

# Génération procédurale de rivières et de terrains

Jean-David Génévaux<sup>1</sup>, Éric Galin<sup>1</sup>, Éric Guérin<sup>2</sup>, Adrien Peytavie<sup>3</sup>, Bedřich Beneš<sup>4</sup>.

<sup>1</sup>LIRIS - CNRS - Université Lumière Lyon 2, France

<sup>2</sup>LIRIS - CNRS - INSA Lyon, France

<sup>3</sup>LIRIS - CNRS - Université Claude Bernard Lyon 1, France

<sup>4</sup>Purdue University, USA

## Résumé

*Dans cet article, nous proposons une méthode de génération procédurale de terrains dont la structure satisfait les contraintes d'écoulement hydrographique. Étant donné un contour initial fourni par l'utilisateur, notre algorithme crée un réseau hiérarchique de cours d'eau à l'aide d'une grammaire ouverte. Ce réseau est ensuite analysé et enrichi par d'autres données vectorielles afin de décrire de façon plus précise les paramètres de trajectoire et le profil de chacun des cours d'eau. Nous construisons enfin le relief du terrain en respectant les contraintes d'écoulement d'eau dérivant du réseau. Notre approche offre l'utilisateur un contrôle à toutes les étapes du processus. Sans simulation physique, nous parvenons à obtenir des terrains détaillés et structurés à grande échelle.*

**Mots clé :** Informatique graphique, modélisation géométrique, génération procédurale

## 1. Introduction

La modélisation et la synthèse de scènes naturelles est un domaine de recherche très actif en informatique graphique. Très souvent, la notion de paysage et donc de terrain est centrale, quel que soit le média considéré. On retrouve ainsi des terrains aussi bien dans les logiciels de création paysagère, les simulateurs de vol ou de conduite que dans la plupart des films et des loisirs numériques.

L'augmentation de la puissance de calcul, combinée à des méthodes de visualisation de plus en plus performantes, a permis de créer des terrains de plus en plus complexes et réalistes. L'édition manuelle de ces terrains étant difficile, de nombreuses méthodes ont été proposées afin de fournir une aide à leur édition, voire de les générer de manière automatique. Cependant, la modélisation de la géométrie de rivières est souvent absente de ces travaux.

Modéliser et simuler les réseaux de cours d'eau est un problème difficile [MDH07]. Les terrains et leurs réseaux hydrographiques résultent des effets combinés de différents phénomènes géologiques et climatiques complexes, parmi lesquels la tectonique des plaques, la nature des sols et des sous-sols ainsi que les phénomènes d'érosion thermique et hydraulique liés à l'action du climat. Tous ces phénomènes structurent le terrain à grande échelle et peuvent changer la composition des sols ou la distribution de la végétation.

Paradoxalement, les propriétés géométriques et visuelles des cours d'eau sont relativement indépendantes de la tectonique et du climat [Ros94]. Les cours d'eau coulent sur la



**Figure 1:** Exemple de scène créée par notre méthode.

surface de la terre, depuis les sources montagneuses jusqu'à la mer en transportant des sédiments, le tout formant des réseaux dendritiques. Les réseaux hydrographiques ont un intérêt fondamental car ils sont les témoins de l'interaction entre la tectonique des plaques, qui forme la majorité des reliefs, et le climat, qui est le principal facteur de l'érosion [Mol03, Sch79]. Ainsi, les cours d'eau portent en eux la signature des processus lithosphériques et atmosphériques de la région qui ont conduit à leur création. Étonnamment, une des propriétés les plus marquantes des réseaux naturels est leur invariance aux changements d'échelle [DR00, RIR97], indépendamment de la géologie ou du climat.

Dans cet article, nous proposons une méthode originale de génération procédurale de terrains et de rivières. Notre approche phénoménologique repose sur des observations en géomorphologie et permet de créer rapidement des terrains

de grande taille avec un haut niveau de précision. Plus précisément, nos principales contributions sont les suivantes :

**Réseau hydrographique** Nous présentons un algorithme permettant de construire le réseau hydrographique sous la forme d'un graphe à l'aide d'une grammaire ouverte (Section 4). Cet algorithme définit les fleuves et les rivières en remontant des embouchures vers les sources et s'appuie sur des travaux dans le domaine de la géomorphologie [How71, How90, Sta91, WBRI91]. Grâce à ce graphe, nous calculons un ensemble de données vectorielles décrivant les principales caractéristiques des cours d'eau, ce qui nous permet d'utiliser les classifications en géomorphologie pour typer l'ensemble des cours d'eau et leur domaine associé (Section 5). En nous inspirant des classifications en hydrologie, nous parvenons à reproduire des éléments visuellement importants des rivières, comme leurs trajectoires et leurs profils.

**Modèle de terrain** Le relief du terrain est ensuite généré de manière cohérente à partir des données du réseau hydrographique. Nous proposons un modèle procédural reposant sur un arbre de construction qui combine des primitives de terrains et permet de créer à la fois collines, montagnes et vallées ainsi que la géométrie détaillée des cours d'eau (Section 6). Cette approche nous permet de représenter des terrains de très grande taille de manière compacte en mémoire, tout en bénéficiant d'un haut degré de précision (Section 7).

## 2. État de l'art

Dans cette partie, nous présentons un rapide état de l'art des méthodes de génération de terrain. On peut distinguer trois catégories de méthodes : les modèles fractals, les méthodes de simulation d'érosion et les algorithmes de synthèse à partir d'exemples.

**Méthodes fractales** Les techniques procédurales permettent de générer automatiquement des terrains par des constructions géométriques ou des combinaisons de fonctions de bruit [EMP\*98]. Ces méthodes produisent des terrains de grande échelle qui manquent souvent de réalisme car elles ne prennent pas en compte les phénomènes structuraux et sculptants de l'érosion.

Des méthodes spécifiques ont été développées pour intégrer la génération d'un réseau hydrographique dans le processus de génération. Kelley [KMN88] a proposé une méthode procédurale pour générer des bassins versants. Prusinkiewicz [PH93] a adapté un algorithme de subdivision géométrique pour créer des rivières sur un terrain fractal et garantir un écoulement conforme à la pente locale du terrain. Belhadj [BA05] a proposé de définir un terrain en calculant un ensemble de rivières et de crêtes grâce à des particules qui se déplacent en suivant un mouvement brownien fractionnaire. L'ensemble du terrain est ensuite construit à l'aide d'une méthode fractale respectant les contraintes de trajectoire des crêtes et du réseau hydrographique.

La principale limitation de ces méthodes est de ne pas créer de réseau hydrographique complet, mais de s'intéresser uniquement à des bassins versants de taille réduite. En

outre, les trajectoires des rivières sont construites généralement à l'aide de fonctions de bruit et ne reproduisent pas les formes caractéristiques observées en géomorphologie.

**Simulation d'érosion** Les méthodes de simulation d'érosion permettent de générer des terrains physiquement plausibles [Nag98, CMF98]. Ces méthodes s'appuient sur des simulations plus ou moins précises pour déterminer le transport et le dépôt de matière.

À petite échelle (quelques kilomètres carrés à une précision de l'ordre du mètre), ces techniques permettent de simuler l'érosion d'un terrain par un fleuve, le creusement du lit et la formation de méandres [MDH07]. À grande échelle, les simulations d'érosion permettent de reproduire la formation de vallées sédimentaires dans les montagnes. Cependant, ces techniques ne permettent pas de modéliser simultanément de grands terrains et un haut niveau de détail.

**Édition interactive** Différentes méthodes d'édition interactive ont été proposées pour palier au manque de contrôle des techniques de génération fractales et de simulation d'érosion. Zhou [ZSTR07] a proposé une méthode de synthèse de relief de terrain en combinant une image de contrôle et des échantillons de cartes de hauteurs existantes. Gain [GMS09] a proposé une méthode d'édition interactive permettant de définir un terrain à partir de courbes de contrôle. Hnaidi [HGA\*10] a présenté une méthode de génération utilisant un algorithme de diffusion à partir d'un ensemble de contraintes vectorielles représentant les crêtes et les lits de rivières. Peytavie [PGMG09] a proposé un modèle hybride combinant des piles de matériaux et une représentation implicite permettant de sculpter des terrains comportant des surplombs, des arches et même des grottes.

L'ensemble de ces méthodes d'édition offre un bon contrôle à l'utilisateur. Cependant, la création de terrains réalistes exige une expérience considérable dans les outils d'édition, et un travail méticuleux et long est nécessaire pour reproduire des formes de terrains spécifiques. En outre, les techniques d'édition existantes ne permettent pas de modéliser simultanément des terrains à grande échelle et un haut niveau de détail.

## 3. Architecture

Dans cette section, nous présentons l'architecture générale de notre méthode de génération de terrains basée sur la construction d'un réseau hydrographique. La construction de ce réseau nous permet de modéliser simplement la contrainte physique suivante : toute eau présente sur la surface de la terre doit s'écouler vers une mer ou un lac, c'est-à-dire un minimum de notre terrain.

En s'appuyant sur cette hypothèse, nous cherchons à résoudre un problème sous-contraint. En effet, à partir d'un réseau hydrographique, il existe une infinité de terrains respectant cette contrainte. Ce problème inverse est plus facile à résoudre que de simuler physiquement les érosions hydraulique et thermique sur un terrain de taille importante. Notre méthode procède en trois étapes (Figure 2).

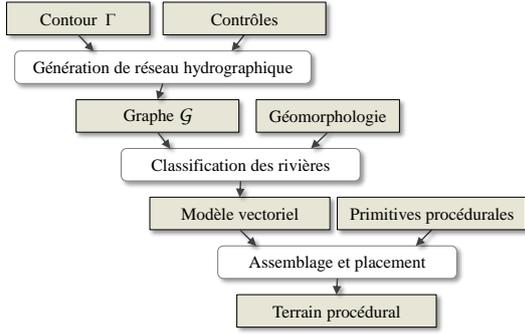


Figure 2: Processus de génération d'un terrain.

**Construction du réseau hydrographique** Étant donné un contour fourni par l'utilisateur et délimitant un domaine, nous cherchons à construire un réseau hydrographique. En partant du contour, les rivières colonisent l'espace disponible à l'aide d'une grammaire ouverte et probabiliste s'inspirant des nombres de Strahler (Section 4) qui caractérisent la complexité d'un arbre.

**Segmentation, typage et calcul de flot** Nous calculons différentes informations à partir du graphe géométrique. Tout d'abord nous décomposons le terrain en un ensemble de régions à l'aide d'un algorithme de Voronoï. Nous construisons ensuite la hiérarchie des bassins versants ainsi que le débit des cours d'eau. À partir de ces données, nous identifions pour chaque région le type de cours d'eau conformément à la classification de Rosgen (Section 5) couramment utilisée en hydrologie.

**Génération du terrain** Nous transformons les informations précédemment calculées en un ensemble de primitives vectorielles. Ces informations décrivant les cours d'eau (trajectoires et profils) sont converties en géométrie grâce à notre modèle de représentation de terrains à base de primitives géométriques (Section 7).

#### 4. Construction du réseau hydrographique

L'algorithme de génération du réseau hydrographique procède en deux étapes. Étant donné un contour initial définissant le rivage, nous distribuons le long de celui-ci un ensemble de nœuds représentant les embouchures des cours d'eau (Section 4.1). Dans une seconde étape, nous développons chaque embouchure en un arbre à l'aide d'une grammaire pour coloniser tout l'espace disponible (Section 4.2).

**Notations** À partir d'un domaine  $\Omega$  dont le contour  $\Gamma$  est défini par l'utilisateur, nous produisons un ensemble d'arbres noté  $\mathcal{G} = \{G_i\}$  se ramifiant à l'intérieur de  $\Omega$  (Figure 3).

Un arbre  $G_i$ , noté  $G_i = (\mathcal{N}_i, \mathcal{E}_i)$ , est défini par un ensemble de nœuds  $\mathcal{N}_i$  et un ensemble d'arêtes  $\mathcal{E}_i$  qui lui sont propres. Chaque nœud  $\mathcal{N}_i = \{N = (\mathbf{p}, s, \rho, \phi)\}$  est caractérisé par sa position géométrique  $\mathbf{p}$ , ainsi qu'un indice de priorité  $s$ , un type de Rosgen  $\rho$  définissant la nature du cours d'eau passant par  $\mathbf{p}$  et un débit  $\phi$ . Chaque arête a une longueur fixe  $e$  définie

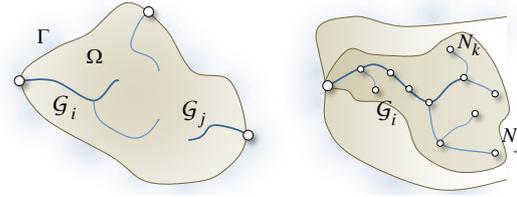


Figure 3: Définitions et notations des symboles utilisés dans l'algorithme de génération du réseau hydrographique.

par l'utilisateur. On note  $\mathcal{N} = \cup_i \mathcal{N}_i$  l'ensemble de tous les nœuds et  $\mathcal{E} = \cup_i \mathcal{E}_i$  l'ensemble de toutes les arêtes.

#### 4.1. Placement des embouchures

La première étape consiste à placer l'ensemble des embouchures des cours d'eau sur le contour  $\Gamma$ . Afin d'avoir un développement hiérarchique, chaque embouchure créée se voit attribuer un indice de priorité inspiré de la notion de nombre de Strahler (Section 4.2.2). Cette étape est importante car les positions et les indices de priorité ont un rôle majeur dans la détermination du type de motifs que l'on retrouvera une fois le réseau terminé.

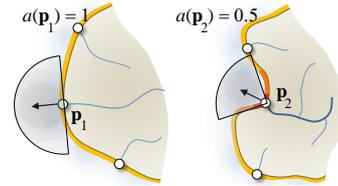


Figure 4: Les embouchures de fleuves les plus importantes sont souvent dans les zones côtières les plus concaves.

Notre algorithme de distribution des embouchures s'appuie sur des observations faites en géomorphologie. En règle générale, deux embouchures de fleuves sont séparées par des distances élevées [DL78]. Les embouchures les plus importantes se situent également dans des zones côtières concaves.

Dans notre système, le placement des embouchures peut être réalisé soit par l'utilisateur, soit de manière automatique à l'aide d'heuristiques. Nous échantillonons donc le contour  $\Gamma$  de manière adaptative en fonction de l'accessibilité locale  $a(\mathbf{p}), \mathbf{p} \in \Gamma$  (Figure 4) puis nous attribuons à chaque embouchure un indice de priorité compatible avec les nœuds déjà placés.

#### 4.2. Croissance du réseau hydrographique

Notre algorithme de croissance de réseau hydrographique construit de manière incrémentale l'ensemble des arbres  $\mathcal{G}$  à l'aide d'une grammaire probabiliste. À chaque itération, nous répétons trois étapes :

1. Choisir un nœud de l'ensemble de tous les nœuds susceptibles d'être étendus noté  $\mathcal{X}$ . On note  $N_{\mathcal{X}}$  le nœud sélectionné, appartenant au sous-graphe  $G_i$ .
2. Étendre  $N_{\mathcal{X}}$  à l'aide de la grammaire et des tests géométriques de validité pour produire un nouveau nœud  $N$ .

- Mettre à jour la liste des candidats  $\mathcal{X}$ . Dans le cas où nous avons réussi à étendre le nœud  $N_{\mathcal{X}}$  en un nœud  $N$  qui est compatible avec l'ensemble des graphes  $\mathcal{G}$  déjà construits, nous mettons à jour la liste des candidats  $\mathcal{X}$ .

$$\mathcal{X} \leftarrow (\mathcal{X} \setminus \{N_{\mathcal{X}}\}) \cup \{N\}$$

$G_i$  est également mis à jour pour refléter l'ajout du nœud  $N$ . Dans le cas où le nœud n'a pas été validé, nous retirons  $N_{\mathcal{X}}$  de la liste des candidats :  $\mathcal{X} \leftarrow \mathcal{X} \setminus \{N_{\mathcal{X}}\}$ .

#### 4.2.1. Sélection du nœud

Nous construisons le réseau hydrographique en faisant croître simultanément les arbres  $G_i$  à partir des embouchures. A chaque étape, nous proposons de sélectionner le nœud candidat que l'on va étendre selon une analyse multicritères combinant la hauteur des nœuds candidats et leur priorité. Cette sélection mixte nous paraît être la plus efficace car elle imite à la fois la configuration hiérarchique d'un réseau tout en gardant une notion de compétition entre les différents cours d'eau. Ce critère mixte a également l'avantage d'être paramétrable et peut ainsi exprimer aussi bien la stratégie purement hiérarchique (le nœud à étendre est le plus prioritaire) que totalement compétitive (le nœud à étendre est le plus bas en altitude).

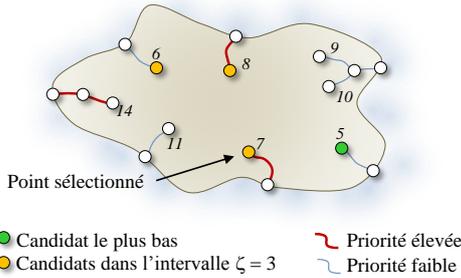


Figure 5: Algorithme de sélection.

Soit  $\mathcal{X} \subset \mathcal{N}$  l'ensemble des nœuds déjà créés dans  $\mathcal{G}$  qui sont candidats à l'extension. Notre méthode fonctionne de la manière suivante (Figure 5) :

- Nous cherchons le nœud candidat  $N_l$  ayant l'altitude  $\mathbf{p}_z(N_l)$  la plus basse.
- Nous sélectionnons le sous-ensemble de candidats  $\mathcal{X}_\zeta \subset \mathcal{X}$  dont l'altitude est suffisamment proche de  $N_l$  (on note  $\zeta$  le paramètre de contrôle) :

$$\mathcal{X}_\zeta = \{N \in \mathcal{X} \mid \mathbf{p}_z(N) - \mathbf{p}_z(N_l) < \zeta\}$$

- Le candidat retenu est le nœud de  $\mathcal{X}_\zeta$  avec l'indice de priorité le plus élevé. En cas d'égalité, celui avec l'altitude la plus basse est préféré.

Le paramètre  $\zeta \in [0; +\infty[$  représente la différence maximum de hauteur entre deux points de  $\mathcal{X}_\zeta$ . Dans le cas où  $\zeta = 0$ , la sélection mixte correspond à la sélection du plus bas des nœuds. Dans le cas où  $\zeta \rightarrow \infty$ , la sélection mixte correspond à la sélection du candidat le plus prioritaire.

La Figure 6 montre qu'avec  $\zeta = 0$ , on a beaucoup de sous-réseaux de taille semblable. À l'inverse avec  $\zeta = 20$ , deux bassins versants associés à des rivières prioritaires, dominent le domaine  $\Omega$ .

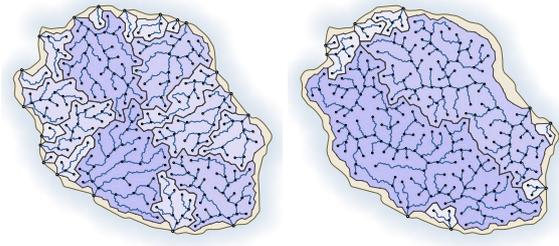


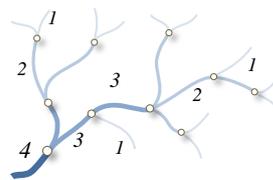
Figure 6: Deux réseaux hydrographiques générés par des stratégies de sélection des nœuds différentes.

#### 4.2.2. Grammaire de croissance

La croissance du réseau hydrographique est effectuée à l'aide d'une grammaire. Les règles de production sont indiquées dans la figure 7. Les symboles non-terminaux de notre grammaire sont notés  $\alpha$  et  $\beta$  et représentent respectivement un nœud candidat à l'extension, et un nœud qui sera testé pour être instancié. L'unique symbole terminal est noté  $\tau$  et représente un nœud déjà ajouté au graphe et qui ne peut plus s'étendre.

Afin de garantir les écoulements, tout nœud créé se voit attribuer une altitude qui est toujours supérieure à celle de son prédécesseur. Cette altitude croissante est calculée à partir d'un paramètre représentant le caractère montagneux de la zone. Ce paramètre peut être généré procéduralement ou donné sous la forme de contraintes par l'utilisateur.

**Priorité et nombre de Strahler** Tous les symboles sont paramétrés par un entier représentant l'indice de priorité  $s$  imitant la notion de nombre de Horton-Strahler [Hor45] qui est une mesure numérique caractérisant la complexité de branchement d'un arbre. Cette notion a été historiquement inventée pour servir de classification des réseaux hydrographiques.



Étant donné un nœud  $N$ , on définit son nombre de Strahler noté  $s$  comme suit. Soit  $N$  un nœud, si  $N$  est une feuille alors  $s = 1$ , sinon soit  $k$  le plus grand nombre de Strahler de ses fils. Si  $N$  a un unique fils ayant un nombre de Strahler égal à  $k$ , alors  $s = k$  sinon  $N$  a plusieurs fils dont le nombre de Strahler est égal à  $k$  et on définit  $s = k + 1$ .

Notre grammaire imite l'algorithme de calcul du nombre de Strahler : on retrouve les notions de branchement asymétrique (règle 2.2) et symétrique (règle 2.3). Comme notre indice de priorité peut diminuer à chaque embranchement, nous pouvons nous retrouver dans le cas où tous les nœuds candidats restants ont un indice de priorité égal à 1. Afin de continuer à coloniser le domaine  $\Omega$ , la grammaire se reportera automatiquement sur la première règle de production.

**Grammaire probabiliste** Certaines règles possèdent des probabilités. Les probabilités  $\mathcal{P}_c$ ,  $\mathcal{P}_a$ ,  $\mathcal{P}_s$  sont définies par

0.	$A$	$\longrightarrow$	$\alpha_1(s_1) \dots \alpha_n(s_n)$		{ <i>Axiome</i> }
1.	$\alpha(0)$	$\longrightarrow$	$\tau(0) (\beta(0))^p$ avec $p \in [1;5]$		{ <i>Remplissage</i> }
2.1	$\alpha(n)$	$\longrightarrow$	$\tau(n) \beta(n)$	: $\mathcal{P}_c$	{ <i>Prolongation</i> }
2.2		$\longrightarrow$	$\tau(n) \beta(n) \beta(m)$ où $m < n$	: $\mathcal{P}_a$	{ <i>Embranchement Strahler asymétrique</i> }
2.3		$\longrightarrow$	$\tau(n) \beta(n-1) \beta(n-1)$	: $\mathcal{P}_s$	{ <i>Embranchement Strahler symétrique</i> }
3.1	$\beta(n)$	$\xrightarrow{\text{si valide}}$	$\alpha(n)$		{ <i>Instantiation</i> : $\mathcal{X} \leftarrow (\mathcal{X} \setminus \{N_{\mathcal{X}}\}) \cup \{N\}$ }
3.2		$\xrightarrow{\text{sinon}}$	$\varepsilon$		{ <i>Rejet</i> : $\mathcal{X} \leftarrow \mathcal{X} \setminus \{N_{\mathcal{X}}\}$ }

Figure 7: Grammaire ouverte pour la croissance du réseau hydrographique

l'utilisateur et influencent le nombre d'embranchements présents dans le graphe obtenu.  $\mathcal{P}_a$  correspond à la probabilité d'un embranchement asymétrique,  $\mathcal{P}_s$  à la probabilité d'un embranchement symétrique et  $\mathcal{P}_c$  à l'absence d'embranchement avec  $\mathcal{P}_c + \mathcal{P}_a + \mathcal{P}_s = 1$ .

**Grammaire ouverte** Nous avons besoin d'analyser l'environnement géométrique proche pour vérifier si un nœud peut exister à une position donnée. Si un nœud ne vérifie pas l'ensemble des tests géométriques, il n'est pas instancié et disparaît de la grammaire grâce à la  $\varepsilon$ -production.

Soit  $N_{\mathcal{X}} \in \mathcal{N}$  le candidat que l'on étend,  $N = (\mathbf{p}, s, \rho, \phi)$  le nouveau nœud de rivière que l'on souhaite ajouter au graphe et  $E$  l'arête liant  $N$  à son parent  $N_{\mathcal{X}}$  de longueur  $e$ . On note  $N_i = (\mathbf{p}_i, s_i, \rho_i, \phi_i)$  les nœuds de  $\mathcal{N}$ . Le point  $\mathbf{p}$  doit d'abord appartenir au domaine et ne doit pas être trop proche du bord  $\Gamma$  :

$$\mathbf{p} \in \Omega \quad \wedge \quad d(E, \Gamma) > \delta$$

Pour que le réseau ne soit pas trop dense localement, nous vérifions que la distance entre notre arête  $E$  et chaque autre arête du graphe est bien supérieure à un paramètre  $\sigma$  donné par l'utilisateur. Ce paramètre dépend de la taille des fleuves testés : cela permet d'éloigner davantage les grands fleuves. Afin que l'étape suivante de segmentation soit valide,  $\sigma$  doit être supérieur à  $e/\sqrt{2}$ .

$$\forall E_i \in \mathcal{E} \quad : \quad d(E, E_i) > \sigma$$

Enfin, nous vérifions que le nouveau point a une altitude compatible avec les points précédemment créés. Pour cela, nous évaluons la pente moyenne entre le nœud candidat et les nœuds précédemment créés et vérifions que cette pente n'excède pas un seuil  $\kappa$  défini par l'utilisateur :

$$\forall i \in [0; n-1] \quad : \quad \frac{|\mathbf{p}_z - \mathbf{p}_{z_i}|}{d(\mathbf{p}, \mathbf{p}_i)} < \kappa$$

### 4.3. Évaluation

Nous avons implémenté notre algorithme de croissance et évalué l'impact des différents paramètres de la grammaire sur la forme des réseaux hydrographiques obtenus.

La Figure 8 montre le résultat de deux paramétrages différents. Les paramètres ( $\mathcal{P}_c = 0.2, \mathcal{P}_s = 0.7, \mathcal{P}_a = 0.1$ ) produisent des bassins versants tortueux. Les quelques fleuves prioritaires perdent rapidement de l'importance : on mesure un grand nombre ( $> 75\%$ ) de cours d'eau peu prioritaires.

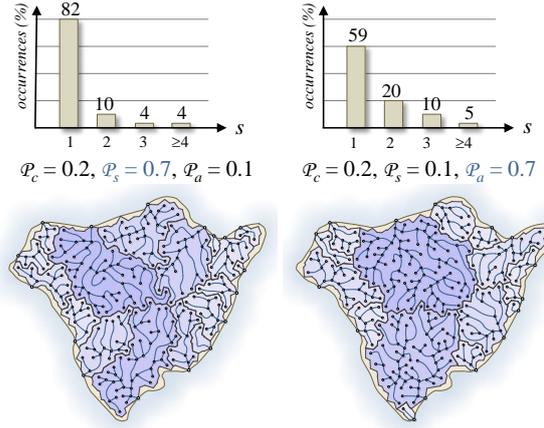


Figure 8: Deux paramétrages différents générant deux types de bassins versants.

Les paramètres ( $\mathcal{P}_c = 0.2, \mathcal{P}_s = 0.1, \mathcal{P}_a = 0.7$ ) génèrent des réseaux équilibrés où le fleuve prioritaire, qui s'est étendu en maintenant son indice, structure le bassin autour de lui. C'est cette configuration qui nous paraît être la plus cohérente si l'on veut générer des bassins versants équilibrés.

Il est possible de mesurer cette différence en comptant la proportion de cours d'eau pour chaque indice de priorité. Lorsque  $\mathcal{P}_s$  est élevée, l'indice de priorité d'un fleuve va rapidement diminuer. À l'inverse, si la probabilité  $\mathcal{P}_a$  est élevée, les fleuves prioritaires garderont leur rôle structurant plus longtemps.

## 5. Segmentation, typage et calcul de flot

Dans cette section, nous segmentons notre graphe de rivières pour pouvoir travailler localement dans des blocs lors de l'étape de modélisation. Cette segmentation nous permet de construire l'ensemble des bassins versants et un graphe dual représentant l'ensemble des crêtes de notre domaine (Section 5.1). Nous pouvons en extraire des informations complémentaires comme les calculs des débits en tout point de notre réseau. Nous typons également les cours d'eau grâce à la classification de Rosgen (Section 5.2).

### 5.1. Segmentation et élévations des crêtes

À partir du graphe de réseau hydrographique  $\mathcal{G}$ , nous décomposons le domaine  $\Omega$  en un ensemble de blocs de ter-

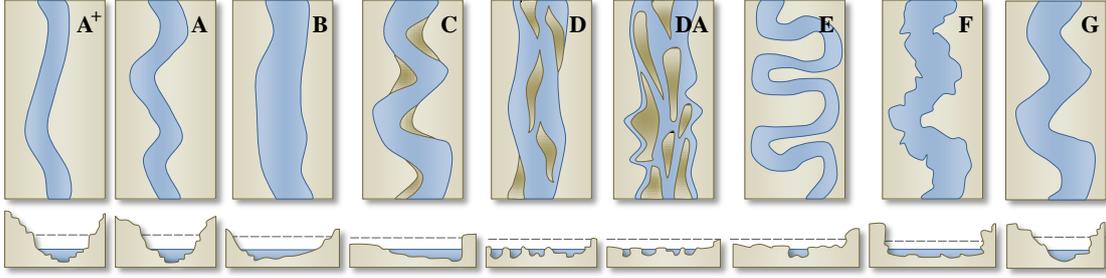


Figure 9: Différentes catégories de cours d'eau d'après la classification de Rosgen [Ros94].

rain  $\mathcal{V} = \{V_i\}$  en construisant le diagramme de Voronoï des points  $\mathbf{p}_i$  des nœuds de  $\mathcal{G}$ . Les segments des cellules de Voronoï correspondent aux crêtes délimitant les bassins versants. Nous calculons une altitude pour chaque sommet de crête de manière à ce que celle-ci soit supérieure aux rivières qu'elle délimite.

Chaque bloc  $V$  est un polygone composé d'un certain nombre de points de crêtes notés  $\mathbf{q}_k$ . Les entrées de fleuves sont notées  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  et l'exutoire  $\mathbf{s}$ .

**Bassins versants** Pour tout exutoire  $\mathbf{s}$  d'un bloc  $V_j$ , nous définissons son bassin versant comme l'ensemble des cellules  $V_k$  reliées en amont à  $\mathbf{s}$  dans le graphe  $\mathcal{G}$ .

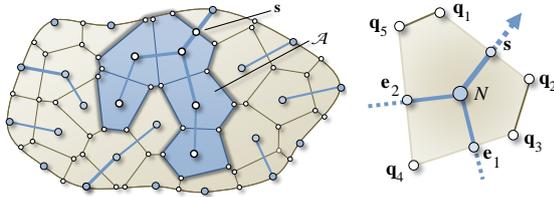


Figure 10: Segmentation de notre réseau hydrographique en un ensemble de cellules de Voronoï.

**Débit** Le calcul du débit en un point du réseau hydrographique est important car il contribue à définir le type du cours d'eau. L'évaluation du débit d'un fleuve est un problème complexe faisant intervenir de nombreux paramètres comme le climat, la nature des sols et des sous-sols. Dans notre système, nous choisissons de calculer le débit aux exutoires à l'aide de la loi de puissance observée en géomorphologie [DL78]. Soit  $\mathcal{A}$  l'aire d'un bassin versant (en  $\text{km}^2$ ), le débit moyen  $\phi$  d'un fleuve (en  $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$ ) est donné par :

$$\phi = 0.42 \cdot \mathcal{A}^{0.69}$$

Nous calculons l'aire du bassin versant  $\mathcal{A}$  comme la somme de l'aire de tous les blocs traversés par le graphe en amont de  $\mathbf{s}$ . Ceci nous permet de calculer le débit sortant  $\phi$  pour tout bloc  $V$  (Figure 10).

**Élévation des crêtes** À l'issue de la construction de  $\mathcal{G}$ , tous les nœuds  $N \in \mathcal{N}$  ont une altitude. Notre segmentation a décomposé notre domaine en un ensemble de cellules  $\mathcal{V}$ . On

doit calculer les hauteurs des sommets de chaque bloc de façon à garantir un écoulement cohérent.

Chaque cellule de Voronoï définit deux types d'arêtes. Les arêtes sans intersections avec le graphe de rivière en un exutoire  $\mathbf{s}$  ou une source  $\mathbf{e}_k$  correspondent aux lignes de crêtes.

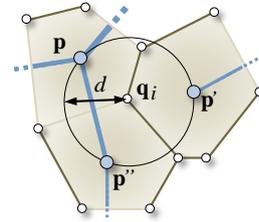


Figure 11: Calcul des hauteurs des points de crête en fonction des altitudes de nœuds du réseau hydrographique.

Soit  $\mathbf{q}$  le sommet de crête dont on cherche l'altitude : ce point est à équidistance des centres  $\mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{p}''$  des cellules associées aux trois nœuds de rivières  $N, N'$  et  $N''$ . Cette distance est notée  $d$ .

$$\mathbf{q}_z = \max(p_z, p'_z, p''_z) + \lambda \cdot d$$

$\lambda$  est un coefficient décrivant si le terrain est montagneux. Ce paramètre peut être généré procéduralement. Nous choisissons généralement  $\lambda \in [0; 0.25]$  qui peut être pondéré en fonction de la distance à la côte afin d'avoir des zones plus douces au niveau des plages. Ce paramètre peut également être donné sous la forme d'une contrainte par l'utilisateur.

## 5.2. Caractérisation des cours d'eau

Après avoir segmenter notre domaine, l'étape suivante consiste à définir les types de cours d'eau à l'intérieur de chaque cellule de Voronoï  $V_i$ . Notre méthode s'inspire de la classification de Rosgen [Ros94] qui définit 9 grandes catégories de rivière en fonction de leur pente et de leur type de trajectoire.

Chaque classe de rivière définit le type de trajectoire du cours d'eau et le profil de creusement du lit (Figure 9). Rosgen complète cette description avec la composition géologique du lit de la rivière (roche mère, rochers, cailloux, gravier, sable, limon ou argile).

Pour notre implémentation, nous nous sommes limités à

4 types de rivières : droite (B), sinuose (E), en tresses (D) et le cas particulier des deltas (D également). Nous typons l'ensemble de notre réseau en fonction de la pente locale des cours d'eau et de la position du bloc par rapport à la côte. Les points de contrôle des fleuves dont le débit est suffisamment important seront typés comme des tresses s'ils sont suffisamment proches des côtes (en dessous d'une certaine distance géodésique). Les deltas ne concernent que les points décrivant des embouchures avec un débit suffisant.

## 6. Modélisation de terrains par primitives

Dans cette partie, nous présentons notre modèle de terrain. Notre approche consiste à définir le relief de manière procédurale à l'aide d'une fonction continue  $h(\mathbf{p}) : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  définissant l'élévation en tout point  $\mathbf{p}$  de notre domaine.  $h$  est définie par un arbre de construction dont les feuilles sont des primitives définissant des éléments de terrain et dont les nœuds sont des opérateurs de combinaison. Cet arbre permet d'exprimer l'altitude en tout point du plan comme une combinaison de l'influence de plusieurs primitives.

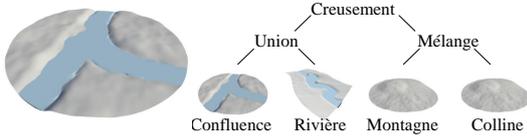


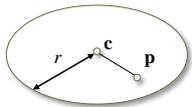
Figure 12: Arbre de construction.

Cette représentation ressemble à la définition du Blob-Tree proposé par Wyvill [WGG99]. L'originalité de notre modèle est que tout nœud dans l'arbre définit deux fonctions notées respectivement  $h(\mathbf{p})$  et  $w(\mathbf{p})$ . La fonction  $h$  définit l'élévation, alors que la fonction  $w$  définit l'influence du nœud au point considéré et permet de réaliser des combinaisons complexes.

Dans notre système, nous utilisons cinq types de nœuds : les primitives terrains  $\mathcal{T}$  et rivières  $\mathcal{R}$  d'une part et les opérateurs de mélange  $\mathcal{B}$ , de remplacement  $\mathcal{C}$  et d'union  $\mathcal{U}$  d'autre part. A titre d'exemple, dans la Figure 12, l'arbre de construction décrit le mélange d'un ensemble de fragments de terrain sur lesquels sont creusées nos rivières et qui peut s'écrire sous la forme :  $\mathcal{A} = \mathcal{C}(\mathcal{B}(\mathcal{T}_i), \mathcal{U}(\mathcal{R}_i))$ .

### 6.1. Primitives

Chaque primitive est portée par un squelette géométrique (point, segment, courbe) et un ensemble de paramètres décrivant localement l'altitude et l'influence qu'elle diffuse. Les fonctions de pondération  $w(\mathbf{p})$  des primitives sont à support compact pour limiter leur domaine d'influence.



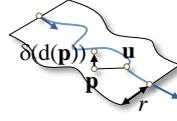
$\mathbf{c}$ ], nous définissons :

$$h(\mathbf{p}) = \mathbf{c}_z + n(\mathbf{p})$$

$$w(\mathbf{p}) = \left(1 - d(\mathbf{p})^2/r^2\right)^2 \text{ si } d(\mathbf{p})^2 < r^2 \text{ et } w(\mathbf{p}) = 0 \text{ sinon}$$

Les primitives de terrain  $\mathcal{T}$  sont caractérisées par leur centre  $\mathbf{c}$  et le rayon  $r$  décrivant la taille de la zone d'influence circulaire. Soit  $d(\mathbf{p}) = \|\mathbf{p} - \mathbf{c}\|$ ,

La fonction  $n(\mathbf{p})$  représente un bruit de Perlin [EMP\*98] permettant de contrôler l'irrégularité du sol.



Les primitives de rivières  $\mathcal{R}$  sont construites à partir d'une courbe  $\gamma$  définissant sa trajectoire et d'une fonction de profil de rivière notée  $\delta$  caractérisant le profil de la rivière perpendiculairement à la courbe. La distance entre un point  $\mathbf{p}$  et la courbe  $\gamma$  est notée  $d(\mathbf{p})$ . La projection d'un point  $\mathbf{p}$  sur  $\gamma$  est notée  $u(\mathbf{p})$ . Nous définissons :

$$h(\mathbf{p}) = u_z(\mathbf{p}) + \delta(d(\mathbf{p}))$$

$$w(\mathbf{p}) = (1 - d(\mathbf{p})^2/r^2)^2$$

Les primitives de confluence sont construites sur le même principe mais avec des squelettes plus complexes.

### 6.2. Opérateurs

Les opérateurs combinent les altitudes et les influences de 2 primitives filles notées A et B. Le mélange de deux primitives A et B noté  $\mathcal{B}(A, B)$  combine les altitudes  $h_A$  et  $h_B$  en fonction des influences  $w_A$  et  $w_B$  et permet le mélange et le raccordement des primitives du terrain.

$$h_{\mathcal{B}(A,B)} = (h_A w_A + h_B w_B) / (w_A + w_B)$$

$$w_{\mathcal{B}(A,B)} = (w_A + w_B) / 2$$

L'opérateur de remplacement  $\mathcal{C}$  permet de remplacer une partie du terrain défini par le nœud A par un élément de terrain défini par le nœud B tout en assurant un raccordement lisse. Cet opérateur asymétrique est utilisé pour construire la géométrie des cours d'eau :

$$h_{\mathcal{C}(A,B)} = (1 - w_B) h_A + w_B h_B$$

$$w_{\mathcal{C}(A,B)} = w_B^2 + (1 - w_B) w_A$$

**Union** L'opérateur d'union noté  $\mathcal{U}$  permet de raccorder les morceaux de primitives de rivières entre elles et utilise les fonctions max comme présenté dans [WGG99] : on définit  $h_{\mathcal{U}(A,B)} = \max(h_A, h_B)$  et  $w_{\mathcal{U}(A,B)} = \max(w_A, w_B)$ .

## 7. Génération du terrain

L'étape de génération de terrain construit le modèle de terrain final à partir du graphe de réseau hydrographique, des données de débit  $\phi$  et des types de Rosgen  $\rho$  attribués à chaque nœud. Nous cherchons à générer l'ensemble des primitives décrites précédemment (Section 6) qui correspondent au terrain.

En premier lieu, nous générons les primitives associées aux rivières (Section 7.1). Dans un deuxième temps, nous calculons un ensemble de primitives de terrain recouvrant le domaine du bloc  $V$  que nous creusons à l'aide des primitives de rivières (Section 7.2).

La génération de ces primitives procède en deux étapes. Pour chaque bloc de Voronoï  $V$ , nous construisons l'ensemble des points de confluence qui vont relier l'ensemble de nos cours d'eau et nous raffinons les trajectoires selon

leur type (Section 7.1). Dans une seconde étape, nous calculons un ensemble de primitives de terrain recouvrant le domaine du bloc  $V$  que nous creusons à l'aide des primitives de rivières (Section 7.2).

### 7.1. Génération des primitives de rivières

Pour générer l'ensemble des primitives de rivières, notre méthode procède en 2 étapes : tout d'abord nous construisons l'ensemble des points de confluence qui vont relier les cours d'eau appartenant à un même bloc  $V$ , puis nous raffinons les trajectoires des cours d'eau selon leur type de Rosgen.

**Création des jonctions** Cette étape définit les différentes jonctions de cours d'eau à l'intérieur d'un bloc. Chaque bloc  $V$  possède exactement un exutoire, et  $n$  entrées d'eau.

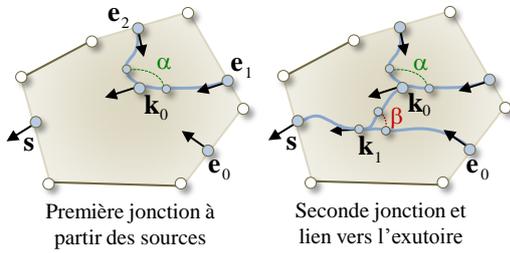


Figure 13: Algorithme pour la génération incrémentale des jonctions entre les contributeurs dans un même bloc.

Notre approche consiste à créer itérativement  $n - 1$  confluences notées  $k_i$  à l'intérieur de  $V$  (Figure 13) de manière à créer le réseau hydrographique. À partir de 2 entrées voisines sur le périmètre de  $V$ , nous définissons une première confluence  $k_0$ . Nous répétons ensuite l'opération entre deux nouvelles entrées ou confluences pour relier successivement tous les cours d'eau. Pour chaque jonction, nous définissons l'angle de raccord en fonction des positions et des débits des rivières à raccorder. Lorsque les deux cours d'eau ont des flux très différents c'est-à-dire avec deux nombres de Strahler différents, nous construisons un raccordement de confluence perpendiculaire. Lors de la rencontre entre deux cours d'eau de débits similaires, nous construisons une jonction avec un angle de raccord plus faible.

**Subdivision des rivières** Une fois les jonctions créées, nous raffinons les trajectoires des différentes rivières en fonction de leur type de Rosgen. Nous subdivisons chaque courbe en un ensemble de morceaux de longueur inférieure à un paramètre défini par l'utilisateur. Chaque nouveau point de subdivision voit sa position et sa tangente légèrement perturbées en fonction du type pour créer des méandres plus ou moins prononcés selon le type de Rosgen.

### 7.2. Génération des primitives de terrain

Rappelons que le terrain est défini en mélangeant un ensemble de fragments de terrain à support compact sur lesquels sont creusées les rivières. Pour tout bloc, nous devons

produire un ensemble de primitives  $\{\mathcal{T}\}$  recouvrant  $V$  (Figure 14) et calculer les différents paramètres définissant ces primitives. Soit  $\mathcal{T}_i$  une primitive de terrain définie par son centre  $c_i$  et son rayon  $r_i$ .

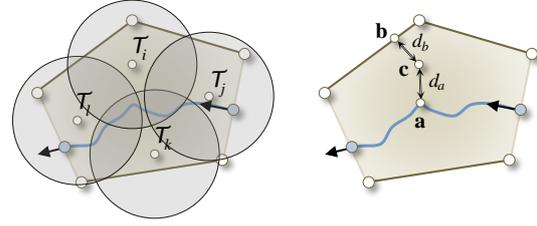


Figure 14: Distribution des primitives de terrain et calcul de leur altitude.

Nous utilisons une distribution de Poisson [LD05] s'appuyant sur un pavage apériodique pour définir les différentes positions  $c_i$ . Les rayons  $r_i$  des disques sont augmentés jusqu'à ce que l'ensemble des primitives  $\{\mathcal{T}_i\}$  recouvre  $\Omega$ .

Considérons une primitive terrain  $\mathcal{T} = (c, r)$ , nous devons encore calculer l'altitude  $c_z$  de la primitive. Soit  $a$  la projection de  $c$  sur l'ensemble des rivières. De la même manière,  $b$  est la projection de  $c$  sur les lignes de crêtes de la cellule de Voronoï. On note  $d_a$  et  $d_b$  les distances à ces projetés. Nous combinons ces deux hauteurs par le calcul d'interpolation suivant :

$$c_z = \frac{d_a}{d_a + d_b} \mathbf{b}_z + \frac{d_b}{d_a + d_b} \mathbf{a}_z$$

Les caractéristiques du bruit (amplitude, spectre) associées à la primitive sont calculées en fonction de la distance à la rivière  $d_a$  et de la différence d'altitude entre la rivière  $\mathbf{a}_z$  et les crêtes  $\mathbf{b}_z$ . Cette modulation permet d'augmenter l'irrégularité du terrain en zone montagneuse et de la diminuer dans les plaines. Ce bruit peut faire apparaître des minima locaux négligeables en raison de leur petite taille.

## 8. Résultats

Notre méthode de génération procédurale de terrains a été implémentée en C++. Les temps de calcul ont été mesurés sur une configuration composée d'un processeur Intel® Core i7 cadencé à 3 GHz et de 16 Go de mémoire vive. L'ensemble des rendus a été réalisé sur MentalRay®.

**Réalisme** Notre méthode permet de créer des terrains de différentes tailles tout en respectant les règles fondamentales en hydromorphologie (Figure 16). En comparaison, les techniques procédurales traditionnelles de génération fractales produisent des terrains non réalistes. Même en complétant ces approches par une simulation d'érosion, ces techniques ne permettent pas de générer des réseaux hydrographiques correspondant aux classifications rencontrées en géomorphologie. Notre approche phénoménologique est basée sur des travaux d'observation et de classification en hydrologie ce qui nous permet d'obtenir une structuration en vallées des terrains à grande échelle en utilisant notre grammaire ouverte basée sur les nombres de Strahler, mais aussi une géo-

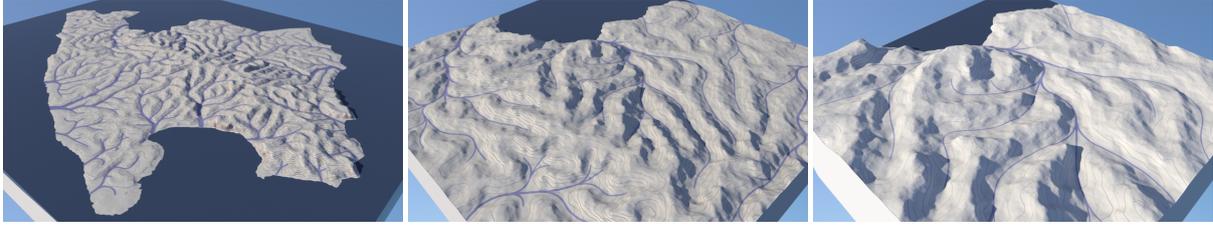


Figure 15: Exemple d'île générée par notre algorithme à différents points de vue.

métrie réaliste à haute résolution en suivant la classification de Rosgen.

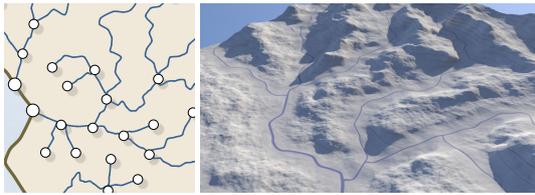


Figure 16: Exemple de terrain structuré qui respecte les principes de l'hydrographie.

**Contrôle** L'utilisateur peut intervenir à différents niveaux du processus de création pour contrôler et guider certaines des étapes : il peut éditer l'emplacement des embouchures ou changer les priorités des fleuves afin de choisir quel arbre dominera le domaine  $\Omega$ .

Le mode de contrôle le plus direct consiste à permettre à l'utilisateur de spécifier les zones montagneuses et les plaines. Quelles que soient les contraintes, la grammaire construit un réseau hydrographique compatible et le terrain résultant respecte bien la contrainte physique d'écoulement des eaux (Figure 17).

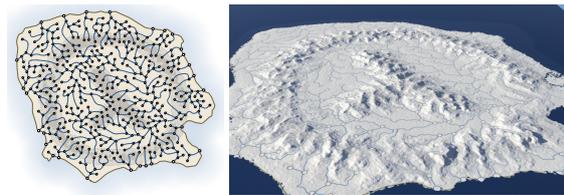


Figure 17: Un terrain respectant une carte de contrainte définie par l'utilisateur.

Paramétrer les règles de la grammaire et l'algorithme de caractérisation des rivières demande plus d'expertise. Les valeurs des paramètres décrites dans l'article nous semblent les plus adaptées à produire des terrains visuellement réalistes.

**Efficacité** Notre méthode permet de générer des descriptions vectorielles de terrains grands de plusieurs centaines de kilomètres carrés en quelques secondes (Tableau 1). L'intérêt de notre approche est de ne pas avoir recours à des simulations numériques d'érosion hydraulique et thermique coûteuses en temps de calcul.

	Graphe	Analyse	Arbre
Mini	0.9	0.2	0.6
Lambda	3.4	1.3	1.7
Hoya	4.5	1.7	2.3
Imbros	39.2	8.7	5.1

Table 1: Temps de calcul (s) pour la génération du graphe, l'analyse du réseau hydrographique, le calcul des débits et bassins versants et la construction du modèle géométrique.

Avec une description vectorielle, nous pouvons visualiser le terrain à n'importe quelle échelle et ainsi afficher un niveau de détail dépendant de la position de la caméra ou des ressources de l'ordinateur (Figure 15). La description du terrain par primitives permet d'obtenir une information compacte pour décrire le terrain ( $1 \text{ km}^2 \approx 1.5 \text{ ko}$  en moyenne) ce qui permet de stocker de vastes terrains (Tableau 2).

	Taille du terrain	Longueur du réseau	Primitives	
			Terrain	Rivières
Mini	969	404	9697	366
Lambda	2751	1248	27818	1094
Hoya	3387	1430	33900	1288
Imbros	7269	3348	73538	2908

Table 2: Statistiques pour différents terrains : le tableau représente la taille ( $\text{km}^2$ ), la longueur du réseau hydrographique (km) et le nombre de primitives de construction.

Si l'utilisateur ne souhaite construire qu'une partie du terrain, il peut, grâce à la segmentation, ne générer que les primitives associées aux blocs de Voronoï voulus. L'île Hoya a une superficie de  $3387 \text{ km}^2$  et est composée de 35188 primitives occupant en mémoire environ 4180 ko. La description vectorielle d'une partie du terrain correspondant à  $30 \text{ km}^2$  ne représente que 1068 primitives et n'occupe que 125 ko.

## 9. Conclusion

Nous avons présenté une méthode originale de génération procédurale de terrains. Notre approche repose sur la création d'un réseau hydrographique à l'aide d'une grammaire ouverte respectant les propriétés hydrographiques. La génération du modèle de terrain s'appuie sur un système de primitives qui permet de créer à la fois collines, montagnes et



Figure 18: Plusieurs exemples de rivières parcourant les terrains générés par notre méthode.

vallées ainsi que la géométrie détaillée des cours d'eau. En nous inspirant des classifications en hydrologie, nous parvenons à reproduire des éléments visuellement importants des rivières, comme leurs trajectoires et leurs profils.

Une piste de recherche intéressante semble être d'étendre notre système en incluant une génération procédurale de la végétation, pour produire automatiquement une description et une distribution des espèces végétales s'adaptant au type de terrain, notamment le long des cours d'eau.

## Références

- [BA05] BELHADJ F., AUDIBERT P. : Modeling landscapes with ridges and rivers : bottom up approach. In *GRAPHITE* (2005), pp. 447–450.
- [CMF98] CHIBA N., MURAOKA K., FUJITA K. : An erosion model based on velocity fields for the visual simulation of mountain scenery. *Journal of Visualization and Computer Animation* 9, 4 (1998), 185–194.
- [DL78] DUNNE T., LEOPOLD L. B. : *Water in Environmental Planning*. W.H. Freeman, 1978.
- [DR00] DODDS P. S., ROTHMAN D. : Scaling, universality, and geomorphology. *Annual Review of Earth and Planetary Sciences* 28 (2000), 571–610.
- [EMP\*98] EBERT D., MUSGRAVE K., PEACHEY D., PERLIN K., WORLEY S. : *Texturing and Modeling : A Procedural Approach*. Academic Press Professional, 1998.
- [GMS09] GAIN J., MARAIS P., STRASSER W. : Terrain sketching. In *Proceedings of the 2009 symposium on Interactive 3D graphics and games* (2009), pp. 31–38.
- [HGA\*10] HNAIDI H., GUÉRIN E., AKKOUICHE S., PEYTAVIE A., GALIN E. : Feature based terrain generation using diffusion equation. *Computer Graphics Forum (Proceedings of Pacific Graphics)* 29, 7 (2010), 2179–2186.
- [Hor45] HORTON R. E. : Erosional development of streams and their drainage basins : hydro-physical approach to quantitative morphology. *Geological Society of America Bulletin* 56, 3 (1945), 275–370.
- [How71] HOWARD A. : Simulation of stream networks by headward growth and branching. *Geographical Analysis* 3 (1971), 29–50.
- [How90] HOWARD A. : Theoretical model of optimal drainage networks. *Water Resource Research* 26, 9 (1990), 2107–2116.
- [KMN88] KELLEY A., MALIN M., NIELSON G. : Terrain simulation using a model of stream erosion. In *Proceedings of SIGGRAPH* (1988), pp. 263–268.
- [LD05] LAGAE A., DUTRÉ P. : A procedural object distribution function. *ACM Trans. Graph.* 24, 4 (2005), 1442–1461.
- [MDH07] MEI X., DECAUDIN P., HU B. : Fast hydraulic erosion simulation and visualization on GPU. In *Pacific Graphics* (2007), pp. 47–56.
- [Mol03] MOLNAR P. : Nature, nurture and landscape. *Nature* 426 (2003), 612–614.
- [Nag98] NAGASHIMA K. : Computer generation of eroded valley and mountain terrains. *The Visual Computer* 13, 9-10 (1998), 456–464.
- [PGMG09] PEYTAVIE A., GALIN E., MERILLOU S., GROSJEAN J. : Arches : a Framework for Modeling Complex Terrains. *Computer Graphics Forum (Proceedings of Eurographics)* 28, 2 (2009), 457–467.
- [PH93] PRUSINKIEWICZ P., HAMMEL M. : A fractal model of mountains with rivers. In *Graphics Interface* (1993), pp. 174–180.
- [RIR97] RODRIGUEZ-ITURBE I., RINALDO A. : *Fractal River Basins : Chance and Self-Organization*. Cambridge University Press, 1997.
- [Ros94] ROSGEN D. L. : A classification of natural rivers. *Catena* 22 (1994), 169–199.
- [Sch79] SCHEIDEGGER A. : The principle of antagonism in the earth's evolution. *Tectonophysics* 55 (1979), T7–T10.
- [Sta91] STARK C. : An invasion percolation model of drainage network evolution. *Nature* 352 (1991), 423–425.
- [WBRI91] WILLGOOSE G. R., BRAS R. L., RODRIGUEZ-ITURBE I. : A coupled channel network and hillslope evolution model : 2. nondimensionalization and applications. *Water Resource Research* 27 (1991), 1685–1696.
- [WGG99] WYVILL B., GUY A., GALIN E. : Extending the csg tree - warping, blending and boolean operations in an implicit surface modeling system. *Computer Graphics Forum* 18, 2 (1999), 149–158.
- [ZSTR07] ZHOU H., SUN J., TURK G., REHG J. M. : Terrain synthesis from digital elevation models. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics* 13, 4 (2007), 834–848.