

Une nouvelle mesure de distance entre descripteurs de moments de Zernike pour une similarité optimale et un angle de rotation entre les images

Jérôme Revaud, Guillaume Lavoué, Atilla Baskurt
Université de Lyon, CNRS, INSA-Lyon, LIRIS, UMR5205
F-69621, France
{prenom.nom@insa-lyon.fr}

Résumé

Les moments de Zernike constituent un descripteur robuste à fort pouvoir descriptif. Cependant, la manière classique de comparer deux descripteurs ne prend pas en compte l'information de phase des moments complexes. Notre approche intègre cette information dans le processus de comparaison tout en préservant l'invariance en rotation. Le nouveau comparateur renvoie une mesure de similarité plus précise ainsi qu'un angle optimal de rotation entre les deux images, tout en conservant la même complexité que l'approche classique. Les expériences démontrent que notre comparateur surpasse le comparateur classique en terme de mesure de similarité. En particulier, la robustesse envers le bruit et la déformation est grandement améliorée. Enfin, l'estimation de l'angle de rotation est aussi plus précise qu'avec les approches existantes.

1 Introduction

Les moments de Zernike sont fréquemment utilisés pour capturer les caractéristiques globales d'une image en reconnaissance et en analyse d'images. Introduit pour la première fois en vision par ordinateur par Teague [1], ce descripteur de forme a prouvé sa supériorité sur les autres fonctions de moments [2, 3] de par sa capacité de description et sa robustesse au bruit et aux déformations. Très récemment encore, de nombreux chercheurs se sont penchés sur ces moments, principalement pour optimiser leur temps de calcul [4, 5, 6, 7] et améliorer leur précision [8].

Concrètement, un moment de Zernike est un nombre complexe qui contient deux valeurs distinctes : le module et la phase. Cependant, la manière habituelle (i.e. utilisée dans tous les algorithmes existants) de comparer deux descripteurs de Zernike ne prend en compte que le module des moments (car cela apporte l'invariance en rotation). Dans le cadre de l'indexation et de la reconnaissance 2D et 2D-3D, cette perte d'information n'est pas anodine lorsque l'on compare des images et peut induire des résultats erronés et imprécis, comme cela sera illustré par la suite.

Utiliser les informations de phase des moments de Zernike (avec le module) dans le processus de comparaison semble être une façon naturelle d'améliorer la mesure de similarité. Dans cet article, nous montrons que la phase des moment peut également être utilisée pour récupérer l'angle

de rotation de manière optimale. Récupérer ces deux informations à la fois (c'est-à-dire une mesure de similarité robuste invariante en rotation et le meilleur angle de rotation) peut être d'un grand intérêt pour de nombreuses applications, notamment l'indexation d'images [9], l'estimation du mouvement en vidéo ou la modélisation à base de croquis [10]. L'information d'orientation supplémentaire permet d'augmenter le pouvoir discriminant de la comparaison : par exemple, pour une application de reconnaissance de croquis, l'angle de rotation peut permettre d'éliminer des faux positifs que la comparaison seule ne serait pas en mesure de distinguer, car invariante en rotation.

A part nous, une seule approche s'est focalisée sur le sous-problème de l'estimation de l'angle de rotation en utilisant les moments de Zernike. La méthode, introduite par Kim et Kim [11], s'est avérée être très robuste en ce qui concerne le bruit, même pour les images à symétrie(s) circulaire(s). Cette méthode est toutefois basée sur l'hypothèse que les deux images sont les mêmes (c'est-à-dire, à l'exception du bruit et de la rotation), ce qui ne tient pas toujours en pratique.

Dans ce contexte, nous avons développé une nouvelle approche générale et rigoureusement fondée pour comparer deux descripteurs de Zernike en prenant en compte les informations de phase et d'amplitude. Notre approche conserve la même complexité algorithmique que la distance classique (distance euclidienne entre les vecteurs d'amplitude), mais renvoie une mesure de similarité invariante en rotation plus précise ainsi qu'un angle de rotation optimal. Grâce à la polyvalence des moments de Zernike, notre approche est apte à comparer toute sortes d'images / dessins : binaire, niveau de gris ou croquis. Nous avons comparé nos résultats avec deux approches de l'état de l'art pour la reconnaissance d'images ou de croquis : le hachage géométrique [12] et la Transformée de Hough généralisée tolérante à la déformation d'Anelli et al. [13].

La section suivante présente rapidement les moments de Zernike. Dans la section 3, nous nous appuyons sur les inconvénients de l'approche classique pour construire notre propre méthode. L'efficacité est aussi une contrainte car l'algorithme résultant sera utilisé dans un processus d'appariement ; nous détaillons donc son implémentation rapide dans la section 4. Enfin, nous présentons les résultats

expérimentaux dans la section 5.

2 Les moments de Zernike

Les fonctions complexes de Zernike constituent un ensemble de fonctions orthogonales définies sur le disque unité. Les moments de Zernike d'une image sont construits par projection sur ces fonctions. Elles possèdent trois propriétés principales : l'orthogonalité, l'invariance en rotation et le compactage de l'information - les basses fréquences de l'image sont principalement codées dans les moments de bas ordres.

Mathématiquement, les moments de Zernike sont définis avec un ordre p et une répétition q sur $D = \{(p, q) | 0 \leq p \leq \infty, |q| \leq p, |p - q| = \text{pair}\}$:

$$Z_{pq} = \frac{p+1}{\pi} \int \int_{x^2+y^2 \leq 1} V_{pq}^*(x, y) f(x, y) dx dy \quad (1)$$

où V_{pq}^* dénote le conjugué complexe de V_{pq} , lui-même défini comme :

$$V_{pq}(\rho, \theta) = R_{pq}(\rho) \cdot e^{iq\theta} \quad (2)$$

$$\text{et } R_{pq}(\rho) = \sum_{\substack{k=|q| \\ |p-k| \text{ pair}}}^p \frac{(-1)^{\frac{p-k}{2}} \frac{p+k!}{2}}{\frac{p-k!}{2} \frac{k-q!}{2} \frac{k+q!}{2}} \rho^k$$

A partir des équations (1) et (2), nous pouvons exprimer les moments de Zernike d'une image tournée d'un angle α autour de son origine en coordonnées polaires :

$$Z_{pq}^\alpha = Z_{pq} e^{iq\alpha} \quad (3)$$

L'éq. (3) prouve l'invariance en rotation du module des moments de Zernike puisque $|Z_{pq}^\alpha| = |Z_{pq}|$. Grâce à la propriété d'orthogonalité, la reconstruction d'une image peut simplement être exprimée comme la somme de chaque fonction de base de Zernike pondérée par le moment correspondant :

$$\tilde{f}(x, y) = \sum_{(p,q) \in D} Z_{pq} V_{pq}(x, y) \quad (4)$$

3 Mesure de Similarité et angle de rotation

3.1 L'approche classique

La manière habituelle de comparer deux descripteurs de Zernike est une simple distance euclidienne entre les modules des moments [?] :

$$d^2 = \sum_{(p,q) \in D} (|Z_{pq}| - |Z'_{pq}|)^2 \quad (5)$$

Par la suite, nous la désignerons comme la comparaison "classique". L'avantage de perdre les informations de phase

- cela permet l'invariance en rotation - empêche aussi malheureusement de récupérer l'angle de rotation entre les images, car cette information est codée sur la phase des moments. Un corollaire est que deux images symétriques sont considérées comme identiques étant donné que leurs modules sont les mêmes. Cela peut être un inconvénient majeur pour une application qui doit traiter comme différentes des images symétriques (e.g. la reconnaissance 2D-3D, qui vise à récupérer le point de vue d'objets 3D potentiellement symétriques comme des voitures ou des personnes). La figure 1 présente un court exemple de recherche d'images qui illustre la supériorité de l'approche proposée sur l'approche classique en terme de capacité de généralisation.

(a) le croquis à retrouver : 

rang	1 ^{er}	2 ^{ème}	3 ^{ème}	4 ^{ème}
comparaison classique (sans la phase)				
distance à (a) :	7130.2	7345.5	7515.0	8200.9
comparaison proposée (avec la phase)				
distance à (a) :	2110.3	2339.0	2406.4	2683.1

FIGURE 1 – Les quatre meilleurs résultats pour la recherche d'un dessin de coq (a) dans une base de donnée de plus de 200 logos en noir et blanc. Les résultats sont triés par score de similarité (une distance de zéro signifie une similarité complète) pour chaque comparateur.

3.2 Le comparateur proposé

Notre nouveau comparateur fournit un score de similitude plus robuste que la méthode classique et récupère en plus un angle de rotation précis entre les deux images. L'angle est considéré comme optimal au sens où la distance euclidienne entre la première image et la deuxième après rotation est minimisée. Soit I et J deux images différentes, et $(J * \mathcal{R}_\phi)$ l'image J tournée d'un angle ϕ . La distance euclidienne entre I et $(J * \mathcal{R}_\phi)$ peut être exprimée en fonction de l'angle de rotation ϕ comme suit :

$$d_{I,J}^2(\phi) = \sum_{x^2+y^2 \leq 1} (I(x, y) - (J * \mathcal{R}_\phi)(x, y))^2 \quad (6)$$

Notre objectif est de minimiser cette expression en fonction de l'angle de rotation ϕ . En remplaçant I et $(J * \mathcal{R}_\phi)$ par leurs moments de Zernike correspondants Z_{pq}^I et $Z_{pq}^J e^{iq\phi}$ (4), nous obtenons (7) puis (8) :

$$d_{I,J}^2(\phi) = \sum_{x^2+y^2 \leq 1} \sum_{(p,q) \in D} \left[\sum_{(p,q) \in D} Z_{pq}^I \cdot V_{pq}(x,y) - \sum_{(p,q) \in D} Z_{pq}^J e^{iq\phi} \cdot V_{pq}(x,y) \right]^2 \quad (7)$$

$$= \sum_{(p,q) \in D} |Z_{pq}^I - Z_{pq}^J e^{iq\phi}|^2 \langle V_{pq}, V_{pq}^* \rangle \quad (8)$$

où $\langle V_{pq}, V_{pq}^* \rangle$ dénote le produit scalaire de deux fonctions de base de Zernike sur le disque unité. Grâce à l'orthogonalité de la base, ce produit est nul sauf pour le cas $(p,q) = (u,v)$, où il se simplifie en $\langle V_{pq}, V_{pq}^* \rangle = \frac{\pi}{p+1}$. L'équation (8) peut être réécrite en l'éq. (9) (voir page suivante), avec $|Z_{pq}|$ et $[Z_{pq}]$ respectivement le module et l'argument de Z_{pq} . Le paramètre ϕ étant uniquement présent dans le terme cosinus, minimiser la formule (9) revient donc à minimiser une somme de cosinus.

En pratique, seule une partie des moments de Zernike est utilisée (car cela apporte de la robustesse au descripteur); néanmoins la méthode proposée reste valable : simplement, elle peut être considérée comme un moyen rapide de calculer la distance euclidienne entre les deux images floues (i.e. leur reconstruction depuis un sous-ensemble de moments) en utilisant leur projection dans l'espace de Zernike. La section suivante porte sur la résolution de la minimisation tout en garantissant un temps de calcul rapide.

4 Recherche efficace du minimum

En supposant que les moments de Zernike de chaque image soient connus jusqu'au $N^{\text{ème}}$ ordre, la somme est initialement composée d'environ $(N+2)^2/4$ cosinus, néanmoins réductibles en N cosinus grâce à la formule $A_1 \cos(q\phi + B_1) + A_2 \cos(q\phi + B_2) = |C| \cos(q\phi + [C])$ où $C = A_1 e^{iB_1} + A_2 e^{iB_2}$. L'équation (9) peut donc s'écrire sous la forme :

$$f_N(\phi) = \sum_{q=1}^N A_q \cos(q\phi + B_q) \quad (10)$$

On peut remarquer que $f_N(\phi)$ est une fonction 2π -périodique qui possède un spectre de Fourier discret borné par une fréquence maximale $f_N^{MAX} = N/2\pi$. Le théorème d'échantillonnage de Nyquist-Shannon nous apprend que la fonction ne peut pas changer substantiellement entre deux points d'échantillonnage consécutifs pris à la fréquence de Nyquist $F = 1/T = N/\pi$. La distance minimale entre deux minima consécutifs est donc bornée par π/N . En découpant f_N en $4N$ intervalles, nous sommes sûr que seulement un minimum ou un maximum est présent dans chaque intervalle. En pratique il suffit de regarder la valeur de la dérivée en chaque point d'échantillonnage pour savoir si un minimum se trouve dans l'intervalle, et d'approximer sa position par un polynôme du second degré. Cette simple

approximation est suffisamment précise relativement à nos objectifs.

Finalement, la complexité algorithmique de notre approche reste identique à celle du comparateur classique (voir l'équation (5)), à savoir $O(N^2)$.

5 Résultats expérimentaux

5.1 Etude comparative de la mesure de similarité

Pour évaluer notre méthode avec l'existant, nous avons rassemblé 502 imagettes en niveau de gris (dont environ 25% en noir et blanc) de taille 100×100 pixels. Certaines sont présentées dans la figure 2. Nous avons ensuite généré synthétiquement des images altérées à partir de ces originals. Ce que nous désignons comme *altération* comprend soit un bruit additif uniforme, soit une déformation non-affine, soit une occultation partielle, soit une translation. Ces quatre types d'altération ont été utilisés pour créer quatre bases de test.

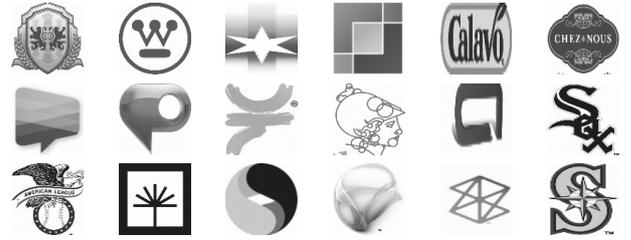


FIGURE 2 – Quelques unes des 502 imagettes utilisées dans les expériences.

Construction des bases de test Pour chaque base, l'altération est appliquée graduellement selon 19 niveaux. En détail, les quatre types d'altérations sont :

1. Un bruit additif uniforme tel que le SNR varie de 30dB (niveau 1) à 1.5dB (niveau 19).
2. Une déformation continue non-affine dont l'amplitude varie de 1 (niveau 1) à 25 pixels (niveau 19) au plus.
3. Une occultation partielle par une autre image aléatoire, collée par dessus la première avec de la transparence. La surface recouverte varie de 2.5% à 47.5% (niveau 19).
4. Une translation de direction aléatoire et d'amplitude allant de 0.4 (niveau 1) à 7 pixels (niveau 19).

Dans chaque base, l'ensemble composé du modèle original et de ses 19 versions progressivement altérées (soit 20 images) constitue une classe. Un exemple d'une image altérée à différents niveaux et pour chaque altération est présentée en figure 3.

Evaluation par rapport au comparateur classique.

Afin de juger de manière exhaustive notre approche par rapport au comparateur classique, nous avons considéré

$$\begin{aligned}
d_{I,J}^2(\phi) &= \sum_{(p,q) \in D} \sum_{p+1}^{\pi} |Z_{pq}^I - Z_{pq}^J e^{iq\phi}|^2 \\
&= \sum_{(p,q) \in D} \sum_{p+1}^{\pi} \left| e^{i[Z_{pq}^I]} \left(|Z_{pq}^I| - |Z_{pq}^J| e^{i(q\phi + [Z_{pq}^J] - [Z_{pq}^I])} \right) \right|^2 \\
&= \sum_{(p,q) \in D} \sum_{p+1}^{\pi} \left| e^{i[Z_{pq}^I]} \right|^2 \cdot \left| |Z_{pq}^I| - |Z_{pq}^J| e^{i(q\phi + [Z_{pq}^J] - [Z_{pq}^I])} \right|^2 \\
&= \sum_{(p,q) \in D} \sum_{p+1}^{\pi} \left[|Z_{pq}^I|^2 + |Z_{pq}^J|^2 - 2 |Z_{pq}^I| |Z_{pq}^J| \cos(q\phi + [Z_{pq}^J] - [Z_{pq}^I]) \right] \tag{9}
\end{aligned}$$

un problème type de classification, comme dans [?]. Pour chaque base de test, nos mesures portent sur :

- Les valeurs de first et second-tier, compte-tenu des classes précédemment définies, qui représentent la capacité de classification des différents comparateurs et permettent leur évaluation à des fins d'indexation.
- Le taux d'erreur sur la recherche de l'original : à partir d'une image altérée, nous essayons de retrouver l'original. Contrairement aux mesures de first et second-tier, celle-ci correspond à un scénario réaliste d'identification.

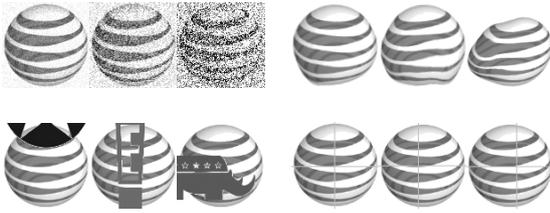


FIGURE 3 – Illustration des quatre types d'altération : bruit additif, déformation, occultation et translation. Dans chaque groupe, le 6^{ème}, 13^{ème} et 19^{ème} niveau d'altération sont présentés.

First et second-tier Une manière indirecte de comparer la précision en fonction du rappel pour chaque méthode est de mesurer les valeurs de first et second-tier. L'expérience consiste à rechercher une image P de la base de test parmi toutes les autres, puis de trier les résultats par score de similarité et enfin de compter le nombre A de réponses correctes (c'est-à-dire de la même classe que P) dans les N meilleures réponses. Les scores de first-tier et de second-tier valent alors $A/20$ pour $N = A_{max}$ et $N = 2A_{max}$, respectivement.

Comme l'illustre le tableau 1, le comparateur proposé fonctionne toujours mieux que le classique. Le gain est particulièrement élevé pour le bruit additif et la déformation, où la méthode proposée se révèle jusqu'à 6,8% et 5,6% meilleure respectivement en terme de mesure du first tier.

Identification de l'original Nous avons également conduit des expériences de reconnaissance qui consistent à retrouver, à partir des 9 538 images altérées de chaque base

de test, l'original correspondant (parmi les 502 originaux). La figure 4 affiche le pourcentage d'erreurs (une image erronée est retournée en première position) pour les deux comparateurs, en fonction du niveau d'altération. Globalement, le comparateur proposé fait environ deux fois moins d'erreurs pour une altération moyenne, sauf dans le cas d'occultation où notre méthode fait environ 15% de moins d'erreurs.

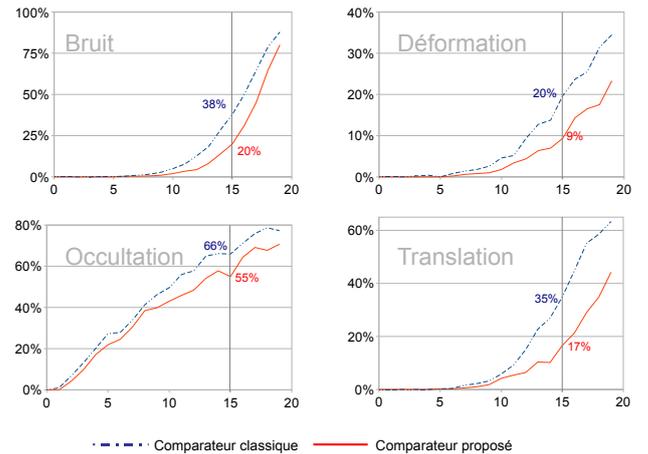


FIGURE 4 – La proportion d'erreur de reconnaissance quand on essaye de retrouver l'image originale (parmi les 502) à partir d'une version altérée, pour chaque comparateur. Le pourcentage d'erreurs est précisé au 15^{ème} niveau d'altération.

Comparaison avec le hachage géométrique et la transformée de Hough généralisée. Nous avons également voulu évaluer notre approche avec deux méthodes de comparaison d'objets/dessins de l'état de l'art : le hachage géométrique [12] et la récente transformée de Hough généralisée tolérante à la déformation (DT-GHT) d'Anelli et al. [13].

- Le hachage géométrique nécessite des points caractéristiques, par conséquent nous avons extrait les points d'intérêt de Harris et de DoG dans chaque image. Pour une image, le descripteur consiste en une liste de ses 15 points les plus forts en termes de réponse. Nous avons

	<i>Bruit</i>		<i>Déformation</i>		<i>Occultation</i>		<i>Translation</i>	
	1 st tier	2 nd tier						
Comparateur classique	82.9%	86.2%	77.9%	84.8%	44.2%	50.8%	68.7%	75.9%
Comparateur proposé	89.7%	92.0%	83.5%	88.9%	47.2%	53.3%	71.6%	78.3%
Différence	+6.8%	+5.9%	+5.6%	+4.1%	+3.0%	+2.5%	+2.9%	+2.4%

TABLE 1 – Comparaison des mesures de first tier et second tier pour chaque base de test.

<i>Méthode</i>	<i>temps (s)</i>
Zernike classique	0.002
Zernike proposée	0.057
DT-GHT	37.2
hachage géométrique	26.9

TABLE 2 – Temps moyen de calcul nécessaire pour 1000 comparaisons pour chaque méthode (temps mesurés sur un ordinateur cadencé à 2 GHz). Les descripteurs de Zernike contiennent 49 moments ($N=12$).

constitué une table de hachage pour chaque base de test. Dans l'étape de recherche, nous extrayons les 25 points les plus forts sur l'image à identifier et nous les projetons sur la table de hachage apprise pour différentes bases aléatoires (50 essais). Les meilleurs scores, enregistrés pour chaque modèle appris, constituent les distances correspondantes.

- Dans le cas de la DT-GHT [13], chaque modèle est d'abord indexé (i.e. extraction des contours par filtre de Canny, construction d'une R-table). Ensuite, pour comparer deux images, nous cherchons la première (le modèle) dans la seconde.

Temps d'exécution Le tableau 2 donne une comparaison du temps de calcul nécessaire pour chaque méthode. Même si notre méthode est plus lente que la comparaison classique, les deux temps de traitement sont très faibles (moins de 60 millisecondes pour 1000 comparaisons). La DT-GHT et le hashage géométrique sont plusieurs ordres de grandeur plus lents (37 et 27 secondes respectivement pour 1000 comparaisons).

Comparaison des méthodes Afin de nous comparer à ces méthodes, nous avons calculé les mesures de first et second-tier sur des bases réduites (100 imagerie $\times 5$ niveaux d'altérations : 3, 7, 11, 15 et 19) pour des raisons de temps de calcul (voir table 2). Le tableau 3 illustre les résultats. Dans le cas de la translation, le hachage géométrique et la DT-GHT donnent des résultats supérieurs en raison de leur invariance en position. Pour toutes les autres altérations, notre approche donne des résultats supérieurs à la DT-GHT et au hachage géométrique en termes de mesures de first et second-tier ; dans le cas du bruit, la méthode proposée fonctionne même largement mieux car, le bruit, localisé dans les hautes fréquences, a peu d'effet sur les moments de Zernike de bas ordre. Inversement, le ha-

	Kim and Kim	méthode proposée
<i>pas d'altération</i>	0.61°	0.57°
<i>Bruit additif</i>	1.13°	0.42°
<i>Déformation</i>	2.96°	1.62°
<i>Occultation</i>	27.3°	23.4°
<i>Translation</i>	17.1°	12.8°

TABLE 4 – L'erreur RMS moyenne sur l'angle de rotation en utilisant l'estimateur de Kim et Kim [11] et la méthode proposée.

chage géométrique réalise de faibles scores dans tous les cas sauf pour la translation, puisque la position et la réponse des points d'intérêt sont fortement perturbées pour les images altérées.

5.2 Angle de rotation

Nous avons mené des expériences pour démontrer la précision de notre approche dans le cas spécifique de l'estimation d'angle de rotation entre des images altérées. Les tests ont été effectués sur la précédente collection de 502 imagerie. Les images ont d'abord subi des rotations d'angles aléatoires. Ensuite, diverses altérations (les mêmes qu'en 5.1) leur ont été appliquées. Enfin, nous avons estimé leur angle de rotation par rapport au modèle original, à l'aide de l'algorithme proposé (avec 25 moments de Zernike) et d'une seconde méthode, connue comme la plus performante de l'état de l'art : l'estimateur robuste de Kim et Kim [11]. Le nombre total d'images de test est donc $200\,800$: 502×10 (le nombre de rotations) $\times 10$ (le nombre de niveaux d'altérations) $\times 4$ (le nombre de types d'altération).

Pour chacune des quatre bases de test, nous avons calculé l'erreur quadratique moyenne (RMS) sur l'angle estimé avec chaque algorithme. Les résultats sont présentés dans le tableau 4. L'erreur RMS de notre méthode est systématiquement inférieure à celle de l'estimateur de Kim et Kim, pour tous les types d'altération. En particulier, dans le cas du bruit additif et de la déformation, la méthode proposée permet d'obtenir des résultats dont la précision est environ deux fois supérieure à l'estimateur de Kim et Kim. L'occlusion et la translation produisent eux une importante erreur RMS : dans le premier cas, cela vient du fait que, parfois, des parties essentielles de l'image (en termes d'indices de rotation) sont occultées ; dans le second cas, c'est à cause du décalage du centre de rotation.

	Bruit additif		Déformation		Occultation		Translation	
	1 st tier	2 nd tier						
méthode proposée	93.4%	95.6%	88.6%	93.6%	52.9%	60.6%	78.0%	85.2%
DT-GHT	75.5%	79.4%	88.4%	93.6%	43.5%	49.4%	96.5%	98.4%
hashage géométrique	62.0%	63.6%	57.2%	60.2%	47.8%	49.9%	86.9%	87.4%

TABLE 3 – Comparaison des mesures de first et second tier pour chaque comparateur et pour chaque type d'altération. En gras, les meilleurs scores pour chaque mesure.

6 Conclusion et discussion

Nous avons présenté un comparateur efficace de descripteurs de Zernike dont la nouveauté est de tirer partie de l'information de phase dans le processus de comparaison tout en préservant l'invariance en rotation. La mesure de similarité renvoyée est plus robuste aux différents bruits (en particulier la déformation et le bruit additif); en particulier les erreurs de reconnaissance sont deux fois moindre en moyenne qu'avec le comparateur classique de référence. En outre, notre approche a le même complexité en $O(\text{ordre}^2)$. Enfin, notre comparaison fournit en plus une estimation de l'angle de rotation plus performante que celle de l'estimateur robuste de Kim et Kim [11]. Cette nouvelle contribution théorique peut s'appliquer à toute application utilisant déjà les moments où les pseudo-moments de Zernike [14].

Références

- [1] M.R. Teague. Image analysis via the general theory of moments. *J. Optical Soc. Am.*, 70(8) :920–930, August 1980.
- [2] S.O. Belkasim, M. Shridhar, et M. Ahmadi. Pattern recognition with moment invariants : A comparative study and new results. *Pattern Recognition*, 24(12) :1117–1138, 1991.
- [3] S.X. Liao et M. Pawlak. On image-analysis by moments. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 18(3) :254–266, March 1996.
- [4] Chee-Way Chong, P. Raveendran, et R. Mukundan. A comparative analysis of algorithms for fast computation of Zernike moments. *Pattern Recognition*, 36(3) :731–742, 2003.
- [5] Chong-Yaw Wee et Raveendran Paramesran. Efficient computation of radial moment functions using symmetrical property. *Pattern Recogn.*, 39(11) :2036–2046, 2006.
- [6] Chong-Yaw Wee et Raveendran Paramesran. On the computational aspects of Zernike moments. *Image Vision Comput.*, 25(6) :967–980, 2007.
- [7] L. Kotoulas et I. Andreadis. Real-time computation of Zernike moments. *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, 15(6) :801–809, June 2005.
- [8] Gholamreza Amayeh, Ali Erol, George Bebis, et Mircea Nicolescu. Accurate and efficient computation of high order Zernike moments. Dans *ISVC*, pages 462–469, 2005.
- [9] B.S. Reddy et B.N. Chatterji. An fft-based technique for translation, rotation, and scale-invariant image registration. *IEEE transactions on image processing*, 5(8) :1266–1271, August 1996.
- [10] Levent Burak Kara et Kenji Shimada. Sketch-based 3d-shape creation for industrial styling design. *IEEE Comput. Graph. Appl.*, 27(1) :60–71, 2007.
- [11] Whoi-Yul Kim et Young-Sung Kim. Robust rotation angle estimator. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 21(8) :768–773, 1999.
- [12] H.J. Wolfson et I. Rigoutsos. Geometric hashing : an overview. *Computational Science & Engineering, IEEE*, 4(4) :10–21, 1997.
- [13] M. Anelli, L. Cinque, et Enver Sangineto. Deformation tolerant generalized hough transform for sketch-based image retrieval in complex scenes. *Image Vision Comput.*, 25(11) :1802–1813, 2007.
- [14] Cho-Huak Teh et Roland T. Chin. On image analysis by the methods of moments. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 10(4) :496–513, 1988.