombre de variables. On construit un graphe  $G$  comme suit. Pour chaque clause, on associe un simulateur de clause  $H$  avec comme connecteurs les sommets  $\ell_1, \ell_2$  et  $\ell_3$  qui représentent les trois littéraux de la clause. Pour chaque variable  $x$  avec  $p_1$  occurrences positives de  $x$  et  $p_2$  occurrences négatives de  $x$ , on associe un  $L - (p_1 + 1)$ -cycle et un  $L - (p_2 + 1)$ -cycle où un connecteur  $b_1$  du  $L - (p_1 + 1)$ -cycle et un connecteur  $b_2$  du  $L - (p_2 + 1)$ -cycle sont connectés par  $J$ . Pour chaque littéral  $\ell_i$  qui est une occurrence positive de  $x$  (une occurrence négative de  $x$ , respectivement), on connecte  $\ell_i$  par  $L$  à un connecteur du  $L - (p_1 + 1)$ -cycle différent de  $b_1$  (un connecteur du  $L - (p_2 + 1)$ -cycle différent de  $b_2$ , respectivement), de telle façon que chaque connecteur du  $L - (p_1 + 1)$ -cycle (du  $L - (p_2 + 1)$ -cycle, respectivement) soit connecté à seulement une occurrence de  $x$ .

Supposons qu'il existe une assignation de vérité qui satisfait non également toutes les clauses dans  $C$ . À chaque clause  $c$  correspond un simulateur de clause  $H$ . En fonction de l'assignation de vérité, on donne la couleur  $s_i$  aux connecteurs représentant un littéral vrai et  $s_j$  aux connecteurs représentant un littéral faux. Si un connecteur d'un transmetteur ou d'un antitransmetteur est coloré, alors on donne l'autre couleur possible à l'autre connecteur. En utilisant la coloration existante (par définition) de  $H, L$  et  $J$ , on a une  $S$ -coloration de  $G$  (par hypothèse, les sommets colorés ont assez de distance entre eux).

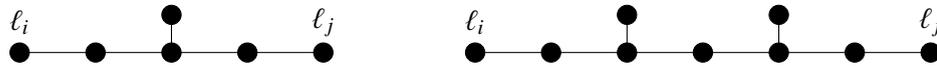


FIGURE 3.2 – Les graphes  $L$  (sur la gauche) et  $J$  (sur la droite).

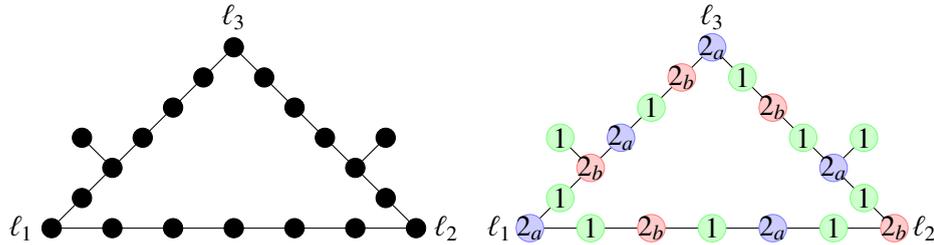


FIGURE 3.3 – Le graphe  $H$  (sur la gauche) et une  $(1, 2, 2)$ -coloration de  $H$  (sur la droite).

Réciproquement, supposons qu'il existe une  $S$ -coloration de  $G$ . Pour chaque copie de  $H$ , les connecteurs de  $H$  ont les couleurs  $s_i$  ou  $s_j$ , par hypothèse. Par construction, les occurrences positives et les occurrences négatives d'une même variable doivent avoir des couleurs différentes. Pour chaque occurrence positive ou négative d'une variable  $x$ , on crée une assignation de vérité en donnant la valeur vrai (la valeur faux, respectivement) aux occurrences positives colorées  $s_i$  ( $s_j$ , respectivement) et en donnant la valeur faux (la valeur vrai, respectivement) aux occurrences négatives colorées  $s_i$  ( $s_j$ , respectivement). Par construction, l'assignation de vérité satisfait donc non également toutes les clauses dans  $C$ .  $\square$

Notons que si  $H$ ,  $L$  et  $J$  sont des graphes subcubiques, si les connecteurs de  $H$  sont de degré 2 et les connecteurs de  $L$  et  $J$  sont de degré 1, alors le graphe construit est subcubique. De plus, si  $H$ ,  $L$  et  $J$  sont des graphes bipartis et les connecteurs de  $L$ ,  $J$  et  $H$  sont connectés par des chemins de taille paire, alors le graphe construit est biparti.

**Théorème 3.7.** *Le problème  $(1, 2, 2)$ -COL est NP-complet pour les graphes subcubiques bipartis.*

*Démonstration.* Soient  $L$  et  $J$  les graphes subcubiques de la figure 3.2, avec comme connecteurs les sommets  $\ell_i$  et  $\ell_j$ . Remarquons que si un sommet est de degré 3, alors il ne peut pas être coloré 1, car la coloration ne peut être étendue à une  $(1, 2, 2)$ -coloration du graphe. Par conséquent, tous les connecteurs doivent être colorés  $2_a$  ou  $2_b$ , car dans le graphe construit ces sommets seront de degré 3. Observons que les sommets de degré 3 dans  $L$  et  $J$  doivent aussi être colorés  $2_a$  ou  $2_b$ . Si les deux connecteurs de  $L$  ont des couleurs différentes, alors le sommet central de degré 3 ne peut pas être coloré. Donc, dans chaque  $(1, 2, 2)$ -coloration de  $L$ , les connecteurs doivent avoir la même couleur. Une  $(1, 2, 2)$ -coloration de  $L$  existe en donnant la couleur  $2_a$  aux connecteurs,  $2_b$  au sommet central de degré 3 et la couleur 1 aux sommets restants.

Si deux connecteurs de  $J$  ont la même couleur 2, alors les deux sommets centraux de degré 3 ne peuvent pas être colorés. Donc, les connecteurs doivent être colorés différemment dans chaque  $(1, 2, 2)$ -coloration de  $J$ . Une telle  $(1, 2, 2)$ -coloration de  $J$  existe. On donne la couleur  $2_a$  à un des connecteurs et un des sommets centraux de degré

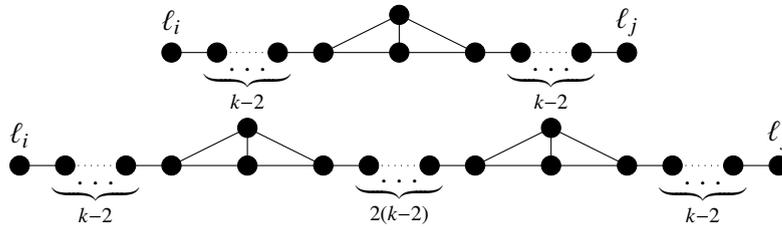


FIGURE 3.4 – Les graphes  $L_k$  (en haut) et  $J_k$  (en bas).

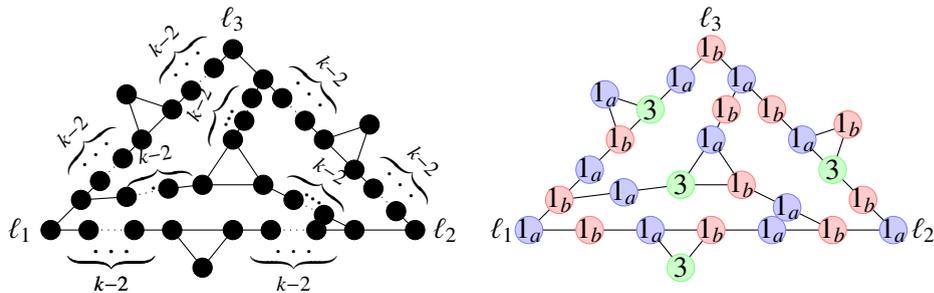


FIGURE 3.5 – Le graphe  $H_3$  (sur la gauche) et une  $(1, 1, 3)$ -coloration de  $H_3$  (sur la droite).

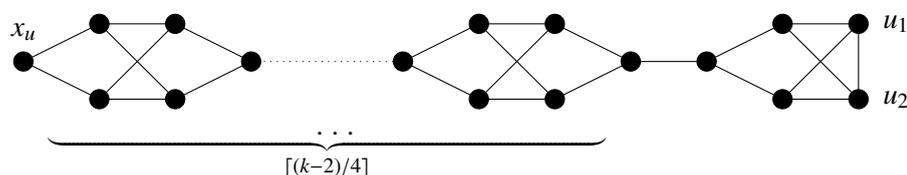
3, la couleur  $2_b$  à l'autre connecteur et à l'autre sommet central de degré 3 et la couleur 1 aux sommets restants. Pour conclure,  $L$  est un 2-2-transmetteur et  $J$  est un 2-2-antitranmetteur.

Soit  $H$  le graphe subcubique de la partie gauche de la figure 3.3 avec comme connecteurs les sommets  $\ell_1, \ell_2$  et  $\ell_3$ . Le graphe  $H$  contient deux sommets de degré 3 et trois connecteurs. Ces sommets doivent être colorés  $2_a$  ou  $2_b$ . Supposons que  $\ell_1, \ell_2$  et  $\ell_3$  ont la même couleur  $2_a$ . Les deux sommets de degré 3 doivent être colorés  $2_b$ . Observons que les sommets à distance 2 de  $\ell_3$  peuvent seulement avoir la couleur 1. Ainsi, les deux voisins de  $\ell_3$  ne peuvent pas être colorés, ne pouvant pas être colorés tous les deux  $2_b$ . Par conséquent, dans toute  $(1, 2, 2)$ -coloration de  $H$ , les connecteurs ne peuvent pas avoir tous la même couleur. La partie droite de la figure 3.3 présente une coloration avec les propriétés demandées pour  $\ell_1$  et  $\ell_3$  avec la même couleur (pour les autres cas, la  $(1, 2, 2)$ -coloration est similaire). En conclusion,  $H$  est un 2-2-simulateur de clause.  $\square$

**Remarque 3.3.** Notons qu'aucun graphe  $r$ -régulier n'est  $(1, 2, 2)$ -colorable, pour  $r \geq 3$ . Le problème  $(1, 2, 2)$ -COL ne semble dur que sur des graphes qui contiennent une grande proportion de sommets de degré au plus 2. De plus, un graphe  $(1, 2, 2)$ -colorable ne contient pas un certain nombre de sous-graphes, par exemple les graphes  $T_1$  et  $T_2$  de la figure 3.1.

On obtient donc que  $(1, 2, 2)$ -COL est un problème NP-complet pour les graphes subcubiques et les graphes bipartis et résoluble en temps polynomial pour les graphes cubiques.

**Théorème 3.8.** Soit  $k \geq 2$  un entier positif. Le problème  $(1, 1, k)$ -COL est NP-complet pour les graphes subcubiques.


 FIGURE 3.6 – Le graphe  $N_k$ .

*Démonstration.* Soit  $k \geq 2$  un entier positif. Soient  $L_k$  et  $J_k$  les graphes subcubiques de la figure 3.4 avec comme connecteurs les sommets  $\ell_i$  et  $\ell_j$ . On observe qu'il y a deux triangles dans  $L_k$ . Si aucun des sommets communs aux deux triangles n'est coloré  $k$ , alors la coloration ne peut être étendue à une  $(1, 1, k)$ -coloration de  $L_k$ . Donc, dans toute  $(1, 1, k)$ -coloration, un des deux sommets communs aux deux triangles est coloré  $k$  et les sommets restants peuvent seulement être colorés  $1_a$  ou  $1_b$  en alternant les couleurs. Comme le nombre de sommets restants est impair, si un des connecteurs est coloré avec une couleur 1, l'autre connecteur peut seulement être coloré avec la même couleur 1. Dans cette  $(1, 1, k)$ -coloration, le sommet coloré  $k$  est à distance  $k$  des connecteurs.

On observe qu'il y a deux paires de triangles adjacents dans  $J_k$ . Pour la même raison que pour  $L_k$ , pour toute paire de triangles adjacents, un des deux sommets communs aux deux triangles est coloré  $k$ . Par conséquent, le nombre de sommets restants étant pair, si l'un des connecteurs est coloré avec une couleur 1, l'autre connecteur peut seulement être coloré avec l'autre couleur 1. En conclusion,  $L_k$  est un 1-1-transmetteur et  $J_k$  est un 1-1-antitranmetteur.

Soit  $H_k$  le graphe subcubique de la partie gauche de la figure 3.5 avec comme connecteurs les sommets  $\ell_1$ ,  $\ell_2$  et  $\ell_3$ . Le graphe  $H_k$  contient quatre triangles. Dans chaque triangle un sommet doit être coloré  $k$ . Donc, dans toute  $(1, 1, k)$ -coloration, les sommets restants peuvent seulement être colorés  $1_a$  ou  $1_b$  en alternant les couleurs. Sans perte de généralité, on suppose que  $\ell_1$ ,  $\ell_2$  et  $\ell_3$  ont la même couleur  $1_a$ . Les deux voisins de ces sommets doivent être colorés  $1_b$  et en alternant les couleurs, le triangle central a ses voisins tous colorés la même couleur  $1_a$  ou  $1_b$  (dépend du  $k$ ). Donc, les sommets du triangle central ne peuvent pas être colorés car la couleur de leurs voisins n'est pas disponible. La partie droite de la figure 3.5 présente une coloration avec les propriétés demandées pour  $k = 3$  (pour les autres valeurs de  $k$ , la coloration est similaire). En conclusion,  $H_k$  est un 1-1-simulateur de clause.  $\square$

**Corollaire 3.8.** *Soit  $k \geq 2$  un entier positif. Le problème  $(1, 1, k)$ -COL est NP-complet pour les graphes cubiques.*

*Démonstration.* Soit  $G$  un graphe et soit  $G'$  le graphe obtenu avec la réduction du lemme 3.7 en utilisant le 1-1-transmetteur, le 1-1-antitranmetteur et le 1-1-simulateur de clause du théorème 3.8. Pour chaque sommet  $u$  dans  $V(G')$  de degré 2, on ajoute le gadget  $N_k$  de la figure 3.6 et on connecte  $u$  au sommet  $x_u$  de  $N_k$ . On obtient donc un graphe cubique dans la réduction précédente. Ce gadget est clairement  $(1, 1, k)$ -colorable, la couleur  $k$  est utilisée pour colorer un sommet parmi  $u_1$  et  $u_2$ .  $\square$

**Remarque 3.4.** *Le problème  $(1, 1, k)$ -correspond à chercher un sous-graphe induit biparti dans le graphe de telle façon que les sommets restants forment un  $k$ -packing. Un graphe*

$(1, 1, k)$ -colorable ne contient pas un certain nombre de sous-graphes, par exemple le graphe  $K_4$ .

On obtient donc que le problème  $(1, 1, k)$ -COL, avec  $k \geq 2$ , est un problème NP-complet pour les graphes cubiques et subcubiques et résoluble en temps polynomial pour les graphes bipartis.

### 3.1.3/ CONCLUSION

Pour différentes instances de  $S$ -COL, avec  $|S| = 3$ , le tableau 3.1 résume la classe de complexité du problème sur différentes classes de graphes. On rappelle que tout graphe subcubique, sauf  $K_4$ , est  $(1, 1, 1)$ -colorable en utilisant le théorème de Brooks [15].

Classe de graphes	$(1, 1, 1)$ -COL	$(1, 2, 2)$ -COL	$(1, 1, k)$ -COL ( $k \geq 2$ )	$S'$ -COL
Graphes arbitraires	NP-complet	NP-complet	NP-complet	Polynomial
Graphes subcubiques	Polynomial	NP-complet	NP-complet	Polynomial
Graphes cubiques	Polynomial	Polynomial	NP-complet	Polynomial
Graphes bipartis	Polynomial	NP-complet	Polynomial	Polynomial
Arbres	Polynomial	Polynomial	Polynomial	Polynomial

TABLE 3.1 – Classe de complexité de plusieurs instances de  $S$ -COL, avec  $S'$  une liste croissante de trois entiers avec  $S' \neq (1, 1, k)$ , pour  $k \geq 1$ , et  $S' \neq (1, 2, 2)$ .

## 3.2/ CLASSE DE COMPLEXITÉ DE QUELQUES INSTANCES DE $S$ -COL, POUR $|S| > 3$

Dans cette partie on détermine que certaines instances du problème  $S$ -COL sont NP-complètes ou résolubles en temps polynomial dans le cas général.

### 3.2.1/ INSTANCES POLYNOMIALES DE $S$ -COL

**Proposition 3.9.** *Soit  $S$  une liste croissante d'entiers avec  $s_1 > 1$  et soit  $G$  un graphe. Si  $G$  contient un sommet de degré  $|S|$ , alors  $G$  n'est pas  $S$ -colorable.*

*Démonstration.* Soit  $v$  un sommet de degré  $|S|$ . Comme  $v$  et ses voisins forment un sous-graphe de diamètre au plus 2, tous ces sommets doivent avoir une couleur différente et on ne dispose que de  $|S|$  couleurs. □

**Définition 3.3.** *Soient  $k$  et  $d$  deux entiers strictement positifs. La borne de Moore [51]  $n(k, d)$  est l'ordre maximal d'un graphe de diamètre  $d$  et de degré maximum  $k$ .*

**Proposition 3.10.** *Soit  $S$  une liste croissante d'entiers avec  $s_1 > 1$ . S'il existe un graphe infini  $S$ -colorable, alors  $P_\infty$  est  $S$ -colorable.*

*Démonstration.* Si  $P_\infty$  n'est pas  $S$ -colorable, alors il existe un entier  $k$  tel que tout graphe de diamètre au moins  $k$  n'est pas  $S$ -colorable. En utilisant la proposition 3.9, le degré

maximum d'un graphe  $S$ -colorable est borné par  $|S| - 1$ . Donc, en utilisant la borne de Moore, les graphes de degré borné et de diamètre borné ont un ordre borné.  $\square$

**Définition 3.4.** Soit  $S$  une liste croissante d'entiers. On définit  $t_{\max}(S)$  comme l'ordre maximal d'un graphe  $S$ -colorable. Si  $t_{\max}(S)$  n'est pas borné, alors on pose  $t_{\max}(S) = \infty$ .

Voici diverses observations concernant  $t_{\max}$ .

**Proposition 3.11.** Soit  $S$  une liste croissante d'entiers.

- i) Si  $t_{\max}(S)$  est borné, alors il existe un arbre  $S$ -colorable d'ordre  $t_{\max}(S)$ .
- ii) Si  $s_1 \geq |S|$ , alors  $t_{\max}(S) = |S|$ .
- iii) On a  $p_{\max}(S) \leq t_{\max}(S)$  ( $p_{\max}$  étant l'ordre du plus grand chemin  $S$ -colorable). De plus, si  $p_{\max}(S) < \infty$  et  $s_1 > 2$ , alors en utilisant la borne de Moore, on a  $t_{\max}(S) \leq n(|S| - 1, p_{\max}(S))$ .

*Démonstration.* i). Si un graphe  $G$  est  $S$ -colorable, alors n'importe quel sous-arbre de  $G$  est  $S$ -colorable.

ii). Si  $s_1 \geq |S|$ , tous les sommets doivent être coloriés différemment.

iii). Un chemin étant un arbre, on a donc  $p_{\max}(S) \leq t_{\max}(S)$ .  $\square$

**Définition 3.5.** Soit  $Y_n$ , l'arbre avec comme ensemble de sommets  $V(Y_n) = \{a_i | i \in \{0, \dots, n\}\} \cup \{b_i | i \in \{1, \dots, n\}\} \cup \{c_i | i \in \{1, \dots, n\}\}$  et ensemble d'arêtes  $E(Y_n) = \{a_0b_1, a_0c_1\} \cup \{a_i a_j | |i - j| = 1\} \cup \{b_i b_j | |i - j| = 1\} \cup \{c_i c_j | |i - j| = 1\}$ . Le graphe  $Y_\infty$  est la version infinie de  $Y_n$ .

**Lemme 3.12.** Soit  $S$  une liste croissante d'entiers. Si  $Y_n$  n'est pas  $S$ -colorable, alors tout graphe contenant  $Y_n$  en tant que mineur n'est pas  $S$ -colorable.

*Démonstration.* Soit  $G$  un graphe. Supposons que  $Y_n$  n'est pas  $S$ -colorable. Notons que tout graphe contenant  $Y_n$  en tant que sous-graphe, obtenu par suite de subdivision d'arêtes contient toujours  $Y_n$  en tant que sous-graphe. Donc, si  $G$  contient  $Y_n$  en tant que mineur, alors  $Y_n$  est déjà contenu en tant que sous-graphe dans  $G$ . Par conséquent,  $G$  n'est pas  $S$ -colorable.  $\square$

**Proposition 3.13.** Soit  $S$  une liste croissante d'entiers. Si  $Y_\infty$  n'est pas  $S$ -colorable, alors  $S$ -COL est résoluble en temps polynomial.

*Démonstration.* Si  $Y_\infty$  n'est pas  $S$ -colorable, alors il existe un entier  $n$  tel que  $Y_n$  n'est pas  $S$ -colorable (par le théorème de De Bruijn-Erdős). Tout graphe qui contient  $Y_n$  en tant que mineur est de plus non  $S$ -colorable, par le lemme 3.12. D'après le théorème 3.4, tout graphe  $S$ -colorable a une largeur arborescente bornée par  $3n - 1$ . Donc, d'après le théorème 3.5,  $S$ -COL est résoluble en temps polynomial.  $\square$

On note que si  $t_{\max}(S) < \infty$ , pour une liste croissante d'entiers  $S$ , alors il existe un entier  $n$  tel que tout chemin de taille au moins  $n$  n'est pas  $S$ -colorable. Donc,  $Y_\infty$  n'est pas  $S$ -colorable. Par conséquent, on obtient le corollaire suivant :

**Corollaire 3.14.** Soit  $S$  une liste croissante d'entiers. Si  $t_{\max}(S) < \infty$ , alors  $S$ -COL est résoluble en temps polynomial.

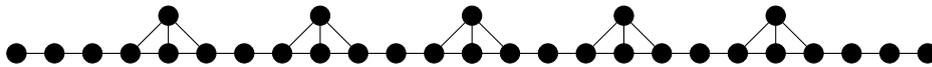


FIGURE 3.7 – Le graphe  $L_{2,(2,2,2,3)}$ .

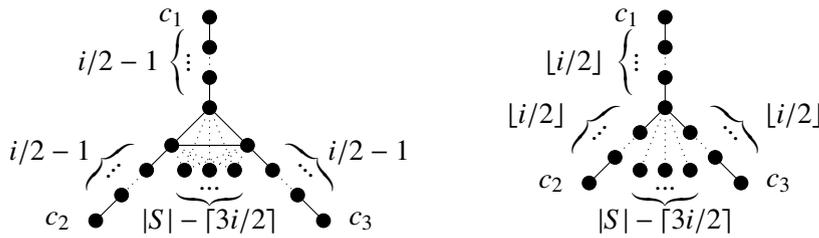


FIGURE 3.8 – Les graphes  $R_{i,S}$ , pour  $i$  pair (sur la gauche) et pour  $i$  impair (sur la droite).

**Proposition 3.15.** *Soit  $S$  une liste croissante d'entiers et soit  $i > 1$  un entier. Si  $s_1 = i$ , alors  $S$ -COL est résoluble en temps polynomial pour  $|S| < \lceil 3i/2 \rceil$ .*

*Démonstration.* D'après le théorème 3.2, le problème  $S_{d^k}$ -COL ( $S_{d^k}$  étant la liste composée de  $k$  entiers  $d$ ) est résoluble en temps polynomial pour  $k < \lceil 3d/2 \rceil$ . Comme les graphes  $S_{d^k}$ -colorables ont une largeur arborescente bornée [71] pour  $k < \lceil 3d/2 \rceil$  et tout graphe  $S$ -colorable est aussi  $S_{s_1}$ -colorable, les graphes  $S$ -colorables ont aussi une largeur arborescente bornée. D'après le théorème 3.5,  $S$ -COL est résoluble en temps polynomial.  $\square$

### 3.2.2/ INSTANCES NP-COMPLÈTES POUR $|S| \geq 3$

Voici, une généralisation du théorème de Sharp [71].

**Théorème 3.9.** *Le problème  $S$ -COL est NP-complet pour une liste  $S$  tel que  $s_1 = s_{i+1} = i$ , avec  $i > 1$  et  $|S| \geq \lceil 3i/2 \rceil$ .*

*Démonstration.* On rappelle que  $N_i(S)$  est le nombre de fois qu'apparaît le nombre  $i$  dans la liste  $S$ . Soit  $n_i^-(S) = N_i(S) - i - 1$ . La preuve utilise une réduction à partir de  $N_i(S)$ -COL (comme  $N_i(S) \geq 3$ ,  $N_i(S)$ -COL est NP-complet).

#### $k$ -COL

**Instance :** Un graphe  $G$  et un entier  $k$ .

**Question :** Est-ce que le graphe  $G$  est  $k$ -colorable ?

Soit  $G$  un graphe. On pose  $m = \prod_{j \in \mathbb{N}^* | N_j(S) \geq 1} (j + 1)$ . On va créer un graphe  $L_{i,S}$  composé de sommets  $u_{j,l}$ , pour  $j$  et  $l$  des entiers avec  $-m \leq j \leq m$ . Soient  $j, j', l$  et  $l'$  quatre entiers. Deux sommets  $u_{j,l}$  et  $u_{j',l'}$  dans  $V(L_{i,S})$  sont adjacents si et seulement si  $|j - j'| \leq 1$ . Le rang d'un sommet est  $\text{rang}(u_{j,l}) = j$  et correspond à sa position dans  $L_{i,S}$ . Soit  $j$  un entier, on définit la fonction suivante :  $\text{rang}_{\max}(j) = \max\{l \mid u_{j,l} \in V(L_{i,S})\}$ . Soit  $k$  un entier, une  $k$ -insertion au rang  $j$  correspond à rajouter des sommets  $u_{j, \text{rang}_{\max}(j)+1}, \dots, u_{j, \text{rang}_{\max}(j)+k}$  dans le graphe  $L_{i,S}$ .

On construit le graphe  $L_{i,S}$  de la façon suivante : le graphe  $L_{i,S}$  contient toujours les sommets  $u_{-m,0}, \dots, u_{0,0}, \dots, u_{m,0}$ . En fonction de la liste  $S$ , on doit faire les insertions suivantes :

1. On fait une  $n_i^-(S)$ -insertion au rang  $j$ , pour tout entier  $j$  tel que  $j \equiv \lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor \pmod{i+1}$  et  $-m \leq j \leq m$ .
2. Pour tout  $k > i$ , on fait une  $N_k(S)$ -insertion au rang  $j$ , pour tout entier  $j$  tel que  $j \equiv 0 \pmod{k+1}$  et  $-m < j < m$ .

On finit par rajouter des arêtes de telle façon que la propriété d'adjacence soit vraie (deux sommets de rang  $j$  et  $j'$  sont adjacents si et seulement si  $|j - j'| \leq 1$ ). Les connecteurs d'un graphe sont des sommets précis de degré 1 d'un graphe. Les connecteurs de  $L_{i,S}$  sont les sommets  $u_{-m,0}$  et  $u_{m,0}$ . Le graphe  $L_{2,(2,2,2,3)}$  est représenté dans la figure 3.7.

Soit  $R_{i,S}$  le graphe de la figure 3.8. Il faut noter qu'en fonction de la parité de  $i$ , le graphe  $R_{i,S}$  est différent. Les connecteurs de  $R_{i,S}$  sont les sommets  $c_1$ ,  $c_2$  et  $c_3$  de la figure 3.8. Connecter un graphe  $G$  à un graphe  $G'$  correspond à fusionner un connecteur de  $G$  avec un connecteur de  $G'$ . Le graphe  $J_{i,S}$  est le graphe construit à partir de deux copies du graphe  $L_{i,S}$  et une copie du graphe  $R_{i,S}$  où l'on connecte  $R_{i,S}$  aux deux copies de  $L_{i,S}$ . On suppose que  $u$  et  $v$  sont les deux connecteurs de degré 1 du graphe précédemment construit. On supprime un des connecteurs de degré 1. Si  $i = 2$ , on doit vérifier que  $\text{rang}_{\max}(w) = 1$  dans la copie de  $L_{i,S}$ , avec  $w$  un voisin du connecteur supprimé. Les nouveaux connecteurs de ce graphe sont le sommet  $w$  et un des sommets restants parmi  $u$  et  $v$ .

Soit  $d$  un entier positif. Le graphe  $G_d$  est le graphe obtenu à partir de  $R_{i,S}$  et  $L_{i,S}$  de la façon suivante : on prend  $d$  copies  $L_0, \dots, L_{d-1}$  de  $L_{i,S}$  et  $d$  copies  $R_0, \dots, R_{d-1}$  de  $R_{i,S}$ . Pour chaque entier  $k$ , avec  $0 \leq k \leq d-1$ , on connecte  $R_k$  à  $L_k$  et  $L_{k+1 \pmod{d}}$ . Le graphe obtenu est le graphe  $G_d$ . Ce graphe possède  $d$  connecteurs, un connecteurs pour chaque connecteur de degré 1 restant dans les copies de  $R_{i,S}$ .

Finalement, on construit le graphe  $G'$  à partir de  $G$  de la façon suivante : pour chaque sommet  $v \in V(G)$ , on associe un graphe  $G_v$  qui est une copie de  $G_{d(v)}$ . Pour un sommet  $v$ , on appelle sommets originaux les connecteurs d'un graphe  $G_v$  (même si ces sommets ne seront plus de degré 1 dans le graphe construit). Pour chaque arête  $uv \in E(G)$ , on connecte  $G_v$  et  $G_u$  à un graphe  $J_{i,S}$ .

Dans l'optique de prouver que cette construction est une réduction de  $N_i(S)$ -COL à  $S$ -COL, on prouve les faits suivant :

**Fait 1** : Le graphe  $R_{i,S}$  est  $S$ -colorable et dans toute  $S$ -coloration les connecteurs de  $R_{i,S}$  ont la même couleur  $i$ .

*Preuve* : Le diamètre de  $R_{i,S}$  est  $i+1$  et seuls trois sommets sont à distance mutuelle  $i+1$ , il s'agit des trois connecteurs de  $R_{i,S}$ . Comme  $|V(R_{i,S})| = |S| + 2$ , les connecteurs doivent tous avoir la même couleur, il s'agit d'une couleur  $i$ . Il existe une  $S$ -coloration de  $R_{i,S}$  qui consiste à donner la même couleur  $i$  aux connecteurs et à colorer les autres sommets par des couleurs toutes différentes.

**Fait 2** : Pour toute  $S$ -coloration d'un  $L_{i,S}$  induit dans  $G'$  et pour toute couleur  $s_k \neq i$ , il y a un sommet de rang  $j$  coloré  $s_k$ , pour tout entier  $j$  tel que  $j \equiv 0 \pmod{s_k+1}$  et  $-m < j < m$ .

*Preuve* : Il y a  $\sum_{j=i+1}^{|S|} N_j(S) + 1$  sommets de rang 0. De plus, on doit utiliser chaque couleur  $i$  deux fois pour colorer les sommets de rang  $\ell$ , avec  $-(i+1) \leq \ell < i+1$ , car il y a  $|S| + N_i(S)$  sommets avec un tel rang. Il n'est pas possible d'utiliser deux fois chaque couleur  $i$  si

deux sommets de rang 0 sont colorés par une couleur  $i$ .

Par conséquent, il y a un sommet de couleur  $s_k$ ,  $s_k \neq i$ , avec rang 0, pour toute  $S$ -coloration d'un  $L_{i,S}$  induit. En procédant par récurrence sur  $j$ , pour  $-m \leq j \leq -(i+1)$  et  $(i+1) < j \leq m$ , on peut prouver facilement que pour toute couleur  $s_k \neq i$ , il y a un sommet de rang  $j$  coloré  $s_k$ , pour tout entier  $j$  tel que  $j \equiv 0 \pmod{s_k + 1}$  et  $-m < j < m$ .

**Fait 3 :** Dans toute  $S$ -coloration, les deux connecteurs de  $L_{i,S}$  possèdent la même couleur et les deux connecteurs de  $J_{i,S}$  possèdent deux couleurs différentes.

*Preuve :* D'après le fait 2, pour toute couleur  $s_k \neq i$ , il y a un sommet de rang  $j$  coloré  $s_k$ , pour tout entier  $j$  tel que  $j \equiv 0 \pmod{s_k + 1}$  et  $-m < j < m$ . Donc, il y a un sommet coloré  $s_k$  à distance au plus  $s_k$  des connecteurs de  $L_{i,S}$  et  $J_{i,S}$ . On peut noter aussi que  $-m$  et  $m$  ont le même reste modulo  $i+1$ . Il y a un sommet coloré  $i$  de rang  $j$ , pour chaque entier  $j$  telle que  $j \equiv 0 \pmod{m}$ , cette couleur  $i$  est la même pour tous sommets. En en conclut que les deux connecteurs de  $L_{i,S}$  ont la même couleur. L'argument est similaire pour  $J_{i,S}$  (on doit en plus utiliser le fait 1).

**Fait 4 :** Il existe une  $S$ -coloration de  $L_{i,S}$  et  $J_{i,S}$ .

*Preuve :* Premièrement, on colore les sommets  $u_{0,k}$ , pour  $-m \leq k \leq m$ , en alternant  $i+1$  couleurs  $i$ . Deuxièmement, pour toute couleur  $s_k \neq i$ , on colore les sommets de rang  $j$  restants de la couleur  $s_k$ , pour tout entier  $j$  tel que  $j \equiv 0 \pmod{s_k + 1}$  et  $-m < j < m$ . On finit par colorer les sommets de rang  $j$  restants par les  $n_i^-$  couleurs  $i$  restantes, pour  $j \equiv \lceil i/2 \rceil \pmod{i+1}$  et  $-m \leq j \leq m$ .

**Fait 5 :** Soit  $d$  un entier positif. Dans toute  $S$ -coloration de  $G_d$ , les sommets originaux ont la même couleur  $i$ .

*Preuve :* Ce fait découle des faits 1 et 3.

**Fait 6 :** Pour n'importe quelle paire de couleurs  $(i_a, i_b)$  de  $N_i(S)$ , avec  $i_a \neq i_b$ , il existe une  $S$ -coloration d'un  $J_{i,S}$  induit dans  $G'$ , avec les couleurs  $i_a$  et  $i_b$  pour les connecteurs de  $J_{i,S}$ .

*Preuve :* On commence par utiliser une liste de  $i+1$  couleurs  $i$  différentes pour colorer les sommets  $u_{0,k}$ , pour  $-m \leq k \leq m$ , dans la copie de  $L_{i,S}$  où aucun sommet n'a été enlevé. On suppose que la couleur  $i_a$  est utiliser pour colorer les connecteurs initiaux de la copie de  $R_{i,S}$ . On utilise les couleurs non utilisées dans la précédente liste pour colorer les sommets dans le chemin entre le connecteur initial de  $L_{i,S}$  où aucun sommet n'a été enlevé et un sommet de degré 3 de  $R_{i,S}$  et les sommets de degré 1 dans la copie de  $R_{i,S}$ . On affirme que l'on peut utiliser n'importe quelle liste de  $i+1$  couleurs  $i$  pour colorer les sommets restants de  $R_{i,S}$ . Cette liste déterminera la couleur du second connecteur de  $J_{i,S}$ .

On suppose que le graphe  $G$  a une  $N_i(S)$ -coloration, avec  $1, \dots, N_i(S)$  les différentes couleurs utilisées. Pour chaque sommet  $v$  de couleur  $j$ , pour  $1 \leq j \leq N_i(S)$ , on fait correspondre une couleur  $s_j$  aux sommets originaux de  $G_v$  dans le graphe  $G'$ . Grâce aux faits 1, 4 et 6, on peut étendre la coloration à une  $S$ -coloration du graphe  $G'$ .

Supposons que  $G'$  a une  $S$ -coloration. Par le fait 5, on sait que pour chaque sommet  $v \in V(G)$ , les sommets originaux de  $G_v$  ont la même couleur  $i$ . On en conclut que l'on peut construire une  $N_i(S)$ -coloration de  $G$  en faisant correspondre la couleur  $s_j$  des sommets originaux de  $G_v$  à la couleur  $j$  dans  $G$ , pour  $1 \leq j \leq N_i(S)$ .  $\square$

**Corollaire 3.16.** Soient  $k, k'$  et  $k''$  des entiers positifs. Le problème  $S$ -COL est NP-complet

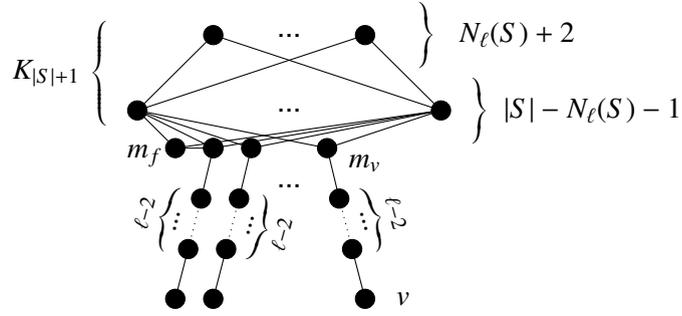


FIGURE 3.9 – Illustration de la réduction de la proposition 3.17.

pour les listes  $S = (2, 2, 2, k)$  et  $S' = (4, 4, 4, 4, 4, k', k')$ .

**Proposition 3.17.** Soit  $S$  une liste croissante d'entiers avec  $s_2 = 1$  et  $|S| = 3$ . Si  $S$ -COL est NP-complet, alors  $S'$ -COL est NP-complet si  $|S'| = |S| + 1$ ,  $s'_{|S|+1} \geq s_{|S|}$  et  $s'_i = s_i$  pour tout entier  $i$ , avec  $1 \leq i \leq |S|$ .

*Démonstration.* On suppose que  $S$ -COL est NP-complet et que  $s'_{|S|+1} = \ell$ . À partir d'un graphe  $G$ , on construit un nouveau graphe  $G'$  ainsi : pour tout sommet  $v \in V(G)$ , on commence par connecter  $v$  à l'extrémité d'un chemin de  $\ell - 1$  sommets avec comme autre extrémité le sommet  $m_v$  (dans le cas  $\ell = 2$ , le chemin n'a qu'un seul sommet et les deux extrémités dénotent le même sommet). Ensuite, on ajoute un sommet  $m_f$  et on connecte  $m_f$  à  $m_v$ , pour un sommet  $v$  quelconque. Puis on ajoute une copie de  $K_{|S|+1}$  et on fait la jointure entre l'ensemble  $\{m_v | v \in V(G)\} \cup m_f$  et un ensemble de  $|S| - N_\ell(S) - 1$  sommets dans  $K_{|S|+1}$ . Le graphe obtenu est le graphe  $G'$ . Un sommet original de  $G'$  est un sommet qui vient du graphe  $G$ .

On suppose que  $G$  est  $S$ -colorable. On utilise la  $S$ -coloration de  $G$  pour colorer les sommets originaux de  $G'$ . Ensuite, pour chaque sommet  $v$ , on alterne les couleurs  $s_1 = 1_a$  et  $s_2 = 1_b$  pour colorer tous les chemins jusqu'à  $m_v$ . On donne la couleur  $1_a$  ou  $1_b$  à  $m_f$  (cette couleur dépend de la couleur du sommet adjacent à  $m_f$ ). On a  $N_\ell(S) + 2$  sommets dans  $K_{|S|+1}$  non adjacents à  $m_f$ . Les couleurs  $1_a$ ,  $1_b$  et le maximum de couleur  $\ell$  dans  $S$  sont données à ces sommets. Les couleurs restantes sont données aux sommets non encore colorés dans  $K_{|S|+1}$ .

On suppose que  $G'$  est  $S'$ -colorable. Les sommets de  $K_{|S|+1}$  doivent tous avoir des couleurs différentes. Les deux couleurs données à  $m_v$  et  $m_f$  doivent être utilisées pour colorer les  $N_\ell(S) + 2$  sommets dans  $K_{|S|+1}$  non adjacents à  $m_f$ . Donc  $m_v$  et  $m_f$  sont de couleur 1. Au plus  $N_\ell(S)$  sommets peuvent être colorés par une couleur  $\ell$  parmi ces  $N_\ell(S) + 2$  sommets dans  $K_{|S|+1}$  non adjacents à  $m_f$ . Donc, un sommet doit être coloré par une couleur  $\ell$  parmi les sommets restants de  $K_{|S|+1}$ . Cette couleur  $\ell$  ne peut pas être utilisée pour colorer un autre sommet de  $G'$ , les autres sommets étant à distance inférieure à  $\ell$  d'un sommet coloré par cette couleur  $\ell$ . La coloration des sommets originaux de  $G'$  permet de créer une  $S$ -coloration de  $G$ .  $\square$

**Corollaire 3.18.** Le problème  $S$ -COL est NP-complet pour toute liste  $S$  tel que  $s_1 = s_2 = 1$  et  $|S| \geq 3$ .

**Proposition 3.19.** *Soit  $S$  une liste croissante d'entiers. Si  $S$ -COL est NP-complet, alors  $S'$ -COL est NP-complet, pour tout  $S'$  tel que  $|S'| = |S| + 1$ ,  $s'_1 = 1$  et  $s'_{i+1} = 2s_i$  ou  $s'_{i+1} = 2s_i + 1$ , pour tout entier  $i$ , avec  $1 \leq i \leq |S|$ .*

*Démonstration.* On suppose que  $S$ -COL est NP-complet. Il existe une réduction de  $S$ -COL à  $S'$ -COL complètement similaire à la réduction introduite par Goddard *et al.* [45] de  $(1, 1, 2)$ -COL à  $(1, 2, 3, 4)$ -COL.

Soit  $G$  un graphe connexe. On construit un nouveau graphe  $G'$  où on remplace chaque arête  $uv$  par  $|S| + 1$  arêtes parallèles que l'on subdivise. Les sommets  $u$  et  $v$  sont appelés sommets originaux.

On suppose que  $G$  est  $S$ -colorable. Soit  $X_i \subseteq V(G)$  un  $i$ -packing. Chaque paire de sommets  $\{u, v\}$  dans  $X_i$  est telle que  $d(u, v) > i$ . Soit  $X'_i \subseteq V(G')$  l'ensemble des sommets originaux dans  $X_i$ . On observe que chaque paire de sommets  $\{u, v\}$  dans  $X'_i$  est telle que  $d_{G'}(u, v) > 2i + 1$ . En conclusion,  $X'_i$  est un  $(2i + 1)$ -packing (et donc un  $2i$ -packing). Soit  $X'_1$  l'ensemble des sommets non originaux (créés par subdivision). Cet ensemble est un stable et on colore les sommets de cet ensemble par la couleur 1. En donnant la couleur  $s'_{i+1}$  aux sommets originaux colorés  $s_i$  dans  $V(G)$ , pour  $1 \leq i \leq |S|$ , on obtient une  $S'$ -coloration de  $G'$ .

On suppose que  $G'$  est  $S'$ -colorable. Supposons qu'il existe un sommet original  $u$  coloré 1. Comme  $u$  a  $|S| + 1$  voisins, deux de ses voisins ont la même couleur  $s'_i$ . Donc, aucun sommet original n'est coloré 1. En utilisant la  $S'$ -coloration des sommets originaux dans  $G'$  on peut créer une  $S$ -coloration de  $G$  en donnant la couleur  $s_{i-1}$  aux sommets colorés  $s'_i$  dans  $G'$ , pour  $2 \leq i \leq |S| + 1$ .  $\square$

**Corollaire 3.20.** *Le problème  $S$ -COL est NP-complet pour toute liste telle que  $|S| = 4$  et  $S \geq S'$ , avec  $S' = (1, 3, 3)$  ou  $S' = (1, 3, 5, 5)$ .*

### 3.3/ DICHOTOMIE POUR $|S| = 4$

Dans cette partie, on prouve une dichotomie entre problèmes NP-complets et résolubles en temps polynomial, en utilisant les résultats de la partie précédente.

**Proposition 3.21.** *Soit  $S$  une liste croissante d'entiers et soit  $n$  un entier. L'arbre  $Y_n$  (définition 3.5) n'est pas  $S$ -colorable pour :*

1.  $S = (2, 3, 3, 3)$  et  $n = 2$  ;
2.  $S = (2, 2, 3, 4)$  et  $n = 4$  ;
3.  $S = (1, 4, 4, 4)$  et  $n = 3$ .

*Démonstration.* 1. Les sommets  $a_0, a_1, b_1$  et  $c_1$  doivent tous avoir des couleurs différentes. Par conséquent, un des sommets parmi  $a_2, b_2$  et  $c_2$  ne peut pas être coloré.

2. Les sommets  $a_0, a_1, b_1$  et  $c_1$  doivent tous avoir des couleurs différentes. Par conséquent, un des sommets parmi  $a_4, b_4$  et  $c_4$  ne peut pas être coloré.

3. Si  $a_0$  est coloré 1, les trois sommets  $a_1, b_1$  et  $c_1$  doivent tous avoir des couleurs 4 différentes. Par conséquent, un des sommets parmi  $a_2$  et  $a_3$  ne peut pas être coloré. Si  $a_0$  est coloré 4, alors les sommets  $a_1, b_1$  et  $c_1$  doivent être colorés par la couleur 1. Par conséquent, un des sommets parmi  $a_2, b_2$  et  $c_2$  ne peut pas être coloré.  $\square$

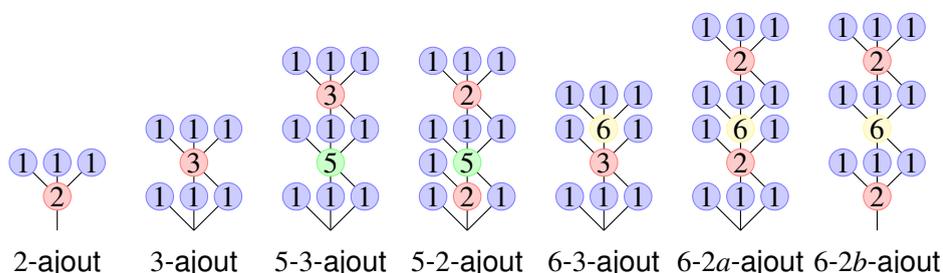


FIGURE 3.10 – Les différents gadgets utilisés dans les propositions 3.10 et 3.11.

**Observation 3.3.** *Le graphe  $P_{16}$  n'est pas  $(1, 3, 5, 8)$ -colorable.*

Dans la proposition suivante on subdivisera trois fois une arête  $uv$ . Dans une arête subdivisée trois fois, le sommet central subdivisé est le sommet qui n'est ni voisin de  $u$ , ni voisin de  $v$ .

1. Faire un *2-ajout* sur un sommet  $u$  est une opération qui consiste à rajouter un sommet  $w_u$  et un ensemble stable de sommets  $I$  et à rajouter l'arête  $uw_u$ , ainsi qu'un certain nombre d'arêtes entre  $\{u, w_u\}$  et les sommets de  $I$ . Faire un *3-ajout* sur un sommet  $u$  est une opération qui consiste à rajouter un sommet  $w_u$  et un ensemble stable de sommets  $I$  et à rajouter un certain nombre d'arêtes entre  $\{u, w_u\}$  et les sommets de  $I$ .
2. Faire un *5-3-ajout* sur un sommet  $u$  est une opération qui consiste à rajouter deux sommets  $w_u$  et  $w'_u$  et deux ensembles stables de sommets  $I$  et  $I'$  et à rajouter un certain nombre d'arêtes entre  $\{u, w_u\}$  et les sommets de  $I$ , entre  $\{w_u, w'_u\}$  et les sommets de  $I'$  et éventuellement l'arête  $w_u w'_u$ .
3. Faire un *5-2-ajout* sur un sommet  $u$  est une opération qui consiste à rajouter trois sommets  $w_u, w'_u$  et  $w''_u$  et trois ensembles stables de sommets  $I, I'$  et  $I''$  et à rajouter les arêtes  $uw_u$  et  $w_u w'_u$ , ainsi qu'un certain nombre d'arêtes entre  $\{u, w_u\}$  et les sommets de  $I$ , entre  $\{u, w'_u\}$  et les sommets de  $I'$  et entre  $\{w'_u, w''_u\}$  et les sommets de  $I''$ .
4. Faire un *6-3-ajout* sur un sommet  $u$  est une opération qui consiste à rajouter deux sommets  $w_u$  et  $w'_u$  et deux ensembles stables de sommets  $I$  et  $I'$  et à rajouter l'arête  $w_u w'_u$ , ainsi qu'un certain nombre d'arêtes entre  $\{u, w_u\}$  et les sommets de  $I$  et entre  $\{w_u, w'_u\}$  et les sommets de  $I'$ .
5. Faire un *6-2a-ajout* sur un sommet  $u$  est une opération qui consiste à rajouter trois sommets  $w_u, w'_u$  et  $w''_u$  et trois ensembles stables de sommets  $I, I'$  et  $I''$  et à rajouter l'arête  $w_u w'_u$ , ainsi qu'un certain nombre d'arêtes entre  $\{u, w_u\}$  et les sommets de  $I$ , entre  $\{w_u, w'_u\}$  et les sommets de  $I'$  et entre  $\{w'_u, w''_u\}$  et les sommets de  $I''$ .
6. Faire un *6-2b-ajout* sur un sommet  $u$  est une opération qui consiste à rajouter trois sommets  $w_u, w'_u$  et  $w''_u$  et trois ensembles stables de sommets  $I, I'$  et  $I''$  et à rajouter l'arête  $uw_u$  ainsi qu'un certain nombre d'arêtes entre  $\{u, w_u\}$  et les sommets de  $I$ , entre  $\{w_u, w'_u\}$  et les sommets de  $I'$  et entre  $\{w'_u, w''_u\}$  et les sommets de  $I''$  et éventuellement l'arête  $w'_u, w''_u$ .

Ces opérations sont représentées dans la figure 3.10.

**Théorème 3.10.** *Soit  $S = (1, 3, k, k')$ , avec  $5 \leq k \leq 7$  et  $6 \leq k' \leq 7$ . Un graphe  $G$  est  $S$ -colorable si et seulement si une des trois conditions suivantes est vraie :*

1.  $\beta(G) \leq 3$  ;
2.  $\beta(G) = 4$  et il existe deux sommets  $u$  et  $v$  dans la couverture de sommets de taille 4 tels que  $d(u, v) \geq 4$  ;
3. le graphe  $G$  est obtenu à partir d'un multi-graphe biparti  $G' = (A, B)$  où chaque arête est subdivisée trois fois et où on rajoute des gadgets de la façon suivante :
  - (a) on peut rajouter des feuilles sur les sommets centraux subdivisés et faire des 3-ajouts ou rajouter des feuilles sur les sommets issus de  $A$  ou  $B$  ;
  - (b) si  $k \leq 6$ , on peut faire un 6-3-ajout sur les sommets issus de  $A$ . Si  $k' \leq 6$ , on peut faire un 6-3-ajout sur les sommets issus de  $A$  et  $B$  ;
  - (c) si  $k = 5$ , plutôt que de faire un 6-3-ajout sur les sommets issus de  $A$ , on peut faire un 5-3-ajout ou plusieurs 6-3-ajouts.

*Démonstration.* Soit  $G$  un graphe vérifiant l'une des trois conditions. Si la première condition est vérifiée par  $G$ , alors on colore les sommets de la couverture de sommets par les couleurs 3,  $k$  et  $k'$  et le reste des sommets par la couleur 1. Si la deuxième condition est vérifiée par  $G$ , alors on colore  $u$  et  $v$  par la couleur 3, les autres sommets de la couverture de sommets par les couleurs  $k$  et  $k'$  et le reste des sommets par la couleur 1. Si la troisième condition est vérifiée par  $G$  on colore les sommets centraux subdivisés par la couleur 3, les sommets issus de  $A$  par la couleur  $k'$ , les sommets issus de  $B$  par la couleur  $k$ , les sommets issus des gadgets comme dans la figure 3.10 et les sommets restants par la couleur 1. En conclusion, si une des trois conditions est vérifiée par  $G$ , alors  $G$  est  $S$ -colorable.

On suppose que  $G$  est  $S$ -colorable. Si aucun sommet n'est coloré par la couleur  $k$  ou  $k'$ , alors la première condition est vérifiée par  $G$ . Soient  $u$  et  $v$  deux sommets tels que la couleur de  $u$  est  $k$  et la couleur de  $v$  est  $k'$ . Si  $d(u, v) = 1$ , alors la première ou la deuxième condition est vérifiée par  $G$ . Si  $d(u, v) = 2$  et si  $k > 5$ , alors la première ou la deuxième condition est vérifiée par  $G$ . Si  $d(u, v) = 2$  et  $k = 5$ , alors  $u$  est obtenu par 5-3-ajout sur le sommet  $v$  et le sommet  $v$  est à distance 4 des autres sommets colorés  $k$ . Si  $d(u, v) = 3$  et  $k = 7$ , alors la première ou la deuxième condition est vérifiée par  $G$ . Si  $d(u, v) = 3$  et  $k \leq 6$  ( $k' = 6$ , respectivement), alors  $u$  ( $u$  ou  $v$ , respectivement) est obtenu par 6-3-ajout sur  $v$  ( $u$  ou  $v$ , respectivement) et le sommet  $v$  ( $u$  ou  $v$ , respectivement) est à distance 4 des autres sommets colorés  $k$  ( $k$  ou  $k'$ , respectivement). Si  $d(u, v) = 5$ , alors la coloration ne peut pas être étendue à une coloration du graphe entier. Dans tous les cas, soit  $u$  ou  $v$  est dans un gadget, soit ils sont à distance 4. On obtient donc que la troisième condition est vérifiée par  $G$ .  $\square$

**Théorème 3.11.** Soit  $S = (1, 2, k, k')$ , avec  $5 \leq k \leq 7$  et  $6 \leq k' \leq 7$ . Un graphe  $G$  est  $S$ -colorable si et seulement si une des trois conditions suivantes est vraie :

1.  $\beta(G) \leq 3$  ;
2.  $\beta(G) = 4$  et il existe deux sommets  $u$  et  $v$  dans la couverture de sommets de taille 4 tels que  $d(u, v) \geq 3$  ;
3. le graphe  $G$  est obtenu à partir d'un multi-graphe biparti  $G' = (A, B)$  où chaque arête est subdivisée trois fois et où on rajoute des gadgets de la façon suivante :
  - (a) si  $k = 6$  et  $k' = 7$ , on peut fusionner deux sommets adjacents subdivisés issus d'une arête  $uv$  où  $u$  est de degré 1 avec  $u$  issu de  $B$  ;
  - (b) si  $k = 6$  et  $k' = 6$ , on peut prendre un ensemble stable d'arêtes de  $E(G')$  et fusionner deux sommets adjacents subdivisés issus de ces arêtes ;

- (c) si  $k = 5$  et  $k' = 6$ , on peut prendre un ensemble d'arêtes de  $E(G')$  tel qu'aucune paire d'arête n'a d'extrémité en commun dans  $B$  et fusionner deux sommets adjacents subdivisés issus de ces arêtes ;
- (d) on peut rajouter des feuilles sur les sommets centraux subdivisés ou si deux sommets ont été fusionnés sur un des deux sommets subdivisés. Notons que l'on ne doit jamais rajouter des feuilles sur deux sommets à distance 2. On peut faire des 3-ajouts, un 2-ajout ou rajouter des feuilles sur les sommets issus de  $A$  ou  $B$  ;
- (e) si  $k \leq 6$ , on peut faire un 6-3-ajout, un 6-2a-ajout ou un 6-2b-ajout sur les sommets issus de  $A$ . Si  $k' \leq 6$ , on peut faire un 6-3-ajout, un 6-2a-ajout ou un 6-2b-ajout sur les sommets issus de  $A$  et  $B$  de telle façon qu'un 6-2b-ajout n'a pas été fait sur un sommet voisin d'un sommet auquel on a rajouté des feuilles ;
- (f) si  $k = 5$ , plutôt que de faire un 6-3-ajout ou un 6-2a-ajout sur les sommets issus de  $A$ , on peut faire un 5-3-ajout ou plusieurs 6-3-ajouts et 6-2a-ajouts et plutôt que de faire un 6-2b-ajout sur les sommets issus de  $A$ , on peut faire un 5-2-ajout.

*Démonstration.* Soit  $G$  un graphe vérifiant l'une des trois conditions. Si la première condition est vérifiée par  $G$ , alors on colore les sommets de la couverture de sommets par les couleurs 3,  $k$  et  $k'$  et le reste des sommets par la couleur 1. Si la deuxième condition est vérifiée par  $G$ , alors on colore  $u$  et  $v$  par la couleur 2, les autres sommets de la couverture de sommets par les couleurs  $k$  et  $k'$  et le reste des sommets par la couleur 1. Si la troisième condition est vérifiée par  $G$  on colore les sommets centraux subdivisés par la couleur 2 (si deux sommets subdivisés ont été fusionnés, on colore par 2 l'éventuel sommet où des feuilles ont été rajoutées sur lui), les sommets issus de  $A$  par la couleur  $k'$ , les sommets issus de  $B$  par la couleur  $k$ , les sommets issus des gadgets comme dans la figure 3.10 et les sommets restants par la couleur 1. En conclusion, si une des trois conditions est vérifiée par  $G$  alors  $G$  est  $S$ -colorable.

On suppose que  $G$  est  $S$ -colorable. Si aucun sommet n'est coloré par la couleur  $k$  ou  $k'$ , alors la première condition est vérifiée par  $G$ . Soient  $u$  et  $v$  deux sommets tels que la couleur de  $u$  est  $k$  et la couleur de  $v$  est  $k'$ . Si  $d(u, v) = 1$ , alors la première ou la deuxième condition est vérifiée par  $G$ . Si  $d(u, v) = 2$  et si  $k > 5$ , alors la première ou la deuxième condition est vérifiée par  $G$ . Si  $d(u, v) = 2$  et  $k = 5$ , alors  $u$  est obtenu par 5-3-ajout ou 5-2-ajout sur le sommet  $v$ , et le sommet  $v$  est à distance 3 ou 4 des autres sommets colorés  $k$ . Si  $d(u, v) = 3$  et  $k = 7$ , alors la première ou la deuxième condition est vérifiée par  $G$ . Si  $d(u, v) = 3$  et  $k \leq 6$  ( $k' = 6$ , respectivement), alors  $u$  ( $u$  ou  $v$ , respectivement) est obtenu par 6-3-ajout, par 6-2a-ajout ou par 6-2b-ajout sur  $v$  ( $u$  ou  $v$ , respectivement) et le sommet  $v$  ( $u$  ou  $v$ , respectivement) est à distance 4 ou 3 des autres sommets colorés  $k$  ( $k$  ou  $k'$ , respectivement). Si  $d(u, v) = 5$ , alors la coloration ne peut pas être étendue à une coloration du graphe entier. Dans tous les cas, soit  $u$  ou  $v$  est dans un gadget, soit ils sont à distance 3 ou 4. On obtient donc que la troisième condition est vérifiée par  $G$ .  $\square$

**Corollaire** <sup>3.22</sup>. *Le problème  $S$ -COL est résoluble en temps polynomial pour  $S = (2, 3, 3, 3)$ ,  $S = (2, 2, 3, 4)$ ,  $S = (1, 4, 4, 4)$  ou  $S = (1, 3, k, k')$ , avec  $5 \leq k \leq 7$  et  $6 \leq k' \leq 7$ .*

Dans la preuve du théorème suivant, on utilise la construction du lemme 3.7. La propriété d'existence d'une coloration avec les propriétés spécifiques d'un transmetteur et d'un

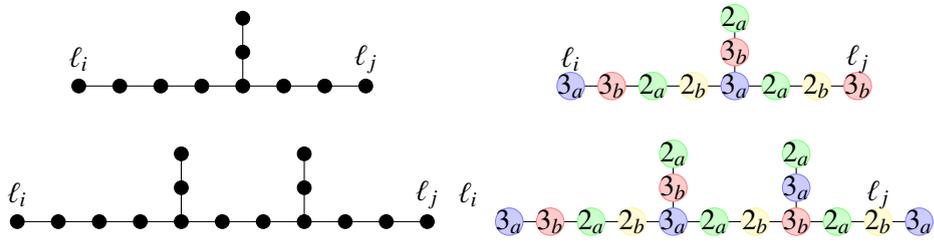


FIGURE 3.11 – Les graphes  $L'$  (en bas) et  $J'$  (en haut) accompagnés d'une  $(2, 2, 3, 3)$ -coloration de  $L'$  et  $J'$  (sur la droite).

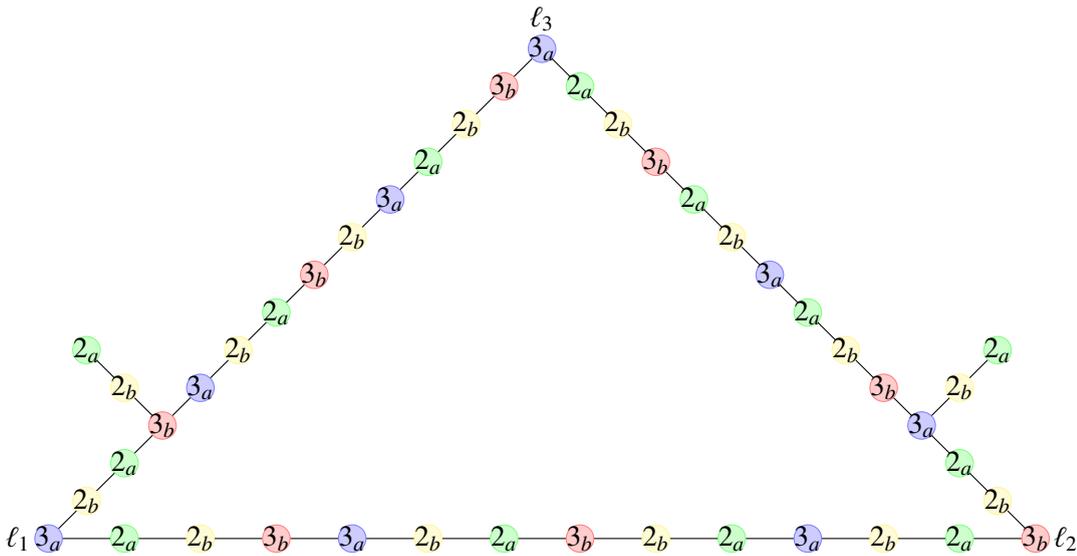


FIGURE 3.12 – Le graphe  $H'$  et une  $(2, 2, 3, 3)$ -coloration de  $H'$ .

antitranstmetteur ne sera pas respectée. Malgré tout, à l'aide des différentes  $(2, 2, 3, 3)$ -colorations données au cours de la preuve, le lecteur pourra se convaincre de l'existence d'une coloration du graphe.

**Théorème 3.12.** *Le problème  $(2, 2, 3, 3)$ -COL est NP-complet.*

*Démonstration.* Soient  $L'$  et  $J'$  les graphes subcubiques de la figure 3.11 avec comme connecteurs les sommets  $\ell_i$  et  $\ell_j$ . Remarquons que si un sommet est de degré 3, alors il ne peut être coloré  $2_a$  ou  $2_b$ , car dans le graphe construit (cf lemme 3.7) il sera dans un  $Y_2$  induit et la coloration ne peut être étendue à une  $(2, 2, 3, 3)$ -coloration de  $Y_2$ . Par conséquent, tous les connecteurs doivent être colorés  $3_a$  ou  $3_b$ , car dans le graphe construit (cf lemme 3.7) ces sommets seront dans un  $Y_2$  induit. Observons que les sommets de degré 3 dans  $L'$  et  $J'$  doivent aussi être colorés  $3_a$  ou  $3_b$ . Si deux sommets  $u$  et  $v$  sont soit de degré 3, soit un connecteur et  $d(u, v) = 4$ , alors  $u$  et  $v$  ne peuvent qu'être colorés de la même couleur 3, car sinon les sommets dans le chemin entre  $u$  et  $v$  ne pourraient être colorés. Si les deux connecteurs de  $L'$  ont des couleurs différentes, alors les sommets centraux de degré 3 ne peuvent pas être colorés. Donc, dans chaque  $(2, 2, 3, 3)$ -coloration de  $L'$ , les connecteurs doivent avoir la même couleur. Une  $(2, 2, 3, 3)$ -coloration de  $L'$  existe, celle-ci est représentée par la figure 3.11.

Si deux connecteurs de  $J'$  ont la même couleur 3, alors le sommet central de degré 3 ne peut pas être coloré. Donc, dans chaque  $(2, 2, 3, 3)$ -coloration de  $J'$ , les connecteurs ne peuvent pas avoir la même couleur. Une  $(2, 2, 3, 3)$ -coloration de  $J'$  existe, celle-ci est représentée par la figure 3.11. Pour conclure,  $L'$  est un 3-3-transmetteur et  $J'$  est un 3-3-antitransmetteur.

Soit  $H'$  le graphe subcubique de la figure 3.12 avec comme connecteurs les sommets  $\ell_1$ ,  $\ell_2$  et  $\ell_3$ . Le graphe  $H'$  contient trois connecteurs et deux sommets de degré 3. Ces sommets doivent être colorés  $3_a$  ou  $3_b$ . Supposons que  $\ell_1$ ,  $\ell_2$  et  $\ell_3$  ont la même couleur  $3_a$ . Observons que les sommets de degré 3 peuvent seulement avoir la couleur  $3_b$ . Soit  $u$  un sommet à distance 3 de  $\ell_1$ . Supposons que  $u$  est coloré par la couleur  $3_b$ . La coloration ne peut pas être étendue aux sommets dans le chemin entre  $u$  et le sommet de degré 3 à distance la plus petite de  $u$  car aucun de ces sommets ne peut être coloré  $3_b$  et  $P_6$  n'est pas  $(2, 2, 3)$ -colorable. Par conséquent, les sommets à distance 3 de  $\ell_1$  ne peuvent pas être colorés  $3_b$ . Un sommet parmi  $u$  et les sommets dans le chemin le plus court entre  $u$  et  $\ell_1$  doivent être colorés  $3_b$ . Il n'existe pas de  $(2, 2, 3, 3)$ -coloration de  $Y_2$  où un sommet à distance 2 du sommet de degré 3 est coloré par une couleur 3. Donc, la seule solution est de colorer un voisin de  $\ell_3$  par la couleur  $3_b$ . Ainsi, les deux voisins de  $\ell_3$  ne peuvent pas être colorés, ne pouvant pas être colorés tous les deux  $3_b$ . Par conséquent, dans toute  $(2, 2, 3, 3)$ -coloration de  $H'$ , les connecteurs ne peuvent pas avoir la même couleur.

La figure 3.12 présente une  $(2, 2, 3, 3)$ -coloration pour  $\ell_1$  et  $\ell_3$  avec la même couleur (pour les autres cas, la  $(2, 2, 3, 3)$ -coloration est similaire). En conclusion,  $H'$  est un 3-3-simulateur de clause.  $\square$

**Théorème 3.13.** *Soient  $S$  et  $S'$  deux listes croissantes de quatre entiers. Le problème  $S$ -COL est résoluble en temps polynomial si  $S \leq S'$ , avec  $S' = (2, 3, 3, 3)$ ,  $S' = (2, 2, 3, 4)$ ,  $S' = (1, 4, 4, 4)$  ou  $S' = (1, 2, 5, 6)$ , et NP-complet sinon.*

*Démonstration.* En utilisant les propositions 3.15, 3.21, 3.3, 3.10 et 3.11, on obtient que  $S$ -COL est résoluble en temps polynomial dans les cas énoncés. En utilisant les propositions 3.16, 3.18 et 3.20, on obtient que  $S$ -COL est NP-complet dans les autres cas.  $\square$

## CONCLUSION ET PROBLÈMES OUVERTS

Suite aux différents résultats obtenus sur la complexité du problème  $S$ -COL, nous énumérons deux conjectures, avec la conjecture 3.1 plus forte que la conjecture 3.2.

**Conjecture 3.1.** *Il existe une dichotomie entre problèmes NP-complets et résolubles en temps polynomial parmi toutes les instances de  $S$ -COL où la liste  $S$  est fixée.*

**Conjecture 3.2.** *Soit  $S$  une liste croissante d'entiers. Au moins une des trois propriétés suivantes est vraie à propos de  $S$ -COL :*

1. *Tous les graphes  $S$ -colorables sont obtenus à partir d'un multi-graphe biparti par subdivision des arêtes et ajout des gadgets sur certains sommets ;*
2. *L'ensemble des graphes  $S$ -colorables a une largeur arborescente bornée ;*
3. *Le problème  $S$ -COL est NP-complet.*

Nous présentons, pour clore ce chapitre, une liste de problèmes ouverts à propos de la complexité du problème  $S$ -COL.

Dans ce chapitre, on a déterminé diverses dichotomies et conjecturé une dichotomie parmi toutes les instances de  $S$ -COL. Une des premières questions à se poser pour prouver la conjecture peut être de montrer que celle-ci est vraie pour d'autres tailles de listes, voire d'autres classes de graphes.

i) *Y-a-t-il une dichotomie pour  $|S| = 5; 6; \dots$  ?*

Une des secondes questions à se poser est celle de déterminer la classe des listes  $S$  telle que  $S$ -COL est NP-complet ou quelle est la classe des listes  $S$  telle que tout graphe est un «dérivé» de biparti.

ii) *Peut-on caractériser les listes  $S$  telles que tous les graphes  $S$ -colorables sont obtenus à partir d'un multi-graphe biparti en subdivisant des arêtes et en ajoutant des gadgets sur certains sommets ?*

Pour finir, il serait intéressant de savoir pour quelles listes  $S$ , on a  $P_\infty$  et  $Y_\infty$   $S$ -colorables. Cette question reste une question ouverte.

iii) *Pour quelles listes  $S$ , les graphes  $P_\infty$  et  $Y_\infty$  sont-ils  $S$ -colorables ?*

# S-COLORATION DES GRILLES

## INTRODUCTION

Dans ce chapitre, on étudie les propriétés de partitionnement des packings dans les différentes grilles ; ces propriétés vont nous donner des bornes pour le nombre  $S$ -chromatique. Ce chapitre comprend quatre parties. Dans la première partie, on calcule les  $k$ -aires dans les différentes grilles, les  $k$ -aires nous permettent de déduire des mineurs pour le nombre  $S$ -chromatique. Dans la deuxième partie, on décrit des propriétés de partitionnement des packings en plusieurs packings. Dans la troisième partie, on utilise les résultats de la deuxième partie pour déduire des listes croissantes d'entiers telles que les différentes grilles soient  $S$ -chromatiques ou  $S$ -colorables. Dans la dernière partie, on utilise les résultats des précédentes parties pour déduire des bornes sur le nombre  $S_{(d,n)}$ -chromatique des différentes grilles, pour  $d$  et  $n$  des entiers.

**Définition 4.1.** Soit  $\mathbb{Z}^2$  la grille carrée, soit  $\mathcal{T}$  la grille triangulaire, soit  $\mathcal{H}$  la grille hexagonale et soit  $\mathcal{R}$  la grille du roi. On définit ces grilles comme suit :

1.  $V(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2$  et  $E(\mathbb{Z}^2) = \{(x, y)(x', y') \in (\mathbb{Z}^2)^2 \mid (|x - x'| = 1 \wedge y = y') \vee (|y - y'| = 1 \wedge x = x')\}$  ;
2.  $V(\mathcal{H}) = \mathbb{Z}^2$  et  $E(\mathcal{H}) = \{(x, y)(x', y') \in (\mathbb{Z}^2)^2 \mid (|x - x'| = 1 \wedge y = y') \vee (|y - y'| = 1 \wedge x = x' \wedge y > y' \wedge y \equiv 0 \pmod{2})\}$  ;
3.  $V(\mathcal{T}) = \mathbb{Z}^2$  et  $E(\mathcal{T}) = \{(x, y)(x', y') \in (\mathbb{Z}^2)^2 \mid (|x - x'| = 1 \wedge y = y') \vee (|y - y'| = 1 \wedge x = x') \vee (|x - x'| = 1 \wedge |y - y'| = 1 \wedge y - y' + x - x' = 0)\}$  ;
4.  $V(\mathcal{R}) = \mathbb{Z}^2$  et  $E(\mathcal{R}) = \{(x, y)(x', y') \in (\mathbb{Z}^2)^2 \mid |x - x'| \leq 1 \wedge |y - y'| \leq 1\}$  ;

Le nombre de *packing* des grilles est un sujet de recherche important dans le domaine de la coloration de *packing*. Le nombre de *packing* de la grille hexagonale a été déterminé par Fiala *et al.* [34] (pour le majorant) et Korže et Vesel [56] (pour le minorant).

**Proposition 4.1** ([34], [56]).  $\chi_\rho(\mathcal{H}) = 7$ .

Par contre, personne n'a pu déterminer le nombre de *packing* de la grille carrée. Malgré tout, Soukal et Holub [77] ont trouvé un majorant égal à 17 et Ekstein *et al.* [28] ont trouvé un minorant égal à 12.

**Proposition 4.2** ([28],[77]).  $12 \leq \chi_\rho(\mathbb{Z}^2) \leq 17$ .

Pour ce qui concerne la grille triangulaire (et donc du roi), Finbow et Rall [35] ont prouvé que cette grille n'admet pas de coloration de *packing*.

**Proposition 4.3** ([35]).  $\chi_\rho(\mathcal{T}) = \infty$ .

De plus, il a été montré que certains produits cartésiens de grilles et chemins n'admettent pas de coloration de *packing*.

**Proposition 4.4** ([34]). *Pour les grilles suivantes, on a :*

1.  $\chi_\rho(\mathbb{Z}^2 \square P_2) = \infty$  ;
2.  $\chi_\rho(\mathcal{H} \square P_6) = \infty$ .

Jacko et Jendrol [52], Fertin *et al.* [32] et Ševčíková [86] ont travaillé sur la coloration à distance  $d$  de  $\mathcal{H}$ ,  $\mathbb{Z}^2$  et  $\mathcal{T}$  respectivement. Les propositions suivantes proviennent de leurs travaux et déterminent le nombre chromatique à distance  $d$  de ces grilles.

**Proposition 4.5** ([52]). *Soit  $d$  un entier strictement positif. On a :*

$$\chi^d(\mathcal{H}) = \begin{cases} \lceil \frac{3}{8}(d+1)^2 \rceil & \text{si } d \text{ est impair ;} \\ \lceil \frac{8}{8}(d+4/3)^2 \rceil & \text{si } d \text{ est pair.} \end{cases}$$

**Proposition 4.6** ([32]). *Soit  $d$  un entier strictement positif. On a :*

$$\chi^d(\mathbb{Z}^2) = \begin{cases} \frac{1}{2}(d+1)^2 & \text{si } d \text{ est impair ;} \\ \frac{1}{2}((d+1)^2 + 1) & \text{si } d \text{ est pair.} \end{cases}$$

**Proposition 4.7** ([86]). *Soit  $d$  un entier strictement positif. On a :*

$$\chi^d(\mathcal{T}) = \left\lceil \frac{3}{4}(d+1)^2 \right\rceil.$$

Soit  $n$  un entier strictement positif. On définit  $\mathbb{Z}^n$  comme le produit cartésien de  $n$  graphes  $P_\infty$ . On a les résultats suivants :

**Proposition 4.8** ([32]). *Soit  $n$  un entier strictement positif. On a :*

$$\chi^2(\mathbb{Z}^n) = 2n + 1.$$

**Proposition 4.9** ([71]). *Soit  $n$  un entier tel que  $n \geq 2$ . On a :*

$$\chi^3(\mathbb{Z}^n) = 4n.$$

La série  $S_{(d,n)}$  (définition 1.20) est une série importante. Elle sera le sujet principal d'une partie dans ce chapitre.

**Exemple 4.1.** *On a  $S_{(1,1)} = (1, 2, 3, \dots)$  et  $S_{(2,3)} = (2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, \dots)$ .*

Cette série est une série non-bornée pour laquelle la question de savoir si oui ou non, une  $S$ -coloration des grilles existe est une question qui nous semble aussi importante que pour la coloration de *packing*. Le paramètre  $d$  nous permet de décider à partir de quel entier la série commence et le paramètre  $n$  permet de contrôler la croissance de la série.

Les résultats suivants sont des rappels sur les distances dans les différentes grilles. Ces propriétés serviront pour monter qu'un ensemble de sommets est un *packing*.

**Définition 4.2** ([52]). Soit  $v = (a, b)$  un sommet de la grille hexagonale. Le type de  $v$  est

$$\tau(v) = a + b + 1 \pmod{2}.$$

Comme  $\mathcal{H} = V_0 \cup V_1$  est un graphe biparti, le type d'un sommet  $v$  correspond à l'indice de l'ensemble  $V_i$  auquel  $v$  appartient.

**Proposition 4.10** ([52]). Soient  $v_1 = (a_1, b_1)$ ,  $v_2 = (a_2, b_2)$  deux sommets de la grille hexagonale, avec  $b_1 \geq b_2$ . La distance entre  $v_1$  et  $v_2$  est donné par

$$d(v_1, v_2) = \begin{cases} |a_1 - a_2| + |b_1 - b_2| & \text{si } |a_1 - a_2| \geq |b_1 - b_2|; \\ 2|b_1 - b_2| - \tau(v_1) + \tau(v_2) & \text{si } |a_1 - a_2| < |b_1 - b_2|. \end{cases}$$

**Observation 4.1.** Soient  $v_1 = (a_1, b_1)$  et  $v_2 = (a_2, b_2)$  deux sommets de la grille carrée. La distance entre  $v_1$  et  $v_2$  est donnée par

$$d(v_1, v_2) = |a_1 - a_2| + |b_1 - b_2|.$$

**Observation 4.2.** Soient  $v_1 = (a_1, b_1)$  et  $v_2 = (a_2, b_2)$  deux sommets de la grille triangulaire. La distance entre  $v_1$  et  $v_2$  est donnée par

$$d(v_1, v_2) = \begin{cases} \max(|a_1 - a_2|, |b_1 - b_2|) & \text{si } ((a_1 \geq a_2) \wedge (b_1 \leq b_2)) \vee ((a_1 \leq a_2) \wedge (b_1 \geq b_2)); \\ |a_1 - a_2| + |b_1 - b_2| & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Observation 4.3.** Soient  $v_1 = (a_1, b_1)$  et  $v_2 = (a_2, b_2)$  deux sommets de la grille du roi. La distance entre  $v_1$  et  $v_2$  est donnée par

$$d(v_1, v_2) = \max(|a_1 - a_2|, |b_1 - b_2|)$$

## 4.1/ DENSITÉ D'UN PACKING DANS LES DIFFÉRENTES GRILLES

Dans cette partie on calculera les  $k$ -aires (définitions 1.39 et 1.40) dans les différentes grilles. Les  $k$ -aires permettent de déduire des minorants sur le nombre  $S$ -chromatique pour une série  $S$  fixée, à l'aide du corollaire 1.3. Les deux définitions de  $k$ -aires coïncident pour la grille carée.

### 4.1.1/ GRILLE HEXAGONALE

**Proposition 4.11.** Soit  $\mathcal{H}$  la grille hexagonale, soit  $x$  un sommet de  $V(\mathcal{H})$  et soit  $n$  un entier positif. On a :

1.  $|\partial B_n(x)| = 3n$  ;
2.  $|B_n(x)| = \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1$ .

*Démonstration.* 1. Comme l'ensemble  $\partial B_n(x)$  contient trois sommets de plus que  $\partial B_{n-1}(x)$ , alors  $|\partial B_n(x)| = 3n$ .

2. Le graphe  $\mathcal{H}$  est 3-régulier. On a donc  $|B_1(x)| = 4$ . On suppose que l'hypothèse est vraie pour  $n$ . On a  $|B_{n+1}(x)| = |B_n(x)| + |\partial B_{n+1}(x)| = \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1 + 3(n+1) = (\frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1) + (\frac{3}{2}n + \frac{3}{2}) + 1 = \frac{3}{2}(n+1)^2 + \frac{3}{2}(n+1) + 1$ .  $\square$

**Proposition 4.12.** Soit  $\mathcal{H}$  la grille hexagonale et soit  $k$  un entier positif. On a :

1.  $A(2k) = \frac{3}{2}k^2 + \frac{3}{2}k + 1$  ;
2.  $A(4k + 1) = 6k^2 + 6k + 2$  ;
3.  $A(4k + 3) = 6(k + 1)^2$ .

*Démonstration.* 1. La première propriété est une simple conséquence de la proposition 4.11.

2. Si  $n = 4k + 1$ , alors la proposition 4.11 donne  $|B_{2k}(x)| = \frac{3}{2}(2k)^2 + \frac{3}{2}(2k) + 1 = 6k^2 + 3k + 1$ . On doit distinguer deux sortes de sommets :  $3k$  sommets ont deux voisins dans  $B_{2k}(x)$  et  $|\partial B_{2k+1}(x)| - 3k = 3k + 3$  sommets ont un voisin dans  $B_{2k}(x)$ . On a donc  $|A(4k + 1)| = 6k^2 + 3k + 1 + \frac{6k}{3} + \frac{3k+3}{3} = 6k^2 + 6k + 2$ .

3. Si  $n = 4k + 3$ , alors la proposition 4.11 donne  $|B_{2k+1}(x)| = \frac{3}{2}(2k + 1)^2 + \frac{3}{2}(2k + 1) + 1 = 6k^2 + 9k + 4$ . On doit distinguer deux sortes de sommets :  $3k$  sommets ont deux voisins dans  $B_{2k+2}(x)$  et  $|\partial B_{2k+2}(x)| - 3k = 3k + 6$  sommets ont un voisin dans  $B_{2k}(x)$ . On a donc  $|A(4k + 3)| = 6k^2 + 9k + 4 + \frac{6k}{3} + \frac{3k+6}{3} = 6k^2 + 12k + 6 = 6(k + 1)^2$ .  $\square$

Ce résultat apparait aussi dans l'article de Goddard et Xu [47].

#### 4.1.2/ GRILLE CARRÉE

**Proposition 4.13.** Soit  $\mathbb{Z}^2$  la grille carrée, soit  $x$  un sommet dans  $V(\mathbb{Z}^2)$  et soit  $n$  un entier positif. On a :

1.  $|\partial B_n(x)| = 4n$  ;
2.  $|B_n(x)| = 2n^2 + 2n + 1$ .

*Démonstration.* 1. Comme l'ensemble  $\partial B_n(x)$  contient quatre sommets de plus que  $\partial B_{n-1}(x)$ , alors  $|\partial B_n(x)| = 4n$ .

2. Le graphe  $\mathbb{Z}^2$  est 4-régulier. On a donc  $|B_1(x)| = 5$ . On suppose que l'hypothèse est vraie pour  $n$ . On a  $|B_{n+1}(x)| = |B_n(x)| + |\partial B_{n+1}(x)| = 2n^2 + 2n + 1 + 4n + 4 = 2(n + 1)^2 + 6n + 5 - 4n - 2 = 2(n + 1)^2 + 2(n + 1) + 1$ .  $\square$

**Proposition 4.14.** Soit  $\mathbb{Z}^2$  la grille carrée et soit  $k$  un entier positif. On a :

1.  $A(2k) = 2k^2 + 2k + 1$  ;
2.  $A(2k + 1) = 2(k + 1)^2$ .

*Démonstration.* 1. La première propriété est une simple conséquence de la proposition 4.13.

2. Si  $n = 2k + 1$ , alors la proposition 4.13 donne  $|B_k(x)| = k^2 + 2k + 1$ . On doit distinguer deux sortes de sommets :  $4k$  sommets ont deux voisins dans  $B_k(x)$  et quatre sommets ont un voisin dans  $B_k(x)$ . On a donc  $|A(2k + 1)| = 2k^2 + 2k + 1 + 2\frac{4k}{4} + \frac{4}{4} = 2k^2 + 4k + 2 = 2(k + 1)^2$ .  $\square$

Ce résultat apparait aussi implicitement dans l'article de Fiala *et al.* [34].

### 4.1.3/ GRILLE TRIANGULAIRE

**Proposition 4.15.** *Soit  $\mathcal{T}$  la grille triangulaire, soit  $x$  un sommet dans  $\mathcal{T}$  et soit  $n$  un entier positif. On a :*

1.  $|\partial B_n(x)| = 6n$  ;
2.  $|B_n(x)| = 3n^2 + 3n + 1$ .

*Démonstration.* 1. Comme l'ensemble  $\partial B_n(x)$  contient six sommets de plus que  $\partial B_{n-1}(x)$ , alors  $|\partial B_n(x)| = 6n$ .

2. Le graphe  $\mathcal{T}$  est 6-régulier. On a donc  $|B_1(x)| = 7$ . On suppose que l'hypothèse est vraie pour  $n$ . On a  $|B_{n+1}(x)| = |B_n(x)| + |\partial B_{n+1}(x)| = 3n^2 + 3n + 1 + 6n + 6 = 3(n^2 + 1) + 3n + 1 + 6 - 3 = 3(n^2 + 1) + 3(n + 1) + 1$ .  $\square$

On utilise dans la proposition suivante, notre version améliorée de la définition de  $k$ -aire.

**Proposition 4.16.** *Soit  $\mathcal{T}$  la grille triangulaire et soit  $k$  un entier positif. On a :*

1.  $A(2k) = 3k^2 + 3k + 1$  ;
2.  $A(2k + 1) = 3(k + 1)^2$ .

*Démonstration.* 1. La première propriété est une simple conséquence de la proposition 4.15.

2. Si  $n = 2k + 1$ , alors la proposition 4.15 donne  $|B_k(x)| = 3k^2 + 3k + 1$ . Pour tout sommet  $y$  dans  $\partial B_{k+1}(x)$ , on doit distinguer deux sortes de sommets :  $6k$  sommets peuvent être à l'intersection de deux boules et six sommets peuvent être à l'intersection de trois boules. On a donc  $|A(2k + 1)| = 3k^2 + 3k + 1 + \frac{6k}{2} + \frac{6}{3} = 3k^2 + 6k + 3 = 3(k + 1)^2$ .  $\square$

### 4.1.4/ GRILLE DU ROI

**Proposition 4.17.** *Soit  $\mathcal{R}$  la grille du roi, soit  $x$  un sommet dans  $\mathcal{R}$  et soit  $n$  un entier positif. On a :*

1.  $|\partial B_n(x)| = 8n$  ;
2.  $|B_n(x)| = 4n^2 + 4n + 1$ .

*Démonstration.* 1. Comme l'ensemble  $\partial B_n(x)$  contient huit sommets de plus que  $\partial B_{n-1}(x)$ , alors  $|\partial B_n(x)| = 8n$ .

2. Le graphe  $\mathcal{R}$  est 8-régulier. On a donc  $|B_1(x)| = 9$ . On suppose que l'hypothèse est vraie pour  $n$ . On a  $|B_{n+1}(x)| = |B_n(x)| + |\partial B_{n+1}(x)| = 4n^2 + 4n + 1 + 8n + 8 = 4(n^2 + 1) + 4n + 5 = 4(n^2 + 1) + 4(n + 1) + 1$ .  $\square$

On utilise dans la proposition suivante, notre version améliorée de la définition de  $k$ -aire.

**Proposition 4.18.** *Soit  $\mathcal{R}$  la grille du roi et soit  $n$  un entier positif. On a*

$$A(n) = (n + 1)^2$$

*Démonstration.* Si  $n$  est pair, alors la propriété est une simple conséquence de la proposition 4.17.

Si  $n = 2k + 1$ , alors la proposition 4.17 donne  $|B_k(x)| = 4k^2 + 4k + 1 = (2k + 1)^2$ . Pour tout sommet  $y$  dans  $\partial B_{k+1}(x)$ , on doit distinguer deux sortes de sommets :  $8k + 4$  sommets peuvent être à l'intersection de deux boules et quatre sommets peuvent être à l'intersection de quatre boules. On a donc  $|A(2k + 1)| = 4k^2 + 4k + 1 + \frac{8k+4}{2} + \frac{4}{4} = 4k^2 + 8k + 4 = 4(k + 1)^2$ .  $\square$

## 4.2/ PARTITION D'UN PACKING DANS $\mathcal{H}$ , $\mathbb{Z}^2$ , $\mathcal{T}$ ET $\mathcal{R}$

Dans cette partie, on décrit diverses propriétés de partitionnement de packings qui nous serviront pour déterminer des listes  $S$  pour lesquelles ces grilles sont  $S$ -colorables.

### 4.2.1/ PARTITION D'UN PACKING DANS $\mathcal{H}$

La grille hexagonale peut être vue comme un sous-graphe de la grille carrée (voir la figure 4.1). Dans la grille hexagonale, on peut choisir un sommet comme origine et tous les autres sommets peuvent être désignés par leurs coordonnées Cartésiennes. Dans toutes nos descriptions des packings dans  $\mathcal{H}$ , notre origine  $(0, 0)$  va être un sommet dans le packing que nous voulons décrire tel qu'il n'y a pas d'arête entre  $(0, 0)$  et  $(0, 1)$ . Grâce à la proposition 4.10, on peut vérifier qu'un ensemble est un packing. Ces vérifications sont laissées aux lecteurs dans les propositions, seul un exemple est donné pour que le lecteur puisse se convaincre de lui-même qu'un ensemble est un packing.

Soit  $k$  un entier positif. Soit  $X_{4k+3} = \{(3(k+1)x + 6(k+1)y, (k+1)x) \mid x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}\}$ , un  $(4k+3)$ -packing dans  $\mathcal{H}$ . On note que  $d(X_{4k+3}) = \frac{1}{A(2k+1)} = \frac{1}{6(k+1)^2}$ .

**Proposition 4.19.** *Soit  $k$  un entier positif. Il existe  $6(k+1)^2$   $(4k+3)$ -packings dans  $\mathcal{H}$  qui forment une partition de  $\mathcal{H}$ .*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{F} = \{(i, j) \mid i \in \{0, \dots, 6k+1\}, j \in \{0, \dots, k\}\}$  un ensemble de  $6(k+1)^2$  vecteurs. On fait  $6(k+1)^2$  copies de l'ensemble  $X_{4k+3}$  et on translate chacun des ensembles par un vecteur de  $\mathcal{F}$  pour obtenir une partition de  $\mathcal{H}$ .  $\square$

**Proposition 4.20.** *Soit  $m$  un entier strictement positif et soit  $k$  un entier positif. Il existe  $m^2$   $(4(m(k+1)-1)+3)$ -packings de densité maximum qui forment une partition de  $X_{4k+3}$ .*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{F} = \{3(k+1)i + 6(k+1)j, (k+1)i \mid i \in \{0, \dots, m-1\}, j \in \{0, \dots, m-1\}\}$ . On fait  $m^2$  copies de l'ensemble  $X_{4(m(k+1)-1)+3}$  et on translate chacun des ensembles par un vecteur de  $\mathcal{F}$  pour obtenir une partition de  $\mathcal{H}$ .  $\square$

### 4.2.2/ PARTITION D'UN 2-PACKING DANS $\mathcal{H}$

Soit  $X_2$  le 2-packing maximum dans  $\mathcal{H}$  représenté par la figure 4.1. On note que  $d(X_2) = \frac{1}{A(2)} = \frac{1}{4}$  et que quatre 2-packings forment une partition de  $\mathcal{H}$  si on translate l'ensemble  $X_2$  trois fois.

Notons que l'on illustre nos packings avec une figure dans cette sous-section mais ce ne sera pas le cas après ; on utilisera les coordonnées Cartésiennes pour décrire

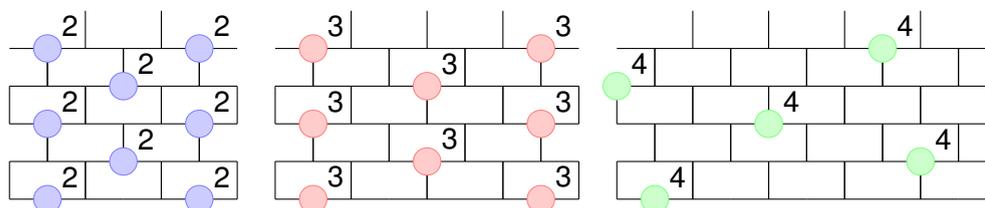


FIGURE 4.1 – Les ensembles  $X_2$  (2-packing),  $X_3$  (3-packing) et  $X_4$  (4-packing) dans  $\mathcal{H}$ .

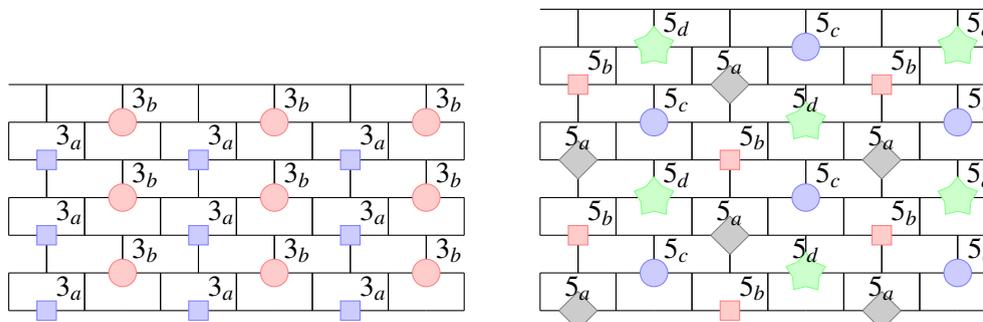


FIGURE 4.2 – Deux 3-packings formant une partition de  $X_2$  (sur la gauche) et quatre 5-packings formant une partition de  $X_2$  (sur la droite).

un packing. Par exemple, l'ensemble  $X_2$  de la figure 4.1 est l'ensemble de sommets :  $X_2 = \{(2x + 4y, x) \mid x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}\}$ .

**Exemple 4.2.** L'ensemble  $X_2$  de la figure 4.1 est un 2-packing dans  $\mathcal{H}$ .

En effet, soient  $x$  et  $y$  des entiers. On a  $d((2(x+1)+4y, x+1), (2x+4y, x)) = |2x+4y+2-2x-4y| + |x+1-x| = 3 > 2$  et  $d((2x+4(y+1), x), (2x+4y, x)) = 4 > 2$ . Soient  $i$  et  $j$  des entiers. On a  $d((2(x+i)+4(y+j), x+i), (2x+4y, x)) \geq \min(d((2(x+1)+4y, x+1), (2x+4y, x)), d((2x+4(y+1), x), (2x+4y, x))) = 3$ . On en conclut que  $X_2$  est un 2-packing.

**Proposition 4.21.** Soient  $k$  et  $m$  des entiers strictement positifs. Il existe :

1.  $k^2 (3k - 1)$ -packings qui forment une partition de  $X_2$  ;
2.  $2k^2 (4k - 1)$ -packings qui forment une partition de  $X_2$  ;
3. deux  $(6k - 1)$ -packings qui forment une partition d'un  $(4k - 1)$ -packing du Point 2 ;
4.  $m^2 (3mk - 1)$ -packings qui forment une partition d'un  $(3k - 1)$ -packing du Point 1 ;
5.  $m^2 (4mk - 1)$ -packings qui forment une partition d'un  $(4k - 1)$ -packing du Point 2.

*Démonstration.* 1. Soit  $A_k$  le  $(3k - 1)$ -packing défini par  $A_k = \{(2kx + 4ky, kx) \mid x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}\}$ . Soit  $\mathcal{F} = \{(2i + 4j, i) \mid i, j \in \{0, \dots, k - 1\}\}$  un ensemble de  $k^2$  vecteurs. On fait  $k^2$  copies de l'ensemble  $A_k$  et on translate chacun des ensembles par un vecteur de  $\mathcal{F}$  pour obtenir une partition de  $X_2$ .

2. Soit  $B_k$  le  $(4k - 1)$ -packing défini par  $B_k = \{(4kx, 2ky) \mid x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}\}$ . Soit  $\mathcal{F} = \{(4i + 2a, 2j + a) \mid i, j \in \{0, \dots, k - 1\}, a \in \{0, 1\}\}$  un ensemble de  $2k^2$  vecteurs. On fait  $2k^2$  copies de

l'ensemble  $B_k$  et on translate chacun des ensembles par un vecteur de  $\mathcal{F}$  pour obtenir une partition de  $X_2$ .

3. On note que  $A_{2k} \subseteq B_k$  et que si  $A'_{2k}$  est l'ensemble  $A_{2k}$  translaté par le vecteur  $(0, 2k)$ , alors  $A'_{2k} \cup A_{2k} = B_k$ .

4. On note que  $A_{mk} \subseteq A_k$ . Soit  $\mathcal{F} = \{(2mki + 4mkj, mki) | i, j \in \{0, \dots, m-1\}\}$  un ensemble de  $m^2$  vecteurs. On fait  $m^2$  copies de l'ensemble  $A_{mk}$  et on translate chacun des ensembles par un vecteur de  $\mathcal{F}$  pour obtenir une partition de  $A_k$ .

5. On note que  $B_{mk} \subseteq B_k$ . Soit  $\mathcal{F} = \{(4mki, 2mkj) | i, j \in \{0, \dots, m-1\}\}$  un ensemble de  $m^2$  vecteurs. On fait  $m^2$  copies de l'ensemble  $B_{mk}$  et on translate chacun des ensembles par un vecteur de  $\mathcal{F}$  pour obtenir une partition de  $B_k$ .  $\square$

La figure 4.2 illustre une partition de  $X_2$  en utilisant les Points 1 et 2, pour  $k = 1$ . Dans les sections restantes, les preuves de décomposition d'un ensemble  $X$  vont être résumées par un tableau et les preuves des propriétés similaires à celle des Points 3, 4 et 5 vont être laissées au lecteur.

#### 4.2.3/ PARTITION D'UN 3-PACKING DANS $\mathcal{H}$

Soit  $X_3 = \{(3x + 6y, x) | x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}\}$  le 3-packing maximum dans  $\mathcal{H}$  représenté par la figure 4.1. On Note que  $d(X_3) = \frac{1}{A(3)} = \frac{1}{6}$  et que six 3-packings forment une partition de  $\mathcal{H}$  si on translate  $X_3$  cinq fois.

**Proposition 4.22.** *Soient  $k$  et  $m$  des entiers strictement positifs. Il existe :*

1.  $k^2$   $p_{1,k}$ -packings,  $p_{1,k} = (4k - 1)$ , qui forment une partition de  $X_3$  ;
2.  $3k^2$   $p_{2,k}$ -packings,  $p_{2,k} = (6k - 1)$ , qui forment une partition de  $X_3$  ;
3.  $8k^2$   $p_{3,k}$ -packings,  $p_{3,k} = (10k - 1)$ , qui forment une partition de  $X_3$  ;
4.  $24k^2$   $p_{4,k}$ -packings,  $p_{4,k} = (18k - 1)$ , qui forment une partition de  $X_3$  ;
5.  $m^2$   $p_{j,mk}$ -packings qui forment une partition d'un  $p_{j,k}$ -packing du Point  $j$ , pour  $j \in \{1, \dots, 4\}$  ;
6. trois  $(12k - 1)$ -packings qui forment une partition d'un  $(6k - 1)$ -packing du Point 2 ;
7. deux  $(16k - 1)$ -packings qui forment une partition d'un  $(10k - 1)$ -packing du Point 3 ;
8. quatre 17-packings et six 23-packings qui forment une partition de tout 5-packing du Point 2.

*Démonstration.* Soit  $X$  un packing. La preuve est résumée dans le tableau 4.1 ; ce tableau contient : pour quel entier  $i$  on décompose  $X$  en  $i$ -packing (colonne 1), le nombre de  $i$ -packings demandés pour former une partition de  $X$  (colonne 2), la description d'un  $i$ -packing avec des coordonnées Cartésiennes (les variables  $x$  et  $y$  sont des entiers) (colonne 3) et l'ensemble de vecteurs de translation (colonne 4). On suppose que l'on fait des copies du  $i$ -packing et que l'on translate chacune des copies par l'un de ces vecteurs. On obtient donc une partition de  $X$  en  $i$ -packings.

$i$	Nombre de $i$ -packings	Description d'un $i$ -packing	Vecteurs de translation
$4k - 1$	$k^2$	$\{3kx + 6ky, kx\}$	$(3i + 6j, i)$ $i, j \in \{0, \dots, k - 1\}$
$6k - 1$	$3k^2$	$\{3kx + 6ky, 3kx\}$	$(3i + 6j, 3i + 2a)$ $i, j \in \{0, \dots, k - 1\}, a \in \{0, 1, 2\}$
$10k - 1$	$8k^2$	$\{6kx + 12ky, 4kx\}$	$(6i + 12j + 3b, 4i + 2a + b)$ $i, j \in \{0, \dots, k - 1\},$ $a \in \{0, 1, 2, 3\}, b \in \{0, 1\}$
$18k - 1$	$24k^2$	$\{12kx + 24ky, 6kx\}$	$(12i + 24j + 3b, 6i + 2a + b)$ $i, j \in \{0, \dots, k - 1\},$ $a \in \{0, \dots, 5\}, b \in \{0, 1, 2, 3\}$

TABLE 4.1 – Décomposition de  $X_3$  dans  $\mathcal{H}$  en  $i$ -packings.

□

#### 4.2.4/ PARTITION D'UN 4-PACKING DANS $\mathcal{H}$

Soit  $X_4 = \{(3x + 7y, 2x + y) \mid x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}\}$  le 4-packing dans  $\mathcal{H}$  représenté par la figure 4.1. On note que  $d(X_4) = \frac{1}{11}$  et que  $\frac{1}{A(4)} = \frac{1}{10}$ . Cependant, un 4-packing de densité  $\frac{1}{10}$  n'existe pas [52]. On note également que onze 4-packings forment une partition de  $\mathcal{H}$  si on translate  $X_4$  dix fois.

**Proposition 4.23.** *Soient  $k$  et  $m$  des entiers strictement positifs. Il existe :*

1.  $k^2$   $p_{1,k}$ -packings,  $p_{1,k} = (5k - 1)$ , qui forment une partition de  $X_4$  ;
2.  $2k^2$   $p_{2,k}$ -packings,  $p_{2,k} = (6k - 1)$ , qui forment une partition de  $X_4$  ;
3.  $3k^2$   $p_{3,k}$ -packings,  $p_{3,k} = (8k - 1)$ , qui forment une partition de  $X_4$  ;
4.  $6k^2$   $p_{4,k}$ -packings,  $p_{4,k} = (11k - 1)$ , qui forment une partition de  $X_4$  ;
5.  $m^2$   $p_{j,mk}$ -packings qui forment une partition d'un  $p_{j,k}$ -packing du Point  $j$ , pour  $j \in \{1, \dots, 4\}$  ;
6. deux  $(10k - 1)$ -packings qui forment une partition d'un  $(6k - 1)$ -packing du Point 2 ;
7. deux  $(6k - 1)$ -packings qui forment une partition d'un  $(5k - 1)$ -packing du Point 1 ;
8. trois  $(15k - 1)$ -packings qui forment une partition d'un  $(8k - 1)$ -packing du Point 2 ;
9. trois  $(8k - 1)$ -packings qui forment une partition d'un  $(5k - 1)$ -packing du Point 1.

*Démonstration.* Se référer au tableau 4.2.

□

#### 4.2.5/ PARTITION D'UN PACKING DANS $\mathbb{Z}^2$

Dans la grille carrée, on peut choisir un sommet comme origine et désigner tous les autres sommets par leurs coordonnées Cartésiennes. Dans toutes nos représentations, le sommet  $(0, 0)$  va être dans le packing que nous voulons décrire.

$i$	Nombre de $i$ -packings	Description d'un $i$ -packing	Vecteurs de translation
$5k - 1$	$k^2$	$\{3kx - ky, 2kx + 3ky\}$	$(3i - j, 2i + 3j)$ $i, j \in \{0, \dots, k - 1\}$
$6k - 1$	$2k^2$	$\{7kx - ky, kx + 3ky\}$	$(7i + 3a - j, i + 2a + 3j)$ $i, j \in \{0, \dots, k - 1\}, a \in \{0, 1\}$
$8k - 1$	$3k^2$	$\{7kx + 2ky, kx + 5ky\}$	$(7i + 2j + 3a, i + 5j + 2a)$ $i, j \in \{0, \dots, k - 1\}, a \in \{0, 1, 2\}$
$11k - 1$	$6k^2$	$\{-2kx + 11ky, 6kx\}$	$(-2i + 11j + 7a, 6i + a)$ $i, j \in \{0, \dots, k - 1\}, a \in \{0, \dots, 5\}$

TABLE 4.2 – Décomposition de  $X_4$  dans  $\mathcal{H}$  en  $i$ -packings.

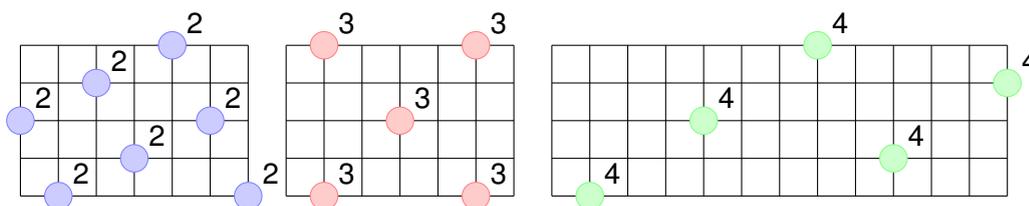


FIGURE 4.3 – Les ensembles  $X_2$  (2-packing),  $X_3$  (3-packing) et  $X_4$  (4-packing) dans  $\mathbb{Z}^2$ .

Soit  $k$  un entier positif. Soit  $X_{2k+1} = \{(k+1)x + 2(k+1)y, (k+1)x\} \mid x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}\}$ , un  $(2k+1)$ -packing dans  $\mathbb{Z}^2$ . On note que  $d(X_{2k+1}) = \frac{1}{A(2k+1)} = \frac{1}{2(k+1)^2}$ .

**Proposition 4.24.** *Soit  $k$  un entier positif. Il existe  $2(k+1)^2$   $(2k+1)$ -packings qui forment une partition de  $\mathbb{Z}^2$ .*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{F} = \{(i, j) \mid i \in \{0, \dots, 2k+1\}, j \in \{0, \dots, k\}\}$  un ensemble de  $2(k+1)^2$  vecteurs. On fait  $2(k+1)^2$  copies de l'ensemble  $X_{2k+1}$  et on translate chacun des ensembles par un vecteur de  $\mathcal{F}$  pour obtenir une partition de  $\mathbb{Z}^2$ .  $\square$

**Proposition 4.25.** *Soit  $m$  un entier strictement positif et soit  $k$  un entier positif. Il existe  $m^2$   $(2(m(k+1)-1)+1)$ -packings de densité maximum qui forment une partition de  $X_{2k+1}$ .*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{F} = \{(k+1)i + 2(k+1)j, (k+1)i\} \mid i \in \{0, \dots, m-1\}, j \in \{0, \dots, m-1\}\}$ . On fait  $m^2$  copies de l'ensemble  $X_{2(m(k+1)-1)+1}$  et on translate chacun des ensembles par un vecteur de  $\mathcal{F}$  pour obtenir une partition de  $\mathbb{Z}^2$ .  $\square$

#### 4.2.6/ PARTITION D'UN 2-PACKING DANS $\mathbb{Z}^2$

Soit  $X_2 = \{(2x + y, x + 3y) \mid x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}\}$  le 2-packing maximum dans  $\mathbb{Z}^2$  représenté par la figure 4.3. On note que  $d(X_2) = \frac{1}{A(2)} = \frac{1}{5}$  et que cinq 2-packings forment une partition de  $\mathbb{Z}^2$  si on translate  $X_2$  quatre fois.

**Exemple 4.3.** *L'ensemble  $X_2$  de la figure 4.3 est un 2-packing dans  $\mathbb{Z}^2$ .*

En effet, soient  $x$  et  $y$  des entiers. On a, par l'observation 4.1,  $d((2(x+1)+y, x+1+3y), (2x+y, x+3y)) = |2x+y+2-2x-y| + |x+1+3y-x-3y| = 3 > 2$  et  $d((2x+y+1, x-1+3(y+1)), (2x+y, x+3y)) = 4 > 2$ . On en conclut que  $X_2$  est un 2-packing.

**Proposition 4.26.** *Soient  $k$  et  $m$  des entiers strictement positifs. Il existe :*

1.  $k^2 (3k - 1)$ -packings qui forment une partition de  $X_2$  ;
2.  $2k^2 (4k - 1)$ -packings qui forment une partition de  $X_2$  ;
3. deux  $(6k - 1)$ -packings qui forment une partition d'un  $(4k - 1)$ -packing du Point 2 ;
4. deux  $(4k - 1)$ -packings qui forment une partition d'un  $(3k - 1)$ -packing du Point 1 ;
5.  $m^2 (3mk - 1)$ -packings qui forment une partition d'un  $(3k - 1)$ -packing du Point 1 ;
6.  $m^2 (4mk - 1)$ -packings qui forment une partition d'un  $(4k - 1)$ -packing du Point 2.

*Démonstration.* Voir le tableau 4.3. □

	$i$	Nombre de $i$ -packings	Description d'un $i$ -packing	Vecteurs de translation
$X_2$	$3k - 1$	$k^2$	$\{2kx - ky, kx + 2ky\}$	$(2i - j, i + 2j)$ $i, j \in \{0, \dots, k - 1\}$
	$4k - 1$	$2k^2$	$\{4kx + ky, 2kx + 3ky\}$	$(4i + 2a + j, 2i + 2a + 3j)$ $i, j \in \{0, \dots, k - 1\}, a \in \{0, 1\}$
$X_3$	$4k - 1$	$k^2$	$\{2kx + 4ky, 2kx\}$	$(2i + 4j, 2i)$ $i, j \in \{0, \dots, k - 1\}$
$X_4$	$5k - 1$	$k^2$	$\{3kx - 2ky, 2kx + 3ky\}$	$(3i - 2j, 2i + 3j)$ $i, j \in \{0, \dots, k - 1\}$
	$6k - 1$	$2k^2$	$\{6kx + ky, 4kx + 5ky\}$	$(6i + j + 3a, 4i + 5j + 2a)$ $i, j \in \{0, \dots, k - 1\}, a \in \{0, 1\}$

TABLE 4.3 – Décomposition de  $X_2, X_3$  et  $X_4$  dans  $\mathbb{Z}^2$  en  $i$ -packings.

#### 4.2.7/ PARTITION D'UN 3-PACKING DANS $\mathbb{Z}^2$

Soit  $X_3 = \{(2x + 4y, 2y) \mid x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}\}$  un 3-packing maximum dans  $\mathbb{Z}^2$  représenté par la figure 4.3. On note que  $d(X_3) = \frac{1}{A(3)} = \frac{1}{8}$  et que huit 3-packings forment une partition de  $\mathbb{Z}^2$  si on translate  $X_3$  sept fois.

**Proposition 4.27.** *Soient  $k$  et  $m$  des entiers strictement positifs. Il existe*

1.  $k^2 (4k - 1)$ -packings qui forment une partition de  $X_3$  ;
2.  $m^2 (4mk - 1)$ -packings qui forment une partition d'un  $(4k - 1)$ -packing du Point 1.

*Démonstration.* Voir le tableau 4.3. □

### 4.2.8/ PARTITION D'UN 4-PACKING DANS $\mathbb{Z}^2$

Soit  $X_4 = \{(3x + 8y, 2x + y) \mid x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}\}$  le 4-packing maximum dans  $\mathbb{Z}^2$  représenté par la figure 4.3. On note que  $d(X_4) = \frac{1}{A(4)} = \frac{1}{13}$  et que treize 4-packings forment une partition de  $\mathbb{Z}^2$  si on translate  $X_4$  douze fois.

**Proposition 4.28.** *Soient  $k$  et  $m$  des entiers strictement positifs. Il existe :*

1.  $k^2 (5k - 1)$ -packings qui forment une partition de  $X_4$  ;
2.  $2k^2 (6k - 1)$ -packings qui forment une partition de  $X_4$  ;
3. deux  $(10k - 1)$ -packings qui forment une partition d'un  $(6k - 1)$ -packing du Point 2 ;
4. deux  $(6k - 1)$ -packings qui forment une partition d'un  $(5k - 1)$ -packing du Point 1 ;
5.  $m^2 (5mk - 1)$ -packings qui forment une partition d'un  $(5k - 1)$ -packing du Point 1 ;
6.  $m^2 (6mk - 1)$ -packings qui forment une partition d'un  $(6k - 1)$ -packing du Point 2.

*Démonstration.* Voir le tableau 4.3. □

### 4.2.9/ PARTITION D'UN PACKING DANS $\mathcal{T}$

La grille carrée peut être vue comme un sous-graphe de la grille triangulaire. En fait, la figure 4.4 représente la grille triangulaire comme un sur-graphe (un graphe qui contient un autre en tant que sous-graphe) de la grille carrée. Donc, nous pouvons choisir un sommet comme l'origine et tous les autres sommets peuvent être désignés par leurs coordonnées Cartésiennes. Dans toutes nos représentations, l'origine  $(0, 0)$  sera un sommet adjacent à  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(0, -1)$ ,  $(-1, 1)$  et  $(1, -1)$ .

Soit  $k$  un entier positif. Soit  $X_{2k+1} = \{((k+1)x + 3(k+1)y, (k+1)x) \mid x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}\}$ , un  $(2k+1)$ -packing dans  $\mathcal{T}$ . On note que  $d(X_{2k+1}) = \frac{1}{A(2k+1)} = \frac{1}{3(k+1)^2}$ .

**Proposition 4.29.** *Soit  $k$  un entier positif. Il existe  $3(k+1)^2 (2k+1)$ -packings qui forment une partition de  $\mathcal{T}$ .*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{F} = \{(i, j) \mid i \in \{0, \dots, 3k+2\}, j \in \{0, \dots, k\}\}$  un ensemble de  $3(k+1)^2$  vecteurs. On fait  $3(k+1)^2$  copies de l'ensemble  $X_{2k+1}$  et on translate chacun des ensembles par un vecteur de  $\mathcal{F}$  pour obtenir une partition de  $\mathcal{T}$ . □

**Proposition 4.30.** *Soit  $m$  un entier strictement positif et soit  $k$  un entier positif. Il existe  $m^2 (2(m(k+1)-1)+1)$ -packings de densité maximum qui forment une partition de  $X_{2k+1}$ .*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{F} = \{(k+1)i + 3(k+1)j, (k+1)i \mid i \in \{0, \dots, m-1\}, j \in \{0, \dots, m-1\}\}$ . On fait  $m^2$  copies de l'ensemble  $X_{2(m(k+1)-1)+1}$  et on translate chacun des ensembles par un vecteur de  $\mathcal{F}$  pour obtenir une partition de  $\mathcal{T}$ . □

### 4.2.10/ PARTITION D'UN ENSEMBLE STABLE DANS $\mathcal{T}$

Soit  $X_1 = \{(x+3y, x) \mid x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}\}$  l'ensemble stable (l'unique 1-packing) dans  $\mathcal{T}$  représenté par la figure 4.4. On note que  $d(X_1) = \frac{1}{A(1)} = \frac{1}{3}$  et que trois ensembles stables forment une partition de  $\mathcal{T}$  si on translate  $X_1$  deux fois.

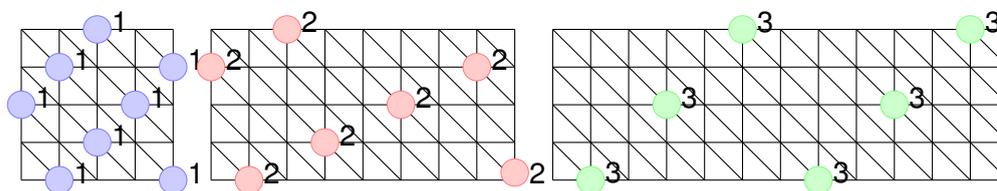


FIGURE 4.4 – Les ensembles  $X_1$  (1-packing),  $X_2$  (2-packing) et  $X_3$  (3-packing) dans  $\mathcal{T}$ .

**Exemple 4.4.** L'ensemble  $X_1$  de la figure 4.4 est un ensemble stable dans  $\mathcal{T}$ .

En effet, soient  $x$  et  $y$  des entiers. On a, par l'observation 4.2,  $d((x+1+3y, x+1), (x+3y, x)) = |x+1+3y-x-3y|+|x+1-x| = 2 > 1$  et  $d((x+3(y+1), x), (x+3y, x)) = 3 > 1$ . On en conclut que  $X_1$  est ensemble stable.

**Proposition 4.31.** Soient  $k$  et  $m$  des entiers strictement positifs. Il existe :

1.  $k^2(2k-1)$ -packings qui forment une partition de  $X_1$  ;
2.  $3k^2(3k-1)$ -packings qui forment une partition de  $X_1$  ;
3. trois  $(3k-1)$ -packings qui forment une partition d'un  $(2k-1)$ -packing du Point 1 ;
4.  $m^2(2mk-1)$ -packings qui forment une partition d'un  $(2k-1)$ -packing du Point 1 ;
5.  $m^2(3mk-1)$ -packings qui forment une partition d'un  $(3k-1)$ -packing du Point 2.

*Démonstration.* Voir le tableau 4.4. □

	$i$	Nombre de $i$ -packings	Description d'un $i$ -packing	Vecteurs de translation
$X_1$	$2k-1$	$k^2$	$\{kx+3ky, kx\}$	$(i+3j, i)$ $i, j \in \{0, \dots, k-1\}$
	$3k-1$	$3k^2$	$\{3kx+3ky, 3kx\}$	$(3i+3j+a, 3i+a)$ $i, j \in \{0, \dots, k-1\}, a \in \{0, 1, 2\}$
$X_2$	$3k-1$	$k^2$	$\{2kx+7ky, kx\}$	$(2i+7j, i)$ $i, j \in \{0, \dots, k-1\}$
$X_3$	$4k-1$	$k^2$	$\{2kx+6ky, 2kx\}$	$(2i+6j, 2i)$ $i, j \in \{0, \dots, k-1\}$
	$6k-1$	$3k^2$	$\{6kx+6ky, 6kx\}$	$(6i+6j+2a, 6i+2a)$ $i, j \in \{0, \dots, k-1\}, a \in \{0, 1, 2\}$

TABLE 4.4 – Décomposition de  $X_1, X_2$  et  $X_3$  dans  $\mathcal{T}$  en  $i$ -packings.

#### 4.2.11/ PARTITION D'UN 2-PACKING DANS $\mathcal{T}$

Soit  $X_2 = \{(2x-y, x+3y) \mid x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}\}$  le 2-packing maximum dans  $\mathcal{T}$  représenté par la figure 4.4. On note que  $d(X_2) = \frac{1}{A(2)} = \frac{1}{7}$  et que sept 2-packings forment une partition de  $\mathcal{T}$  si on translate  $X_2$  six fois.

**Proposition 4.32.** Soient  $k$  et  $m$  des entiers strictement positifs. Il existe :

1.  $k^2 (3k - 1)$ -packings qui forment une partition de  $X_2$  ;
2.  $m^2 (3mk - 1)$ -packings qui forment une partition d'un  $(3k - 1)$ -packing du Point 1.

*Démonstration.* Voir le tableau 4.4. □

#### 4.2.12/ PARTITION D'UN 3-PACKING DANS $\mathcal{T}$

Soit  $X_3 = \{(2x + 6y, 2x) \mid x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}\}$  le 3-packing maximum dans  $\mathcal{T}$  représenté par la figure 4.4. On note que  $d(X_3) = \frac{1}{A(3)} = \frac{1}{12}$  et que douze 3-packings forment une partition de  $\mathcal{T}$  si on translate  $X_3$  onze fois.

**Proposition 4.33.** *Soient  $k$  et  $m$  des entiers strictement positifs. Il existe :*

1.  $k^2 (4k - 1)$ -packings qui forment une partition de  $X_3$  ;
2.  $3k^2 (6k - 1)$ -packings qui forment une partition de  $X_3$  ;
3. trois  $(12k - 1)$ -packings qui forment une partition d'un  $(6k - 1)$ -packing du Point 1 ;
4.  $m^2 (4mk - 1)$ -packings qui forment une partition d'un  $(4k - 1)$ -packing du Point 1 ;
5.  $m^2 (6mk - 1)$ -packings qui forment une partition d'un  $(6k - 1)$ -packing du Point 2.

*Démonstration.* Voir le tableau 4.4. □

#### 4.2.13/ PARTITION D'UN PACKING DANS $\mathcal{R}$

Soit  $k$  un entier strictement positif. Soit  $X_k = \{((k + 1)x + (k + 1)y, (k + 1)x) \mid x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}\}$ , un  $k$ -packing dans  $\mathcal{R}$ . On note que  $d(X_k) = \frac{1}{A(k)} = \frac{1}{(k+1)^2}$ .

**Proposition 4.34.** *Soit  $k$  un entier strictement positif. Il existe  $(k + 1)^2$   $k$ -packings qui forment une partition de  $\mathcal{R}$ .*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{F} = \{(i, j) \mid i \in \{0, \dots, k\}, j \in \{0, \dots, k\}\}$  un ensemble de  $(k + 1)^2$  vecteurs. On fait  $(k + 1)^2$  copies de l'ensemble  $X_k$  et on translate chacun des ensembles par un vecteur de  $\mathcal{F}$  pour obtenir une partition de  $\mathcal{R}$ . □

**Proposition 4.35.** *Soient  $k$  et  $m$  des entiers strictement positifs. Il existe  $m^2 (m(k + 1) - 1)$ -packings de densité maximum qui forment une partition de  $X_k$ .*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{F} = \{(k + 1)i + (k + 1)j, (k + 1)i \mid i \in \{0, \dots, m - 1\}, j \in \{0, \dots, m - 1\}\}$ . On fait  $m^2$  copies de l'ensemble  $X_{m(k+1)-1}$  et on translate chacun des ensembles par un vecteur de  $\mathcal{F}$  pour obtenir une partition de  $\mathcal{R}$ . □

### 4.3/ $S$ -COLORATION DES GRILLES

Dans cette partie, on définit des listes de façon récursive pour exploiter nos résultats de partitionnement de packing.

**Définition 4.3.** *Soient  $S$  et  $S'$  deux listes croissantes d'entiers. On définit la liste  $S + S'$  comme la liste croissante d'entiers de taille  $|S| + |S'|$  qui contient tous les éléments de  $S$  et de  $S'$ .*

### 4.3.1/ GRILLE HEXAGONALE

**Définition 4.4.** On définit un ensemble de listes  $\mathcal{S}_=(\mathcal{H})$  comme suit :

- $S_i \in \mathcal{S}_=(\mathcal{H})$ , avec  $|S_i| = 6(i+1)^2$  et  $s_1 = s_{6(i+1)^2} = 4i+3$ ,  $i \in \mathbb{Z}$  ;
- si  $S \in \mathcal{S}_=(\mathcal{H})$ , alors  $S_{4k+3 \rightarrow m^2, 4(m(k+1)-1)+3} \in \mathcal{S}_=(\mathcal{H})$ , pour tout entier strictement positif  $m$  et tout entier positif  $k$ .

**Proposition 4.36.** i) Toute liste  $S \in \mathcal{S}_=(\mathcal{H})$  est étroite sur  $\mathcal{H}$ .

ii) Si  $S \in \mathcal{S}_=(\mathcal{H})$ , alors le graphe  $\mathcal{H}$  est  $S$ -chromatique.

*Démonstration.* Les listes sont bien étroites sur  $\mathcal{H}$  car  $S_i$  est une liste étroite sur  $\mathcal{H}$  et  $\frac{m^2}{A(4(m(k+1)-1)+3)} = \frac{1}{A(4k+3)}$ . La grille  $\mathcal{H}$  est bien  $S_i$ -colorable, grâce à la proposition 4.19. Il existe bien un moyen de subdiviser un  $(4k+3)$ -packing en  $m^2(4(m(k+1)-1)+3)$ -packings, selon la proposition 4.20.  $\square$

**Exemple 4.5.** La grille hexagonale est donc  $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$ -chromatique et  $(3, 3, 3, 3, 3, 7, 7, 7, 7)$ -chromatique.

**Définition 4.5.** Soient  $n$  et  $n'$  deux entiers positifs tels que  $n + n' = 4$ . On définit deux ensembles de listes  $\mathcal{S}_2(\mathcal{H})$  et  $\mathcal{S}'_2(\mathcal{H})$  comme suit :

- on a  $S_{2^n} \in \mathcal{S}_2(\mathcal{H})$  ;
- si  $S \in \mathcal{S}_2(\mathcal{H})$ , alors  $S_{2 \rightarrow k^2, 3k-1} \in \mathcal{S}_2(\mathcal{H})$ , pour tout entier strictement positif  $k$  ;
- si  $S \in \mathcal{S}_2(\mathcal{H})$ , alors  $S_{3k-1 \rightarrow m^2, 3mk-1} \in \mathcal{S}_2(\mathcal{H})$ , pour tous entiers strictement positifs  $m$  et  $k$  ;
- on a  $S_{2^{n'}} \in \mathcal{S}'_2(\mathcal{H})$  ;
- si  $S \in \mathcal{S}'_2(\mathcal{H})$ , alors  $S_{2 \rightarrow 2k^2, 4k-1} \in \mathcal{S}'_2(\mathcal{H})$ , pour tout entier strictement positif  $k$  ;
- si  $S \in \mathcal{S}'_2(\mathcal{H})$ , alors  $S_{4k-1 \rightarrow m^2, 4mk-1} \in \mathcal{S}'_2(\mathcal{H})$ , pour tous entiers strictement positifs  $m$  et  $k$ .

**Proposition 4.37.** Si  $S \in \mathcal{S}_2(\mathcal{H})$  et  $S' \in \mathcal{S}'_2(\mathcal{H})$ , alors le graphe  $\mathcal{H}$  est  $(S + S')$ -colorable.

*Démonstration.* Il existe bien un moyen de subdiviser les packings selon la proposition 4.21.  $\square$

**Exemple 4.6.** La grille hexagonale est donc  $(2, 2, 2, 5, 5, 5, 5)$ -colorable et  $(2, 2, 5, 5, 5, 5, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7)$ -colorable.

**Définition 4.6.** Soient  $n_1, n_2, n_3$  et  $n_4$  quatre entiers positifs tels que  $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 6$ . On définit quatre ensembles de listes  $\mathcal{S}_3^1(\mathcal{H})$ ,  $\mathcal{S}_3^2(\mathcal{H})$ ,  $\mathcal{S}_3^3(\mathcal{H})$  et  $\mathcal{S}_3^4(\mathcal{H})$  comme suit :

- on a  $S_{3^{n_1}} \in \mathcal{S}_3^1(\mathcal{H})$  ;
- si  $S \in \mathcal{S}_3^1(\mathcal{H})$ , alors  $S_{3 \rightarrow k^2, 4k-1} \in \mathcal{S}_3^1(\mathcal{H})$ , pour tout entier strictement positif  $k$  ;
- si  $S \in \mathcal{S}_3^1(\mathcal{H})$ , alors  $S_{4k-1 \rightarrow m^2, 4mk-1} \in \mathcal{S}_3^1(\mathcal{H})$ , pour tous strictement entiers positifs  $m$  et  $k$  ;
- on a  $S_{3^{n_2}} \in \mathcal{S}_3^2(\mathcal{H})$  ;
- si  $S \in \mathcal{S}_3^2(\mathcal{H})$ , alors  $S_{3 \rightarrow 3k^2, 6k-1} \in \mathcal{S}_3^2(\mathcal{H})$ , pour tout entier strictement positif  $k$  ;
- si  $S \in \mathcal{S}_3^2(\mathcal{H})$ , alors  $S_{6k-1 \rightarrow m^2, 6mk-1} \in \mathcal{S}_3^2(\mathcal{H})$ , pour tous entiers strictement positifs  $m$  et  $k$  ;
- on a  $S_{3^{n_3}} \in \mathcal{S}_3^3(\mathcal{H})$  ;

- si  $S \in \mathcal{S}_3^3(\mathcal{H})$ , alors  $S_{3 \rightarrow 8k^2, 10k-1} \in \mathcal{S}_3^3(\mathcal{H})$ , pour tout entier strictement positif  $k$  ;
- si  $S \in \mathcal{S}_3^3(\mathcal{H})$ , alors  $S_{10k-1 \rightarrow m^2, 10mk-1} \in \mathcal{S}_3^3(\mathcal{H})$ , pour tous entiers strictement positifs  $m$  et  $k$  ;
- on a  $S_{3^{n_4}} \in \mathcal{S}_3^4(\mathcal{H})$  ;
- si  $S \in \mathcal{S}_3^4(\mathcal{H})$ , alors  $S_{3 \rightarrow 24k^2, 18k-1} \in \mathcal{S}_3^4(\mathcal{H})$ , pour tout entier strictement positif  $k$  ;
- si  $S \in \mathcal{S}_3^4(\mathcal{H})$ , alors  $S_{18k-1 \rightarrow m^2, 18mk-1} \in \mathcal{S}_3^4(\mathcal{H})$ , pour tous entiers strictement positifs  $m$  et  $k$ .

**Proposition 4.38.** Si  $S_1 \in \mathcal{S}_3^1(\mathcal{H})$  et  $S_2 \in \mathcal{S}_3^2(\mathcal{H})$ ,  $S_3 \in \mathcal{S}_3^3(\mathcal{H})$  et  $S_4 \in \mathcal{S}_3^4(\mathcal{H})$ , alors le graphe  $\mathcal{H}$  est  $(S_1 + S_2 + S_3 + S_4)$ -colorable.

*Démonstration.* Il existe bien un moyen de subdiviser les packings selon la proposition 4.22.  $\square$

**Définition 4.7.** Soient  $n_1, n_2, n_3$  et  $n_4$  quatre entiers positifs tels que  $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 10$ . On définit quatre ensembles de listes  $\mathcal{S}_4^1(\mathcal{H})$ ,  $\mathcal{S}_4^2(\mathcal{H})$ ,  $\mathcal{S}_4^3(\mathcal{H})$  et  $\mathcal{S}_4^4(\mathcal{H})$  comme suit :

- on a  $S_{4^{n_1}} \in \mathcal{S}_4^1(\mathcal{H})$  ;
- si  $S \in \mathcal{S}_4^1(\mathcal{H})$ , alors  $S_{4 \rightarrow k^2, 5k-1} \in \mathcal{S}_4^1(\mathcal{H})$ , pour tout entier strictement positif  $k$  ;
- si  $S \in \mathcal{S}_4^1(\mathcal{H})$ , alors  $S_{5k-1 \rightarrow m^2, 5mk-1} \in \mathcal{S}_4^1(\mathcal{H})$ , pour tous entiers strictement positifs  $m$  et  $k$  ;
- on a  $S_{4^{n_2}} \in \mathcal{S}_4^2(\mathcal{H})$  ;
- si  $S \in \mathcal{S}_4^2(\mathcal{H})$ , alors  $S_{4 \rightarrow 2k^2, 6k-1} \in \mathcal{S}_4^2(\mathcal{H})$ , pour tout entier strictement positif  $k$  ;
- si  $S \in \mathcal{S}_4^2(\mathcal{H})$ , alors  $S_{6k-1 \rightarrow m^2, 6mk-1} \in \mathcal{S}_4^2(\mathcal{H})$ , pour tous entiers strictement positifs  $m$  et  $k$  ;
- on a  $S_{4^{n_3}} \in \mathcal{S}_4^3(\mathcal{H})$  ;
- si  $S \in \mathcal{S}_4^3(\mathcal{H})$ , alors  $S_{4 \rightarrow 3k^2, 8k-1} \in \mathcal{S}_4^3(\mathcal{H})$ , pour tout entier strictement positif  $k$  ;
- si  $S \in \mathcal{S}_4^3(\mathcal{H})$ , alors  $S_{8k-1 \rightarrow m^2, 8mk-1} \in \mathcal{S}_4^3(\mathcal{H})$ , pour tous entiers strictement positifs  $m$  et  $k$  ;
- on a  $S_{4^{n_4}} \in \mathcal{S}_4^4(\mathcal{H})$  ;
- si  $S \in \mathcal{S}_4^4(\mathcal{H})$ , alors  $S_{4 \rightarrow 6k^2, 11k-1} \in \mathcal{S}_4^4(\mathcal{H})$ , pour tout entier strictement positif  $k$  ;
- si  $S \in \mathcal{S}_4^4(\mathcal{H})$ , alors  $S_{11k-1 \rightarrow m^2, 11mk-1} \in \mathcal{S}_4^4(\mathcal{H})$ , pour tous entiers strictement positifs  $m$  et  $k$ .

**Proposition 4.39.** Si  $S_1 \in \mathcal{S}_4^1(\mathcal{H})$  et  $S_2 \in \mathcal{S}_4^2(\mathcal{H})$ ,  $S_3 \in \mathcal{S}_4^3(\mathcal{H})$  et  $S_4 \in \mathcal{S}_4^4(\mathcal{H})$ , alors le graphe  $\mathcal{H}$  est  $(S_1 + S_2 + S_3 + S_4)$ -colorable.

*Démonstration.* Il existe bien un moyen de subdiviser les packings selon la proposition 4.23.  $\square$

**Exemple 4.7.** La grille hexagonale est donc  $(S_{4^{10}} + S_{9^4})$ -colorable et  $(S_{4^{10}} + S_{9^3} + S_{19^4})$ -colorable.

### 4.3.2/ GRILLE CARRÉE

**Définition 4.8.** On définit un ensemble de listes  $\mathcal{S}_=(\mathbb{Z}^2)$  comme suit :

- $S_i \in \mathcal{S}_=(\mathbb{Z}^2)$ , avec  $|S_i| = 2(i+1)^2$  et  $s_1 = s_{2(i+1)^2} = 2i+1$ ,  $i \in \mathbb{Z}$  ;
- si  $S \in \mathcal{S}_=(\mathbb{Z}^2)$ , alors  $S_{2k+1 \rightarrow m^2, 2(m(k+1)-1)+1} \in \mathcal{S}_=(\mathbb{Z}^2)$ , pour tout entier strictement positif  $m$  et tout entier positif  $k$ .

**Proposition 4.40.** i) Toute liste  $S \in \mathcal{S}_=(\mathbb{Z}^2)$  est étroite sur  $\mathbb{Z}^2$ .

ii) Si  $S \in \mathcal{S}_=(\mathbb{Z}^2)$ , alors le graphe  $\mathbb{Z}^2$  est  $S$ -chromatique.

*Démonstration.* Les listes sont bien étroites sur  $\mathbb{Z}^2$  car  $S_i$  est une liste étroite sur  $\mathbb{Z}^2$  et  $\frac{m^2}{A(2(m(k+1)-1)+1)} = \frac{1}{A(2k+1)}$ . La grille  $\mathbb{Z}^2$  est bien  $S_i$ -colorable, grâce à la proposition 4.24. Il existe bien un moyen de subdiviser un  $(2k+1)$ -packing en  $m^2 (2(m(k+1)-1)+1)$ -packings, selon la proposition 4.25.  $\square$

**Exemple 4.8.** La grille carrée est donc  $(1, 3, 3, 3, 3)$ -chromatique et  $(1, 3, 3, 3, 7, 7, 7, 7)$ -chromatique.

**Définition 4.9.** Soient  $n$  et  $n'$  deux entiers positifs tels que  $n + n' = 5$ . On définit deux ensembles de listes  $\mathcal{S}_2(\mathbb{Z}^2)$  et  $\mathcal{S}'_2(\mathbb{Z}^2)$  comme suit :

- on a  $S_{2^n} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{Z}^2)$  ;
- si  $S \in \mathcal{S}_2(\mathbb{Z}^2)$ , alors  $S_{2 \rightarrow k^2, 3k-1} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{Z}^2)$ , pour tout entier strictement positif  $k$  ;
- si  $S \in \mathcal{S}_2(\mathbb{Z}^2)$ , alors  $S_{3k-1 \rightarrow m^2, 3mk-1} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{Z}^2)$ , pour tous entiers strictement positifs  $m$  et  $k$  ;
- on a  $S_{2^{n'}} \in \mathcal{S}'_2(\mathcal{H})$  ;
- si  $S \in \mathcal{S}'_2(\mathbb{Z}^2)$ , alors  $S_{2 \rightarrow 2k^2, 4k-1} \in \mathcal{S}'_2(\mathbb{Z}^2)$ , pour tout entier strictement positif  $k$  ;
- si  $S \in \mathcal{S}'_2(\mathbb{Z}^2)$ , alors  $S_{4k-1 \rightarrow m^2, 4mk-1} \in \mathcal{S}'_2(\mathbb{Z}^2)$ , pour tous entiers strictement positifs  $m$  et  $k$ .

**Proposition 4.41.** Si  $S \in \mathcal{S}_2(\mathbb{Z}^2)$  et  $S' \in \mathcal{S}'_2(\mathbb{Z}^2)$ , alors le graphe  $\mathbb{Z}^2$  est  $(S + S')$ -colorable.

*Démonstration.* Il existe bien un moyen de subdiviser les packings selon la proposition 4.26.  $\square$

**Exemple 4.9.** La grille carrée est donc  $(2, 2, 2, 2, 5, 5, 5, 5)$ -colorable et  $(2, 2, 2, 2, 5, 5, 5, 11, 11, 11, 11)$ -colorable.

**Définition 4.10.** Soient  $n$  et  $n'$  deux entiers positifs tels que  $n + n' = 13$ . On définit deux ensembles de listes  $\mathcal{S}_4(\mathbb{Z}^2)$  et  $\mathcal{S}'_4(\mathbb{Z}^2)$  comme suit :

- on a  $S_{4^n} \in \mathcal{S}_4(\mathbb{Z}^2)$  ;
- si  $S \in \mathcal{S}_4(\mathbb{Z}^2)$ , alors  $S_{4 \rightarrow k^2, 5k-1} \in \mathcal{S}_4(\mathbb{Z}^2)$ , pour tout entier strictement positif  $k$  ;
- si  $S \in \mathcal{S}_4(\mathbb{Z}^2)$ , alors  $S_{5k-1 \rightarrow m^2, 5mk-1} \in \mathcal{S}_4(\mathbb{Z}^2)$ , pour tous entiers strictement positifs  $m$  et  $k$  ;
- on a  $S_{4^{n'}} \in \mathcal{S}'_4(\mathcal{H})$  ;
- si  $S \in \mathcal{S}'_4(\mathbb{Z}^2)$ , alors  $S_{4 \rightarrow 2k^2, 6k-1} \in \mathcal{S}'_4(\mathbb{Z}^2)$ , pour tout entier strictement positif  $k$  ;
- si  $S \in \mathcal{S}'_4(\mathbb{Z}^2)$ , alors  $S_{6k-1 \rightarrow m^2, 6mk-1} \in \mathcal{S}'_4(\mathbb{Z}^2)$ , pour tous entiers strictement positifs  $m$  et  $k$ .

**Proposition 4.42.** Si  $S \in \mathcal{S}_4(\mathbb{Z}^2)$  et  $S' \in \mathcal{S}'_4(\mathbb{Z}^2)$ , alors le graphe  $\mathbb{Z}^2$  est  $(S + S')$ -colorable.

*Démonstration.* Il existe bien un moyen de subdiviser les packings selon la proposition 4.28.  $\square$

**Exemple 4.10.** La grille carrée est donc  $(S_{4^{13}} + S_{9^4})$ -colorable et  $(S_{4^{13}} + S_{9^3} + S_{19^4})$ -colorable.

### 4.3.3/ GRILLE TRIANGULAIRE

**Définition 4.11.** On définit un ensemble de listes  $\mathcal{S}_=(\mathcal{T})$  comme suit :

- $S_i \in \mathcal{S}_=(\mathcal{T})$ , avec  $|S_i| = 3(i+1)^2$  et  $s_1 = s_{3(i+1)^2} = 2i+1$ ,  $i \in \mathbb{Z}$  ;
- si  $S \in \mathcal{S}_=(\mathcal{T})$ , alors  $S_{2k+1 \rightarrow m^2, 2(m(k+1)-1)+1} \in \mathcal{S}_=(\mathcal{T})$ , pour tout entier strictement positif  $m$  et tout entier positif  $k$ .

**Proposition 4.43.** i) Toute liste  $S \in \mathcal{S}_=(\mathcal{T})$  est étroite sur  $\mathcal{T}$ .

ii) Si  $S \in \mathcal{S}_=(\mathcal{T})$ , alors le graphe  $\mathcal{T}$  est  $S$ -chromatique.

*Démonstration.* Les listes sont bien étroites sur  $\mathcal{T}$  car  $S_i$  est une liste étroite sur  $\mathcal{T}$  et  $\frac{m^2}{A(2(m(k+1)-1)+1)} = \frac{1}{A(2k+1)}$ . La grille  $\mathcal{T}$  est bien  $S_i$ -colorable, grâce à la proposition 4.29. Il existe bien un moyen de subdiviser un  $(2k+1)$ -packing en  $m^2$   $(2(m(k+1)-1)+1)$ -packings, selon la proposition 4.30.  $\square$

**Exemple 4.11.** La grille triangulaire est donc  $(1, 1, 3, 3, 3, 3)$ -chromatique et  $(1, 1, 3, 3, 3, 7, 7, 7, 7)$ -chromatique.

**Définition 4.12.** Soient  $n$  et  $n'$  deux entiers positifs tels que  $n + n' = 4$ . On définit deux ensembles de listes  $\mathcal{S}_1(\mathcal{T})$  et  $\mathcal{S}'_1(\mathcal{T})$  comme suit

- on a  $S_{1^n} \in \mathcal{S}_1(\mathcal{T})$  ;
- si  $S \in \mathcal{S}_1(\mathcal{T})$ , alors  $S_{1 \rightarrow k^2, 2k-1} \in \mathcal{S}_1(\mathcal{T})$ , pour tout entier strictement positif  $k$  ;
- si  $S \in \mathcal{S}_1(\mathcal{T})$ , alors  $S_{2k-1 \rightarrow m^2, 2mk-1} \in \mathcal{S}_1(\mathcal{T})$ , pour tous entiers strictement positifs  $m$  et  $k$  ;
- on a  $S_{1^{n'}} \in \mathcal{S}'_1(\mathcal{T})$  ;
- si  $S \in \mathcal{S}'_1(\mathcal{T})$ , alors  $S_{1 \rightarrow 3k^2, 3k-1} \in \mathcal{S}'_1(\mathcal{T})$ , pour tout entier strictement positif  $k$  ;
- si  $S \in \mathcal{S}'_1(\mathcal{T})$ , alors  $S_{3k-1 \rightarrow m^2, 3mk-1} \in \mathcal{S}'_1(\mathcal{T})$ , pour tous entiers strictement positifs  $m$  et  $k$ .

**Proposition 4.44.** Si  $S \in \mathcal{S}_1(\mathcal{T})$  et  $S' \in \mathcal{S}'_1(\mathcal{T})$ , alors le graphe  $\mathcal{T}$  est  $(S + S')$ -colorable.

*Démonstration.* Il existe bien un moyen de subdiviser les packings selon la proposition 4.31.  $\square$

**Définition 4.13.** On définit un ensemble de listes  $\mathcal{S}_2(\mathcal{T})$  comme suit :

- on a  $S_{2^7} \in \mathcal{S}_2(\mathcal{T})$  ;
- si  $S \in \mathcal{S}_2(\mathcal{T})$ , alors  $S_{2 \rightarrow k^2, 3k-1} \in \mathcal{S}_2(\mathcal{T})$ , pour tout entier strictement positif  $k$  ;
- si  $S \in \mathcal{S}_2(\mathcal{T})$ , alors  $S_{3k-1 \rightarrow m^2, 3mk-1} \in \mathcal{S}_2(\mathcal{T})$ , pour tous entiers strictement positifs  $m$  et  $k$  ;

**Proposition 4.45.** Si  $S \in \mathcal{S}_2(\mathcal{T})$ , alors le graphe  $\mathcal{T}$  est  $S$ -colorable.

*Démonstration.* Il existe bien un moyen de subdiviser les packings selon la proposition 4.32.  $\square$

**Définition 4.14.** Soient  $n$  et  $n'$  deux entiers positifs tels que  $n + n' = 12$ . On définit deux ensembles de listes  $\mathcal{S}_3(\mathcal{T})$  et  $\mathcal{S}'_3(\mathcal{T})$  comme suit :

- on a  $S_{3^n} \in \mathcal{S}_3(\mathcal{T})$  ;
- si  $S \in \mathcal{S}_3(\mathcal{T})$ , alors  $S_{3 \rightarrow k^2, 4k-1} \in \mathcal{S}_3(\mathcal{T})$ , pour tout entier strictement positif  $k$  ;
- si  $S \in \mathcal{S}_3(\mathcal{T})$ , alors  $S_{4k-1 \rightarrow m^2, 4mk-1} \in \mathcal{S}_3(\mathcal{T})$ , pour tous entiers strictement positifs  $m$  et  $k$  ;

- on a  $S_{3^{k'}} \in \mathcal{S}'_3(\mathcal{T})$  ;
- si  $S \in \mathcal{S}'_3(\mathcal{T})$ , alors  $S_{3 \rightarrow 3k^2, 6k-1} \in \mathcal{S}'_3(\mathcal{T})$ , pour tout entier strictement positif  $k$  ;
- si  $S \in \mathcal{S}'_3(\mathcal{T})$ , alors  $S_{6k-1 \rightarrow m^2, 6mk-1} \in \mathcal{S}'_3(\mathcal{T})$ , pour tous entiers strictement positifs  $m$  et  $k$ .

**Proposition 4.46.** Si  $S \in \mathcal{S}_3(\mathcal{T})$  et  $S' \in \mathcal{S}'_3(\mathcal{T})$ , alors le graphe  $\mathcal{T}$  est  $(S + S')$ -colorable.

*Démonstration.* Il existe bien un moyen de subdiviser les packings selon la proposition 4.33.  $\square$

#### 4.3.4/ GRILLE DU ROI

**Définition 4.15.** On définit un ensemble de listes  $\mathcal{S}_=(\mathcal{R})$  comme suit :

- $S_i \in \mathcal{S}_=(\mathcal{R})$ , avec  $|S_i| = (i + 1)^2$  et  $s_1 = s_{(i+1)^2} = i$ ,  $i \in \mathbb{Z}$  ;
- si  $S \in \mathcal{S}_=(\mathcal{R})$ , alors  $S_{k \rightarrow m^2, m(k+1)-1} \in \mathcal{S}_=(\mathcal{R})$ , pour tous entiers strictement positifs  $m$  et  $k$ .

**Proposition 4.47.** i) Toute liste  $S \in \mathcal{S}_=(\mathcal{R})$  est étroite sur  $\mathcal{R}$ .

ii) Si  $S \in \mathcal{S}_=(\mathcal{R})$ , alors le graphe  $\mathcal{R}$  est  $S$ -chromatique.

*Démonstration.* Les listes sont bien étroites sur  $\mathcal{R}$  car  $S_i$  est une liste étroite sur  $\mathcal{R}$  et  $\frac{m^2}{A(m(k+1)-1)} = \frac{1}{A(k)}$ . La grille  $\mathcal{R}$  est bien  $S_i$ -colorable, grâce à la proposition 4.34. Il existe bien un moyen de subdiviser un  $k$ -packing en  $m^2 (m(k + 1) - 1)$ -packings, selon la proposition 4.35.  $\square$

**Exemple 4.12.** La grille du roi est donc  $(1, 1, 1, 3, 3, 3, 3)$ -chromatique et  $(1, 1, 3, 3, 3, 7, 7, 7, 7)$ -chromatique.

## 4.4/ $S_{(d,n)}$ -COLORATION DES GRILLES

Dans cette partie, on utilise les résultats des parties précédentes pour obtenir des encadrements du nombre  $S_{(d,n)}$ -chromatique, pour  $n$  et  $d$  des entiers strictement positifs.

### 4.4.1/ GRILLE HEXAGONALE

On commence par calculer des minorants à partir des  $k$ -aires.

**Proposition 4.48.** On a  $\chi_\rho^{S(2,1)}(\mathcal{H}) = \infty$ ,  $\chi_\rho^{S(5,2)}(\mathcal{H}) = \infty$ ,  $\chi_\rho^{S(8,3)}(\mathcal{H}) = \infty$ ,  $\chi_\rho^{S(11,4)}(\mathcal{H}) = \infty$ ,  $\chi_\rho^{S(13,5)}(\mathcal{H}) = \infty$  et  $\chi_\rho^{S(16,6)}(\mathcal{H}) = \infty$ .

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{H}$  la grille hexagonale et soit  $k$  un entier, avec  $k \geq 16$ .

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{A(i)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{A(2i)} + \sum_{i=0}^n \frac{1}{A(4i+1)} + \sum_{i=0}^k \frac{1}{A(4i+3)} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{\frac{3}{2}i^2 + \frac{3}{2}i+1} + \sum_{i=0}^k \frac{1}{6i^2+6i+2} + \sum_{i=0}^k \frac{1}{6i^2+12i+6} < \frac{2}{15} \sqrt{15}\pi \tanh\left(\frac{1}{6}\pi \sqrt{15}\right) + \frac{1}{6} \sqrt{3}\pi \tanh\left(\frac{1}{6}\pi \sqrt{3}\right) + \frac{1}{36}\pi^2 - 1 < 1.494.$$

On a donc :  $\sum_{i=2}^k \frac{1}{A(i)} < 1.494 - \frac{1}{A(1)} < 0.994 < 1$ ,  $\sum_{i=5}^k \frac{2}{A(i)} < 2(1.494 - \sum_{i=1}^4 \frac{1}{A(i)}) < 0.955 < 1$ ,

$$\sum_{i=8}^k \frac{3}{A(i)} < 3(1.494 - \sum_{i=1}^7 \frac{1}{A(i)}) < 0.935 < 1, \sum_{i=11}^k \frac{4}{A(i)} < 4(1.494 - \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{A(i)}) < 0.925 < 1 \text{ et}$$

$$\sum_{i=13}^k \frac{5}{A(i)} < 5(1.494 - \sum_{i=1}^{12} \frac{1}{A(i)}) < 0.986 < 1, \sum_{i=16}^k \frac{6}{A(i)} < 6(1.494 - \sum_{i=1}^{15} \frac{1}{A(i)}) < 0.968 < 1. \quad \square$$

**Proposition 4.49.**  $\chi_\rho^{S(2,2)}(\mathcal{H}) \leq 8, \chi_\rho^{S(2,3)}(\mathcal{H}) \leq 5$  et  $\forall n \geq 4, \chi_\rho^{S(2,n)}(\mathcal{H}) = 4$ .

*Démonstration.* En utilisant la proposition 4.21, on définit une  $S_{(2,n)}$ -coloration de  $\mathcal{H}$ , pour  $n = 2, 3$  et  $n \geq 4$ . La grille  $\mathcal{H}$  peut être partitionnée en quatre 2-packings, les deux premiers peuvent être colorés par des couleurs 2, le troisième par deux couleurs 3 et le dernier par quatre couleurs au plus 5, c'est à dire deux couleurs 4 et 5, on en conclut que  $\chi_\rho^{S(2,2)}(\mathcal{H}) \leq 8$ . La grille  $\mathcal{H}$  peut être partitionnée en quatre 2-packings, les trois premiers peuvent être colorés par des couleurs 2 et le troisième par deux couleurs 3, pour conclure  $\chi_\rho^{S(2,3)}(\mathcal{H}) \leq 5$ . La grille  $\mathcal{H}$  peut être partitionnée en quatre 2-packings, d'où  $\forall n \geq 4, \chi_\rho^{S(2,n)}(\mathcal{H}) = 4$ .  $\square$

Le tableau suivant résume les colorations définies dans la preuve précédente. Le symbole  $P$  dans le tableau fait référence au type de packing que l'on utilise et comment on les subdivise en  $i$ -packings ( $X_i$  et  $A_i$  sont des  $i$ -packings) et le symbole  $C$  fait référence aux couleurs associées que l'on utilise pour chacun des  $i$ -packings. La notation  $k \times A_i$  signifie que l'on utilise  $k$   $i$ -packings et la notation  $k \times i$  signifie que l'on utilise  $k$  couleurs  $i$ . Dans le reste du chapitre, les preuves similaires vont seulement être décrites par un tableau sous le même format que celui-ci.

$S_{(2,2)}$ -coloration	P	$2 \times X_2$	$X_2$	$X_2$
	C	$2 \times 2$	$2 \times 3$	$4 \times A_5$
$S_{(2,3)}$ -coloration	P	$3 \times X_2$	$X_2$	
	C	$3 \times 2$	$2 \times 3$	

**Proposition 4.50.** On a  $\chi_\rho^{S(3,2)}(\mathcal{H}) \leq 35, \chi_\rho^{S(3,3)}(\mathcal{H}) \leq 13, \chi_\rho^{S(3,4)}(\mathcal{H}) \leq 10, \chi_\rho^{S(3,5)}(\mathcal{H}) \leq 8$  et  $\forall n \geq 6, \chi_\rho^{S(3,n)}(\mathcal{H}) = 6$ .

*Démonstration.* En utilisant la proposition 4.22, on définit une  $S_{(3,n)}$ -coloration de  $\mathcal{H}$ , pour  $n = 2, 3, 4, 5$  et  $n \geq 6$ . La grille  $\mathcal{H}$  peut être partitionnée en six 3-packings, donc  $\forall n \geq 6, \chi_\rho^{S(3,n)}(\mathcal{H}) = 6$ . Les autres colorations sont décrites dans le tableau 4.5.  $\square$

**Proposition 4.51.** On a  $\chi_\rho^{S(4,3)}(\mathcal{H}) \leq 58, \chi_\rho^{S(4,4)}(\mathcal{H}) \leq 27, \chi_\rho^{S(4,5)}(\mathcal{H}) \leq 21, \chi_\rho^{S(4,6)}(\mathcal{H}) \leq 18$  et à partir du résultat de Jacko [52], on a  $\forall n \geq 11, \chi_\rho^{S(4,n)}(\mathcal{H}) = 11$ .

*Démonstration.* En utilisant la proposition 4.23, on définit une  $S_{(4,n)}$ -coloration de  $\mathcal{H}$ , pour  $n = 3, 4, 5, 6$  et  $n \geq 11$ . La grille  $\mathcal{H}$  peut être partitionnée en douze 4-packings. Les autres colorations sont décrites dans le tableau 4.6.  $\square$

Les tableaux 4.7, 4.11 et 4.14 résument les différents résultats obtenus pour le nombre  $S_{(d,n)}$ -chromatique. Les nombres en gras sont les valeurs exactes et toutes les paires de valeurs représentent les bornes inférieures et supérieures. Certains des résultats pour les grilles carrée et triangulaire ont été trouvés indépendamment par Goddard et Xu [47].

$S_{(3,2)}$ -coloration	P	$2 \times X_3$	$X_3$ $3 \times X_5$	$X_3$ $4 \times X_7$	$X_3$ $4 \times X_9, 8 \times X_{15}$	$X_3$ $X_5, 3 \times X_{11},$ $4 \times X_{17}, 6 \times X_{23}$
	C	$2 \times 3$	$2 \times 4, 5$	$2 \times 6, 2 \times 7$	$2 \times 8, 2 \times 9,$ $2 \times 12, 2 \times 13,$ $2 \times 14, 2 \times 15$	$5, 2 \times 10, 2 \times 11,$ $2 \times 16, 2 \times 17, 2 \times 18,$ $2 \times 19, 20$
$S_{(3,3)}$ -coloration	P	$3 \times X_3$	$X_3$ $3 \times X_5$	$X_3$ $3 \times X_5$	$X_3$ $4 \times X_7$	
	C	$3 \times 3$	$3 \times 4$	$3 \times 5$	$3 \times 6, 7$	
$S_{(3,4)}$ -coloration	P	$4 \times X_3$	$X_3$ $3 \times X_5$	$X_3$ $3 \times X_5$		
	C	$4 \times 3$	$3 \times 4$	$4, 2 \times 5$		
$S_{(3,5)}$ -coloration	P	$5 \times X_3$	$X_3$ $3 \times X_5$			
	C	$5 \times 3$	$3 \times 4$			

TABLE 4.5 – Décomposition de  $\mathcal{H}$  en 3-packings et couleurs associées.

#### 4.4.2/ GRILLE CARRÉE

On commence par calculer les bornes inférieures à partir des  $k$ -aires.

**Proposition 4.52.** On a  $\chi_\rho^{S(2,1)}(\mathbb{Z}^2) = \infty$ ,  $\chi_\rho^{S(4,2)}(\mathbb{Z}^2) = \infty$ ,  $\chi_\rho^{S(6,3)}(\mathbb{Z}^2) = \infty$ ,  $\chi_\rho^{S(8,4)}(\mathbb{Z}^2) = \infty$ ,  $\chi_\rho^{S(10,5)}(\mathbb{Z}^2) = \infty$  et  $\chi_\rho^{S(12,6)}(\mathbb{Z}^2) = \infty$ .

*Démonstration.* Soit  $\mathbb{Z}^2$  la grille carrée et soit  $k$  un entier, avec  $k \geq 12$ .

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{A(i)} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{A(2i)} + \sum_{i=0}^k \frac{1}{A(2i+1)} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{2i^2+2i+1} + \sum_{i=0}^k \frac{1}{2i^2+4i+2} < \frac{1}{2}\pi \tanh\left(\frac{1}{2}\pi\right) + \frac{1}{12}\pi^2 - 1 < 1.264.$$

On a donc :  $\sum_{i=2}^k \frac{1}{A(i)} < 1.264 - \frac{1}{A(1)} < 0.764 < 1$ ,  $\sum_{i=4}^k \frac{2}{A(i)} < 2(1.264 - \sum_{i=1}^3 \frac{1}{A(i)}) < 0.877 < 1$ ,

$$\sum_{i=6}^k \frac{3}{A(i)} < 3(1.264 - \sum_{i=1}^5 \frac{1}{A(i)}) < 0.917 < 1$$
,  $\sum_{i=8}^k \frac{4}{A(i)} < 4(1.264 - \sum_{i=1}^7 \frac{1}{A(i)}) < 0.938 < 1$ ,  $\sum_{i=10}^k \frac{5}{A(i)} <$

$$5(1.264 - \sum_{i=1}^9 \frac{1}{A(i)}) < 0.951 < 1$$
 et  $\sum_{i=12}^k \frac{6}{A(i)} < 6(1.264 - \sum_{i=1}^{11} \frac{1}{A(i)}) < 0.959 < 1$ . □

**Proposition 4.53.** On a  $\chi_\rho^{S(2,2)}(\mathbb{Z}^2) \leq 20$ ,  $\chi_\rho^{S(2,3)}(\mathbb{Z}^2) \leq 8$ ,  $\chi_\rho^{S(2,4)}(\mathbb{Z}^2) \leq 6$  et  $\forall n \geq 5, \chi_\rho^{S(2,n)}(\mathbb{Z}^2) = 5$ .

*Démonstration.* En utilisant la proposition 4.26, on définit une  $S_{(2,n)}$ -coloration de  $\mathbb{Z}^2$ , pour  $n = 2, 3, 4$  et  $n \geq 5$ . La grille  $\mathbb{Z}^2$  peut être partitionnée en cinq 2-packings, d'où  $\forall n \geq 5, \chi_\rho^{2,n}(\mathbb{Z}^2) = 5$ . Les autres colorations sont décrites dans le tableau 4.8. □

Soukal et Holub [77] ont prouvé que  $\chi_\rho(\mathbb{Z}^2) \leq 17$ , et proposé un motif de taille  $24 \times 24$  dans l'optique de colorer la grille carrée. Leur motif est rappelé dans la figure 4.5.

**Proposition 4.54.** On a  $\chi_\rho^{S(3,3)}(\mathbb{Z}^2) \leq 33$ .

*Démonstration.* Dans le motif de la figure 4.5,  $B_i$  représente l'ensemble des sommets colorés par  $i$ . On note que  $B_2$  et  $B_3$  sont tous les deux des 3-packings. On peut remarquer

$S_{(4,3)}$ -coloration	P	$3 \times X_4$	$X_4$	$2 \times X_4$	$2 \times X_4$	$X_4$
			$2 \times A_5$	$6 \times A_7$	$A_5, 6 \times A_9$	$6 \times A_{11}, 4 \times A_{19}$
	C	$3 \times 4$	$2 \times 5$	$3 \times 6, 3 \times 7$	$5, 3 \times 8, 3 \times 9$	$3 \times 10, 3 \times 11, 18, 3 \times 19$
	P				$X_4$	$X_4$
$S_{(4,4)}$ -coloration	P	$4 \times X_4$	$2 \times X_4$	$2 \times X_4$	$2 \times X_4$	$X_4$
			$4 \times A_5$	$6 \times A_7$	$8 \times A_9$	$2 \times A_7, 3 \times A_{14}$
C	$4 \times 4$	$4 \times 5$	$4 \times 6, 2 \times 7$	$4 \times 8, 4 \times 9$	$2 \times 7, 3 \times 10$	
$S_{(4,5)}$ -coloration	P	$5 \times X_4$	$2 \times X_4$	$3 \times X_4$	$X_4$	
			$4 \times A_5$	$9 \times A_7$	$A_5, 2 \times A_9$	
	C	$5 \times 4$	$4 \times 5$	$5 \times 6, 4 \times 7$	$5, 7, 8$	
$S_{(4,6)}$ -coloration	P	$6 \times X_4$	$3 \times X_4$	$2 \times X_4$		
			$6 \times A_5$	$6 \times A_7$		
	C	$6 \times 4$	$6 \times 5$	$6 \times 6$		

TABLE 4.6 – Décomposition de  $\mathcal{H}$  en 4-packings et couleurs associées.

$d \setminus n$	1	2	3	4	5	6
1	<b>7</b> [80, 34]	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>2</b>
2	$\infty$	5 - 8	<b>5</b>	<b>4</b>	<b>4</b>	<b>4</b>
3	$\infty$	15 - 35	9 - 13	8 - 10	7 - 8	<b>6</b>
4	$\infty$	61 - ?	20 - 58	15 - 27	13 - 21	12 - 18
5	$\infty$	$\infty$	37 - ?	25 - ?	21 - ?	19 - ?
8	$\infty$	$\infty$	$\infty$	?	?	?
11	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	?	?
13	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	?
16	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$

TABLE 4.7 – Bornes sur le nombre  $S_{(d,n)}$ -chromatique de la gille hexagonale.

que  $B_{16} \cup B_{17}$  forme un 11-packing et que quatre 7-packings forment une partition de  $B_2$  ou  $B_3$ . Pour colorer la grille  $\mathbb{Z}^2$ , avec  $s_1 = 3$ , on partitionne  $B_1$  en seize  $i$ -packings,  $2 \leq i \leq 17$  (comme  $B_1$  est  $\bigcup_{i=2}^{17} B_i$  translaté par le vecteur  $(1, 0)$ ). Soit  $B'_i$  la copie de  $B_i$  translatée par le vecteur  $(1, 0)$ . On utilise deux couleurs 3 pour colorer  $B_2$  et  $B_3$ , et une couleur  $i$  pour colorer  $B_i$ , pour  $i \in \{4, \dots, 8\}$ . On colore  $B'_i$  par une couleur  $i$ , pour  $i \in \{3, \dots, 8\}$  et  $B'_2$ , qui est un 3-packing, est coloré par une couleur 4, une couleur 5, une couleur 6 et une couleur 7. On utilise les couleurs 8 restantes pour colorer  $B_9$ . On utilise les deux couleurs 9 pour colorer  $B_{16}, B'_{16}, B_{17}$  et  $B'_{17}$ . La couleur 9 restante est utilisée pour colorer  $B'_9$ . On utilise deux couleurs  $i$  pour colorer  $B_i$  et  $B'_i$ , pour  $i \in \{10, \dots, 13\}$ . Les couleurs 10, 11, 12 et 13 restantes sont utilisées pour colorer  $B_{14}, B'_{14}, B_{15}$  et  $B'_{15}$ .  $\square$

**Proposition 4.55.** On a  $\chi_\rho^{S(3,4)}(\mathbb{Z}^2) \leq 20, \chi_\rho^{S(3,5)}(\mathbb{Z}^2) \leq 17, \chi_\rho^{S(3,6)}(\mathbb{Z}^2) \leq 14$  et  $\forall n \geq 8, \chi_\rho^{S(3,n)}(\mathbb{Z}^2) = 8$ .

$S_{(2,2)}$ -coloration	P	$2 \times X_2$	$X_2$ $2 \times A_3$	$X_2$ $4 \times A_5$	$X_2$ $6 \times A_8, 6 \times A_{11}$
	C	$2 \times 2$	$2 \times 3$	$2 \times 4, 2 \times 5$	$2 \times 6, 2 \times 7, 2 \times 8$ $2 \times 9, 2 \times 10, 2 \times 11$
$S_{(2,3)}$ -coloration	P	$3 \times X_2$	$X_2$ $2 \times A_3$	$X_2$ $A_3, 2 \times A_5$	
	C	$3 \times 2$	$2 \times 3$	$3, 2 \times 4$	
$S_{(2,4)}$ -coloration	P	$4 \times X_2$	$X_2$ $2 \times A_3$		
	C	$4 \times 2$	$2 \times 3$		

TABLE 4.8 – Décomposition de  $\mathbb{Z}^2$  en 2-packings et couleurs associées.

*Démonstration.* En utilisant la proposition 4.27, on définit une  $S_{(3,n)}$ -coloration de  $\mathbb{Z}^2$ , pour  $n = 4, 5, 6$  et  $n \geq 8$ . La grille  $\mathbb{Z}^2$  peut être partitionnée en huit 3-packings, d'où  $\forall n \geq 8$ ,  $\chi_\rho^{S_{(3,n)}}(\mathbb{Z}^2) = 8$ . Les autres colorations sont décrites dans le tableau 4.9.  $\square$

$S_{(3,4)}$ -coloration	P	$4 \times X_3$	$4 \times X_3$ $16 \times A_7$
	C	$4 \times 3$	$4 \times 4, 4 \times 5, 4 \times 6, 4 \times 7$
$S_{(3,5)}$ -coloration	P	$5 \times X_3$	$3 \times X_3$ $12 \times A_7$
	C	$5 \times 3$	$5 \times 4, 5 \times 5, 2 \times 6$
$S_{(3,6)}$ -coloration	P	$6 \times X_3$	$2 \times X_3$ $8 \times A_7$
	C	$6 \times 3$	$6 \times 4, 2 \times 5$

TABLE 4.9 – Décomposition de  $\mathbb{Z}^2$  en 3-packings et couleurs associés.

**Proposition 4.56.** On a  $\chi_\rho^{S_{(4,4)}}(\mathbb{Z}^2) \leq 56$ ,  $\chi_\rho^{S_{(4,5)}}(\mathbb{Z}^2) \leq 34$ ,  $\chi_\rho^{S_{(4,6)}}(\mathbb{Z}^2) \leq 28$  et  $\forall n \geq 13$ ,  $\chi_\rho^{S_{(4,n)}}(\mathbb{Z}^2) = 13$ .

*Démonstration.* En utilisant la proposition 4.28, on définit une  $S_{(4,n)}$ -coloration de  $\mathbb{Z}^2$ , pour  $n = 4, 5, 6$  et  $n \geq 13$ . La grille  $\mathbb{Z}^2$  peut être partitionnée en treize 4-packings, d'où  $\forall n \geq 13$ ,  $\chi_\rho^{S_{(4,n)}}(\mathbb{Z}^2) = 13$ . Les autres colorations sont décrites dans le tableau 4.10.  $\square$

#### 4.4.3/ GRILLE TRIANGULAIRE

On commence par calculer les bornes inférieures à partir des  $k$ -aires.

**Proposition 4.57.** On a  $\chi_\rho^{S_{(1,1)}}(\mathcal{T}) = \infty$ ,  $\chi_\rho^{S_{(3,2)}}(\mathcal{T}) = \infty$ ,  $\chi_\rho^{S_{(4,3)}}(\mathcal{T}) = \infty$ ,  $\chi_\rho^{S_{(5,4)}}(\mathcal{T}) = \infty$ ,  $\chi_\rho^{S_{(7,5)}}(\mathcal{T}) = \infty$  et  $\chi_\rho^{S_{(8,6)}}(\mathcal{T}) = \infty$ .

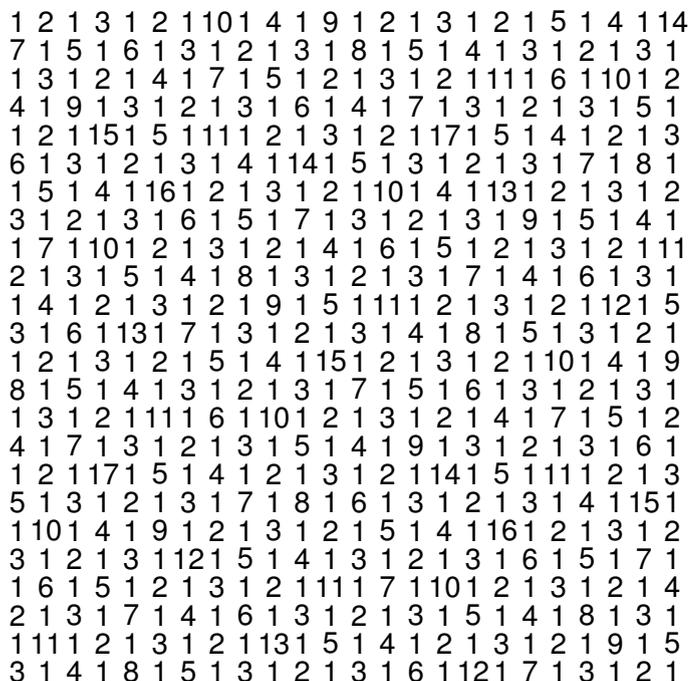


FIGURE 4.5 – Un motif de taille  $24 \times 24$  [77] pour colorer la grille  $\mathbb{Z}^2$ .

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{T}$  la grille triangulaire et soit  $k$  un entier, avec  $k \geq 8$ .

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{A(i)} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{A(2i)} + \sum_{i=0}^k \frac{1}{A(2i+1)} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{3i^2+3i+1} + \sum_{i=0}^k \frac{1}{3i^2+6i+3} < \frac{1}{3} \sqrt{3}\pi \tanh(\frac{1}{6}\pi \sqrt{3}) + \frac{1}{18}\pi^2 - 1 < 0.854.$$

On a donc :  $\sum_{i=1}^k \frac{1}{A(i)} < 0.854 < 1$ ,  $\sum_{i=3}^k \frac{2}{A(i)} < 2(0.854 - \sum_{i=1}^2 \frac{1}{A(i)}) < 0.755 < 1$ ,  $\sum_{i=4}^k \frac{3}{A(i)} < 3(0.854 -$

$\sum_{i=1}^3 \frac{1}{A(i)}) < 0.883 < 1$ ,  $\sum_{i=5}^k \frac{4}{A(i)} < 4(0.854 - \sum_{i=1}^4 \frac{1}{A(i)}) < 0.966 < 1$ ,  $\sum_{i=7}^k \frac{5}{A(i)} < 5(0.854 - \sum_{i=1}^6 \frac{1}{A(i)}) <$

$0.887 < 1$  et  $\sum_{i=8}^k \frac{6}{A(i)} < 6(0.854 - \sum_{i=1}^7 \frac{1}{A(i)}) < 0.940 < 1$ . □

**Proposition 4.58.** On a  $\chi_\rho^{S(1,2)}(\mathcal{T}) \leq 6$  et  $\forall n \geq 3, \chi_\rho^{1,n}(\mathcal{T}) = 3$ .

*Démonstration.* En utilisant la proposition 4.31, on définit une  $S_{(1,n)}$ -coloration de  $\mathcal{T}$ , pour  $n = 2$  et  $n \geq 3$ . La grille  $\mathcal{T}$  peut être partitionnée en trois ensembles stables, d'où  $\forall n \geq 3, \chi_\rho^{S(1,n)}(\mathcal{T}) = 3$ . Les autres colorations sont décrites dans le tableau suivant.

(1,2)-packing	P	$2 \times X_1$	$X_1$
	C	$2 \times 1$	$4 \times A_3$
			$2 \times 2, 2 \times 3$

□

**Proposition 4.59.** On a  $\chi_\rho^{S(2,4)}(\mathcal{T}) \leq 16, \chi_\rho^{S(2,5)}(\mathcal{T}) \leq 13, \chi_\rho^{S(2,6)}(\mathcal{T}) \leq 10$  et  $\forall n \geq 7, \chi_\rho^{S(2,n)}(\mathcal{T}) = 7$ .

*Démonstration.* En utilisant la proposition 4.32, on définit une  $S_{(2,n)}$ -coloration de  $\mathcal{T}$ , pour  $n = 4, 5, 6$  et  $n \geq 7$ . La grille  $\mathcal{T}$  peut être partitionnée en sept 2-packings, d'où  $\forall n \geq 7, \chi_\rho^{S(2,n)}(\mathcal{T}) = 7$ . Les autres colorations sont décrites dans le tableau 4.12. □

$S_{(4,4)}$ -coloration	P	$4 \times X_4$	$2 \times X_4$ $4 \times A_5$	$4 \times X_4$ $16 \times A_9$	$X_4$ $8 \times A_{11}$	$X_4$ $9 \times A_{14}$	$X_4$ $3 \times A_{14}, 12 \times A_{17}$
	C	$4 \times 4$	$4 \times 5$	$4 \times 6, 4 \times 7,$ $4 \times 8, 4 \times 9$	$4 \times 10,$ $4 \times 11$	$4 \times 12$ $4 \times 13, 14$	$3 \times 14, 4 \times 15,$ $4 \times 16, 4 \times 17$
$S_{(4,5)}$ -coloration	P	$5 \times X_4$	$2 \times X_4$ $4 \times A_5$	$5 \times X_4$ $A_5, 18 \times A_9$	$X_4$ $2 \times A_9, 4 \times A_{11}$		
	C	$5 \times 4$	$4 \times 5$	$5, 5 \times 6, 5 \times 7$ $5 \times 8, 3 \times 9$	$2 \times 9, 4 \times 10$		
$S_{(4,6)}$ -coloration	P	$6 \times X_4$	$3 \times X_4$ $6 \times A_5$	$4 \times X_4$ $16 \times A_9$			
	C	$6 \times 4$	$6 \times 5$	$6 \times 6, 6 \times 7, 4 \times 8$			

TABLE 4.10 – Décomposition de  $\mathbb{Z}^2$  en 4-packings et couleurs associées.

$d \setminus n$	1	2	3	4	5	6
1	12 - 17 [28, 77]	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>2</b>
2	$\infty$	11 - 20	7 - 8	<b>6</b> [47]	<b>5</b> [47]	<b>5</b>
3	$\infty$	57 - ?	16 - 33	12 - 20	10 - 17	10 - 14
4	$\infty$	$\infty$	44 - ?	25 - 56	20 - 34	18 - 28
5	$\infty$	$\infty$	199 - ?	50 - ?	35 - ?	29 - ?
6	$\infty$	$\infty$	$\infty$	?	?	?
8	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	?	?
10	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	?
12	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$

TABLE 4.11 – Bornes sur le nombre  $S_{(d,n)}$ -chromatique de la grille carrée.

**Proposition 4.60.**  $\chi_\rho^{S_{(3,4)}}(\mathcal{T}) \leq 72, \chi_\rho^{S_{(3,5)}}(\mathcal{T}) \leq 38, \chi_\rho^{S_{(3,6)}}(\mathcal{T}) \leq 26$  et  $\forall n \geq 12, \chi_\rho^{S_{(3,n)}}(\mathcal{T}) = 12$ .

*Démonstration.* En utilisant la proposition 4.33, on définit une  $S_{(3,n)}$ -coloration de  $\mathcal{T}$  pour  $n = 4, 5, 6$  et  $n \geq 12$ . La grille  $\mathcal{T}$  peut être partitionnée en douze 3-packings, d'où  $\forall n \geq 12, \chi_\rho^{S_{(3,n)}}(\mathcal{T}) = 12$ . Les autres colorations sont décrites dans le tableau 4.13.  $\square$

#### 4.4.4/ GRILLE DU ROI

**Proposition 4.61.** Soit  $\mathcal{R}$  la grille du roi. On a  $\chi_\rho^{S_{(1,2)}}(\mathcal{R}) \geq 10$ .

*Démonstration.* On a  $\sum_{i=1}^5 \frac{2}{A(i)} = \frac{1}{2} + \frac{2}{9} + \frac{1}{8} + \frac{2}{25} + \frac{1}{18} < 1$ .  $\square$

Le motif suivant est adapté des résultats de Togni [78] sur les graphes de distances.

**Proposition 4.62.** Soit  $\mathcal{R}$  la grille du roi. On a  $\chi_\rho^{S_{(1,2)}}(\mathcal{R}) \leq 58$ .

*Démonstration.* On peut supposer que les lignes de la grille  $\mathcal{R}$  sont numérotées, c'est à dire que la ligne  $\ell_i$  est l'ensemble des sommets de  $V(\mathcal{R})$  tels que  $x = (i, 0)$ , pour un certain

$S_{(2,4)}$ -coloration	P	$4 \times X_2$	$3 \times X_2$ $12 \times A_5$
	C	$4 \times 2$	$4 \times 3, 4 \times 4, 4 \times 5$
$S_{(2,5)}$ -coloration	P	$5 \times X_2$	$2 \times X_2$ $8 \times A_5$
	C	$5 \times 2$	$5 \times 3, 3 \times 4$
$S_{(2,6)}$ -coloration	P	$6 \times X_2$	$X_2$ $4 \times A_5$
	C	$6 \times 2$	$4 \times 3$

TABLE 4.12 – Décomposition de  $\mathcal{T}$  en 2-packings et couleurs associées.

$S_{(3,4)}$ -coloration	P	$4 \times X_3$	$2 \times X_3$	$2 \times X_3$	$2 \times X_3$
			$6 \times A_5$	$8 \times A_7$	$2 \times A_5, 12 \times A_{11}$
	C	$4 \times 3$	$4 \times 4, 2 \times 5$	$4 \times 6, 4 \times 7$	$2 \times 5, 4 \times 9, 4 \times 10, 4 \times 11$
				$X_3$	$X_3$
$S_{(3,5)}$ -coloration	P	$5 \times X_3$	$3 \times X_3$	$2 \times X_3$	$2 \times X_3$
			$9 \times A_5$	$8 \times A_7$	$18 \times A_{11}$
$S_{(3,6)}$ -coloration	C	$6 \times 3$	$4 \times X_3$	$2 \times X_3$	
			$12 \times A_5$	$8 \times A_7$	

TABLE 4.13 – Décomposition de  $\mathcal{T}$  en 3-packings et couleurs associées.

*i*. Pour chaque ligne on donne un motif de taille diverse. Le lecteur peut s'assurer que les sommets de la même couleur sont à distances mutuelles nécessaires. Les motifs pour les lignes  $\ell_i$  sont les suivants :

- $1_a, 2_a, 1_a, 3_a$ , si  $i \equiv 0 \pmod{4}$  ;
- $1_a, 2_b, 1_a, 3_b$ , si  $i \equiv 2 \pmod{4}$  ;
- $1_b, 4_a, 1_b, 5_a, 1_b, 8_a, 1_b, 4_a, 1_b, 5_a, 1_b, 8_a$ , si  $i \equiv 1 \pmod{16}$  ;
- $1_b, 4_a, 1_b, 5_a, 1_b, 8_b, 1_b, 4_a, 1_b, 5_a, 1_b, 8_b$ , si  $i \equiv 9 \pmod{16}$  ;
- $1_b, 4_b, 1_b, 5_b, 1_b, 10_a, 1_b, 4_b, 1_b, 5_b, 1_b, 11_a$ , si  $i \equiv 5 \pmod{16}$  ;
- $1_b, 4_b, 1_b, 5_b, 1_b, 10_b, 1_b, 4_b, 1_b, 5_b, 1_b, 11_b$ , si  $i \equiv 13 \pmod{16}$  ;
- $1_b, 6_a, 1_b, 7_a, 1_b, 12_a, 1_b, 13_a, 1_b, 6_a, 1_b, 7_a, 1_b, 14_a, 1_b, 15_a$ , si  $i \equiv 3 \pmod{16}$  ;
- $1_b, 6_a, 1_b, 7_a, 1_b, 12_b, 1_b, 13_b, 1_b, 6_a, 1_b, 7_a, 1_b, 14_b, 1_b, 15_b$ , si  $i \equiv 11 \pmod{16}$  ;
- $1_b, 6_b, 1_b, 7_b, 1_b, 16_a, 1_b, 17_a, 1_b, 6_b, 1_b, 7_b, 1_b, 18_a, 1_b, 19_a, 1_b, 6_b, 1_b, 7_b, 1_b, 20_a, 1_b, 21_a$ , si  $i \equiv 7 \pmod{32}$  ;
- $1_b, 6_b, 1_b, 7_b, 1_b, 16_b, 1_b, 17_b, 1_b, 6_b, 1_b, 7_b, 1_b, 18_b, 1_b, 19_b, 1_b, 6_b, 1_b, 7_b, 1_b, 20_b, 1_b, 21_b$ , si  $i \equiv 23 \pmod{32}$  ;
- $1_b, 6_b, 1_b, 7_b, 1_b, 22_a, 1_b, 23_a, 1_b, 6_b, 1_b, 7_b, 1_b, 24_a, 1_b, 25_a, 1_b, 6_b, 1_b, 7_b, 1_b, 26_a, 1_b, 27_a, 1_b, 6_b, 1_b, 7_b, 1_b, 28_a, 1_b, 29_a$ , si  $i \equiv 15 \pmod{32}$  ;
- $1_b, 6_b, 1_b, 7_b, 1_b, 22_b, 1_b, 23_b, 1_b, 6_b, 1_b, 7_b, 1_b, 24_b, 1_b, 25_b, 1_b, 6_b, 1_b, 7_b, 1_b, 26_b, 1_b, 27_b, 1_b, 6_b, 1_b, 7_b, 1_b, 28_b, 1_b, 29_b$ , si  $i \equiv 31 \pmod{32}$ .

$d \setminus n$	1	2	3	4	5	6
1	$\infty$ [35]	5 - 6 [47]	<b>3</b>	<b>3</b>	<b>3</b>	<b>3</b>
2	$\infty$	127 - ?	14 - ?	10 - 16	9 - 13	8 - 10
3	$\infty$	$\infty$	81 - ?	28 - 72	20 - 38	17 - 26
4	$\infty$	$\infty$	$\infty$	104 - ?	49 - ?	36 - ?
5	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	?	?
7	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	?
8	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$

TABLE 4.14 – Bornes sur le nombre  $S_{(d,n)}$ -chromatique de la grille triangulaire.

□

## QUESTIONS OUVERTES

Pour finir, voici une liste de problèmes ouverts sur le nombre  $S$ -chromatique des grilles.

Dans ce chapitre, on a essayé de trouver les listes  $S$  telles que les grilles sont  $S$ -colorables et le  $s_1$ -packing est de densité maximum (et même tous les packings dans certains cas). Nous n'avons pas réussi à trouver des listes  $S$  où le  $s_1$ -packing n'est pas maximum pour toute  $S$ -coloration des grilles. De telles listes peuvent sûrement être trouvées assisté d'un ordinateur (de façon similaire à  $P_\infty$ , voir proposition 2.10).

- i) *Existe-t-il des listes  $S$  telles que pour toute  $S$ -coloration des grilles  $\mathcal{H}$ ,  $\mathbb{Z}^2$ ,  $\mathcal{T}$  ou  $\mathcal{R}$ , le  $s_1$ -packing n'est pas de densité maximum ?*

Nous avons déterminé un certain nombre de listes étroites sur les différentes grilles, il est probable qu'il en existe d'autres. On peut se demander s'il est possible de déterminer toutes les listes étroites sur les différentes grilles.

- ii) *Peut-on déterminer toutes les listes étroites sur les grilles  $\mathcal{H}$ ,  $\mathbb{Z}^2$ ,  $\mathcal{T}$  ou  $\mathcal{R}$  ?*

Les bornes inférieures utilisées ne considèrent que la densité d'un packing sans considérer les autres packings qui forment une partition de la grille dans une  $S$ -coloration. Il est sûrement possible de trouver une formule générale pour calculer la densité maximum de l'union de deux packings dans les différentes grilles. Nous ne sommes pas sûr que cette formule améliore significativement les bornes inférieures. Peut-être qu'en calculant la densité de l'union de trois à quatre packings en même temps dans une grille, les bornes inférieures peuvent être significativement améliorées.

- iii) *Peut-on améliorer significativement les bornes inférieures en considérant les densités des paires de packings ?*

Le nombre de *packing* de  $\mathbb{Z}^2$  est une des premières questions ouvertes à propos de la coloration de *packing*. Nos tentatives d'améliorer les bornes n'ont pas été fructueuses pour ce problème. On peut se poser des questions similaires pour d'autres listes ou d'autres grilles.

- iv) *Quel est le nombre de packing de  $\mathbb{Z}^2$  ?*  
v) *Quel est le nombre  $S_{(1,2)}$ -chromatique de  $\mathcal{R}$  ?*



# $S$ -COLORATION DES GRAPHES

## SUBCUBIQUES

### INTRODUCTION

Dans ce chapitre, notre sujet est la  $S$ -coloration des graphes subcubiques pour des séries croissantes d'entiers  $S$  telles que  $s_1 = 1$  ou  $s_2 = 1$ . Ce chapitre comprend trois parties. Ces trois parties correspondent aux trois séries étudiées. Dans la première partie, on s'intéresse aux séries  $S$  telles que  $s_1 = 1$  et  $s_i = k$ , pour tout  $i \geq 2$  est plus particulièrement à cette série avec  $k = 2$ . Dans la deuxième partie, on traite des séries  $S$  telles que  $S = (1, 1, 2, 3, 3, \dots)$ . Dans la dernière partie, on s'intéresse à la liste qui correspond à la coloration de *packing*, c'est à dire la liste  $S = (1, 2, 3, \dots)$ .

Pour pouvoir vérifier la finesse de nos résultats, on a calculé la distribution du nombre  $S$ -chromatique des graphes cubiques d'ordre au plus 20 pour trois séries  $S$ . Les résultats sont résumés dans les tableaux 5.1, 5.2, et 5.3. Ces résultats sont obtenus par recherche exhaustive, en utilisant la liste des graphes cubiques de Gordon Royle [67].

La méthode suivante (qui est inspirée de Cranston et Kim [22]) est utilisée dans le reste du chapitre pour produire une  $S$ -coloration. On introduit les définitions suivantes.

**Définition 5.1.** *Pour un graphe  $G$  et une arête  $e = xy \in E(G)$ , un ordre par niveaux de  $(G, e)$  est une partition de  $V(G)$  en niveaux  $L_i = \{v \in V(G) : d(v, e) = i\}$ ,  $0 \leq i \leq \epsilon(e)$ , avec  $\epsilon(e) = \max(\{d(u, e), u \in V(G)\}) \leq \text{diam}(G)$ .*

On utilisera un ordre par niveaux pour créer des  $S$ -colorations par récurrence. Les sommets sont colorés un par un, du niveau  $\epsilon(e)$  à 1, tout en préservant certaines propriétés. Ces propriétés sont utilisées à la fin pour permettre de colorer les sommets  $x$  et  $y$  (de l'arête  $e$ ) en recolorant certains sommets dans leur voisinage.

**Définition 5.2.** *Soit  $G$  un graphe, soit  $e$  une arête de  $G$  et soit  $L_i$ ,  $0 \leq i \leq \epsilon(e)$ , un ordre par niveaux de  $(G, e)$  :*

- deux sommets sont frères s'ils ne sont pas adjacents, sont sur le même niveau  $L_i$  pour un certain  $i$  et ont un voisin commun.
- deux sommets  $u$  et  $v$  sont cousins si  $d(u, v) = 3$  et dans tout chemin de longueur 3 entre  $u$  et  $v$ , il y a un voisin de  $u$  ou  $v$  dans un niveau inférieur à celui de  $u$  ou  $v$ .

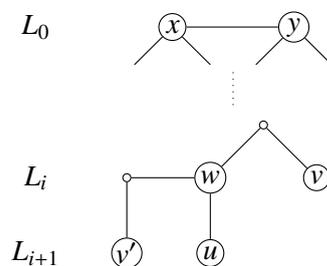


FIGURE 5.1 – Ordre par niveaux de  $(G, e)$ , pour  $G$  un graphe subcubique et  $e = xy$  une arête. Les sommets  $v$  et  $w$  sont frères et les sommets  $v$  et  $v'$  sont tous les deux cousins de  $u$ .

On note qu'un sommet a au plus un frère et deux cousins (voir la figure 5.1). Étant donnée une coloration partielle  $c$  de  $G$ , soit  $C_1(u) = \{c(v) : uv \in E(G)\}$ , soit  $C_2(u) = \{c(v) : d(u, v) = 2, \text{ avec } u, v \text{ non frères}\}$ , soit  $C_3(u) = \{c(v) : d(u, v) = 3, \text{ avec } u, v \text{ non cousins}\}$  et soit  $\tilde{C}_3(u) = \{c(v) \in \{2_a, 2_b, 3\}, \text{ avec } u, v \text{ cousins}\}$ .

## 5.1/ $(1, k, \dots, k)$ -COLORATION DES GRAPHES SUBCUBIQUES

La  $(1, k, \dots, k)$ -coloration des graphes subcubiques est étudiée pour  $k = 2$  et  $3$ .

### 5.1.1/ $(1, 3, \dots, 3)$ -COLORATION DES GRAPHES SUBCUBIQUES

La proposition suivante est utilisée pour obtenir une  $S$ -coloration des graphes subdivisés :

**Proposition 5.1.** *Soit  $G$  un graphe et soit  $S$  une liste croissante d'entiers. Si  $G$  est  $S$ -colorable, alors  $S(G)$  est  $(1, 2s_1 + 1, \dots, 2s_k + 1)$ -colorable.*

*Démonstration.* Soit  $c$  une  $S$ -coloration de  $G$ . Chaque paire de sommets  $\{u, v\} \in V(G)^2$  telle que  $d(u, v) \geq d + 1$  devient un  $(2d + 1)$ -packing dans  $S(G)$ . Par conséquent, tout ensemble de sommets dans  $V(G)$  formant un  $i$ -packing forme aussi un  $(2i + 1)$ -packing dans  $S(G)$ . En utilisant la couleur 1 sur les sommets subdivisés et en utilisant la coloration  $c$  (en considérant la série différemment) sur les sommets originaux, on obtient une  $(1, 2s_1 + 1, \dots, 2s_{|S|} + 1)$ -coloration de  $S(G)$ .  $\square$

**Corollaire 5.2.** *Pour tout graphe subcubique  $G$ ,  $S(G)$  est  $(1, 3, 3, 3)$ -colorable.*

*Démonstration.* Le théorème de Brooks [15] implique que tout graphe subcubique, sauf  $K_4$ , est  $(1, 1, 1)$ -colorable. Donc, en utilisant la proposition 5.1, tout graphe subcubique  $G$ , sauf  $K_4$ , est tel que  $S(G)$  est  $(1, 3, 3, 3)$ -colorable. On définit une  $(1, 3, 3, 3)$ -coloration de  $S(K_4)$  comme suit : soit  $\gamma : E(K_4) \rightarrow \{a, b, c\}$  une 3-coloration propre d'arêtes de  $K_4$ . On colore par la couleur 1 les quatre sommets non subdivisés de  $K_4$  et on met les couleurs  $3_{\gamma(e)}$  sur chaque sommet issu de la subdivision de l'arête  $e$  dans  $K_4$ .  $\square$

Goddard *et al.* [45] ont caractérisé les graphes  $(1, 3, 3)$ -colorables comme les graphes obtenus à partir d'un multi-graphe biparti en subdivisant chaque arête et en ajoutant des

feuilles sur les sommets originaux. On sait donc qu'il y a un certain nombre de graphes subcubiques pour lesquels le subdivisé n'est pas  $(1, 3, 3)$ -colorable (par exemple  $\mathcal{S}(C_3) = C_6$ ), ce qui montre que la borne sur le corollaire 5.2 est optimale dans le sens que tous les subdivisés de graphes subcubiques ne sont pas  $(1, 3, 3)$ -colorable.

### 5.1.2/ $(1, 2, \dots, 2)$ -COLORATION DES GRAPHES SUBCUBIQUES

On peut noter qu'aucun graphe cubique avec plus de 3 sommets n'est  $(1, 2, 2)$ -colorable puisqu'un graphe avec trois sommets de degré au moins trois à distance mutuelle inférieure à 2 n'est pas  $(1, 2, 2)$ -colorable. Il n'existe donc pas de graphe cubique  $(1, 2, 2)$ -colorable.

**Théorème 5.1.** *Tout graphe subcubique est  $(1, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$ -colorable.*

*Démonstration.* Soit  $G$  un graphe subcubique et soit  $e = xy$  une arête de  $E(G)$ . On définit un ordre par niveaux  $L_i$ , avec  $0 \leq i \leq r = \epsilon(e)$ , de  $(G, e)$ .

On commence par construire une coloration  $c$  des sommets de  $V(G)$  des niveaux  $r$  à 1 et avec les couleurs de l'ensemble  $C = \{1, 2_a, 2_b, 2_c, 2_d, 2_e, 2_f\}$  qui satisfait les propriétés suivantes :

- i) la couleur 1 est utilisée aussi souvent que possible, c'est à dire que quand on colore un sommet  $u$ , si aucun de ses voisins n'est coloré 1, alors  $u$  est coloré 1 ;
- ii) si  $u$  est coloré 2, alors il y a une couleur subsidiaire  $\tilde{c}(u) \in C$  différente de  $c(u)$  telle que  $\tilde{c}(u) \notin C_1(u) \cup C_2(u)$ , mais avec possiblement  $\tilde{c}(u) = c(v)$ , si  $u$  et  $v$  sont frères.

L'ensemble  $L_r$  induit une union disjointe de chemins et cycles dans  $G$ . Puisque les chemins et les cycles sont  $(1, 2, 2, 2)$ -colorables, on est capable de construire une coloration de  $L_r$  comme suit. On commence par colorer chaque chemin/cycle avec les couleurs  $\{1, 2_a, 2_b, 2_c\}$ . Pour chacune des paires de sommets  $\{u, v\}$  dans différents chemins/cycles et à distance mutuelle 2, tous les deux colorés  $2_a$  ( $2_b$  ou  $2_c$  respectivement), on affecte  $c(u) = 2_d$  ( $2_e$  ou  $2_f$ , respectivement). Ensuite, pour chaque sommet  $u$  de couleur  $2_a$  ( $2_b$ ,  $2_c$ ,  $2_d$ ,  $2_e$  ou  $2_f$ , respectivement), on affecte  $\tilde{c}(u) = 2_d$  ( $2_e$ ,  $2_f$ ,  $2_a$ ,  $2_b$  ou  $2_c$ , respectivement). La propriété ii) est donc satisfaite.

On suppose que l'on a déjà coloré tous les sommets de  $V(G)$  des niveaux  $r$  à  $i+1$  et que l'on va colorer un sommet  $u \in L_i$ , avec  $1 \leq i \leq r-1$ . Si  $1 \notin C_1(u)$ , alors on affecte  $c(u) = 1$  (la propriété i) est alors satisfaite). Maintenant, on a donc  $1 \in C_1(u)$  et il existe un sommet  $u_1$ , voisin de  $u$  et de couleur 1. Soit  $u_2$  l'autre voisin de  $u$ , s'il existe. Par construction, soit  $c(u_2) = 1$ , soit  $1 \in C_1(u_2)$ . On a donc  $|C_1(u) \cup C_2(u)| \leq 5$ . Dans ce cas, il y a au moins deux couleurs  $2_\alpha$  et  $2_\beta$  telles que  $\{2_\alpha, 2_\beta\} \subset C \setminus C_2(u)$ , pour certains  $\alpha, \beta \in \{a, \dots, f\}$ , avec possiblement, si  $u$  a un frère  $v$ ,  $2_\beta = c(v)$ . On affecte donc  $c(u) = 2_\alpha$  et  $\tilde{c}(u) = 2_\beta$  (la propriété ii) est alors satisfaite). La figure 5.2 illustre ce cas.

Finalement, il ne reste plus qu'à colorer les sommets dans  $L_0$ , c'est à dire les sommets  $x$  et  $y$ . Si  $1 \in C_1(x) \cap C_1(y)$ , alors, d'après la propriété i), le voisin  $x_2$  de  $x$  coloré 2, s'il existe, a un voisin coloré 1 et il en va de même pour  $y$ , avec  $y_2$  un voisin de  $y$  coloré 2, s'il existe. On a donc  $|C_1(x) \cup C_2(x)| \leq 5$ ,  $|C_1(y) \cup C_2(y)| \leq 5$  et il reste au moins une couleur  $2_\alpha$  disponible pour  $x$  et une couleur  $2_\beta$  disponible pour  $y$ . Si  $\alpha = \beta$ , alors on affecte  $c(x) = c(x_2)$ ,  $c(y) = c(y_2)$ ,  $c(x_2) = \tilde{c}(x_2)$  et  $c(y) = \tilde{c}(y_2)$ . La figure 5.3 illustre ce cas.

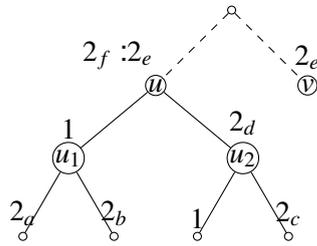


FIGURE 5.2 – Une configuration dans la preuve de la proposition 5.1, quand on colore un sommet  $u$ . La notation  $2_f : 2_e$  sur  $u$  signifie que  $c(u) = 2_f$  et  $\tilde{c}(u) = 2_e$ .

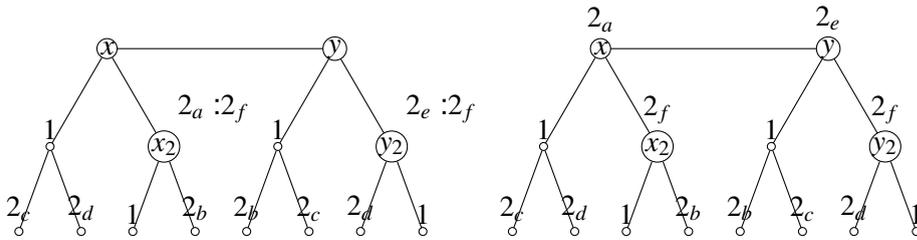


FIGURE 5.3 – Une configuration dans la preuve de la proposition 5.1, avant (sur la gauche) et après (sur la droite) avoir colorié  $x$  et  $y$ .

Si  $1 \in C_1(x)$  et  $1 \notin C_1(y)$  (ou  $1 \in C_1(y)$  et  $1 \notin C_1(x)$ , par symétrie), alors on affecte  $c(y) = 1$  et si  $C_2(x) = C$ , alors on affecte  $c(x) = c(x_2)$  et  $c(x_2) = \tilde{c}(x_2)$ , sinon on donne à  $x$  une couleur disponible.

Autrement, si  $1 \notin C_1(x) \cup C_1(y)$ , on affecte  $c(y) = 1$  et on montre qu'il y a toujours une couleur 2 disponible à affecter à  $x$ . Si  $|C_1(x) \cup C_2(x)| \leq 6$ , alors il y a une couleur disponible pour  $x$ . Sinon, soient  $x_1$  et  $x_2$  les deux voisins de  $x$  autres que  $y$  et soit  $x'_1$  ( $x'_2$ , respectivement) le voisin de  $x_1$  ( $x_2$ , respectivement) colorié 2 autre que  $x$  (au plus un, car  $x_1$  et  $x_2$  ont, tous les deux, un voisin colorié 1). On suppose, sans perte de généralité, que  $c(x_1) = 2_a$ ,  $c(x_2) = 2_b$ ,  $c(x'_1) = 2_c$  et  $c(x'_2) = 2_d$ . Si  $\tilde{c}(x_1) \in \{2_d, 2_e, 2_f\}$ , alors on recolore  $x_1$  par sa couleur subsidiaire  $\tilde{c}(x_1)$  et on affecte  $c(x) = 2_a$ . De façon similaire, si  $\tilde{c}(x_2) \in \{2_c, 2_e, 2_f\}$ , alors on recolore  $x_2$  par sa couleur subsidiaire  $\tilde{c}(x_2)$  et on affecte  $c(x) = 2_b$ . Sinon, en excluant les configurations précédentes, on a  $\tilde{c}(x_1) = 2_b$  et  $\tilde{c}(x_2) = 2_a$ . On recolore  $x'_1$  par sa couleur subsidiaire  $\tilde{c}(x'_1)$  et on affecte  $c(x) = 2_c$ . Si  $\tilde{c}(x'_1) = 2_a = c(x_1)$ , dans ce cas, on échange les couleurs de  $x_1$  et  $x_2$  (c'est possible car  $\tilde{c}(x_1) = c(x_2)$  et  $\tilde{c}(x_2) = c(x_1)$ ). La figure 5.4 illustre ce cas.

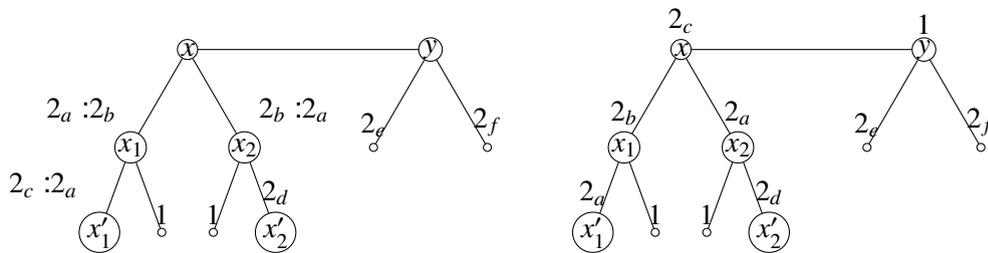


FIGURE 5.4 – Une configuration dans la preuve de la proposition 5.1, avant (sur la gauche) et après (sur la droite) avoir colorié  $x$  et  $y$ .

Dans tous les cas, on obtient donc une  $(1, 2, 2, 2, 2, 2)$ -coloration de  $G$ . □

Le graphe de Petersen est un exemple de graphe cubique qui n'est pas  $(1, 2, 2, 2, 2, 2)$ -colorable, ce qui montre que le résultat de la proposition 5.1 est optimal dans le sens où tous les graphes subcubiques ne sont pas  $(1, 2, 2, 2, 2, 2)$ -colorables. Cependant, les expérimentations menées, sur les graphes cubiques d'au plus 22 sommets reportées dans le tableau 5.1, suggèrent que le graphe de Petersen pourrait être le seul graphe subcubique non  $(1, 2, 2, 2, 2, 2)$ -colorable.

$n \setminus S$	$(1, 2, 2, 2)$	$(1, 2, 2, 2, 2)$	$(1, 2, 2, 2, 2, 2)$	$(1, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
4	1	0	0	0
6	1	1	0	0
8	2	1	2	0
10	11	7	0	1
12	11	74	0	0
14	254	250	5	0
16	1031	3017	12	0
18	15960	25297	44	0
20	178193	332045	251	0
22	2481669	4835964	1814	0

TABLE 5.1 – Nombre  $S$ -chromatique des graphes cubique d'ordre  $n$ , pour  $n \leq 22$ .

Comme la proposition suivante le montre, même certains graphes cubiques bipartis ne sont pas  $(1, 2, 2, 2, 2, 3)$ -colorable.

**Proposition 5.3.** *Il existe un graphe cubique biparti qui n'est pas  $(1, 2, 2, 2, 2, 3)$ -colorable.*

*Démonstration.* Le graphe cubique décrit dans la figure 5.5 est biparti et est  $(1, 2, 2, 2, 2, 2)$ -colorable, comme l'illustre la figure 5.5. Soit  $(A, B)$  les deux sous-ensembles de sommets qui forment une bipartition du graphe. On suppose que le graphe est  $(1, 2, 2, 2, 2, 3)$ -colorable et soit  $c$  une  $(1, 2, 2, 2, 2, 3)$ -coloration du graphe et  $X_1$  l'ensemble des sommets colorés 1. On remarque que la cardinalité de n'importe quel 2-packing est au plus 2 et que chaque paire de sommets  $\{u, v\}$  incluse dans  $A$  ou dans  $B$  est telle que  $d(u, v) \leq 2$ . On a  $|X_1| \geq 5$ , car au plus un sommet peut être coloré 3 (comme le diamètre du graphe est 3) et au plus deux sommets peuvent être colorés par la même couleur 2.

Premièrement, si  $X_1 \subseteq A$  ou  $X_1 \subseteq B$ , alors chaque sommet restant doit être coloré différemment dans l'autre partition, ce qui est impossible puisque  $|A| = |B| = 7$ .

Deuxièmement, s'il y a des sommets colorés 1 dans  $A$  et  $B$ , alors la seule possibilité pour avoir  $|X_1| \geq 5$  est d'avoir un sommet coloré 1 dans une partition et quatre sommets colorés 1 dans l'autre partition. On suppose, sans perte de généralité, que  $|X_1 \cap A| = 1$  et  $|X_1 \cap B| = 4$ . Exactement trois sommets ne sont pas colorés 1 dans  $B$ . Par conséquent seules trois paires de sommets peuvent avoir la même couleur 2 et les neufs sommets non colorés 1 ne peuvent pas être tous colorés avec les couleurs 2 et 3 restantes. □

Les prochains résultats montrent qu'il existe des sous-familles de graphes subcubiques qui peuvent être colorés avec moins de couleurs. On rappelle qu'un graphe 3-irrégulier est un graphe subcubique où les sommets de degré 3 forment un ensemble stable.

**Théorème 5.2.** *Tout graphe 3-irrégulier subcubique est  $(1, 2, 2, 2)$ -colorable.*

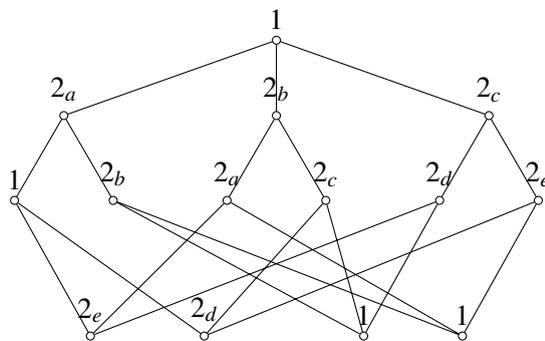


FIGURE 5.5 – Un graphe cubique  $(1, 2, 2, 2, 2)$ -chromatique d'ordre 14.

*Démonstration.* Soit  $G$  un graphe 3-irrégulier et soit  $e = xy$  n'importe quelle arête de  $E(G)$  telle que  $x$  et  $y$  sont tous les deux de degré au plus 2. Si une telle arête n'existe pas, alors le graphe est la subdivision  $S(H)$  (auquel éventuellement on a rajouté certaines feuilles sur des sommets) d'un graphe cubique  $H$  et  $G$  est donc  $(1, 3, 3, 3)$ -colorable par le corollaire 5.2. On définit un ordre par niveaux  $L_i$ , avec  $0 \leq i \leq r = \epsilon(e)$ , de  $(G, e)$ .

On construit une coloration  $c$  des sommets de  $V(G)$  des niveaux  $r$  à 1 et avec des couleurs dans l'ensemble  $\{1, 2_a, 2_b, 2_c\}$ , qui satisfait les propriétés suivantes :

- i) la couleur 1 est utilisée autant que possible, c'est à dire que quand on colore un sommet  $u$ , si aucun voisin n'est coloré 1, alors  $u$  est coloré 1 ;
- ii) tout sommet de degré 2 est coloré 1 quand on colore des sommets dans  $L_i$ , sauf si la composante connexe contenant ce sommet dans  $L_i$  est un chemin d'ordre 2 (dans ce cas, un des deux sommets est coloré 1).

L'ensemble  $L_r$  induit une union disjointe de chemins d'ordre au plus 3 dans  $G$ . Puisque les chemins sont  $(1, 2, 2)$ -colorables,  $L_r$  est  $(1, 2, 2)$ -colorable. De plus, pour tout chemin d'ordre 3 dans  $L_r$ , le sommet central est de degré 3, donc la couleur 1 peut être donnée à tout sommet de degré 2. Si le chemin est d'ordre 2, un des sommets est coloré 1. Donc, les propriétés i) et ii) sont satisfaites.

On suppose que l'on a coloré tous les sommets de  $V(G)$  des niveaux allant de  $r$  à  $i + 1$  et que l'on va colorer le sommet  $u \in L_i$ , avec  $1 \leq i \leq r - 1$ .

**Cas 1.** On suppose que  $u$  est de degré 3.

Si  $1 \notin C_1(u)$ , alors  $u$  peut être coloré 1. Soient  $u_1$  et  $u_2$  les voisins colorés de  $u$ , avec  $c(u_1) = 1$ . D'après la propriété i), un voisin coloré de  $u_2$  est de couleur 1. Donc, on a  $|C_1(u) \cup C_2(u)| \leq 3$  et  $u$  peut être coloré par une couleur 2.

**Cas 2.** On suppose que  $u$  est de degré au plus 2.

Soit  $u_1$  le voisin coloré de  $u$ , s'il existe. Si  $u_1$  est de degré 3, soient  $u_{1,1}$  et  $u_{1,2}$  les voisins colorés de  $u$ ,  $u_{1,1,1}$  le voisin de  $u_{1,1}$  différent de  $u$  et  $u_{1,2,1}$  le voisin de  $u_{1,2}$  différent de  $u$ . Si  $1 \notin C_1(u)$ , alors on peut affecter  $c(u) = 1$ . Sinon, on a  $c(u_1) = 1$  et donc  $c(u_{1,1}) \neq 1$  et  $c(u_{1,2}) \neq 1$ . D'où,  $c(u_{1,1,1}) = c(u_{1,2,1}) = 1$ . Donc,  $u_1$  peut être recoloré par une couleur 2 et on peut affecter  $c(u) = 1$ . Si  $u_1$  est de degré au plus 2, donc, comme  $|C_1(u_1) \cup C_2(u_1)| \leq 3$ , on peut recolorer  $u_1$  par une couleur 2. On peut donc affecter  $c(u) = 1$ .

Finalement, il reste à colorer les sommets de  $L_0$ , c'est à dire les sommets  $x$  et  $y$ . Soit  $x_1$  l'éventuel voisin de  $x$  différent de  $y$  et soit  $y_1$  l'éventuel voisin de  $y$  différent de  $x$ . On

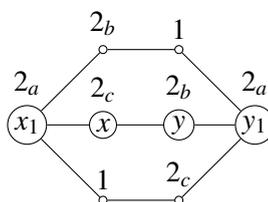


FIGURE 5.6 – Le graphe  $G_{(1,2,2,2)}$  de la proposition 5.2.

considère trois cas qui recouvrent toutes les possibilités par symétrie :

**Cas 1.**  $x_1$  et  $y_1$  sont tous les deux de degré 3.

Si leurs voisins différents de  $x$  et  $y$  ne sont pas adjacents entre eux, alors, d'après la propriété ii), ces sommets sont de couleur 1 et  $x_1$  et  $y_1$  sont de couleur 2. Nous pouvons donc affecter  $c(x) = 1$  et une couleur 2 restante à  $y$ , car  $|C_1(y) \cup C_2(y)| \leq 3$ . On suppose que deux paires de voisins de  $x_1$  et  $y_1$  différentes de  $x$  et  $y$  sont adjacents. Ce graphe est donc le graphe  $G_{(1,2,2,2)}$  de la figure 5.6 et est  $(1, 2, 2, 2)$ -colorable. On suppose que seulement deux voisins de  $x_1$  et  $y_1$  différents de  $x$  et  $y$  sont adjacents. Soient  $x_{1,1}$  et  $y_{1,1}$  ces deux voisins, les autres voisins sont colorés 1, d'après la propriété ii). Un de ces sommets est coloré 1 et l'autre sommet est coloré 2. On suppose, sans perte de généralité, que  $c(x_{1,1}) = 1$ . On a donc  $|C_1(x) \cup C_2(x)| \leq 3$  et on peut colorer  $x$  par une couleur 2 et affecter  $c(y) = 1$ .

**Cas 2.**  $x_1$  est de degré au plus 2 et  $y_1$  est de degré 3.

D'après la propriété ii),  $x_1$  est coloré 1. Comme  $|C_1(y_1) \cup C_2(y_1)| \leq 3$ , alors  $y_1$  peut être recoloré par une couleur 2. On peut donc affecter  $c(y) = 1$ , et comme  $|C_1(x) \cup C_2(x)| \leq 3$ , on peut affecter une couleur 2 à  $x$ .

**Cas 3.**  $x_1$  et  $y_1$  sont tous les deux de degré au plus 2.

Si  $x_1$  et  $y_1$  sont adjacents, alors le graphe  $C_4$  est trivialement  $(1, 2, 2, 2)$ -colorable. Si  $x_1$  et  $y_1$  ne sont pas adjacents, alors ces deux sommets ont tous les deux la couleur 1 et on a  $|C_1(x) \cup C_2(x)| \leq 2$  et  $|C_1(y) \cup C_2(y)| \leq 2$ . On peut donc affecter des couleurs 2 à  $x$  et  $y$ .

On obtient donc une  $(1, 2, 2, 2)$ -coloration de  $G$  dans tous les cas. □

On remarque qu'un 5-cycle  $C_5$  est un graphe subcubique 3-irrégulier et non  $(1, 2, 2)$ -colorable, le résultat de la proposition 5.2 est donc optimal dans le sens où tous les graphes subcubiques 3-irréguliers ne sont pas  $(1, 2, 2)$ -colorables. Cependant, il y a des graphes subcubiques 3-irréguliers  $(1, 2, 2, 3)$ -colorables. Le graphe de la figure 5.6 est un tel exemple (le sommet  $x$  peut être recoloré 1 et donc une couleur  $2_c$  peut être remplacée par une couleur 3).

On finit cette section avec des résultats sur les graphes subdivisés.

**Proposition 5.4.** *Pour tout graphe  $G$  avec  $\delta(G) \geq 3$ , si  $S(G)$  est  $(1, 2, 2)$ -colorable, alors  $G$  est biparti.*

*Démonstration.* On suppose que  $S(G)$  est  $(1, 2, 2)$ -colorable et que  $G$  contient un cycle de longueur impaire. Dans toute  $(1, 2, 2)$ -coloration d'un graphe, tout sommet de degré au moins 3 doit être coloré 2 (si un sommet de degré au moins 3 est coloré 1, la coloration ne peut être étendue aux voisins de ces sommets). Donc, si  $G$  contient un cycle de longueur

impaire, alors  $S(G)$  contient un cycle avec un nombre impair de sommets de degré 3 et les couleurs  $2_a$  et  $2_b$  ne sont pas suffisantes pour, de façon alternée, colorer ces sommets. Donc  $S(G)$  n'est pas  $(1, 2, 2)$ -colorable.  $\square$

Comme tout graphe biparti  $G$  est  $(1, 1)$ -colorable alors, en utilisant la proposition 5.1,  $S(G)$  est  $(1, 3, 3)$ -colorable (et donc  $(1, 2, 2)$ -colorable et  $(1, 2, 3)$ -colorable). On obtient donc le corollaire suivant :

**Corollaire 5.5.** *Pour tout graphe  $G$  avec  $\delta(G) \geq 3$ ,*

$$S(G) \text{ (1, 2, 2)-colorable} \Leftrightarrow S(G) \text{ (1, 2, 3)-colorable} \Leftrightarrow S(G) \text{ (1, 3, 3)-colorable} \Leftrightarrow G \text{ biparti.}$$

## 5.2/ $(1, 1, 2, \dots)$ -COLORATION DES GRAPHES SUBCUBIQUES

On rappelle que tous les graphes bipartis sont  $(1, 1)$ -colorables. Pour les graphes subcubiques non bipartis, on prouve le résultat suivant :

**Théorème 5.3.** *Tout graphe subcubique est  $(1, 1, 2, 2, 3)$ -colorable.*

*Démonstration.* Soit  $G$  un graphe subcubique et soit  $e = xy$  n'importe quelle arête de  $G$ . On définit un ordre par niveaux  $L_i$ , avec  $0 \leq i \leq r = \epsilon(e)$ , de  $(G, e)$ .

On construit une coloration  $c$  des sommets de  $V(G)$  des niveaux  $r$  à 1 et avec des couleurs dans l'ensemble  $\{1_a, 1_b, 2_a, 2_b, 3\}$ , qui satisfait les propriétés suivantes :

- i) les couleurs 1 sont utilisées aussi souvent que possible, c'est à dire que quand on colore un sommet  $u$  et aucun voisin de  $u$  n'est coloré  $1_a$ , alors on colore  $u$  par la couleur  $1_a$  et si aucun voisin de  $u$  n'est coloré  $1_b$ , alors on colore  $u$  par la couleur  $1_b$  ;
- ii) si  $u$  est coloré 2 ou 3, alors, sauf dans le cas où  $u$  et un frère de  $u$  sont tous les deux colorés 2,  $u$  a une couleur subsidiaire  $\tilde{c}(u) \in \{2_a, 2_b, 3\}$  différente de  $c(u)$  telle que :
  - $\tilde{c}(u) \notin C_1(u) \cup C_2(u) \cup C_3(u)$ , mais avec possiblement  $\tilde{c}(u) \in \tilde{C}_3(v)$ , si  $\tilde{c}(u) = 3$  ;
  - $\tilde{c}(u) \notin C_1(u) \cup C_2(u)$ , sinon ;
- iii) si  $u$  est coloré 3, alors son frère (s'il existe) est coloré  $1_a$  ou  $1_b$ .

On commence par rappeler que, d'après la propriété i), les sommets qui ont une couleur parmi  $\{2_a, 2_b, 3\}$  ont des voisins dans le même niveau ou dans un niveau supérieur colorés  $1_a$  et  $1_b$ . Aussi, en utilisant les propriétés ii) et iii), on affirme la propriété suivante.

**Affirmation 5.1.** *Soient  $u$  et  $v$  deux cousins tels que  $\tilde{c}(u) = 3$  et  $c(v) = 3$ . Si il n'y a pas de sommets à distance au plus 2 de  $v$  dans les niveaux inférieurs colorés par  $\{\tilde{c}(v)\} \cap \{2_a, 2_b\}$  et aucun sommet à distance au plus 3 de  $u$  coloré de la couleur 3 dans les niveaux inférieurs, alors  $u$  et  $v$  peuvent être recolorés de telle façon que  $c(u) = 3$ .*

L'ensemble  $L_r$  induit une union disjointe de chemins et cycles dans  $G$ . Puisque les chemins et les cycles sont  $(1, 1, 2)$ -colorables, on est capable de construire une coloration de  $L_r$  comme suit. On commence par colorer chaque chemin/cycle avec les couleurs  $\{1_a, 1_b, 2_a\}$ , en utilisant une couleur  $2_a$  par cycle de longueur impaire (et pas de couleur 2 pour les cycles pairs). Pour chacune des paires de sommets dans différents chemins/cycles et à distance mutuelle 2, tous les deux colorés  $2_a$ , on recolore un des sommets avec la couleur  $2_b$ . Donc, les propriétés i), ii) et iii) sont satisfaites.

On suppose que l'on a déjà colorié tous les sommets de  $V(G)$  des niveaux allant de  $r$  à  $i + 1$  et que l'on va colorer le sommet  $u \in L_i$ , avec  $1 \leq i \leq r - 1$ . Si  $C_1(u) \not\subseteq \{1_a, 1_b\}$ , alors on donne à  $u$  la couleur 1 disponible. La propriété i) est donc satisfaite et on peut supposer que  $u$  a deux voisins dans  $L_i \cup L_{i+1}$ , appelons les  $u_1$  et  $u_2$ , tels que  $c(u_1) = 1_a$  et  $c(u_2) = 1_b$ . De plus, on peut supposer que  $u_1$  a un voisin  $u_{1,1}$  de couleur  $1_b$  et  $u_2$  a un voisin  $u_{2,1}$  de couleur  $1_a$ , puisque sinon  $u$  serait colorable par la couleur  $1_a$  ou  $1_b$ , après avoir recoloré les sommets  $u_1$  ou  $u_2$ . Soit  $u_{1,2}$  l'autre voisin de  $u_1$  différent de  $u$ , s'il existe, avec  $c(u_{1,2}) = \alpha$  et soit  $u_{2,2}$  l'autre voisin de  $u_2$  différent de  $u$ , s'il existe, avec  $c(u_{2,2}) = \beta$ . On considère trois cas qui dépendent des valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  :

- **Cas 1** :  $\alpha = 1_b$  et  $\beta = 1_a$ . On affecte  $c(u) = 2_a$  ou  $c(u) = 2_b$ , si le frère de  $u$  est coloré  $2_a$  ou  $2_b$  et  $\tilde{c}(u) = 2_b$ , si  $u$  n'a pas de frère coloré 2. La propriété ii) est donc satisfaite.
- **Cas 2** :  $\alpha = 1_b$  et  $\beta \neq 1_a$  (ou  $\alpha \neq 1_b$  et  $\beta = 1_a$ , par symétrie). Comme  $u_{2,2}$  n'a pas de frère coloré par une couleur 2, alors il a une couleur subsidiaire d'après la propriété ii).
  - Si  $c(u_{2,2}) \cup \tilde{c}(u_{2,2}) \neq \{2_a, 2_b\}$ , alors on affecte  $c(u_{2,2}) = 3$  (éventuellement, si  $u_{2,2}$  a un cousin  $z$  coloré 3, on peut voir que  $u_{2,2}$  et  $z$  satisfont la condition de l'affirmation 5.1, la couleur de  $z$  peut donc être changée par sa couleur subsidiaire). On peut donc affecter  $c(u) = 2_a$  et  $\tilde{c}(u) = 2_b$ , ou  $c(u) = 2_b$ , si le frère de  $u$  est coloré  $2_a$ , et la propriété ii) est satisfaite.
  - Si  $c(u_{2,2}) \cup \tilde{c}(u_{2,2}) = \{2_a, 2_b\}$  et le frère de  $u$  est coloré 2, alors on donne une couleur appropriée à  $u_{2,2}$  de sorte que  $u$  a une couleur différente de celle de son frère.
  - Si  $c(u_{2,2}) \cup \tilde{c}(u_{2,2}) = \{2_a, 2_b\}$  et  $u$  n'a pas de frère coloré 2. On suppose, sans perte de généralité que  $c(u_{2,2}) = 2_a$ . Comme  $u_{2,1}$  est coloré  $1_a$ , il a un voisin coloré  $1_b$  différent de  $u_2$  (sinon,  $u_{2,1}$  et  $u_2$  peuvent être recolorés et on peut donner une couleur 1 à  $u$ ). Si l'autre voisin de  $u_{2,1}$  est coloré 3, alors on change sa couleur par sa couleur subsidiaire, en utilisant l'affirmation 5.1. Puisque les sommets  $u_{1,1}$  et  $u_{1,2}$  sont tous les deux colorés  $1_b$ , ils peuvent avoir des voisins colorés  $2_a$  et  $2_b$  ou ces sommets peuvent avoir un voisin coloré  $1_a$  différent de  $u_1$  et un autre voisin différent de  $u_1$  de n'importe quelle couleur. Dans le dernier cas, on recoloré les possibles voisins de ces sommets colorés 3 par leurs couleurs subsidiaires, en utilisant l'affirmation 5.1. Ensuite, on affecte  $c(u) = 2_b$  et  $\tilde{c}(u) = 3$ .
- **Cas 3** :  $\alpha, \beta \in \{2_a, 2_b, 3\}$ . L'ensemble  $A = (c(u_{1,2}) \cup \tilde{c}(u_{1,2})) \cap (c(u_{2,2}) \cup \tilde{c}(u_{2,2}))$  n'est pas vide dans ce cas. Si  $3 \in A$ , alors on affecte  $c(u_{1,2}) = 3$  et  $c(u_{2,2}) = 3$  et on affecte  $c(u) = 2_a$  et  $\tilde{c}(u) = 2_b$ , ou  $c(u) = 2_b$ , si le frère de  $u$  est coloré  $2_a$ . La propriété ii) est donc satisfaite. Sinon, si  $3 \notin A$  et  $u$  a un frère coloré 2, alors on change les couleurs de  $u_{1,2}$  et de  $u_{2,2}$  par une couleur appropriée et on donne une couleur 2 à  $u$ . Sinon, si  $3 \notin A$  et  $u$  n'a pas de voisin coloré 2, alors on donne la couleur  $2_\delta \in A$ , avec  $\delta \in \{a, b\}$ , à  $u_{1,2}$  et  $u_{2,2}$  et on recoloré chacun des sommets à distance au plus 3 de  $u$ , par leurs couleurs subsidiaires (il y a au plus deux sommets colorés 3, par hypothèse). On affecte donc  $c(u) = 2_\beta$  et  $\tilde{c}(u) = 3$ , avec  $\beta \neq \alpha$  et  $\beta \in \{a, b\}$ , et la propriété ii) est satisfaite. La propriété iii) est satisfaite car la couleur 3 a été donnée à des sommets qui n'ont pas de frère coloré 2.

Il ne reste plus qu'à colorer les sommets de  $L_0$ , c'est à dire les sommets  $x$  et  $y$ . Soient  $x_1$  et  $x_2$  les éventuels voisins de  $x$ , différents de  $y$ , et  $y_1$  et  $y_2$  les éventuels voisins de  $y$ , différents de  $x$ . On considère sept cas qui couvrent toutes les configurations possibles pour les couleurs des voisins de  $x$  et  $y$  (pour simplifier, les configurations qui peuvent être obtenues en échangeant  $x$  et  $y$  sont omises) :

- **Cas 1** :  $1_a \notin C_1(x)$  et  $1_b \notin C_1(y)$ . On affecte  $c(x) = 1_a$  et  $c(y) = 1_b$ .
- **Cas 2** :  $C_1(x) = \{1_a, \alpha\}$  et  $C_1(y) = \{1_a\}$ , avec  $\alpha \in \{2_a, 2_b, 3\}$ . On affecte  $c(y) = 1_b$ . On suppose que  $c(x_1) = 1_a$  et  $c(x_2) = \alpha$ . Le sommet  $x_1$  a un voisin coloré  $1_b$  (sinon on serait

dans le premier cas, en recolorant  $x_1$ ). Soit  $x_{1,1}$  le possible voisin de  $x_1$  non coloré  $1_b$  et  $\beta$  sa couleur. On recolore  $x_{1,1}$  par sa couleur subsidiaire, si  $\alpha \neq \beta$  et  $\alpha, \beta \in \{2_a, 2_b\}$ , puis on donne la couleur 2 restante à  $x$ .

- **Cas 3** :  $C_1(x) = \{\alpha, \beta\}$  et  $C_1(y) = \{1_a\}$ , avec  $\alpha, \beta \in \{1_a, 1_b\}$ . On affecte  $c(y) = 1_b$ . Un sommet parmi  $x_1$  et  $x_2$  a un voisin coloré  $1_b$  (sinon on serait dans le premier cas, en recolorant  $x_1$  et  $x_2$ ). On suppose que c'est le sommet  $x_1$  qui a un voisin coloré  $1_b$ . Deux cas peuvent arriver pour  $x_2$ , soit  $C_1(x_2) = \{2_a, 2_b\}$  et donc  $C_2(x_2) = \{1_a, 1_b, 2_a, 2_b\}$ , soit  $C_1(x_2) = \{\gamma, \delta\}$ , avec  $\gamma \in \{1_a, 1_b\}$  et  $\delta \in \{1_a, 1_b, 2_a, 2_b, 3\}$ . Dans les deux cas, on recolore tout sommet à distance au plus 3 de  $x$  coloré 3 par sa couleur subsidiaire (d'après la propriété iii), un tel sommet n'a pas de frère coloré 2) et on affecte  $c(x) = 3$ .
- **Cas 4** :  $C_1(x) = \{1_a, 1_b\}$  et  $C_1(y) = \{2_a, 2_b\}$ . On affecte  $c(y) = 1_b$ . On suppose, sans perte de généralité, que  $c(x_1) = 1_a$  et  $c(x_2) = 1_b$ . On a  $1_b \in C_1(x_1)$  et  $1_a \in C_1(x_2)$  (sinon on serait dans le premier cas, en recolorant  $x_1$  ou  $x_2$ ). On recolore tout sommet à distance au plus 3 de  $x$  coloré 3 par sa couleur subsidiaire (d'après la propriété iii), un tel sommet n'a pas de frère coloré 2) et on affecte  $c(x) = 3$ .
- **Cas 5** :  $C_1(x) = \{1_a, \alpha\}$  et  $C_1(y) = \{1_a, \beta\}$ , avec  $\alpha \in \{2_a, 2_b, 3\}$  et  $\beta \in \{2_a, 2_b, 3\}$ . On affecte  $c(y) = 1_b$ . On suppose que  $c(x_1) = 1_a$  et  $c(x_2) = \alpha$ , que  $x_1$  a un voisin coloré  $1_b$  (sinon on serait dans le premier cas, en recolorant  $x_1$ ) et que  $x_2$  a deux voisins colorés  $1_a$  et  $1_b$  (par la propriété i)). Si  $\alpha = 3$ , alors on change la couleur de  $x_2$  par sa couleur subsidiaire  $\alpha'$ . Soit  $\gamma \in \{2_a, 2_b\}$  tel que  $\gamma \neq \alpha$  et  $\gamma \neq \alpha'$ , si  $\alpha = 3$ . On recolore tout sommet à distance au plus 2 de  $x$  coloré  $\gamma$  par sa couleur subsidiaire et on affecte  $c(x) = \gamma$ .
- **Cas 6** :  $C_1(x) = \{1_a, 1_b\}$  et  $C_1(y) = \{1_a, \alpha\}$ , avec  $\alpha \in \{2_a, 2_b, 3\}$ . On affecte  $c(y) = 1_b$ . On suppose que  $c(x_1) = 1_a$  et  $c(x_2) = 1_b$ , que  $x_1$  a un voisin coloré  $1_b$  (sinon on serait dans le premier cas, en recolorant  $x_1$ ) et que  $x_2$  a un voisin coloré  $1_a$  (sinon on serait dans le deuxième cas, en recolorant  $x_2$ ). On recolore tout sommet à distance au plus 2 de  $x$  coloré  $2_a$  par sa couleur subsidiaire et on affecte  $c(x) = 2_a$ .
- **Cas 7** :  $C_1(x) = \{1_a, 1_b\}$  et  $C_1(y) = \{1_a, 1_b\}$ . On suppose que  $c(x_1) = 1_a$  et  $c(x_2) = 1_b$ , que  $x_1$  a un voisin coloré  $1_b$  et que  $x_2$  a un voisin coloré  $1_a$  (sinon on serait dans le premier cas, en recolorant  $x_1$  ou  $x_2$ ). On recolore chacun des voisins de  $x_1$  ou  $x_2$  coloré  $2_a$  par leurs couleurs subsidiaires (leurs frères sont colorés 1) et on affecte  $c(x) = 2_a$ . On recolore chacun des voisins de  $y_1$  ou  $y_2$  coloré  $2_b$  par leurs couleurs subsidiaires (leurs frères sont colorés 1) et on affecte  $c(y) = 2_b$ .

Dans tous les cas, on obtient donc une  $(1, 1, 2, 2, 3)$ -coloration de  $G$ . □

Le graphe de Petersen est un exemple de graphe cubique qui n'est pas  $(1, 1, 2, 2)$ -colorable, montrant que le résultat de la proposition 5.3 est optimal dans le sens où tous les graphes cubiques ne sont pas  $(1, 1, 2, 2)$ -colorables. Cependant, les expérimentations menées suggèrent que le graphe de Petersen pourrait être le seul graphe subcubique non  $(1, 1, 2, 3)$ -colorable, comme l'illustre le tableau 5.2.

De plus, le résultat suivant montre que deux couleurs 2 ne peuvent pas être remplacées par deux couleurs 3 dans la proposition précédente.

**Proposition 5.6.** *Il existe des graphes cubiques, différent du graphe de Petersen, non  $(1, 1, 3, 3, 3)$ -colorables.*

*Démonstration.* On considère le graphe de la figure 5.7. Puisque ce graphe est de diamètre 3, pas plus d'un sommet ne peut être coloré 3. De plus, ce graphe contient quatre triangles et chacun des triangles doit contenir un sommet non coloré 1. Il est donc impossible de colorer ce graphe avec la liste  $(1, 1, 3, 3, 3)$ . □

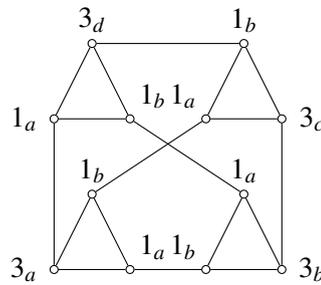


FIGURE 5.7 – Un graphe cubique non  $(1, 1, 3, 3, 3)$ -colorable d'ordre 12.

$n \setminus S$	$(1, 1)$	$(1, 1, 2)$	$(1, 1, 2, 3)$	$(1, 1, 2, 3, 3)$
4	0	0	1	0
6	1	0	1	0
8	1	2	2	0
10	2	9	7	1
12	5	42	38	0
14	13	314	182	0
16	38	2808	1214	0
18	149	32766	8386	0
20	703	423338	86448	0
22	4132	6212201	1103114	0

TABLE 5.2 – Nombre  $S$ -chromatique des graphes cubiques d'ordre  $n$ , pour  $n \leq 22$ .

On montre maintenant que tous les graphes subcubiques 3-irréguliers sont  $(1, 1, 2)$ -colorables. Pour un graphe subdivisé  $S(G)$  de n'importe quel graphe  $G$ , on note que  $S(G)$  est  $(1, 1)$ -colorable car un graphe subdivisé est biparti.

**Proposition 5.7.** *Tout graphe subcubique 3-irrégulier est  $(1, 1, 2)$ -colorable.*

*Démonstration.* Soit  $G$  un graphe 3-irrégulier subcubique et soit  $e = xy$  n'importe quelle arête de  $E(G)$  telle que  $x$  et  $y$  sont tous les deux de degré au plus 2. Si une telle arête n'existe pas, alors le graphe est biparti et par conséquent  $(1, 1)$ -colorable.

On définit un ordre par niveaux  $L_i$ , avec  $0 \leq i \leq r = \epsilon(e)$ , de  $(G, e)$ .

On construit une coloration  $c$  des sommets de  $V(G)$  allant des niveaux  $r$  à 1 et avec des couleurs dans l'ensemble  $\{1_a, 1_b, 2\}$ , qui satisfait la propriété suivante :

- i) aucun sommet de degré au plus 2 n'est coloré 2.

L'ensemble  $L_r$  induit une union disjointe de chemins d'ordre au plus 3 dans  $G$ . Puisque les chemins sont  $(1, 1)$ -colorables,  $L_r$  est  $(1, 1)$ -colorable. La propriété i) est donc satisfaite.

On suppose que l'on a déjà coloré tous les sommets  $V(G)$  des niveaux allant de  $r$  à  $i + 1$  et que l'on va colorer un sommet  $u \in L_i$ , avec  $1 \leq i \leq r - 1$ . Si  $u$  est de degré au plus 2, alors  $\{1_a, 1_b\} \not\subseteq C_1(u)$ . Le sommet  $u$  peut donc être coloré  $1_a$  ou  $1_b$  et la propriété i) est satisfaite. Si  $u$  est de degré 3 et si  $C_1(u) \neq \{1_a, 1_b\}$ , alors  $u$  peut être coloré  $1_a$  ou  $1_b$ . Sinon, si  $C_1(u) = \{1_a, 1_b\}$ , soient  $u_1$  et  $u_2$  les voisins colorés de  $u$ , avec  $c(u_1) = 1_a$  et  $c(u_2) = 1_b$ . Le sommet  $u_1$  a un voisin coloré  $1_b$  et le sommet  $u_2$  a un voisin coloré  $1_a$ , sinon  $u_1$  et  $u_2$  pourraient être recolorés et  $u$  pourrait être coloré  $1_a$  ou  $1_b$ . On a donc  $C_1(u) \cup C_2(u) = \{1_a, 1_b\}$  et on peut affecter la couleur 2 à  $u$ .

Finalement, il reste à colorer les sommets de  $L_0$ , c'est à dire les sommets  $x$  et  $y$ . Si  $1_a \notin C_1(x)$  et  $1_b \notin C_1(y)$  (ou, symétriquement,  $1_b \notin C_1(x)$  et  $1_a \notin C_1(y)$ ), alors on affecte  $c(x) = 1_a$  et  $c(y) = 1_b$  (ou, symétriquement,  $c(x) = 1_b$  et  $c(y) = 1_a$ ). Soit  $x_1$  l'éventuel voisin de  $x$  différent de  $y$  et soit  $y_1$  l'éventuel voisin de  $y$  différent de  $x$ . Sans perte de généralité, on suppose que  $c(x_1) = 1_a$  et  $c(y_1) = 1_a$ . On suppose que  $x_1$  est de degré au plus 2. Si  $C_1(x_1) = \{2\}$ , alors  $x_1$  peut être recoloré  $1_b$  et on peut affecter  $c(x) = 1_a$  et  $c(y) = 1_b$ . Sinon, on a  $C_1(x_1) = \{1_b\}$  d'après la propriété i) et on peut affecter  $c(x) = 2$  et  $c(y) = 1_b$ . Si  $x_1$  est de degré 3, alors tous les voisins colorés de  $x$  sont de degré au plus 2 et sont colorés  $1_b$  d'après la propriété i). Donc, comme  $2 \notin C_1(x_1)$ , on peut affecter  $c(x) = 2$  et  $c(y) = 1_b$ . On obtient donc une  $(1, 1, 2)$ -coloration de  $G$ .  $\square$

### 5.3/ $(1, 2, 3, \dots)$ -COLORATION DES GRAPHES SUBCUBIQUES

La question de savoir si un graphe cubique a toujours une coloration de *packing* a été posée initialement par Goddard *et al.* [45]. On donne des réponses partielles à propos de cette question.

Concernant la subdivision d'un graphe cubique, la proposition 5.1 et la proposition 5.3 permettent d'obtenir les corollaires suivants :

**Corollaire 5.8.** *Pour tout graphe subcubique  $G$ , le graphe  $S(G)$  est  $(1, 3, 3, 5, 5, 7)$ -colorable.*

**Corollaire 5.9.** *Pour tout graphe subcubique  $G$ ,  $\chi_\rho(S(G)) \leq 6$ .*

De plus, on peut vérifier facilement que  $\chi_\rho(S(K_4)) = 5$ .

Pour un graphe cubique, on peut (seulement) affirmer le fait suivant :

**Proposition 5.10.** *Il existe un graphe cubique avec un nombre de *packing* 13.*

*Démonstration.* Le graphe cubique d'ordre 38 et diamètre 4 (qui est le plus grand graphe cubique de diamètre 4) décrit indépendamment dans [1, 19] a besoin de 13 couleurs pour être coloré (vérifié par ordinateur). En faisant une recherche exhaustive, on trouve qu'au plus 28 sommets peuvent être colorés avec les couleurs  $\{1, 2, 3\}$ . Puisque ce graphe est de diamètre 4, alors toute couleur plus grande que 3 peut être donnée à seulement au plus un sommet, ce qui implique l'utilisation de toutes les couleurs de  $\{4, \dots, 13\}$  pour compléter la coloration.  $\square$

La distribution du nombre de *packing* des graphes cubiques d'ordre jusqu'à 20 est présentée dans le tableau 5.3. On a trouvé également (avec l'aide d'un ordinateur) un graphe cubique d'ordre 24 et de nombre de *packing* 11.

### QUESTIONS OUVERTES

On conclut ce chapitre avec une liste de problèmes ouverts qui découlent de nos travaux :

- i) *Est-ce que n'importe quel graphe subcubique, sauf le graphe de Petersen, est  $(1, 2, 2, 2, 2, 2)$ -colorable ?*

$n \setminus \chi_\rho$	4	5	6	7	8	9	10	11
4	1	0	0	0	0	0	0	0
6	1	1	0	0	0	0	0	0
8	0	3	2	0	0	0	0	0
10	0	3	15	1	0	0	0	0
12	0	7	42	36	0	0	0	0
14	0	13	252	222	22	0	0	0
16	0	34	907	2685	433	1	0	0
18	0	116	5277	21544	14050	314	0	0
20	0	151	22098	206334	226622	55284*	0	0

TABLE 5.3 – Nombre de graphes cubiques d'ordre  $n$  avec un nombre de *packing*  $\chi_\rho$ , pour  $n \leq 20$ . \*Il y a 55284 graphes cubiques d'ordre 20 ayant un nombre de *packing* entre 9 et 10 (le programme met trop longtemps pour calculer leurs nombre de *packing*).

Cette question est tout à fait naturelle, nos expérimentations sur les graphes suggèrent ce résultat. La principale difficulté pour prouver ce résultat est de considérer le graphe de Petersen comme un cas à part, de façon similaire à Cranston et Kim [22], tout en ayant une propriété prouvable par récurrence. Cette propriété à prouver par récurrence pour obtenir que tous les graphes soit  $(1, 2, 2, 2, 2)$ -colorable est sûrement très astucieuse.

- ii) *Est-ce que n'importe quel graphe subcubique, sauf le graphe de Petersen, est  $(1, 1, 2, 3)$ -colorable ?*

De la même façon que précédemment, cette question est tout à fait naturelle, nos expérimentations sur les graphes suggèrent ce résultat. Les difficultés pour prouver ce résultat sont similaires à celles de la propriété précédente, la principale différence réside dans la maximisation des deux couleurs 1 qui doit être faite de façon astucieuse.

- iii) *Est-ce qu'il existe un graphe subcubique 3-irrégulier qui n'est pas  $(1, 2, 2, 3)$ -colorable ?*  
 iv) *Est-ce que n'importe quel graphe subcubique 3-irrégulier est  $(1, 1, 3)$ -colorable ?*

En ce qui concerne les graphes subcubiques 3-irréguliers, ces propriétés sont sûrement vraies. En tout cas nous pensons que nos quelques expériences le suggèrent.

- v) *Est-ce que n'importe quelle subdivision d'un graphe subcubique est  $(1, 2, 3, 4, 5)$ -colorable ?*

Nous avons prouvé, de façon détournée, que toute subdivision d'un graphe subcubique est  $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$ -colorable. Nous avons échoué à trouver une subdivision d'un graphe subcubique non  $(1, 2, 3, 4, 5)$ -colorable. Prouver qu'un graphe est  $(1, 2, 3, 4, 5)$ -colorable s'avère très délicat, car pour colorer un sommet de la couleur 5, on doit regarder des sommets à distance 5.

- vi) *Est-ce qu'il existe un graphe cubique avec un nombre de *packing* plus grand que 13 ?*

Cette question était à la base un sujet central dans le cadre de nos recherches. Malgré de nombreuses tentatives, nous n'avons pas réussi à construire des familles de graphes cubiques de nombre de *packing* non borné. De la même façon que pour les subdivisions de graphes subcubiques, prouver que le nombre de *packing* des graphes cubiques est fini par récurrence s'avère très délicat.



# SUR LE NOMBRE DE GRUNDY DES GRAPHES $r$ -RÉGULIERS ET DE DEGRÉ BORNÉ

## INTRODUCTION

Dans ce chapitre on traite d'un autre paramètre de coloration, le nombre de Grundy.

Ce chapitre est organisé en cinq parties. Dans une première partie, on donne des caractérisations de certaines classes de graphes avec un nombre de Grundy au plus  $k$ ,  $2 \leq k \leq \Delta(G)$ , en utilisant la notion de module stable. Dans une deuxième partie, on caractérise les graphes cubiques avec un nombre de Grundy 3. On détermine aussi que tous les graphes cubiques sauf  $K_{3,3}$  ont un nombre partiel de Grundy de 4. Ces résultats impliquent un algorithme linéaire pour déterminer le nombre de Grundy d'un graphe cubique. La troisième partie contient la description de classes infinies de graphes réguliers qui ont nombre de Grundy exactement ou au plus  $k$ ,  $3 \leq k \leq r$ , en utilisant des définitions récursives. La quatrième partie contient ce résultat : les graphes 4-réguliers sans  $C_4$  induit ont nombre de Grundy 5. La dernière partie décrit un algorithme linéaire en nombre d'arêtes pour déterminer le nombre de Grundy des graphes de degré borné.

On commence par rappeler la définition de coloration de Grundy et par donner celle de coloration partielle de Grundy.

**Définition 6.1.** *Soit  $G$  un graphe. Une coloration de Grundy est une coloration propre de sommets telle que pour tout sommet  $u \in C_i$ ,  $u$  est adjacent à un sommet coloré  $j$ , pour chaque  $j < i$ . La notion de  $k$ -colorable sera notée  $k$ -Grundy colorable pour la coloration de Grundy en  $k$  couleurs. Le nombre de Grundy de  $G$ , noté  $\Gamma(G)$  est le plus grand entier  $k$  tel que  $G$  est  $k$ -Grundy colorable.*

**Définition 6.2.** *Soit  $G$  un graphe. Un sommet  $i$ -Grundy est un sommet coloré  $i$  qui, pour tout entier  $j < i$ , est adjacent à un sommet coloré  $j$ . Une  $k$ -coloration partielle de Grundy de  $G$  est une coloration propre de sommets telle que pour toute couleur  $i$ , il existe un sommet  $i$ -Grundy. Le nombre partiel de Grundy, noté  $\partial\Gamma(G)$ , est le plus grand entier  $k$  tel que  $G$  admet une  $k$ -coloration partielle Grundy.*

On rappelle cette définition alternative du nombre de Grundy.

**Définition 6.3.** *Étant donné un graphe  $G$  et un ordre  $\phi = v_1 \dots v_n$  sur les sommets de  $V(G)$ , l'algorithme glouton donne en suivant l'ordre  $\phi$  sur les sommets, la plus petite couleur non assignée à ses voisins. Soit  $\Gamma_\phi(G)$  le nombre de couleurs utilisées par l'algorithme glouton avec l'ordre  $\phi$  et le graphe  $G$ .*

**Proposition 6.1** ([31]). *Pour tout graphe  $G$ , on a le résultat suivant,  $\Gamma(G) = \max_{\phi \in S_n} (\Gamma_\phi(G))$ .*

Concernant la complexité algorithmique du problème, on a les résultats suivants.

**Proposition 6.2** ([49],[74],[85]). *Soit  $G$  un graphe. Ces différents problèmes sont NP-complets :*

1. *déterminer le nombre de Grundy de  $G$ , même si  $G$  est le complémentaire d'un graphe biparti ;*
2. *déterminer si  $\Gamma(G) = \Delta + 1$ , même si  $G$  est biparti ;*
3. *déterminer le nombre partiel de Grundy, même si  $G$  est cordal.*

Cependant, il existe un algorithme en temps  $O(|V(G)|^{2t})$  [85] pour déterminer si  $\Gamma(G) \geq t$ , pour un graphe  $G$ . Ce problème est donc dans la classe XP avec comme paramètre  $t$ .

Notre démarche est motivée par une série d'articles qui concernent le nombre  $b$ -chromatique des graphes réguliers. La proposition suivante résume quelques résultats sur le nombre  $b$ -chromatique des graphes réguliers.

**Proposition 6.3.** *Soit  $G$  un graphe  $r$ -régulier,*

- *tous les graphes cubiques sauf quatre (qui incluent le graphe de Petersen et  $K_{3,3}$ ) ont un nombre  $b$ -chromatique de 4 [53] ;*
- *si  $|V(G)| \geq 2r^3 - 2r^2 + 2r$ , alors  $b(G) = r + 1$  [16, 69] ;*
- *si la maille de  $G$  est 5 et  $G$  ne contient pas de 6-cycle, alors  $b(G) = r + 1$  [68] ;*
- *si la maille de  $G$  est 6, alors  $b(G) = r + 1$  [10] ;*
- *si  $G$  ne contient pas de 4-cycle alors  $b(G) \geq \lfloor \frac{r+3}{2} \rfloor$  [71].*

Le nombre de Grundy et le nombre  $b$ -chromatique n'étant pas si fondamentalement éloignés, notre point de départ a été de rechercher des propriétés sur la maille ou les sous-graphes interdits qui assurent que  $\Gamma(G) = r + 1$ .

## 6.1/ RÉSULTATS GÉNÉRAUX

**Définition 6.4.** *Soit  $G$  un graphe. Un ensemble de sommets  $X \subseteq V(G)$  est un module stable si  $X$  est un stable et tous les sommets de  $X$  ont le même voisinage.*

On invite le lecteur à ne pas confondre la notion de  $k$ -coloration partielle de Grundy de  $G$  et la notion suivante.

**Définition 6.5.** *Soit  $G$  un graphe. Une  $k$ -coloration de Grundy partielle de  $G$  est une  $k$ -coloration de Grundy d'un sous-ensemble  $S$  de  $V(G)$ .*

**Remarque 6.1** ([27],[6]). *Si  $G$  admet une  $k$ -coloration de Grundy partielle, alors  $\Gamma(G) \geq k$ .*

Cette remarque a une conséquence : pour un graphe  $G$ , avec  $\Gamma(G) \geq t$  et n'importe quelle  $t$ -coloration de Grundy partielle, il existe des plus petits sous-graphes  $H$  de  $G$  tels que  $\Gamma(H) \geq t$ . La famille des  $t$ -atomes comprend tous ces plus petits sous-graphes. Ce concept à été introduit par Zaker [85]. La famille des  $t$ -atomes est finie et la présence d'un  $t$ -atome peut être déterminée en un temps polynomial, pour un entier  $t$  fixé. La définition suivante est quelque peu différente de la définition originale de Zaker. Cette définition insiste plus sur la construction de tous les  $t$ -atomes (et non pas de quelques  $t$ -atomes comme pour Zaker).

**Définition 6.6** ([85]). *Pour chaque entier  $t > 0$ , on définit la famille des  $t$ -atomes, notée  $\mathcal{A}_t$ , par récurrence. La famille  $\mathcal{A}_1$  contient seulement  $K_1$ . Un graphe  $G$  est dans  $\mathcal{A}_{t+1}$  si  $G$  est composé d'un  $t$ -atome  $G'$  et d'un ensemble stable  $I_m$  d'ordre  $m$ , avec  $m \leq |V(G')|$ , où des arêtes ont été ajoutées entre des sommets de  $V(G')$  et des sommets de  $V(I_m)$  tel que chaque sommet dans  $V(G')$  est connecté à au moins un sommet dans  $V(I_m)$ .*

De plus, un  $t$ -atome  $G$  est *minimal*, s'il n'existe pas de  $t$ -atome induit dans  $G$  autre que lui-même.

**Théorème 6.1** ([85]). *Pour un graphe  $G$  donné, on a  $\Gamma(G) \geq t$  si et seulement si  $G$  ne contient aucun  $t$ -atome minimal en tant que sous-graphe induit.*

Dans cette section seront présentées des propriétés qui permettent d'avoir des majorants pour le nombre de Grundy.

**Proposition 6.4** ([6]). *Soient  $G$  un graphe et  $X$  un module stable. Dans toute coloration de Grundy de  $G$ , les sommets dans  $X$  doivent avoir la même couleur.*

**Définition 6.7.** *Soit  $G$  un graphe.*

- i) Un sommet  $v$  est un  $(0, \ell)$ -jumeau s'il existe un module stable d'ordre  $r + 2 - \ell$  qui contient  $v$ , pour un graphe  $G$   $r$ -régulier.*
- ii) Un sommet  $v$  est un  $(1, \ell)$ -jumeau si  $N(v)$  peut être partitionné en  $\ell - 1$  modules stables.*
- iii) Un sommet  $v$  est un  $(2, \ell)$ -jumeau si  $N(v)$  est un stable et si tout sommet dans  $N(v)$  est un  $(1, \ell)$ -jumeau.*

**Proposition 6.5.** *Soit  $G$  un graphe. Dans toute coloration de Grundy de  $G$ , un sommet  $v$  de  $V(G)$  ne peut avoir une couleur supérieure à  $\ell$  dans les cas suivants :*

- i) si  $v$  est un  $(0, \ell)$ -jumeau et  $G$  est un graphe régulier ;*
- ii) si  $v$  est un  $(1, \ell)$ -jumeau et  $G$  est un graphe quelconque ;*
- iii) si  $v$  est un  $(2, \ell)$ -jumeau et  $G$  est un graphe quelconque ;*

*Démonstration.* – **i)** : Soit  $v$  un  $(0, \ell)$ -jumeau coloré  $\ell + 1$  dans  $G$ . Par définition,  $v$  est dans un module stable  $X$  d'ordre  $r + 2 - \ell$ , en utilisant la proposition 6.4, n'importe quel autre sommet de  $X$  doit avoir la même couleur  $\ell + 1$ . Soit  $u$  un voisin de  $v$ . Il y a au plus  $\ell - 2$  voisins de  $u$  en dehors de  $X$ . Par conséquent,  $u$  ne peut pas être coloré  $\ell$ .

– **ii)** : Soit  $v$  un  $(1, \ell)$ -jumeau. D'après la proposition 6.4, les sommets dans le voisinage de  $v$  peuvent avoir seulement  $\ell - 1$  couleurs différentes. Par conséquent,  $v$  est de couleur au plus  $\ell$ .

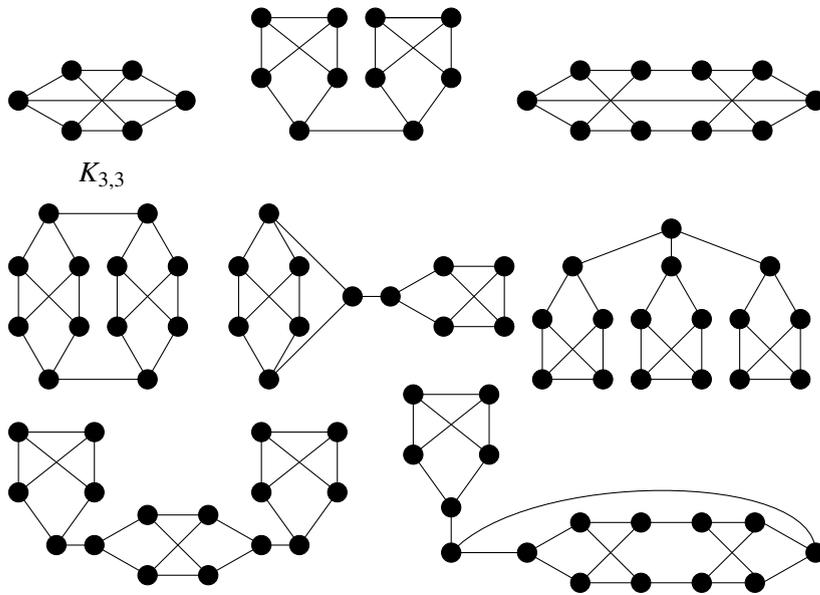


FIGURE 6.1 – Les graphes cubiques  $G$  tels que  $|V(G)| \leq 16$  et  $\Gamma(G) < 4$ .

- **iii)** : Soit  $v$  un  $(2, \ell)$ -jumeau. Si un sommet  $u$  dans  $N(v)$  est coloré  $\ell$ , alors tous les voisins de  $u$  ne peuvent avoir que des couleurs inférieures ou égales à  $\ell - 1$ ,  $u$  étant un  $(1, \ell)$ -jumeau. Le sommet  $v$  en particulier ne peut donc pas avoir la couleur  $\ell + 1$ . Si les sommets dans le voisinage de  $v$  ne peuvent avoir que des couleurs inférieures ou égales à  $\ell - 1$ , alors dans toute coloration de Grundy de  $G$ ,  $v$  a une couleur au plus  $\ell$ .

□

**Corollaire 6.6.** *Soit  $G$  un graphe.*

- i) Si tout sommet est un  $(1, \ell)$ -jumeau ou un  $(2, \ell)$ -jumeau, alors  $\Gamma(G) \leq \ell$ .*
- ii) Si  $G$  est régulier et tout sommet est un  $(0, \ell)$ -jumeau, un  $(1, \ell)$ -jumeau ou un  $(2, \ell)$ -jumeau.*

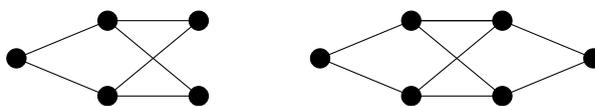
**Proposition 6.7** ([6],[85]). *Soit  $G$  un graphe. On a  $\Gamma(G) \leq 2$  si et seulement si  $G = K_{n,m}$  pour des entiers  $n$  et  $m$  strictement positifs.*

## 6.2/ NOMBRE DE GRUNDY DES GRAPHES CUBIQUES

Dans la section suivante, les figures décriront des  $k$ -colorations de Grundy partielles. Les arêtes possibles sont représentées par des traits en pointillés. Les sommets non connectés par des traits ne peuvent pas être adjacents par hypothèse.

**Proposition 6.8** ([27]). *Soit  $G$  un graphe 2-régulier. On a  $\partial\Gamma(G) = \Gamma(G) = 2$  si et seulement si  $G = C_4$ .*

La définition suivante donne une construction des graphes cubiques dans lesquels chaque sommet est un  $(0, \ell)$ -jumeau, un  $(1, \ell)$ -jumeau ou un  $(2, \ell)$ -jumeau. La figure 6.1 donne la liste complète de tout graphe d'ordre au plus 16 dans cette famille.


 FIGURE 6.2 – Les graphes  $K_{2,3}$  (sur la gauche) et  $K_{3,3}^*$  (sur la droite).

**Définition 6.8.** Soient  $K_{2,3}$  et  $K_{3,3}^*$  les graphes de la figure 6.2. On définit récursivement la famille de graphes  $\mathcal{F}_3^*$  comme suit :

1.  $K_{2,3} \in \mathcal{F}_3^*$  et  $K_{3,3}^* \in \mathcal{F}_3^*$  ;
2. l'union disjointe de deux éléments de  $\mathcal{F}_3^*$  est dans  $\mathcal{F}_3^*$  ;
3. si  $G$  est un graphe dans  $\mathcal{F}_3^*$ , alors le graphe  $H$  obtenu à partir de  $G$  en ajoutant une arête entre deux sommets de degré au plus 2 de  $G$ , est aussi dans  $\mathcal{F}_3^*$  ;
4. si  $G$  est un graphe dans  $\mathcal{F}_3^*$ , alors le graphe  $H$  obtenu à partir de  $G$  en ajoutant un nouveau sommet et en le reliant à trois sommets de degré au plus 2 de  $G$ , est dans  $\mathcal{F}_3^*$ .

La famille  $\mathcal{F}_3$  est la sous-famille des graphes cubiques dans  $\mathcal{F}_3^*$ .

**Proposition 6.9.** Soit  $G$  un graphe cubique. Tout sommet de  $G$  est un  $(0, \ell)$ -jumeau, un  $(1, \ell)$ -jumeau ou un  $(2, \ell)$ -jumeau, si et seulement si  $G \in \mathcal{F}_3$ .

*Démonstration.* Chaque graphe  $G$  dans  $\mathcal{F}_3$  a trois types de sommets : les  $(0, 3)$ -jumeaux (appelés aussi faux jumeaux), les sommets où une arête est ajoutée avec le Point 3 et les sommets ajoutés par le Point 4. Les sommets où une arête est ajoutée avec le Point 3 sont des  $(1, 3)$ -jumeaux et réciproquement. Les sommets ajoutés par le Point 4 sont des  $(2, 3)$ -jumeaux et réciproquement.  $\square$

**Théorème 6.2.** Soit  $G$  un graphe cubique. On a  $\Gamma(G) \leq 3$  si et seulement si chaque sommet est un  $(0, \ell)$ -jumeau, un  $(1, \ell)$ -jumeau ou un  $(2, \ell)$ -jumeau.

*Démonstration.* Par le corollaire 6.6, si chaque sommet est un  $(0, \ell)$ -jumeau, un  $(1, \ell)$ -jumeau ou un  $(2, \ell)$ -jumeau, alors  $\Gamma(G) \leq 3$ . On suppose que  $G$  contient un sommet  $v$  qui n'est pas un  $(0, \ell)$ -jumeau, un  $(1, \ell)$ -jumeau ou un  $(2, \ell)$ -jumeau et que  $\Gamma(G) < 4$ . Notre but est d'avoir une contradiction dans toutes les configurations soit avec  $\Gamma(G) < 4$ , en donnant une 4-coloration de Grundy partielle, soit en prouvant que  $v$  est un  $(0, \ell)$ -jumeau, un  $(1, \ell)$ -jumeau ou un  $(2, \ell)$ -jumeau. On désignera les différentes 4-colorations de Grundy partielles par leurs références dans la figure 6.3. On considère trois cas,

1.  $v$  ou un voisin de  $v$  est dans un  $C_3$  ;
2.  $v$  est dans un  $C_4$  induit et ni  $v$  ni un voisin de  $v$  ne sont dans un  $C_3$  ;
3.  $v$  n'est pas dans un  $C_4$  induit.

Soit  $C$  un cycle d'ordre 3 ou 4 qui contient  $v$  ou un voisin de  $v$  et soit  $D_1 = \{x \in V(G) \mid d(x, C) = 1\}$ , où  $d(x, C)$  est la distance de  $x$  à  $C$  dans le graphe  $G$ . Par abus de langage,  $D_1$  mentionnera aussi le sous-graphe induit par  $D_1$  dans  $G$ .

**Cas 1** : on suppose que  $v$  ou un voisin de  $v$  est dans  $C$  et  $C = C_3$ . Si  $|D_1| = 1$ , alors  $G = K_4$  et  $\Gamma(K_4) = 4$ . Si  $|D_1| = 2$  et  $D_1 = P_2$ , alors  $v$  est un  $(0, 3)$ -jumeau ou un  $(1, 3)$ -jumeau. Si  $D_1 = I_2$ , alors la figure 6.3.1.a donne une 4-coloration de Grundy partielle de  $G$ . Si  $|D_1| = 3$ , alors on a quatre sous-cas :  $D_1$  est  $C_3$  ou  $P_3$  (figure 6.3.1.b),  $P_2 \cup I_1$  (figure

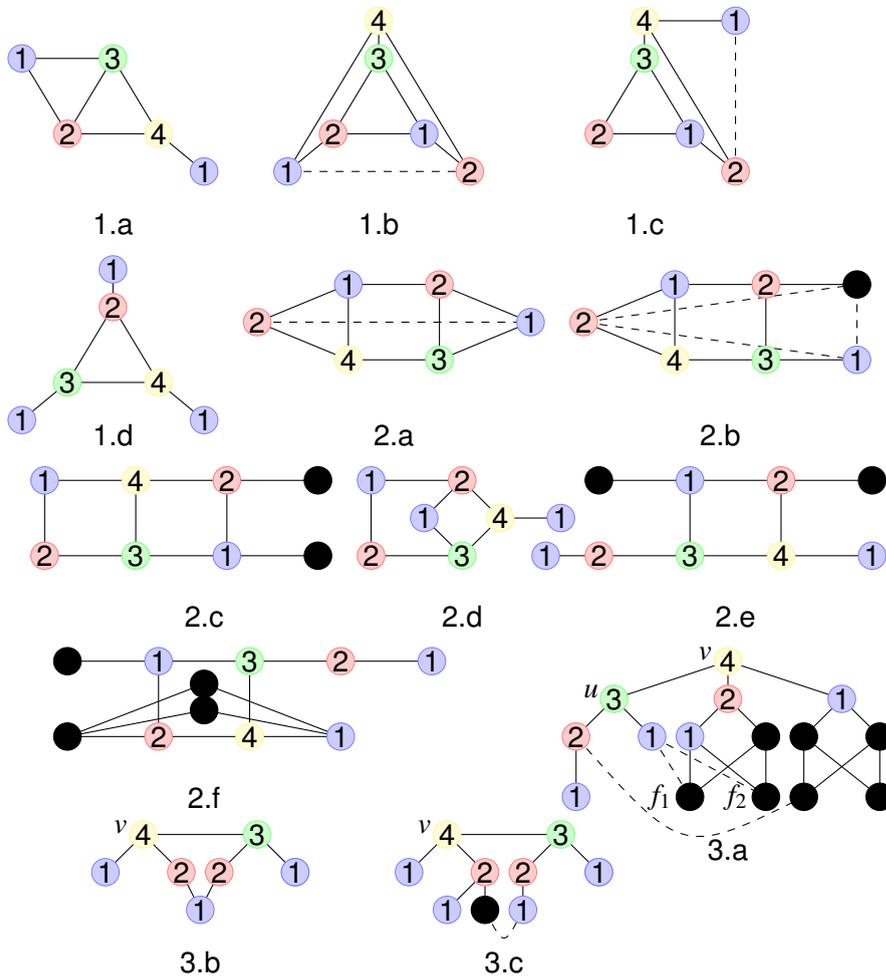


FIGURE 6.3 – Configurations possibles dans un graphe cubique (sommets en gras : sommets non colorés, sommets avec un nombre  $i$  : sommets de couleur  $i$ ).

6.3.1.c) ou  $I_3$  (figure 6.3.1.d) et dans chaque cas,  $G$  admet une 4-coloration de Grundy partielle.

**Cas 2** : on suppose que  $v$  est dans  $C$  et  $C = C_4$ . On note que si deux sommets non-adjacents de  $C$  ont un voisin commun dans  $D_1$ , alors  $v$  est un  $(0, 3)$ -jumeau ou un  $(1, 3)$ -jumeau. Par conséquent, ces cas ne seront pas considérés. Si  $|D_1| = 2$ , alors  $D_1 = P_2$  ou  $D_1 = I_2$  (figure 6.3.2.a) et dans les deux cas,  $G$  admet une 4-coloration de Grundy partielle. Si  $|D_1| = 3$ , alors la figure 6.3.2.b donne une 4-coloration de Grundy partielle de  $G$ . Dans le cas  $|D_1| = 4$ , on suppose dans un premier temps que deux sommets consécutifs de  $C$  ont leurs voisins dans  $D_1$  adjacents (figure 4.2.c). Dans un deuxième temps, on suppose que le premier cas ne se produit pas et que deux sommets non consécutifs de  $C$  ont leurs voisins dans  $D_1$  adjacents (figure 6.3.2.d). Dans le cas  $D_1 = I_4$ , on suppose d'abord que deux sommets dans  $D_1$  qui ont deux sommets consécutifs dans  $C$  comme voisins, ne sont pas adjacents à deux sommets communs (figure 6.3.2.e) et ensuite on considère que ces sommets le sont (figure 6.3.2.f).

**Cas 3** : on suppose que  $v$  ou un voisin de  $v$  n'est pas dans un  $C_3$  et que  $v$  n'est pas dans un  $C_4$  induit. En premier, on suppose qu'un voisin  $u$  de  $v$  est dans un  $C_4$  induit. En utilisant les colorations du cas précédent,  $G$  admet une 4-coloration de Grundy partielle dans tous les cas sauf dans le cas où deux voisins de  $u$  sont dans ce  $C_4$  et ont un voisin commun en dehors du  $C_4$ . Cependant, ce cas ne peut pas arriver pour tous les voisins de  $v$ , sinon  $v$  serait un  $(2, 3)$ -jumeau. On suppose que  $u$  est un voisin de  $v$  qui n'est pas dans la configuration précédente. Si  $u$  est dans un  $C_4$  induit, alors en utilisant la coloration du cas précédent,  $G$  admet une 4-coloration de Grundy partielle. Si  $u$  n'est pas dans un  $C_4$  induit, alors la figure 6.3.3.a donne une 4-coloration de Grundy partielle de  $G$ . Dans cette figure, la couleur 2 est donnée à un voisin de  $u$  non adjacent à  $f_1$  et  $f_2$  en même temps. En second, on suppose que  $v$  est dans un  $C_5$  induit. La figure 6.3.3.b donne une 4-coloration de Grundy partielle de  $G$  dans ce cas. Pour finir, si  $v$  n'est pas dans un  $C_5$  induit, alors la figure 6.3.3.c donne une 4-coloration de Grundy partielle de  $G$ .

On peut conclure que si  $\Gamma(G) \leq 3$ , alors tout sommet est un  $(0, \ell)$ -jumeau, un  $(1, \ell)$ -jumeau ou un  $(2, \ell)$ -jumeau.  $\square$

On observe que si une arête est ajoutée entre les deux sommets de degré 2 dans  $K_{3,3}^*$ , alors on obtient  $K_{3,3}$ , qui a un nombre de Grundy de 2. Les graphes cubiques différents de  $K_{3,3}$  qui ont un nombre de Grundy au plus 3 ne sont jamais des graphes bipartis complets. Par conséquent, ces graphes ont un nombre de Grundy 3.

**Corollaire 6.10.** *Un graphe cubique  $G$  ne contient aucun 4-atome subcubique minimal si et seulement si chaque sommet est un  $(0, \ell)$ -jumeau, un  $(1, \ell)$ -jumeau ou un  $(2, \ell)$ -jumeau.*

**Corollaire 6.11.** *Soit  $G$  un graphe cubique. Si  $G$  est sans  $C_4$  induit, alors  $\Gamma(G) = 4$ .*

*Démonstration.* Comme chaque graphe cubique avec  $\Gamma(G) < 4$  est composé de copies de  $K_{2,3}$  et  $K_{3,3}^*$ ,  $G$  contient toujours un  $C_4$  induit si  $\Gamma(G) < 4$ .  $\square$

Pour un entier  $t$  fixé, le plus grand  $(t+1)$ -atome est d'ordre  $2^t$ . Donc, pour un graphe  $G$  de degré maximum  $t$ , il existe un algorithme en temps  $O(n^{2^t})$  pour déterminer si  $\Gamma(G) < t+1$  (il consiste à vérifier si le graphe contient un  $(t+1)$ -atome induit). Pour un graphe cubique, on a un algorithme en temps  $O(n^8)$  alors que notre caractérisation donne un algorithme en temps linéaire.

**Observation 6.1.** Soit  $G$  un graphe cubique d'ordre  $n$ . Il existe un algorithme en temps  $O(n)$ <sup>1</sup> pour déterminer le nombre de Grundy de  $G$ .

*Démonstration.* On suppose que les graphes cubiques sont codés par liste d'adjacence. Vérifier qu'un graphe  $G$  est  $K_{3,3}$  peut être réalisé en temps constant. On suppose maintenant que  $G$  n'est pas  $K_{3,3}$ . Pour tout sommet  $v$ , l'algorithme consiste à vérifier que  $v$  est un  $(0, \ell)$ -jumeau, un  $(1, \ell)$ -jumeau ou un  $(2, \ell)$ -jumeau. Si la condition est vraie pour tout sommet, alors  $\Gamma(G) = 3$ , sinon  $\Gamma(G) = 4$ . Pour déterminer qu'un sommet est un  $(0, 3)$ -jumeau, il suffit de vérifier qu'il y a un sommet commun autre que  $v$  dans la liste d'adjacence des voisins de  $v$ . Pour déterminer si un sommet est un  $(1, 3)$ -jumeau, il suffit de vérifier qu'il y a deux voisins de  $v$  qui ont la même liste d'adjacence. Pour déterminer qu'un sommet  $v$  est un  $(2, 3)$ -jumeau, il suffit de vérifier que le voisinage de  $v$  est un stable et que tous les voisins de  $v$  sont des  $(1, 3)$ -jumeaux. Comme vérifier qu'un sommet est un  $(i, 3)$ -jumeau peut être fait en temps constant, l'algorithme fonctionne en temps linéaire.  $\square$

**Proposition 6.12.** Si  $G$  est un graphe connexe et  $G \neq K_{3,3}$ , alors  $\partial\Gamma(G) = 4$ .

*Démonstration.* Soit  $G$  un graphe connexe. On note que si  $\Gamma(G) = 4$ , alors  $\partial\Gamma(G) = 4$ . Chaque graphe  $G$  avec  $\Gamma(G) < 4$  est composé de copies de  $K_{2,3}$  et  $K_{3,3}^*$ . Si  $G$  contient plus de deux copies ( $G$  est alors différent de  $K_{3,3}$ ), alors un sommet peut être coloré 4 dans la première copie et un sommet peut être coloré 3 dans la seconde copie. D'où,  $\partial\Gamma(G) = 4$ .  $\square$

Seul  $K_{3,3}$  et trois autres graphes cubiques ont un nombre  $b$ -chromatique d'au plus 3 [53]. Donc, notre résultat est cohérent avec les résultats sur le nombre  $b$ -chromatique. Shi *et al.* [74] ont prouvé qu'il existe un plus petit entier  $N_r$  tel que tout graphe  $r$ -régulier  $G$ , avec plus de  $N_r$  sommets, est tel que  $\partial\Gamma(G) = r + 1$ . Notons que l'on a  $N_2 = 4$  et  $N_3 = 6$ . Déterminer  $N_r$  pour  $r \geq 4$  demeure une question ouverte. Cependant, en utilisant les résultats sur le nombre  $b$ -chromatique [16], on a  $N_r \leq 2r^3 - r^2 + r$ .

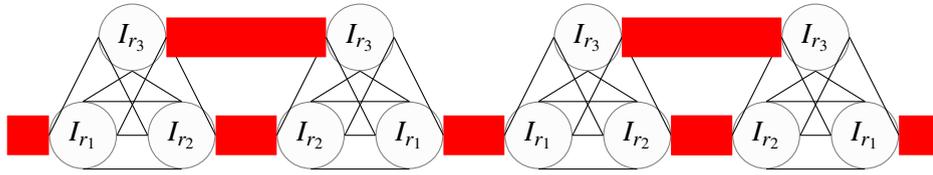
### 6.3/ PROPRIÉTÉS SUR LE NOMBRE DE GRUNDY DES GRAPHES $r$ -RÉGULIERS

**Définition 6.9.** Soit  $r \geq 2$  un entier. On définit récursivement la famille de graphes  $\mathcal{G}_r^*$  comme suit :

1.  $K_{r-k, k+2} \in \mathcal{G}_r^*$ , pour tout  $k$ , avec  $0 \leq k \leq (r-2)/2$  ;
2. l'union disjointe de deux éléments de  $\mathcal{G}_r^*$  est dans  $\mathcal{G}_r^*$  ;
3. si  $G$  est un graphe dans  $\mathcal{G}_r^*$ , alors le graphe  $H$  obtenu à partir de  $G$  en ajoutant des arêtes entre deux sommets de degré au plus  $r-1$  de  $G$ , est aussi dans  $\mathcal{G}_r^*$  ;
4. si  $G$  est un graphe dans  $\mathcal{G}_r^*$ , alors le graphe  $H$  obtenu à partir de  $G$  en ajoutant un nouveau sommet et en le reliant à  $r$  sommets de degré au plus  $r-1$  de  $G$ , est dans  $\mathcal{G}_r^*$ .

La famille  $\mathcal{G}_r$  est la sous-famille des graphes  $r$ -réguliers dans  $\mathcal{G}_r^*$ .

1. Indépendamment de notre travail, Yahiaoui *et al.* [84] ont établi un algorithme différent pour déterminer si le nombre de Grundy d'un graphe cubique est 4.


 FIGURE 6.4 – Le graphe  $G_{r,4,i}$ , pour  $i \geq 2$  et  $r = r_1 + r_2 + r_3$ .

**Proposition 6.13.** *Soit  $G$  un graphe  $r$ -régulier. Si  $G \in \mathcal{G}_r$ , alors  $\Gamma(G) < r + 1$ .*

*Démonstration.* On note  $I_{r-k}$  et  $I_{k+2}$ , avec  $|I_{r-k}| = r - k$  et  $|I_{k+2}| = k + 2$ , les deux ensembles de sommets dans la bipartition d'un sous-graphe  $K_{r-k, k+2}$  induit dans  $G$ . En premier, on suppose qu'il existe un sommet  $u$  coloré  $r + 1$  dans un sous-graphe  $K_{r-k, k+2}$  induit. Sans perte de généralité, on suppose que  $u$  est dans  $I_{r-k}$ . Les  $r$  voisins de  $u$  ont des couleurs allant de 1 à  $r$ . Parmi ces voisins de  $u$ ,  $k + 2$  voisins sont dans  $I_{k+2}$ . Soit  $v$  un voisin de  $u$  dans  $I_{k+2}$  avec la plus grande couleur possible dans  $I_{k+2}$ . La couleur de  $v$  est au moins  $k + 2$ . Donc, il existe un entier  $s \geq 0$  tel que la couleur de  $v$  est  $k + 2 + s$ . On note qu'il y a  $s$  sommets dans  $N(u) \setminus I_{k+2}$  qui ont comme couleur au plus  $k + 2 + s$ . Les couleurs des  $s$  sommets sont les seules couleurs possibles restantes inférieures ou égales à  $k + 2 + s$  dans  $I_{r-k}$ . Donc, comme il y a  $k$  sommets dans  $N(v) \setminus I_{r-k}$ , les voisins de  $v$  ne peuvent avoir qu'au plus  $k + s$  couleurs différentes inférieures ou égales à  $k + 2 + s$ . Par conséquent, on a une contradiction et  $u$  ne peut pas avoir la couleur  $r + 1$ . En second, on suppose qu'il existe un sommet  $u$  ajouté par le Point 4 qui a comme couleur  $r + 1$ . Comme un voisin de  $u$  dans un  $K_{r-k, k+2}$  induit doit être coloré  $r$ , l'argument est totalement similaire au cas précédent.  $\square$

**Corollaire 6.14.** *Soit  $G$  un graphe 4-régulier. Si  $G \in \mathcal{G}_4$ , alors  $\Gamma(G) < 5$ .*

Le lecteur peut croire que la famille des graphes 4-réguliers avec  $\Gamma(G) < 5$  est réduite à la famille  $\mathcal{G}_4$ . Cependant, il existe des graphes qui ont nombre de Grundy  $r$ , avec  $r \leq 4$ , qui ne sont pas dans cette famille. Par exemple, le graphe  $C_7^2$  satisfait  $\Gamma(C_7^2) < 5$  et n'est pas dans  $\mathcal{G}_4$ .

La prochaine proposition montre que, contrairement au nombre  $b$ -chromatique, des graphes  $r$ -réguliers d'ordre arbitrairement grand avec un nombre de Grundy  $k$  peuvent être construits pour n'importe quels entiers  $r$  et  $k$ , avec  $3 \leq k \leq r + 1$ .

**Proposition 6.15.** *Soient  $r$  et  $k$  deux entiers tels que  $r \geq 4$  et  $3 \leq k \leq r + 1$ . Il existe une famille infinie  $\mathcal{H}$  de graphes connexes  $r$ -réguliers telle que  $\forall G \in \mathcal{H}, \Gamma(G) = k$ .*

*Démonstration.* Soient  $i \geq 2$  un entier positif et  $r_1, \dots, r_{k-1}$  une suite d'entiers strictement positifs telle que  $r = r_1 + \dots + r_{k-1}$ . On construit un graphe  $G_{r,k,i}$  comme suit. On prend  $2i$  copies de  $K_{r_1, \dots, r_{k-1}}$ . Soient  $H_{j-1}$  la copie numéro  $j$  de  $K_{r_1, \dots, r_{k-1}}$  et  $H_{j,r_l}$  l'ensemble stable de taille  $r_l$  dans  $H_j$ . Si  $j \equiv 1 \pmod{2}$ , on fait la jointure entre  $H_j \pmod{2i, r_1}$  et  $H_{j-1} \pmod{2i, r_1}$ , puis pour tout entier  $l$ , avec  $1 < l < k$ , on fait la jointure de  $H_j \pmod{2i, r_l}$  et  $H_{j+1} \pmod{2i, r_l}$ . Le graphe  $r$ -régulier obtenu est le graphe  $G_{r,k,i}$ . La figure 6.4 donne  $G_{r,k,i}$ , pour  $k = 4$  et  $i \geq 2$ . Notons que  $H_{j,r_i}$  est un module stable. Donc, tout sommet est un  $(0, k)$ -jumeau. D'après la proposition 6.5, on a  $\Gamma(G_{r,k,i}) \leq k$ .

Pour chaque entier  $l$ ,  $1 < l < k$ , on colore un sommet  $l - 1$  dans  $H_{1,r_l}$  et  $H_{2,r_l}$ . Ensuite, on colore un sommet  $k - 1$  dans  $H_{1,r_1}$  et un sommet  $k$  dans  $H_{2,r_1}$ . La coloration donnée

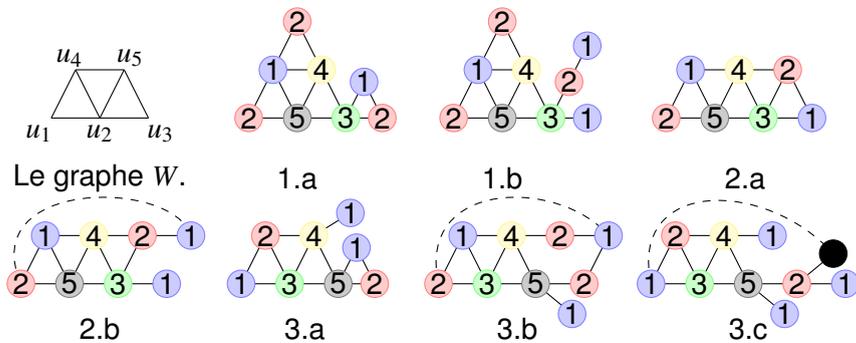


FIGURE 6.5 – Configurations possibles quand  $G$  contient  $W$  en tant que sous-graphe induit.

est une  $k$ -coloration de Grundy partielle de  $G_{r,k,i}$ . En conclusion, on a  $\Gamma(G_{r,k,i}) = k$ , pour  $i \geq 2$ .  $\square$

### 6.4/ NOMBRE DE GRUNDY DES GRAPHES 4-RÉGULIERS SANS $C_4$ INDUIT

Les lemmes suivants seront utilisés pour prouver notre second théorème : la famille des graphes 4-réguliers sans  $C_4$  induit contient seulement des graphes de nombre de Grundy 5.

**Lemme 6.16.** Soit  $G$  un graphe 4-régulier sans  $C_4$  induit. Si  $G$  contient  $K_4$ , alors  $\Gamma(G) = 5$ .

*Démonstration.* On note que si  $G = K_5$ , alors on a  $\Gamma(G) = 5$ . Si  $G$  n'est pas le graphe  $K_5$ , alors les voisins des sommets de  $K_4$  ne peuvent pas être adjacents ( $G$  contiendrait un  $C_4$ ). En donnant la couleur 1 à tous les voisins des sommets de  $K_4$  et les couleurs 2, 3, 4, 5 aux sommets de  $K_4$ , on obtient une 5-coloration de Grundy partielle de  $G$ .  $\square$

**Lemme 6.17.** Soit  $G$  un graphe 4-régulier sans  $C_4$  induit et soit  $W$  le graphe de la figure 6.5. Si  $G$  contient un  $W$  induit, alors  $\Gamma(G) = 5$ .

*Démonstration.* Les noms des sommets de  $W$  viennent de la figure 6.5. En fonction des différents cas possibles, des 5-colorations de Grundy partielles de  $G$  vont être données, on désignera les différentes colorations en fonction de leurs références dans la figure 6.5. Soit  $D_1$  l'ensemble des sommets à distance 1 des sommets de  $W$  dans  $G - W$ . On suppose que deux sommets de  $W$  ont un voisin commun dans  $D_1$ . Ces deux sommets peuvent être  $u_4$  et  $u_5$  ou  $u_3$  et  $u_5$  (ou  $u_1$  et  $u_4$ , par symétrie). Lorsque  $u_4$  et  $u_5$  ont un voisin commun, des couleurs vont être données aux voisins de  $u_3$  dans  $D_1$ . Deux cas peuvent arriver, ces voisins sont adjacents (figure 6.5.1.a) ou non (figure 6.5.1.b). Dans le cas où  $u_3$  et  $u_5$  ont un voisin commun  $w$  dans  $D_1$ ,  $w$  peut être adjacent à un voisin de  $u_3$  dans  $D_1$  (figure 6.5.2.a) ou non (figure 6.5.2.b). On suppose maintenant que les sommets de  $W$  n'ont pas de voisins communs dans  $D_1$ . Soient  $w_1$  et  $w_2$  les voisins de  $u_3$  dans  $D_1$ . On considère en premier que  $w_1$  et  $w_2$  sont adjacents (figure 6.5.3.a). En second, on considère que  $w_1$  et  $w_2$  ne sont pas adjacents et que  $u_5, u_3$  et  $w_1$  ne sont pas dans un  $C_5$  induit (figure 6.5.3.b).

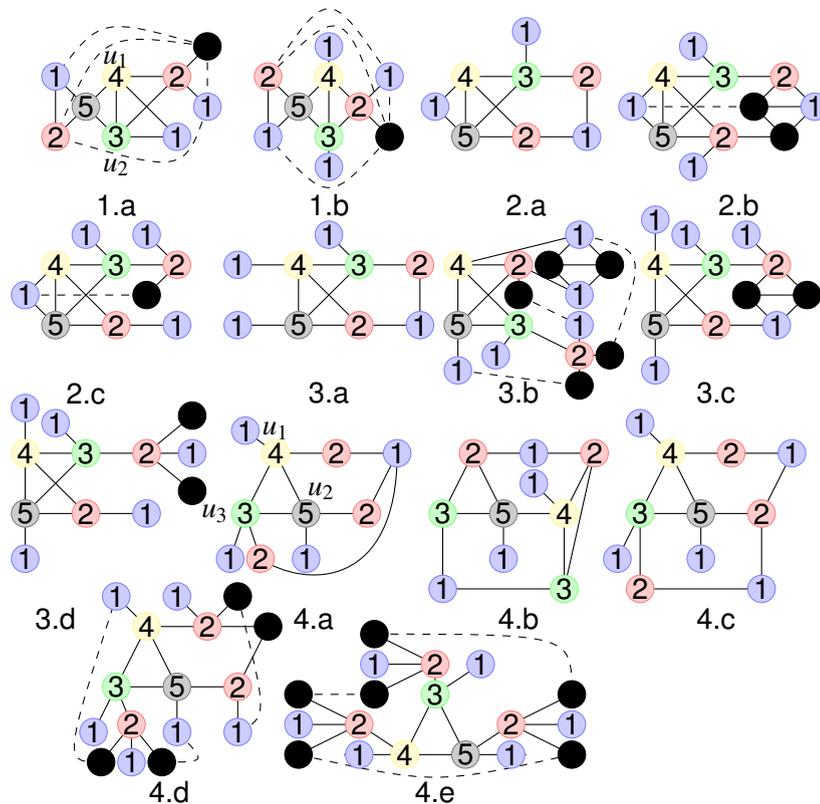


FIGURE 6.6 – Configurations possibles quand  $G$  contient un  $C_3$ .

Pour finir, on considère que les configurations précédentes ne sont pas présentes (figure 6.5.3.c).  $\square$

**Proposition 6.18.** *Soit  $G$  un graphe 4-régulier sans  $C_4$  induit. Si  $G$  contient  $C_3$  alors  $\Gamma(G) = 5$ .*

*Démonstration.* En fonction des différents cas qui peuvent se produire, une référence à une 5-coloration de Grundy partielle de  $G$  dans la figure 6.6 va être donnée. Soit  $M_i$ , avec  $i = 2$  ou  $3$ , le graphe d'ordre  $2 + i$  contenant deux sommets adjacents  $u_1$  et  $u_2$  qui ont exactement  $i$  voisins communs,  $\{v_1, \dots, v_i\}$  et qui forment un ensemble stable. Soit  $D_1$  l'ensemble des sommets à distance 1 d'un  $M_i$  induit dans  $G - M_i$ , pour  $2 \leq i \leq 3$ .

Cas 1 : on suppose que  $G$  contient un  $M_3$  induit et qu'un sommet de  $M_3$  a ses deux voisins dans  $D_1$  adjacents (figure 6.6.1.a). Ensuite, on suppose que  $G$  contient un  $M_2$  induit et qu'un sommet de  $M_2$  a ses deux voisins dans  $D_1$  adjacents (figure 6.6.1.b). On note que ces 5-colorations de Grundy partielles utilisent le fait que  $G$  ne peut pas contenir un  $K_4$  par le lemme 6.16.

Cas 2 : on suppose que  $G$  contient un  $M_3$  induit en excluant les configurations précédentes. On commence par supposer que  $u_1, v_2$  et  $v_3$  sont dans un  $C_5$  induit (figure 6.6.2.a), puis dans un  $C_6$  induit et pas dans un  $C_5$  induit (figure 6.6.2.b) et finalement ni dans un  $C_5$  induit, ni dans un  $C_6$  induit (figure 6.6.2.c).

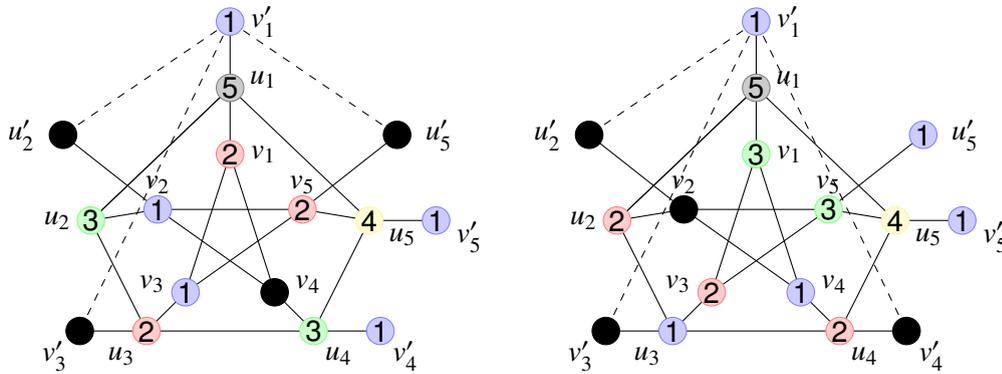


FIGURE 6.7 – Deux 5-colorations de Grundy partielles d'un sous-graphe contenant le graphe de Petersen comme sous-graphe induit.

Cas 3 : on suppose que  $G$  contient un  $M_2$  induit en excluant les configurations précédentes. On commence par supposer que  $u_1, v_1$  et  $v_2$  sont dans un  $C_5$  induit (figure 6.6.3.a) et que  $u_1$  et  $v_1$  sont un  $C_5$  induit en excluant le cas précédent (figure 6.6.3.b). Puis on suppose que  $u_1, v_1$  et  $v_2$  sont dans un  $C_6$  induit et pas dans un  $C_5$  induit (figure 6.6.3.c) et finalement ni dans un  $C_5$  induit, ni dans un  $C_6$  induit (figure 6.6.3.d). Dernier cas, on suppose que  $G$  contient un 3-cycle  $C$  et pas de  $M_2$  induit. Soient  $u_1, u_2$  et  $u_3$  les sommets de  $C$ . Soient  $w_1$  et  $w_2$  les voisins de  $u_1$  en dehors de  $C$ ,  $w'_1$  et  $w'_2$  les voisins de  $u_2$  en dehors de  $C$  et  $w''_1$  et  $w''_2$  les voisins de  $u_3$  en dehors de  $C$ .

Cas 4 : on suppose que  $u_1, u_2, w_1$  et  $w'_1$  sont dans un 5-cycle et qu'un voisin de  $u_1$ , appelons le  $w_1$ , a un voisin commun avec  $w'_1$  (figure 6.6.4.a). En excluant les configurations précédentes, on suppose que  $u_1, u_2, w_1$  et  $w'_1$  sont dans un 5-cycle, que  $w''_1, v_1, u_1$  et  $w_1$  sont dans un autre 5-cycle et que  $w_1$  est dans un triangle (figure 6.6.4.b). Ensuite, on suppose que  $w_1$  n'est pas dans un triangle (figure 6.6.4.c). Puis, en excluant les configurations précédentes, on obtient une 5-coloration de Grundy partielle si deux sommets de  $C$  sont dans un 5-cycle (figure 6.6.4.d). Pour finir, on suppose que deux sommets de  $C$  ne peuvent pas être dans un 5-cycle (figure 7.4.e). □

Dans les deux lemmes suivants, on suppose qu'un graphe  $G$  est de maille  $m = 5$  et contient possiblement le graphe de Petersen induit. Soient  $u_1, u_2, u_3, u_4$  et  $u_5$  les sommets d'un  $C_5$  induit (ou du cycle extérieur du graphe de Petersen). Soient  $v_1, v'_1, v_2, v'_2, v_3, v'_3, v_4, v'_4, v_5$  et  $v'_5$  les voisins restants de respectivement  $u_1, u_2, u_3, u_4$  et  $u_5$  (tous différents comme  $m = 5$ ).

**Lemme 6.19.** *Soit  $G$  un graphe 4-régulier de maille  $m = 5$ . Si  $G$  contient le graphe de Petersen comme sous-graphe induit, alors  $\Gamma(G) = 5$ .*

*Démonstration.* On suppose que  $v_1, v_2, v_3, v_4$  et  $v_5$  forment un  $C_5$  induit (le cycle interne d'un graphe de Petersen). Soient  $u'_2$  et  $u'_5$  les voisins restants de respectivement  $v_2$  et  $v_5$ . On observe que  $v'_1$  peut être adjacent à au plus trois sommets parmi  $v'_3, v'_4, u'_2$  et  $u'_5$ . En premier, on suppose que  $v'_1$  n'est pas adjacent avec  $v'_3$  (ou  $v'_4$ , en considérant la configuration symétrique). La partie gauche de la figure 6.7 illustre une 5-coloration de Grundy partielle du graphe  $G$ . En second, on suppose que  $v'_1$  n'est pas adjacent avec  $u'_5$

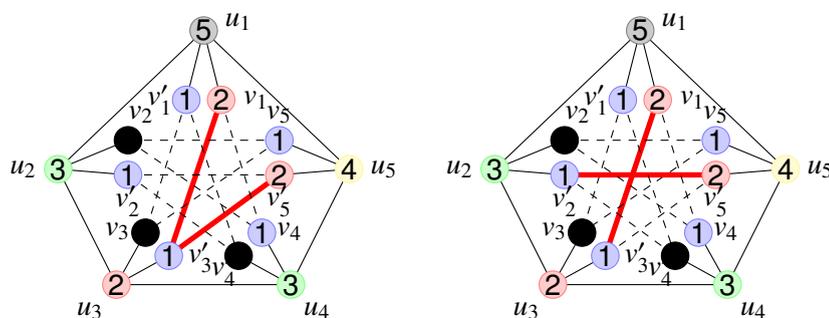


FIGURE 6.8 – Deux 5-colorations de Grundy partielles d’un sous-graphe contenant un  $C_5$  voisin-connexe comme sous-graphe induit.

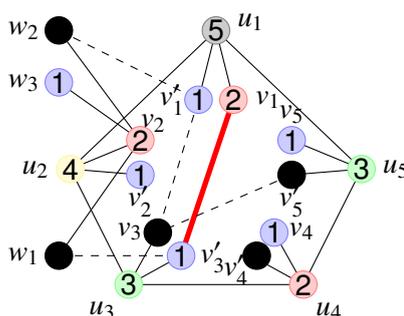


FIGURE 6.9 – Une 5-coloration de Grundy partielle d’un sous-graphe contenant un  $C_5$  voisin-connexe comme sous-graphe induit.

(ou  $u'_2$ , sans perte de généralité). La partie droite de la figure 6.7 illustre une 5-coloration de Grundy partielle du graphe  $G$  dans ce cas. □

Dans un graphe  $G$ , un  $C_n$  *voisin-connexe* est un  $n$ -cycle  $C$  tel que l’ensemble des sommets de  $G$  à distance 1 de  $C$  n’est pas un stable.

**Lemme 6.20.** *Soit  $G$  un graphe 4-régulier de maille  $m = 5$ . Si  $G$  contient un  $C_5$  voisin-connexe comme sous-graphe induit, alors  $\Gamma(G) = 5$ .*

*Démonstration.* Soit  $C$  un  $C_5$  voisin-connexe dans  $G$ . Grâce au lemme 6.19, on suppose que les voisins des sommets de  $C$  ne forment pas un  $C_5$  induit (sinon un graphe de Petersen serait induit). Donc, on peut supposer que les voisins des sommets de  $C$  forment un sous-graphe de  $C_{10}$ . S’il y a deux arêtes entre les voisins des sommets de  $C$ , alors la figure 6.8 illustre une 5-coloration de Grundy partielle du graphe  $G$ . On suppose que deux voisins sont adjacents, appelons les  $v_1$  et  $v'_3$  et que le graphe  $G$  ne contient pas les configurations précédentes. Notons que le sommet  $v'_3$  peut être adjacent à  $v'_1$  et  $v'_5$ . Soient  $w_1, w_2$  et  $w_3$  les trois voisins de  $v_2$  différents de  $u_2$ . On suppose que  $w_1$  est possiblement adjacent à  $v'_3$  et que  $w_2$  est possiblement adjacent à  $v'_1$ . La figure 6.9 illustre une 5-coloration de Grundy partielle de  $G$  dans ce cas. Dans cette figure, le sommet  $w_3$  est possiblement adjacent à  $v'_5$  ou  $v_4$ , mais dans ce cas on peut intervertir la couleur 1 entre  $v'_5$  et  $v_5$  ou entre  $v'_4$  et  $v_4$ . □

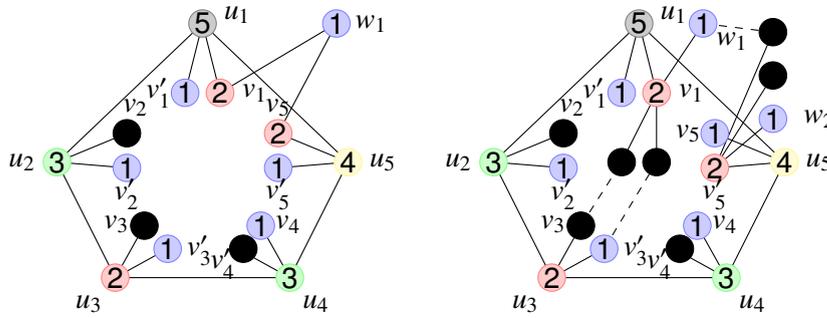


FIGURE 6.10 – Deux 5-colorations de Grundy partielles d'un sous-graphe contenant un  $C_5$  comme sous-graphe induit.

**Proposition 6.21.** *Si  $G$  est un graphe 4-régulier de maille  $m = 5$ , alors  $\Gamma(G) = 5$ .*

*Démonstration.* Soit  $C$  un 5-cycle dans  $G$ . On suppose que deux voisins consécutifs, par exemple  $v_1$  et  $v_5$ , ont un voisin commun  $w_1$ . La partie gauche de la figure 6.10 illustre une 5-coloration de Grundy partielle du graphe  $G$ . Dans cette figure, le sommet  $w_1$  est possiblement adjacent à  $v'_2$ ,  $v'_3$  ou  $v_4$ , mais dans ce cas on peut intervertir la couleur 1 entre  $v'_2$  et  $v_2$ , entre  $v'_3$  et  $v_3$  ou entre  $v_4$  et  $v'_4$ . Donc, on peut supposer qu'aucune paire de voisins consécutifs de sommets de  $C$  ne sont adjacents. Parmi les voisins de  $v_1$ , il existe un sommet  $w_1$  non adjacent à  $v_4$  et  $v'_4$  (sinon  $G$  contiendrait un  $C_4$ ). Parmi les voisins de  $v'_5$ , il existe un sommet, appelons le  $w_2$ , non adjacent à  $w_1$ . La partie droite de la figure 6.10 illustre une 5-coloration de Grundy partielle du graphe  $G$ . Dans cette figure, le sommet  $w_1$  est possiblement adjacent à  $v_4$  et le sommet  $w_2$  est possiblement adjacent à  $v'_2$  ou  $v_4$ , mais dans ce cas on peut intervertir la couleur 1 entre  $v'_2$  et  $v_2$  ou entre  $v_4$  et  $v'_4$ .  $\square$

Dans le lemme et la proposition suivants, on suppose que le graphe  $G$  est de maille  $m = 6$ . Soient  $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$  et  $u_6$  les sommets d'un  $C_6$  induit. Soient  $v_1, v'_1, v_2, v'_2, v_3, v'_3, v_4, v'_4, v_5, v'_5, v_6$  et  $v'_6$  les voisins restants de respectivement  $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$  et  $u_6$  (tous différents, car  $m = 6$ ).

**Lemme 6.22.** *Si  $G$  est un graphe 4-régulier de maille  $m = 6$  qui contient un  $C_6$  voisin-connexé comme sous-graphe induit, alors  $\Gamma(G) = 5$ .*

*Démonstration.* En premier, on suppose qu'il y a des arêtes qui connectent deux voisins de la même façon que sur la partie gauche de la figure 6.11. Soit  $w_1$  un voisin de  $v'_1$  non adjacent à  $v_4$ . Le graphe  $G$  admet une 5-coloration de Grundy partielle comme la partie gauche de la figure 6.11 l'illustre. En second, on suppose qu'il y a une arête (ou plus) qui connecte des voisins en excluant la configuration du cas précédent. Soit  $w_1$  un voisin de  $v_3$  non adjacent à  $v_2$  et soit  $w_2$  un voisin de  $v'_1$  non adjacent à  $w_1$ . Le graphe  $G$  admet une 5-coloration de Grundy partielle comme la partie droite de la figure 6.11 l'illustre.  $\square$

**Proposition 6.23.** *Si  $G$  est un graphe 4-régulier de maille  $m = 6$ , alors  $\Gamma(G) = 5$ .*

*Démonstration.* Grâce au lemme 6.22, on peut supposer que les voisins des sommets du  $C_6$  forment un ensemble stable. En premier, on suppose qu'il y a deux voisins à distance

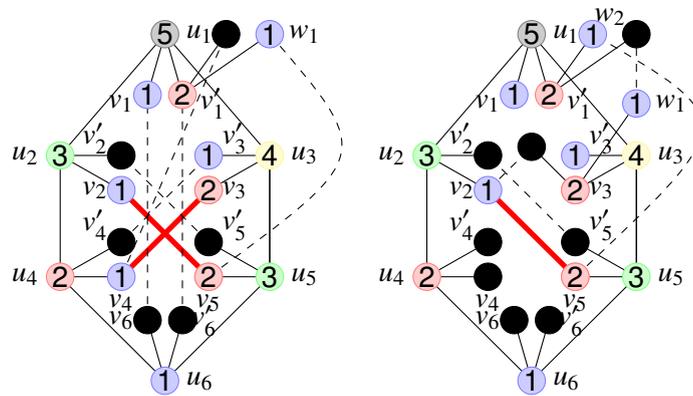


FIGURE 6.11 – Deux 5-colorations de Grundy partielles d’un sous-graphe contenant un  $C_6$  voisin-connexe comme sous-graphe induit.

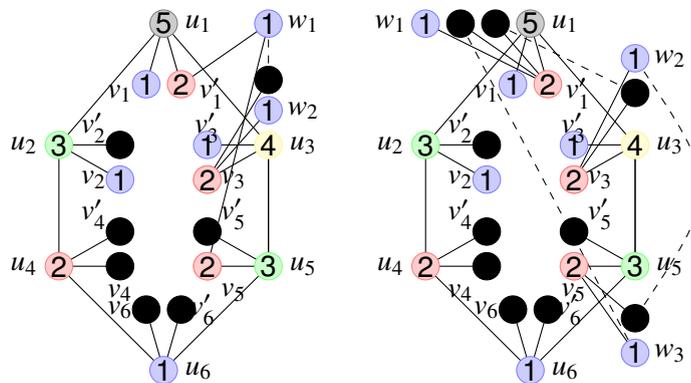


FIGURE 6.12 – Deux 5-colorations de Grundy partielles d’un sous-graphe contenant un  $C_6$  comme sous-graphe induit.

4 à travers le  $C_6$ , par exemple  $v'_1$  et  $v_5$ , qui ont un voisin commun  $w_1$ . Soit  $w_2$  un voisin de  $v_3$  non adjacent à  $w_1$ . Le graphe  $G$  admet une 5-coloration de Grundy partielle comme la partie gauche de la figure 6.12 l’illustre. En second, on suppose qu’il n’y a pas de paires de sommets à distance 4 à travers le cycle  $C_6$  qui ont des voisins communs. Soit  $w_1$  un voisin de  $v'_1$  non adjacent à un voisin de  $v_5$  ou un voisin de  $v_3$ , soit  $w_2$  le voisin de  $v_3$  non adjacent à un voisin de  $v_5$  et soit  $w_3$  un voisin de  $v_5$ . Le graphe  $G$  admet une 5-coloration de Grundy partielle comme la partie droite de la figure 6.12 l’illustre.  $\square$

**Proposition 6.24.** *Si  $G$  est un graphe 4-régulier de maille  $m \geq 7$ , alors  $\Gamma(G) = 5$ .*

*Démonstration.* En premier, on suppose que  $G$  contient un 7-cycle. Le graphe  $T_5$  est le 5-atome qui est un arbre (l’arbre binomial de degré maximum 4). On peut vérifier facilement que  $G$  contient  $T_5$  où deux feuilles sont fusionnées (qui est un 5-atome). De plus, si  $G$  ne contient pas de 7-cycle, alors il contient  $T_5$  comme sous-graphe induit.  $\square$

**Théorème 6.3.** *Soit  $G$  un graphe 4-régulier. Si  $G$  ne contient pas de  $C_4$  induit, alors  $\Gamma(G) = 5$ .*

*Démonstration.* On suppose que  $G$  ne contient pas un  $C_4$  induit. Par la proposition 6.24, si  $m \geq 7$ , les propositions 6.21 et 6.23, si  $m = 5, 6$ , et la proposition 6.18, si  $G$  contient un triangle en tant que sous-graphe, alors on a  $\Gamma(G) = 5$ .  $\square$

Par la proposition 6.8, le corollaire 6.11 et le théorème 6.3, n'importe quel graphe  $r$ -régulier avec  $r \leq 4$  et sans  $C_4$  induit a un nombre de Grundy de  $r + 1$ . Par conséquent, il est naturel de proposer la conjecture suivante.

**Conjecture 6.1.** *Pour tout entier strictement positif  $r$ , le nombre de Grundy de tout graphe  $r$ -régulier sans  $C_4$  induit est égal à  $r + 1$ .*

## 6.5/ UN ALGORITHME FPT POUR DÉTERMINER LE NOMBRE DE GRUNDY

Dans leur article [49], Havet et Sampaio se demandent si le problème de décision suivant est dans FPT :

### Grundy colorable

**Entrée** : Un graphe  $G$ .

**Paramètre** : Un entier  $k$ .

**Question** : Est-ce que  $\Gamma(G) \geq k$  ?

Zaker a revendiqué ce résultat dans l'article [85]. Cependant, ce résultat n'a toujours pas été prouvé, Zaker a seulement prouvé que ce problème est dans la classe XP. La classe XP correspond aux problèmes de décision qui ont un algorithme en temps polynomial quand le paramètre  $k$  est fixé. Havet et Sampaio [49] ont prouvé que le dual du problème de Grundy colorable est dans FPT, avec comme paramètre  $k$ .

### Dual de Grundy colorable

**Entrée** : Un graphe  $G$ .

**Paramètre** : Un entier  $k$ .

**Question** : Est-ce que  $\Gamma(G) \geq |V(G)| - k$  ?

Nous montrons au cours de cette section un autre résultat pour la coloration de Grundy. Nous prouvons que déterminer le nombre de Grundy est dans FPT si on prend comme paramètre  $\Delta(G)$ .

### Nombre de Grundy

**Entrée** : Un graphe  $G$ .

**Paramètre** : Le degré maximum  $\Delta(G)$ .

**Question** : Déterminer  $\Gamma(G)$ .

**Définition 6.10.** *Soit  $G$  un graphe. Soit  $S$  un sous-ensemble de sommets de  $G$ . Un sous-ensemble de sommets  $D(S)$  est un ensemble stable minimal qui domine  $S$ , si  $D(S)$  est un ensemble stable, si  $D(S)$  domine  $S$ , et si pour n'importe quel sommet  $u \in V(D(S))$ ,  $D(S) - u$  ne domine pas  $S$ .*

**Proposition 6.25.** *Soit  $G$  un graphe de degré maximum  $\Delta(G)$  et soit  $S$  un sous-ensemble de sommets. Le nombre d'ensembles stables minimales qui dominent  $S$  est borné par  $|S|(\Delta(G)|S|)^{|S|}$ .*

*Démonstration.* Remarquons que l'ensemble suivant :  $N(S) = \{u \in V(G) | \exists v \in V(S), uv \in E(G)\}$  est tel que  $|N(S)| \leq \Delta(G)|S|$ . En effet, chaque sommet de  $S$  ayant au plus  $\Delta(G)$  voisins, on a facilement l'inégalité précédente. De plus, un ensemble stable minimal  $D$  qui domine  $S$  est tel que  $|D| \leq |S|$ . En effet, si  $|D| \geq |S| + 1$ , alors il existe un sommet  $u$  de  $D$  tel que  $D - u$  est un ensemble stable minimal qui domine  $S$ . La taille de  $D$  étant comprise entre 1 et  $|S|$ , on a au plus  $\sum_{i=1}^{|S|} \binom{\Delta(G)|S|}{i} \leq |S|(\Delta(G)|S|)^{|S|}$  ensembles stables minimales qui dominent  $S$ .  $\square$

**Proposition 6.26.** *Soit  $G$  un graphe de degré maximum  $\Delta(G)$  et soit  $S$  un sous-ensemble de sommets. On peut caractériser tous les ensembles stables minimales qui dominent  $S$  en temps  $O((\Delta(G)|S|)^{|S|})$ .*

*Démonstration.* Pour cela il suffit de déterminer tous les sous-ensembles d'au plus  $|S|$  sommets dans  $N(S)$  qui sont des ensembles stables minimales qui dominent  $D$ . Vérifier qu'un sous-ensemble est un stable, ou qu'un sous-ensemble est minimal pour la domination de  $S$  se fait en temps linéaire. On a donc un algorithme qui fonctionne en temps  $O((\Delta(G)|S|)^{|S|})$ .  $\square$

La proposition suivante s'inspire de l'algorithme initial de Zaker [85]. Il consiste à vérifier si une arête est un 2-atome qui sera la base de la construction d'un  $k$ -atome, pour toute arête où les extrémités sont de degré supérieur ou égal à  $k - 1$ .

**Proposition 6.27.** *Soit  $G$  un graphe de degré maximum  $\Delta(G)$ . Il existe un algorithme en temps  $O(|E(G)|2^{(2^{k-2}-2)(k-2)}\Delta(G)^{2^{k-2}-2})$  pour déterminer si  $\Gamma(G) \geq k$ .*

*Démonstration.* S'il n'existe pas d'arête où les deux extrémités sont de degré supérieur ou égal à  $k - 1$ , alors on renvoie faux, c'est à dire  $\Gamma(G) < k$ . Notre algorithme utilise une pile qui contient comme éléments des couples composés d'un entier  $i$  et d'un sous-ensemble de sommet de  $V(G)$ , pour  $2 \leq i \leq k - 1$ . Pour chacune des arêtes  $uv$  où  $u$  et  $v$  sont de degré au moins  $k - 1$ , on procède comme suit :

**Initialisation :** On caractérise chaque ensemble stable minimal qui domine  $uv$ , on l'appelle  $S$  et on place  $S \cup u \cup v$  accompagné de l'entier 2 dans la pile. Les ensembles stables minimales qui dominent  $uv$  peuvent être déterminés en temps  $O((2\Delta(G))^2)$ .

**Récurrence et condition d'arrêt :** On prend l'élément  $(S, i)$  en haut de la pile, on caractérise les ensembles stables minimales qui dominent  $S$ . Si  $i = k - 1$  et si l'ensemble des ensembles stables minimales qui dominent  $S$  n'est pas vide on renvoie la valeur vrai, c'est à dire que  $\Gamma(G) \geq k$ . Si  $i \neq k - 1$ , pour chaque ensemble stable minimal  $S'$  qui domine  $S$ , on place  $S \cup S'$  accompagné de l'entier  $i + 1$  dans la pile.

**Condition finale :** Si la procédure n'a jamais renvoyé vrai pour chacune des arêtes, on renvoie faux, c'est à dire  $\Gamma(G) < k$ .

Cet algorithme utilise plusieurs propriétés : en analysant bien la construction des atomes de Zaker [85], on remarque que pour n'importe quel  $k$ -atome les deux sommets du 2-atome initial (une arête) doivent avoir un degré au moins  $k - 1$ . Pour construire un  $k$ -atome, on part d'un  $(k - 1)$ -atome et on rajoute un ensemble stable minimal qui domine le

$(k-1)$ -atome. Notre algorithme consiste à construire tous les  $k$ -atomes possibles à partir des 2-atomes. S'il renvoie vrai, notre algorithme a trouvé un  $k$ -atome, s'il renvoie faux, aucune des tentatives de trouver un  $k$ -atome n'a aboutie, il n'y a donc pas de  $k$ -atome induit dans  $G$ . Remarquons que la taille d'un  $(k-1)$ -atome est bornée par  $2^{k-2}$ , et donc que la taille d'un ensemble stable minimal qui domine ce  $k$ -atome est bornée par  $2^{k-2}$ . Une analyse de la complexité en temps de l'algorithme nous donne une complexité bornée par

$$O(|E(G)| \prod_{i=1}^{k-2} (|2^{k-2} \Delta(G)|^{2^i}) \text{ et } \prod_{i=1}^{k-2} (|2^{k-2} \Delta(G)|^{2^i}) = (2^{k-2})^{\sum_{i=1}^{k-2} 2^i} \Delta(G)^{\sum_{i=1}^{k-2} 2^i} = 2^{(2^{k-2}-2)(k-2)} \Delta(G)^{2^{k-2}-2}.$$

□

Déterminer si pour un graphe  $G$ ,  $\Gamma(G) = \Delta(G) + 1$  est NP-complet [49]. Notre proposition nous donne donc un algorithme FPT avec comme paramètre  $\Delta(G)$  pour résoudre ce problème. Notons que ce résultat est déjà paru dans la Thèse de Sampaio [70].

**Corollaire 6.28.** *Il existe un algorithme en temps  $O(|E(G)|2^{(2^{\Delta(G)-1}-2)(\Delta(G)-1)} \Delta(G)^{2^{\Delta(G)-1}-2})$  pour déterminer si pour un graphe  $G$ ,  $\Gamma(G) = \Delta(G) + 1$ .*

**Proposition 6.29.** *Il existe un algorithme en temps  $O(|E(G)|2^{(2^{\Delta(G)-1}-2)(\Delta(G)-1)} \Delta(G)^{2^{\Delta(G)-1}-2})$  pour déterminer  $\Gamma(G)$ .*

*Démonstration.* Cet algorithme est exactement le même que celui qui détermine si  $\Gamma(G) = \Delta(G) + 1$ . On doit renvoyer une information différente, le nombre  $max_i + 1$ , où  $max_i$  est l'entier  $i$  maximum présent dans la pile au cours de l'exécution de l'algorithme. □

**Corollaire 6.30.** *Il existe un algorithme en temps linéaire en le nombre d'arêtes pour déterminer le nombre de Grundy d'un graphe  $r$ -régulier.*

**Remarque 6.2.** *Cet algorithme peut être facilement modifié pour être linéaire par rapport au nombre de sommets. En fait, on peut commencer par trouver les  $t$ -atomes (et même les 1-atomes qui sont les sommets) en temps  $O(n)^{2^t}$  et utiliser notre algorithme pour trouver des  $t'$ -atomes, avec  $t' \geq t$  à partir de ces  $t$ -atomes.*

## QUESTIONS OUVERTES

Nous présentons dans cette dernière partie, une liste de problèmes ouverts sur le nombre de Grundy. Par caractérisation simple, on entend une caractérisation par mineurs exclus ou graphe induits exclus (mais avec peu de graphes dans ces familles).

Déterminer si pour un graphe  $G$  on a  $\Gamma(G) \geq k$ , avec comme paramètre  $k$ , étant dans XP, il est possible qu'il existe un algorithme FPT. Malgré tout, il est bien possible aussi que ce problème soit  $W[1]$ -complet, comme le problème qui consiste à déterminer si un graphe contient une clique de taille  $k$ . Nous n'avons pas connaissance de travaux qui ont cherché à montrer que ce problème est  $W[1]$ -complet, peut-être est-ce le cas.

- i) *Existe-t-il un algorithme FPT pour déterminer si pour un graphe  $G$ ,  $\Gamma(G) \geq k$ , avec comme paramètre  $k$  ?*

On a prouvé qu'il existe une caractérisation simple du nombre de Grundy des graphes cubiques, on peut se demander s'il existe des caractérisations similaires du nombre de Grundy des graphes réguliers. De plus, le problème qui consiste à déterminer le nombre de Grundy des graphes réguliers étant polynomial, il y a d'autant plus de raisons de penser qu'une caractérisation simple existe.

ii) *Est-ce qu'il existe une caractérisation simple des graphes 4-réguliers avec un nombre de Grundy  $k$ , pour  $3 \leq k \leq 5$  ?*

iii) *Est-ce qu'il existe une caractérisation simple des graphes  $r$ -réguliers avec un nombre de Grundy  $r + 1$  ?*

Nous avons trouvé une caractérisation simple des graphes cubiques qui ont un nombre de Grundy 3. Est-ce que celle-ci peut s'étendre aux graphes de degré quelconque. Un facteur doit être considéré pour étendre notre caractérisation : la disparité des degrés.

iv) *Est-ce qu'il existe une caractérisation simple des graphes qui ont nombre de Grundy 3 ?*

La notion de  $t$ -atome étant ce qui rend les problèmes de colorations de Grundy faciles, est-ce qu'il existe une notion similaire pour le nombre partiel de Grundy ? Ce qui est sûr c'est que ces  $t$ -atomes ne sont pas connexes contrairement au cas de la coloration de Grundy.

v) *Y a-t-il l'équivalent des  $t$ -atomes pour le nombre partiel de Grundy ?*

Comme pour la  $b$ -coloration, le nombre  $N_r$  existe pour tout entier  $r$  strictement positif. On peut se demander si caractériser ce nombre est facile (a priori c'est plus facile que pour la  $b$ -coloration).

vi) *Quelle est la plus petite valeur  $N_r$ , telle que tout graphe d'ordre au moins  $N_r$ , a un nombre partiel de Grundy de  $r + 1$  ?*

Le problème consistant à déterminer si pour un graphe  $G$ , on a  $\partial\Gamma(G) \geq k$ , n'a toujours pas été déterminé FPT, avec comme paramètre  $k$ . Nous soupçonnons ce problème d'être FPT.

vii) *Existe-t-il un algorithme FPT, avec comme paramètre  $k$ , pour déterminer si pour un graphe  $G$ , on a  $\partial\Gamma(G) \geq k$  ?*



## CONTRIBUTION ET AUTRES TRAVAUX

### 7.1/ CONTRIBUTION

Dans ce mémoire, on a voulu être le plus complet possible sur le sujet de la  $S$ -coloration. On a fait un état de l'art complet, établi une liste de thématiques porteuses et montré des résultats sur quelques-unes de thématiques. Ces résultats comprennent les chemins, les cycles, les arbres, mais aussi la complexité du problème  $S$ -COL pour une liste finie, les grilles infinies et les graphes cubiques.

En ce qui concerne le nombre de Grundy, le nombre de publications est important et certaines publications peuvent être anciennes. Aucun état de l'art complet n'existe à ce sujet et ce paramètre a été introduit sous des noms différents. Dans ce mémoire, nous fournissons juste notre modeste contribution sur le nombre de Grundy des graphes réguliers.

### 7.2/ AUTRES TRAVAUX

Pendant la préparation de mon doctorat, j'ai travaillé sur deux autres sujets qui ne sont pas des colorations. Pour la cohérence de ce mémoire, je n'ai pas voulu présenter ces deux sujets.

Le premier sujet est celui des arbres couvrants complètement disjoints [23]. Il s'agit d'arbres couvrants avec des restrictions supplémentaires. On a déterminé le nombre maximum d'arbres couvrants complètement disjoints dans les produits cartésiens d'un cycle et d'une clique. Un article est soumis à ce sujet. De plus, on a trouvé trois arbres couvrants complètement disjoints dans certains produits de trois cycles et deux arbres couvrants complètement disjoints dans des graphes circulants.

Le deuxième sujet est celui de l'extraction des données dans les grand graphes et le clustering des grand graphes [39]. En s'inspirant du lemme de régularité de Szemerédi, on introduit un problème d'optimisation en vue d'organiser les grand graphes. Ce problème d'optimisation est une alternative à la minimisation du nombre d'arêtes coupées entre les clusters (le min-cut). Un article a été soumis à ce sujet.

### 7.3/ THÉMATIQUES NON ABORDÉES

On finit ce chapitre en évoquant des thématiques concernant la  $S$ -coloration non regardées, ni au cours de ce mémoire, ni par aucun autre chercheur (à notre connaissance).

i) *La  $S$ -coloration des graphes planaires.*

Pour les listes commençant par plusieurs 1 et plusieurs 2 ((1, 1, 1, 2, 2), par exemple), il peut être très intéressant d'étudier la  $S$ -colorabilité des graphes planaires. Le fait de n'avoir que des couleurs petites dans la liste permet d'avoir des propriétés locales pour les graphes  $S$ -colorables et rend possible l'utilisation de techniques de déchargement pour prouver certaines propriétés. Par manque de temps, nous n'avons pas étudié cet aspect des problèmes de  $S$ -coloration.

ii) *La  $S$ -coloration des graphes  $r$ -réguliers, pour  $r > 4$ .*

Nous avons trouvé au cours du chapitre 5, des propriétés de  $S$ -coloration des graphes subcubiques, il est sûrement possible de faire un travail similaire pour les graphes réguliers en général et certaines listes  $S$ .

iii) *La  $S$ -coloration des graphes avec sous-graphes exclus.*

iv) *La  $S$ -coloration des graphes avec sous-graphes induits exclus.*

v) *La  $S$ -coloration des graphes avec mineurs exclus.*

En regardant en détail l'ensemble des graphes  $S$ -colorables pour une liste  $S$  fixée, on se rend rapidement compte qu'un certain nombre de graphes ne sont pas  $S$ -colorables. Ces graphes non  $S$ -colorables ne pouvant jamais être sous-graphe d'un graphe colorable, il est peut-être possible de caractériser un ensemble de graphes  $S$ -colorables comme des graphes avec sous-graphes exclus (possiblement, sous-graphes induits exclus). De la même manière on peut se poser la même question pour les graphes avec mineurs exclus.

# BIBLIOGRAPHIE

- [1] I. Alegre, M. A. Fiol, and J. L. A. Yebra. Some large graphs with given degree and diameter. *Journal of Graph Theory*, 10 :219–224, 1986.
- [2] S. Antonucci. Generalizzazioni del concetto di cromatismo d'un grafo. *Boll. Un. Mat. Ital.*, 15-B :20–31, 1978.
- [3] G. Argiroffo. Polynomial instances of the packing coloring problem. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, pages 363–368, 2011.
- [4] G. Argiroffo, G. Nasini, and P. Torres. The packing coloring problem for  $(q, q-4)$  graphs. *Lecture Notes in Computer Science*, 7422 :309–319, 2012.
- [5] S. Arora and B. Barak. *Computational Complexity : A modern Approach*. Cambridge University Press, 2009.
- [6] M. Asté, F. Havet, and C. L. Sales. Grundy number and products of graphs. *Discrete Mathematics*, 310 :1482–1490, 2010.
- [7] C. Berge. *Théorie des graphes et ses applications*. Dunod, 1958.
- [8] C. Berge. *Graphes et Hypergraphes*. Dunod, 1969.
- [9] D. Bienstock, N. Robertson, P. Seymour, and R. Thomas. Quickly excluding a forest. *Journal of Combinatorial Theory*, 52 :274–283, 1991.
- [10] M. Blidiaa, F. Maffray, and Z. Zemira. On  $b$ -chromatic number in regular graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 157 :1787–1793, 2009.
- [11] M. Bonamy and N. Bousquet. Brooks' theorem on powers of graphs. <http://arxiv.org/abs/1310.5493>, 2013.
- [12] M. Bonamy, B. Lévêque, and A. Pinlou. List coloring the square of sparse graphs with large degree. <http://arxiv.org/abs/1308.4197>, 2013.
- [13] O. Borodin. On the total coloring of planar graphs. *J. Reine Angew. Math.*, 394 :180–185, 1989.
- [14] B. Bresar, S. Klavzar, and D. F. Rall. On the packing chromatic number of cartesian products, hexagonal lattice, and trees. *Discrete Applied Mathematics*, 155 :2303 – 2311, 2007.
- [15] R. L. Brooks. On colouring the nodes of a network. *Proc. Cambridge Philosophical Society, Math. Phys. Sci.*, 37 :194–197, 1941.
- [16] S. Cabello and M. Jakovac. On the  $b$ -chromatic number of regular graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 159 :1303–1310, 2011.
- [17] S.-H. Chiang and J.-H. Yan. On  $L(d, 1)$ -labeling of cartesian product of a cycle and a path. *Discrete Applied Mathematics*, 156 :2867–2881, 2008.
- [18] M. Chudnovsky, N. Robertson, P. Seymour, and R. Thomas. The strong perfect graph theorem. *Annals of Mathematics*, 164 :51–229, 2006.

- [19] C. V. Conta. Torus and other networks as communication networks with up to some hundred points. *IEEE Trans. Comput.*, 32 :657–666, 1983.
- [20] S. Cook. The complexity of theorem proving procedures. *Proceedings of the third annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 151–158, 1971.
- [21] B. Courcelle. The monadic second-order logic of graphs i. recognizable sets of finite graphs. *Information and Computation*, 85 :12–75, 1990.
- [22] D. Cranston and S.-J. Kim. List-coloring the square of a subcubic graph. *J. Graph Theory*, 57 :65–87, 2008.
- [23] B. Darties, N. Gastineau, and O. Togni. Completely independent spanning trees in cartesian product of cycle and clique. *Submitted*.
- [24] N. G. de Bruijn and P. Erdős. A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A*, 54 :371–373, 1951.
- [25] R. G. Downey and M. R. Fellows. *Parameterized Complexity*. Springer, 1999.
- [26] Z. Dvořáka, D. Král, P. Nejedlýa, and R. Škrekovski. Coloring squares of planar graphs with girth six. *European Journal of Combinatorics*, 29 :838–849, 2008.
- [27] B. Effantin and H. Kheddouci. Grundy number of graphs. *Discussiones Mathematicae Graph theory*, 27 :5–18, 2007.
- [28] J. Ekstein, J. Fiala, P. Holub, and B. Lidický. The packing chromatic number of the square lattice is at least 12. *arXiv :1003.2291v1*, 2010.
- [29] J. Ekstein, P. Holub, and B. Lidický. Packing chromatic number of distance graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 160 :518–524, 2012.
- [30] J. Ekstein, P. Holub, and O. Togni. The packing coloring of distance graphs  $D(k, t)$ . *Discrete Applied Mathematics*, 167 :100–106, 2014.
- [31] P. Erdős, S. T. Hedetniemi, R. C. Laskar, and G. C. Prins. On the equality of the partial Grundy and upper chromatic number of graphs. *Discrete Mathematics*, 272 :53–64, 2003.
- [32] G. Fertin, E. Godard, and A. Raspaud. Acyclic and  $k$ -distance coloring of the grid. *Information Processing Letters*, 87 :51–58, 2003.
- [33] J. Fiala and P. A. Golovach. Complexity of the packing coloring problem for trees. *Discrete Applied Mathematics*, 158 :771–778, 2010.
- [34] J. Fiala, S. Klavžar, and B. Lidický. The packing chromatic number of infinite product graphs. *European Journal of Combinatorics*, 30 :1101–1113, 2009.
- [35] A. S. Finbow and D. F. Rall. On the packing chromatic number of some lattices. *Discrete Applied Mathematics*, 158 :1224–1228, 2010.
- [36] F.-W. Fu, S. Ling, and C. Xing. New results on two hypercube coloring problems. *Discrete Applied Mathematics*, 161 :2937–2945, 2013.
- [37] N. Gastineau. On dichotomies among the instance of the  $S$ -coloring problem. *Submitted*.
- [38] N. Gastineau. Complexity of the  $(s_1, s_2, \dots, s_k)$ -packing coloring problem. *in Bordeaux Graph Workshop, Conference*, 2012.
- [39] N. Gastineau and H. Kheddoucci. A clustering organisation based on the  $\epsilon$ -regularity. *Submitted*.

- [40] N. Gastineau, H. Kheddouci, and O. Togni. Subdivision into  $i$ -packings and  $s$ -packing chromatic number of some lattices. *Submitted - Minor revision*.
- [41] N. Gastineau, H. Kheddouci, and O. Togni. On the family of  $r$ -regular graphs with Grundy number  $r + 1$ . *Discrete Mathematics*, 328 :5–15, 2014.
- [42] N. Gastineau and O. Togni.  $S$ -packing colorings of cubic graphs. *Submitted*.
- [43] M. Gionfriddo. Sulle colorazioni  $L_s$  d'un grafo finito. *Technical Report, University of Dortmund*, 15-A :444–454, 1978.
- [44] M. Gionfriddo. Sul parametro  $\delta_\delta(g)$  d'un grafo  $l_s$ -colorabile e problemi relativi. *Riv. Mat. Univ. Parma*, 8 :1–7, 1982.
- [45] W. Goddard, S. M. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi, J. M. Harris, and D. F. Rall. Broadcast chromatic numbers of graphs. *Ars Combinatoria*, 86 :33–49, 2008.
- [46] W. Goddard and H. Xu. The  $S$ -packing chromatic number of a graph. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 32 :795–806, 2012.
- [47] W. Goddard and H. Xu. A note on  $S$ -packing colorings of lattices. *Discrete Applied Mathematics*, 166 :255–262, 2014.
- [48] P. M. Grundy. Mathematics and games. *Eureka*, 2 :6–8, 1939.
- [49] F. Havet and L. Sampaio. On the Grundy and  $b$ -chromatic numbers of a graph. *Algorithmica*, 65 :885–899, 2013.
- [50] J. Heuvel and S. McGuinness. Colouring the square of a planar graph. *Journal of Graph Theory*, 42 :110–124, 2003.
- [51] A. J. Hoffman and R. R. Singleton. On Moore graphs with diameters 2 and 3. *IBM Journal of Research and Development*, 5 :497–504, 1960.
- [52] P. Jacko and S. Jendrol. Distance coloring of the hexagonal lattice. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 25 :151–166, 2007.
- [53] M. Jakovac and S. Klavžar. The  $b$ -Chromatic Number of Cubic Graphs. *Graphs and Combinatorics*, 26 :107–118, 2010.
- [54] S. Jendrol and Z. Skupien. Local structures in plane maps and distance colourings. *Discrete Mathematics*, 236 :167–144, 2001.
- [55] J.-L. Kim and S.-J. Kim. The 2-distance coloring of the cartesian product of cycles using optimal lee codes. *Discrete Applied Mathematics*, 159 :2222–2228, 2011.
- [56] D. Korže and A. Vesel. On the packing chromatic number of square and hexagonal lattice. *Ars mathematica contemporanea*, 7 :13–22, 2014.
- [57] F. Kramer and H. Kramer. Un probleme de coloration des sommets d'un graphe. *C.R. Acad. Sci. Paris A*, 268 :46–48, 1969.
- [58] F. Kramer and H. Kramer. On the generalized chromatic number. *Ann. Discrete Math.*, 30 :275–284, 1986.
- [59] F. Kramer and H. Kramer. A survey on the distance-colouring of graphs. *Discrete mathematics*, 308 :422–426, 2008.
- [60] K. Kuratowski. Sur le problème des courbes gauches en topologie. *Fund. Math.*, 15 :271–283, 1930.
- [61] L. Levin. Universal search problems. *Problems of Information Transmission*, 9 :115–116, 1973.

- [62] K.-W. Lih, W.-F. Wang, and X. Zhu. Coloring the square of a  $K_4$ -minor free graph. *Discrete Mathematics*, 269 :303–309, 2003.
- [63] M. S. M. Molloy. Frequency channel assignment on planar networks. *Lecture Notes in Computer Science*, 2461 :736–747, 2002.
- [64] E. S. Mahmoodian and F. S. Mousavi. Coloring the square of products of cycles and paths. *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, 76 :101–119, 2011.
- [65] L.-Y. Miao and Y.-Z. Fan. The distance coloring of graphs. <http://arxiv.org/abs/1212.1029>, 2012.
- [66] C. Papadimitriou. *Computational Complexity*. Addison-Wesley, 1993.
- [67] G. Royle. List of cubic graphs. <http://mapleta.maths.uwa.edu.au/gordon/remote/cubics/>.
- [68] A. E. Sahili and M. Kouidder.  $b$ -chromatic number of regular graphs. *Utilitas Mathematica*, 80 :211–216, 2009.
- [69] A. E. Sahili, M. Kouidder, and M. Maidoun.  $b$ -chromatic number of regular graphs. *arXiv :1302.4209*, 2013.
- [70] L. Sampaio. *Algorithmic aspects of graph colouring heuristics*. PhD thesis, University of Nice-Sophia Antipolis, 2012.
- [71] S. Shaebani. On the  $b$ -chromatic number of regular graphs without 4-cycle. *Discrete Applied Mathematics*, 160 :1610–1614, 2012.
- [72] Z. Shao and A. Vesel. A note on the chromatic number of the square of the cartesian product of two cycles. *Discrete Mathematics*, 313 :999–1001, 2013.
- [73] A. Sharp. Distance coloring. In *ESA*, pages 510–521, 2007.
- [74] Z. Shi, W. Goddard, S. T. Hedetniemi, K. Kennedy, R. Laskar, and A. McRae. An algorithm for partial Grundy number on trees. *Discrete Mathematics*, 304 :108–116, 2005.
- [75] C. Sloper. An eccentric coloring of trees. *Australasian Journal of Combinatorics*, 29 :309–321, 2004.
- [76] E. Sopena and J. Wu. Coloring the square of the cartesian product of two cycles. *Discrete Mathematics*, 310 :2327–2333, 2010.
- [77] R. Soukal and P. Holub. A note on packing chromatic number of the square lattice. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 17 :447–468, 2010.
- [78] O. Togni. On packing colorings of distance graph. *Discrete Applied Mathematics*, 167 :280–289, 2014.
- [79] P. Torres. On the packing chromatic number of hypercubes. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 44 :263–268, 2013.
- [80] A. Vesel. 2007. Private communication.
- [81] C. Wegner. Graphs with given diameter and a colouring problem. *Technical Report, University of Dortmund*, 1977.
- [82] A. William and S. Roy. Packing chromatic number of certain graphs. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 87 :731–739, 2013.
- [83] S. Wong. *Colouring graphs with respect to distance*. PhD thesis, Department of Combinatorics and Optimization, University of Waterloo, Ontario, Canada, 1996.

- [84] S. Yahiaoui and B. Effantin. On the Grundy number of cubic graphs. *preprint*, 2012.
- [85] M. Zaker. Results on the Grundy chromatic number of graphs. *Discrete Mathematics*, 306 :3166–3173, 2006.
- [86] A. Ševčíková. Distant chromatic number of the planar graphs. *Manuscript*, Safarik University, 2001.

# INDEX

$(i, \ell)$ -jumeau, 107  
 $A(k)$ , 18  
 $B_d(u)$ , 10  
 $C_n$ , 11  
 $E(G)$ , 9  
 $G - A$ , 15  
 $G - uv$ , 15  
 $G - v$ , 15  
 $G^k$ , 10  
 $G_1 \bowtie G_2$ , 16  
 $G_1 \square G_2$ , 16  
 $H_k$ , 17  
 $K_n$ , 16  
 $K_{k_1, \dots, k_n}$ , 16  
 $N_G(u)$ , 10  
 $N_i(S)$ , 13  
 $P_n$ , 16  
 $S(G)$ , 16  
 $S + S'$ , 76  
 $S \leq S'$ , 13  
 $S_{(d,n)}$ , 14  
 $S_{d^k}$ , 14  
 $S_{i \rightarrow k, j}$ , 19  
 $V(G)$ , 9  
 $X_i$ , 13  
 $\Delta(G)$ , 10  
 $\Gamma(G)$ , 15  
 $\alpha(G)$ , 12  
 $\alpha(G, k)$ , 12  
 $\alpha^i(G)$ , 12  
 $\beta(G)$ , 11  
 $\chi(G)$ , 11  
 $\chi_\rho^S(G)$ , 13  
 $\chi^d(G)$ , 13  
 $\delta(G)$ , 10  
 $\mathcal{S}(G)$ , 19  
 $\omega(G)$ , 11  
 $\partial B_d(u)$ , 10  
 $\partial \Gamma(G)$ , 105  
 $b(G)$ , 15  
 $d(X)$ , 17  
 $d_{max}^i(G)$ , 17  
 $d_G(u, v)$ , 10  
 $m(G)$ , 11

Lexique des notations





## Résumé :

Ce mémoire traite de coloration de graphes avec des contraintes de distance (coloration de *packing*) ou des contraintes sur le voisinage (coloration de Grundy). Soit  $S = \{s_i \mid i \in \mathbb{N}^*\}$  une série croissante d'entiers. Une  $S$ -coloration de *packing* est une coloration propre de sommets telle que tout ensemble coloré  $i$  est un  $s_i$ -packing (un ensemble où tous les sommets sont à distance mutuelle supérieure à  $s_i$ ). Un graphe  $G$  est  $(s_1, \dots, s_k)$ -colorable si il existe une  $S$ -coloration de *packing* de  $G$  avec les couleurs  $1, \dots, k$ . Une coloration de Grundy est une coloration propre de sommets telle que pour tout sommet  $u$  coloré  $i$ ,  $u$  est adjacent à un sommet coloré  $j$ , pour chaque  $j < i$ .

Dans ce mémoire, nous regroupons tous les résultats connus à propos de la  $S$ -coloration de *packing*. Nous apportons de nouveaux résultats à propos de la  $S$ -coloration de *packing*, pour des classes de graphes telles que les chemins, les cycles et les arbres. Nous étudions en détail la complexité du problème de complexité associé à la  $S$ -coloration de *packing*, noté  $S$ -COL. Pour certaines instances de  $S$ -COL, nous caractérisons des dichotomies entre problèmes NP-complets et problèmes résolubles en temps polynomial. Nous nous intéressons aux différentes grilles infinies, les grilles hexagonale, carrée, triangulaire et du roi et nous déterminons des propriétés de partitionnement d'un  $i$ -packing en plusieurs  $j$ -packings, avec  $j \geq i$ . Ces résultats nous permettent de déterminer des  $S$ -colorations de *packings* de ces grilles pour plusieurs séries d'entiers. Nous examinons une classe de graphe jamais étudiée en ce qui concerne la  $S$ -coloration de *packing*: les graphes subcubiques. Nous déterminons que tous les graphes subcubiques sont  $(1, 2, 2, 2, 2, 2)$ -colorables et  $(1, 1, 2, 2, 3)$ -colorables. Un certain nombre de résultats sont prouvés pour certaines sous-classes des graphes subcubiques. Pour finir, nous nous intéressons au nombre de Grundy des graphes réguliers. Nous déterminons une caractérisation des graphes cubiques avec un nombre de Grundy 4. De plus, nous prouvons que tous les graphes  $r$ -réguliers sans carré induit ont pour nombre de Grundy  $r + 1$ , pour  $r \leq 4$ .

**Mots-clés :** Coloration, Coloration de Grundy, Combinatoire, Complexité algorithmique, Complexité paramétrée, Distance, Domination, Graphe, Graphe régulier, Grille, Coloration de *packing*,  $S$ -coloration de *packing*

## Abstract:

This dissertation is about graph coloring with distance constraints (packing coloring) or neighborhood constraints (Grundy coloring). Let  $S = \{s_i \mid i \in \mathbb{N}^*\}$  be a non decreasing sequence of integers. An  $S$ -packing coloring is a proper coloring such that every set of color  $i$  is an  $s_i$ -packing (a set of vertices at pairwise distance greater than  $s_i$ ). A graph  $G$  is  $(s_1, \dots, s_k)$ -colorable if there exists a packing coloring of  $G$  with colors  $1, \dots, k$ . A Grundy coloring is a proper vertex coloring such that for every vertex of color  $i$ ,  $u$  is adjacent to a vertex of color  $j$ , for each  $j < i$ .

In this dissertation, we group together every result about  $S$ -packing coloring. We prove new results about the  $S$ -coloring of graphs including paths, cycles and trees.

We study the complexity problem associated to the  $S$ -packing coloring, this problem is denoted  $S$ -COL. For some instances of  $S$ -COL, we characterize dichotomy between NP-complete problems and problems solved by a polynomial time algorithm.

We study also different lattices, the hexagonal, square, triangular and king lattices. We determine properties on the subdivision of an  $i$ -packing in several  $j$ -packings, for  $j > i$ . These results allow us to determine  $S$ -packing coloring of these lattices for several sequences of integers.

We examine a class of graph that has never been studied for  $S$ -packing coloring: the subcubic graphs. We determine that every subcubic graph is  $(1, 2, 2, 2, 2, 2)$ -colorable and  $(1, 1, 2, 2, 3)$ -colorable. Few results are proven about some subclasses.

Finally, we study the Grundy number of regular graphs. We determine a characterization of the cubic graphs with Grundy number 4.

Moreover, we prove that every  $r$ -regular graph without induced square has Grundy number  $r + 1$ , for  $r \leq 4$ .

**Keywords:** Coloring, Combinatorics, Computational complexity, Distance, Domination, Graph, Regular graph, Grundy coloring, Lattice, Packing coloring, Parameterized complexity,  $S$ -packing coloring

The logo for SPIM (École doctorale SPIM) features the letters 'S', 'P', 'I', and 'M' in a large, white, sans-serif font. The 'S' is stylized with a thick, orange horizontal bar behind it.