

# Somme de Minkowski par sommets contributeurs : application au morphage de formes 3D

Hichem BARKI, Florence DENIS, Florent DUPONT

Université de Lyon, CNRS  
Université Lyon 1, LIRIS, UMR5205  
43 Bd. du 11 novembre 1918, F-69622 Villeurbanne, France  
hichem.barki@liris.cnrs.fr, florence.denis@liris.cnrs.fr  
florent.dupont@liris.cnrs.fr

**Résumé** – Nous proposons une application de morphage ou d’interpolation entre maillages 3D, basée sur un algorithme de calcul de la somme de Minkowski de deux polyèdres convexes ainsi que son extension pour une paire de polyèdres non-convexe/convexe. Cet algorithme est basé sur le concept de sommets contributeurs, produit des résultats exacts et est plus performant par rapport aux autres approches proposées dans la littérature. L’interpolation est réalisée en calculant les sommes de Minkowski de deux polyèdres dont les tailles varient en fonction des paramètres de l’interpolation.

**Abstract** – We propose an application of morphing or interpolation between 3D meshes, based on an algorithm for the computation of the Minkowski sum of two convex polyhedra and its extension for a non-convex/convex pair of polyhedra. This algorithm is based on the concept of contributing vertices, produces exact results, and is more efficient than the other approaches proposed in literature. The interpolation is performed by computing the Minkowski sum of two polyhedra whose sizes vary according to the parameters of the interpolation.

## 1 Introduction

La somme de Minkowski de deux polyèdres en  $\mathbb{R}^3$  est une opération fondamentale pour de nombreuses applications, telles que la conception et la fabrication assistées par ordinateur [1], l’animation et l’interpolation [2, 3], la morphologie mathématique [4, 5], les mesures de similarités entre polyèdres convexes [6], etc. La somme de Minkowski de deux ensembles  $A$  et  $B$  est une addition vectorielle des éléments de chaque ensemble :  $S = A \oplus B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ . Elle peut être définie par l’union des balayages de tous les éléments d’un ensemble par l’autre ensemble :  $A \oplus B = \bigcup_{a \in A} B_a$ . Le balayage s’effectue en translatant l’ensemble  $B$  de sorte que son origine  $c$  (point commun de tous ses vecteurs de position) coïncide avec chaque élément  $a$  de l’ensemble  $A$ , la somme de Minkowski  $A \oplus B$  est alors le résultat de l’union de toutes les translations  $B_a$  de  $B$ . En analyse d’images, la somme de Minkowski  $A \oplus B$  est l’équivalent de la dilatation de  $A$  par  $B'$  :  $\delta_B(A) = \{a \mid B'_a \cap A \neq \emptyset\}$  où  $B'$  est le symétrique de  $B$  par rapport à son origine.

## 2 Somme de Minkowski de polyèdres convexes basée sur le concept de sommets contributeurs

Nous avons proposé un nouvel algorithme [7] nommé l’**algorithme CVMS (Contributing Vertices-based Minkowski Sum)** basé sur le concept des sommets contributeurs, pour le calcul exact de la somme de Minkowski de polyèdres convexes. Le concept des sommets contributeurs découle directement de la définition de la somme de Minkowski comme le résultat d’un balayage. Par exemple, si nous considérons une facette  $f_{i,A}$  de

$A$  et que nous la balayons à l’aide du polyèdre  $B$ , nous constatons que ce processus génère plusieurs facettes dues aux déplacements des sommets de  $B$ , mais seule la facette la plus éloignée est considérée puisqu’elle appartient à la surface du polyèdre résultat, comme illustré sur la figure 1.a. Le sommet dont le déplacement a produit cette facette est appelé **“sommets contributeur”** associé à la facette  $f_{i,A}$  (voir aussi la figure 1.a). Le sommet contributeur associé à une facette de  $A$  (ou de  $B$ ) est le sommet de  $B$  (ou de  $A$ ) le plus éloigné du plan d’appui de cette facette (dans le sens positif de la normale à cette facette).

Soient  $A$  et  $B$  deux polyèdres convexes, fermés, et 2-variété.  $A$  est composé de  $f_A$  facettes,  $e_A$  arêtes, et  $v_A$  sommets. De même,  $B$  est composé de  $f_B$  facettes,  $e_B$  arêtes, et  $v_B$  sommets. Nous avons prouvé dans [7] que le polyèdre somme de Minkowski  $S = A \oplus B$  est un polyèdre convexe, composé de trois types de facettes :  $f_A$  facettes ayant des plans d’appui parallèles à ceux des facettes de  $A$ , ces facettes sont appelées **“facettes translattées”** de  $S$ ;  $f_B$  facettes ayant des plans d’appui parallèles à ceux des facettes de  $B$ , ces facettes sont nommées **“facettes de coin”** de  $S$ ; et au plus  $e_A e_B$  facettes résultant des sommes de Minkowski de paires d’arêtes non parallèles de  $A$  et de  $B$ , ces facettes sont dites **“facettes de côté”** (voir la figure 1.b pour un exemple). Les deux premiers types de facettes sont obtenus à partir d’une translation des facettes de  $A$  et de  $B$  suivant les sommets contributeurs correspondants. Les facettes de côté sont calculées par deux critères appliquées aux arêtes de  $A$  et de  $B$ . Le premier critère est un critère de visibilité, le deuxième est un critère d’orientation des normales. Plus de détails sont fournis dans [7]. L’algorithme CVMS a une complexité maximale en temps d’exécution de  $O(f_A v_B + f_B v_A + f_A + f_B + e_A e_B)$ .

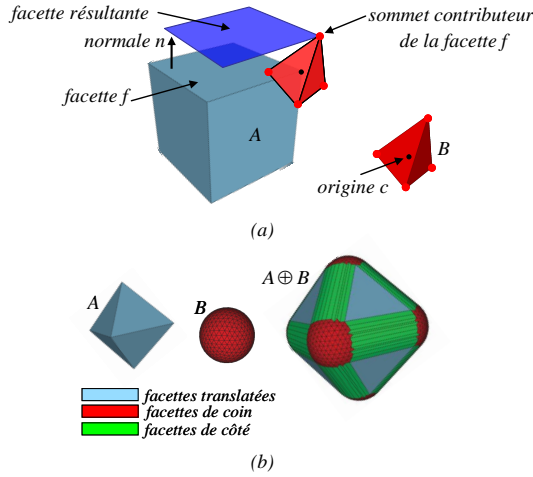


FIGURE 1 – (a) Illustration du concept de sommet contributeur. (b) Les différents types de facettes du polyèdre somme de Minkowski.

### 3 Extension du concept des sommets contributeurs pour la somme de Minkowski d'une paire de polyèdres non convexe/convexe

Nous avons adapté l'algorithme CVMS pour le cas où l'un des deux polyèdres est non convexe. Supposant que  $A$  est non convexe et que  $B$  est convexe.

Pour deux polyèdres convexes  $A$  et  $B$ , les sommets contributeurs associés à chaque facette de  $A$  sont les sommets de  $B$  les plus éloignés du plan d'appui de cette facette. Ces sommets contributeurs sont considérés comme des extrema globaux associés à chaque facette de  $A$  car le polyèdre  $B$  est convexe. Le raisonnement est similaire pour les facettes de  $B$  puisque  $A$  est également convexe. La conséquence de la non convexité de  $A$  est la présence d'arêtes de repli. Puisque  $B$  est convexe, les sommets contributeurs calculés pour les facettes de  $A$  sont des extrema globaux. Pour trouver les extrema ou sommets contributeurs correspondants aux facettes de  $B$ , nous considérons implicitement une décomposition de  $A$  en parties convexes  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . La somme Minkowski est alors calculée par l'équation  $A \oplus B = \bigcup_{i=1, \dots, n} (A_i \oplus B)$ . Le calcul de chaque somme de Minkowski partielle  $A_i \oplus B$  implique le calcul des sommets contributeurs pour les facettes de  $B$  et qui sont des sommets de  $A_i$ . Par conséquent, chaque somme de Minkowski partielle apporte son propre lot de sommets contributeurs associés aux facettes de  $B$  et qui ne peuvent pas être considérés comme des extrema globaux pour  $A \oplus B$ . En conclusion, les sommets contributeurs des facettes de  $B$  ne seront pas calculés. Les facettes de coin de  $S$  résultant des contributions des facettes de  $B$  seront déterminées par le calcul d'extrema locaux (des arêtes et des sommets élevés) comme nous le verrons par la suite.

Puisque  $B$  est un polyèdre convexe, les facettes translâtées sont calculées comme auparavant en déterminant les sommets contributeurs correspondant à chaque facette de  $A$  (qui sont des extrema globaux pour les facettes de  $A$ ). Pour les facettes de côté de  $S$ , les mêmes critères qu'auparavant s'appliquent, sauf que les arêtes de repli de  $A$  ne sont pas considérées car elles

produisent des facettes n'appartenant pas à la surface du polyèdre résultat (des facettes à l'intérieur du polyèdre  $S$ ).

Puisqu'aucun sommet contributeur n'a été calculé pour les facettes de  $B$ , la détermination des facettes de coin est effectuée par la recherche des sommets et des arêtes élevés par rapport à la normale à chaque facette de  $B$  et par la sommation de ces sommets ou arêtes trouvés avec les facettes de  $B$  afin d'obtenir les facettes de coin correspondantes de  $S$ . En d'autres termes, étant donnée une facette  $f_{i,B}$  de  $B$  ayant une normale  $n_{i,B}$ , l'arête convexe  $e_{j,A}$  de  $A$  est dite élevée par rapport à  $n_{i,B}$  si  $n_{i,B}$  se situe entre les orientations des deux normales aux deux facettes de  $A$  incidentes à  $e_{j,A}$ . Un sommet  $v_{k,A}$  de  $A$  est dit élevé par rapport à  $n_{i,B}$  s'il n'est incident qu'à des arêtes convexes tel que  $n_{i,B}$  se situe à l'intérieur du cône défini par les normales aux facettes de  $A$  incidentes à  $v_{k,A}$ . Pour résumer, nous pouvons dire que les arêtes et les sommets élevés par rapport à une des facettes  $f_{i,B}$  de  $B$  ayant une normale  $n_{i,B}$  sont des caractéristiques convexes de  $A$  dont les orientations sont coïncidentes avec l'orientation définie par la normale  $n_{i,B}$ . Les facettes de coin correspondant à chaque facette  $f_{i,B}$  de  $B$  sont calculées en translatant  $f_{i,B}$  suivant chaque sommet élevé par rapport à  $n_{i,B}$  et en calculant la somme de Minkowski planaire de  $f_{i,B}$  et de chaque arête élevée par rapport à  $n_{i,B}$  située sur une ligne d'appui parallèle au plan d'appui de  $f_{i,B}$ .

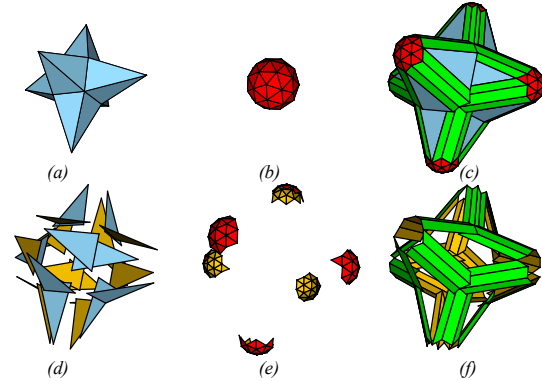


FIGURE 2 – (a) Polyèdre non convexe  $A$ . (b) Polyèdre convexe  $B$ . (c) Sur-ensemble généré. (d) Facettes translâtées. (e) Facettes de coin. (f) Facettes de côté.

Ce processus de détermination des trois types de facettes permet d'obtenir un sur-ensemble des facettes du polyèdre somme de Minkowski  $S$  (voir Fig. 2) avec des auto intersections entre ces facettes. L'extraction de la surface du polyèdre somme de Minkowski se fait grâce à l'union de trois enveloppes de surface calculées pour le sur-ensemble obtenu précédemment, suivant trois directions de projection orthogonales. En d'autres termes, trois enveloppes de surfaces sont calculées pour le sur-ensemble suivant trois vecteurs orthogonaux formant une base dans  $\mathbb{R}^3$ . Ensuite, ces enveloppes sont fusionnées afin de reconstruire toutes les parties de la surface du polyèdre somme de Minkowski. Les parties résidants à l'intérieur du sur-ensemble ne seront pas visibles et n'interviendront pas dans le calcul des enveloppes de surface. Ainsi, toutes les auto intersections sont éliminées.

La complexité maximale en temps d'exécution de l'algorithme CVMS pour une paire de polyèdres non convexe/convexe est de  $O(f_A v_B + f_A + f_B v_A + e_A e_B + f_F^{2+\epsilon})$ , où  $f_F$  est le nombre de facettes du sur-ensemble et la partie  $O(f_F^{2+\epsilon})$  est la

complexité de la construction de l'enveloppe [8].

## 4 Morphage de formes 3D

Étant donnés deux polyèdres  $A$  (convexe ou non convexe) et  $B$  (convexe), l'interpolation ou morphage de deux formes 3D représentées par ces deux polyèdres est le processus visant à générer une animation fluide et naturelle entre ces deux formes, ce qui implique la construction de polyèdres intermédiaires représentant des formes qui varient entre les formes  $A$  et  $B$ . Plusieurs méthodes ont été proposées pour le morphage de maillages [9, 10, 11], la plupart de ces méthodes utilisent des points de contrôle dans le maillage cible et le maillage origine afin de guider le morphage. Notre but est de ne pas nous servir de tels points de contrôle et de proposer une méthode entièrement automatique. Notre solution au problème du morphage automatique entre formes 3D consiste à faire varier les tailles des opérandes  $A$  et  $B$  à chaque étape, et de calculer la somme de Minkowski des polyèdres mis à l'échelle pour chaque étape. Nous exploitons l'algorithme CVMS pour la construction rapide et exacte de ces formes intermédiaires en considérant trois paramètres essentiels : le nombre  $n$  de formes intermédiaires, le facteur d'échelle initial  $s_1$  pour le polyèdre  $A$  et le facteur d'échelle initial  $s_2$  pour le polyèdre  $B$ . Tout au long de la séquence de morphage, les facteurs de mise à l'échelle de  $A$  tendent linéairement de  $s_1$  vers  $s_2$  tandis que ceux de  $B$  varient linéairement de  $s_2$  vers  $s_1$ . Pour une étape  $i, i = 1, \dots, n$ , les facteurs d'échelle  $scale_{i,A}$  et  $scale_{i,B}$  de  $A$  et de  $B$  respectivement sont calculés comme suit :

$$scale_{i,A} = i \frac{s_2 - s_1}{n - 1} + \frac{s_1 n - s_2}{n - 1} \quad (1)$$

$$scale_{i,B} = i \frac{s_1 - s_2}{n - 1} + \frac{s_2 n - s_1}{n - 1} \quad (2)$$

## 5 Implantation et résultats

Nous avons utilisé C++ et la librairie de géométrie algorithmique CGAL [12] pour l'implantation de l'algorithme CVMS et son extension ainsi que pour le morphage. Pour garantir l'exactitude des calculs et des résultats vis à vis de toutes les dégénérescences liées aux nombres à virgule flottante, nous avons opté pour l'utilisation des types de nombres exacts fournis par la librairie GMP [13]. Les figures 3 et 4 montrent des résultats de morphage entre formes convexes pour la première et entre une forme non convexe et une autre forme convexe pour la deuxième. Quelques séquences vidéo illustrant le morphage de formes 3D ainsi que les modèles correspondants peuvent être trouvés sur notre page web :

<http://liris.cnrs.fr/hichem.barki/mksum/morph3D/>.

Les expérimentations ont été réalisées sur un PC équipé d'un Intel Core 2 Duo 2.2 GHZ avec 2 Go de mémoire vive. Pour donner une idée de l'ordre de grandeur des temps d'exécution, le calcul du morphage avec  $n = 10$  entre les formes de la figure 3 se fait en 4,890 secondes tandis que le calcul de la séquence de la figure 4 avec  $n = 10$  se fait en 86,343 secondes. Un autre exemple de morphage appliqué à un polyèdre non convexe plus complexe est illustré en figure 5.

L'utilisation de la somme de Minkowski pour le calcul des maillages intermédiaires nous évite d'introduire un facteur ma-

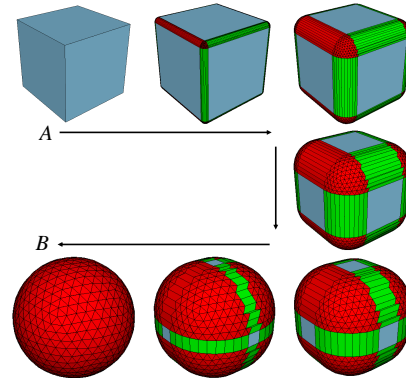


FIGURE 3 – Morphage ou interpolation entre deux formes convexes (un cube ayant 6 facettes et une sphère ayant 1280 facettes). Les formes intermédiaires sont composées de 1402 facettes chacune.

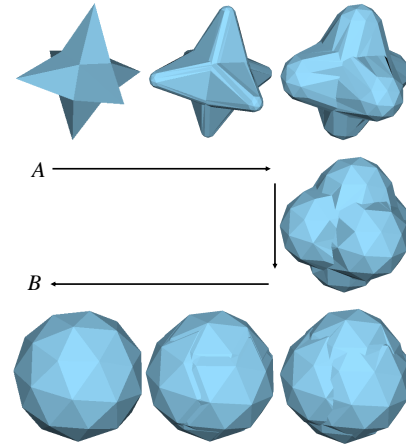


FIGURE 4 – Morphage ou interpolation entre une forme non convexe (étoile ayant 24 facettes) et une forme convexe (sphère ayant 80 facettes). Le nombre de facettes des formes intermédiaires varie de 377 à 420 facettes chacune.

nuel dans le processus de morphage. Cependant, comme chaque maillage intermédiaire est le résultat d'une somme de Minkowski, il est naturel que notre algorithme ne soit pas plus performant que les algorithmes proposés dans la littérature et qui visent seulement à manipuler la topologie ou la connectivité des maillages intermédiaires. De plus, l'utilisation des types de nombres exacts au lieu de ceux à virgule flottante rend impossible la comparaison entre notre algorithme et ceux cités auparavant. Une étude complémentaire est envisagée pour le futur afin d'adapter notre algorithme aux nombres à virgule flottante et de le comparer aux autres algorithmes de morphage.

## 6 Conclusion

Nous avons présenté l'algorithme CVMS pour le calcul de la somme de Minkowski de polyèdres convexes ainsi que son extension pour une paire de polyèdres non convexe/convexe. L'algorithme CVMS est rapide, produit des résultats exacts, et gère les dégénérescences (les erreurs d'arrondi dans les modèles fournis). Nous l'avons appliqué pour réaliser le morphage entre formes non convexes et convexes. Cette application génère automatiquement des séquences de maillages avec une va-

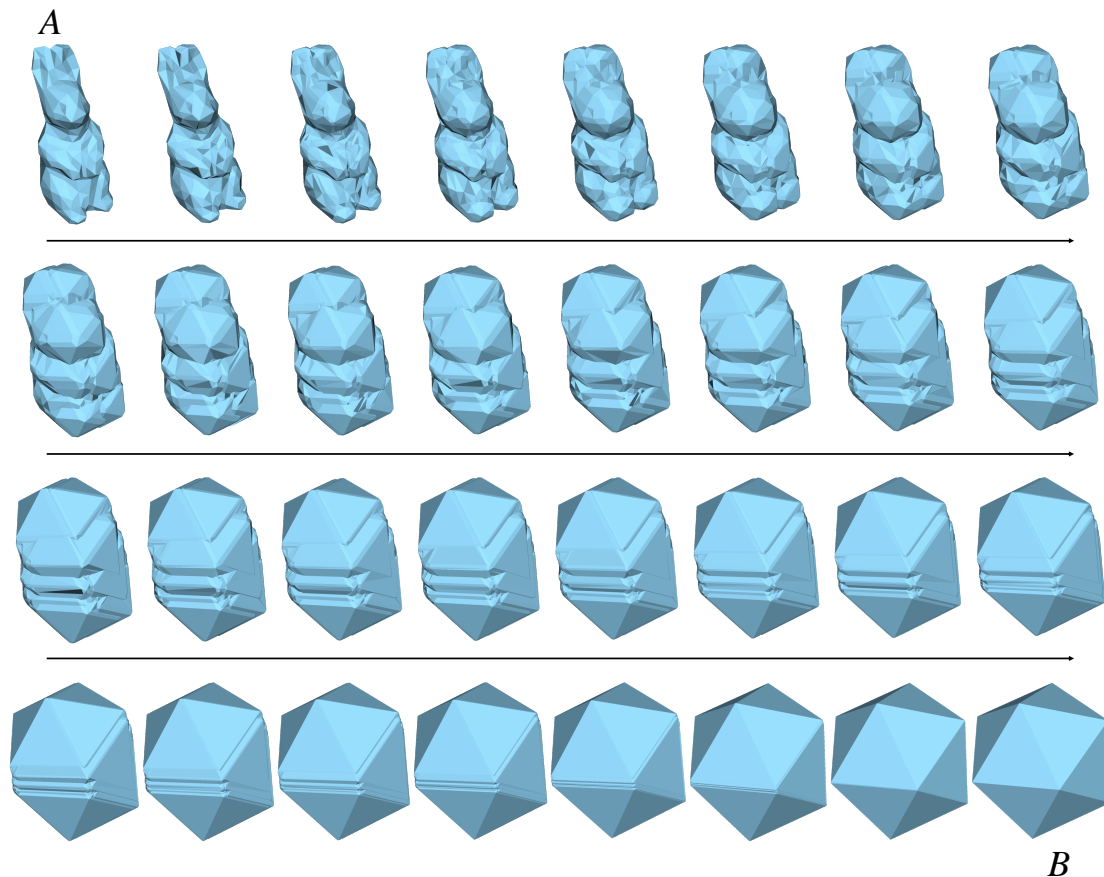


FIGURE 5 – Morphage ou interpolation entre une forme non convexe (lapin ayant 500 facettes) et une forme convexe (Icosahedron ayant 20 facettes). Le nombre de facettes des formes intermédiaires varie de 989 à 1241 facettes chacune.

riation continue de la géométrie. Elle pourrait également servir à la description de formes 3D.

## 7 Remerciements

Ce travail est partiellement soutenu par le cluster ISLE de la région Rhône-Alpes dans le cadre du projet LIMA.

## Références

- [1] I.-K. Lee, M.-S. Kim, G. Elber, Polynomial/rational approximation of Minkowski sum boundary curves, *Graph. Models Image Process.* 60 (2) (1998) 136–165.
- [2] A. Kaul, J. Rossignac, Solid-interpolating deformations : construction and animation of PIPs, *Comput. Graph.* 16 (1) (1992) 107–115.
- [3] A. Barbier Accary, E. Galin, S. Akkouche, Controlled metamorphosis of animated objects, *Shape Modelling International*. IEEE Computer Society Press (2003) 184–196.
- [4] J. Serra, *Image Analysis and Mathematical Morphology*, Vol. 1, Academic Press, London, 1982.
- [5] J. Serra, *Image Analysis and Mathematical Morphology*, Vol. 2, Academic Press, New York, 1988.
- [6] A. Tuzikov, J. Roerdink, H. Heijmans, Similarity measures for convex polyhedra based on Minkowski addition, *Pattern Recognition* 33 (2000) 979–995.
- [7] H. Barki, F. Denis, F. Dupont, Contributing vertices-based Minkowski sum computation of convex polyhedra, *Comput. Aided Des.*
- [8] M. Meyerovitch, Robust, generic and efficient construction of envelopes of surfaces in three-dimensional space, in : *Proc. 14th Annual European Symposium on Algorithms (ESA)*, Vol. 4168 of LNCS, Springer-Verlag, 2006, pp. 792–803.
- [9] Aaron W. F.Lee, W. Sweldens, P. Schröder, L. Cowsar, D. Dobkin, MAPS : Multiresolution adaptive parameterization of surfaces, *Computer Graphics 32 (Annual Conference Series)*.
- [10] Aaron W. F.Lee, D. Dobkin, W. Sweldens, P. Schröder, Multiresolution mesh morphing, in : *SIGGRAPH '99 : Proceedings of the 26th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co., New York, NY, USA, 1999, pp. 343–350.
- [11] T. Michikawa, T. Kanai , M. Fujita, H. Chiyokura, Multi-resolution Interpolation Meshes, PG '01 : *Proc. of the 9th Pacific Conference on Computer Graphics and Applications*. (2001) 60–69. IEEE Computer Society.
- [12] The CGAL project homepage. <http://www.cgal.org/>
- [13] The GNU MP bignum library. <http://gmplib.org/>