

Formes fractales mixtes

C. Gentil* – E. Tosan** – M. Neveu*

* LE2I - UMR CNRS 5158 – Université de Bourgogne

** LIRIS - UMR 5205 CNRS – Université Claude Bernard Lyon I

christian.gentil@u-bourgogne.fr

Résumé

Le but de notre travail est d'élaborer une méthode de construction des formes paramétrées (courbes, surfaces, ...) dont l'aspect local est variable et non uniforme : à chaque point sera associé une « texture géométrique » pouvant passer continument du lisse au rugueux.

Nous nous appuyons sur des travaux précédents qui ont permis de représenter des courbes et surfaces à pôles qui sont au choix lisses ou fractales. Nous proposons un formalisme basé sur des familles finies d'IFS qui généralise cette approche. Le principe est de mélanger des formes à aspect uniforme pour définir une forme à aspect variable.

Mots-clés : Fractale; Iterated Function System; courbe

1. Introduction

Dans le cadre de la théorie des projections d'IFS introduite par Zaïr et Tosan [ZT96][ZT97], il est possible de définir des formes à pôles fractales. Ce modèle constitue une généralisation des formes à pôles classiques (Bézier, B-spline, Nurbs). Les formes obtenues sont des projections de figures auto-affines. Elles ne sont pas auto-affines dans \mathbb{R}^3 , leur géométrie générale est déterminée par leurs points de contrôle. Par contre localement, à une déformation ou une dégénérescence près, ces formes ont partout le même aspect. En effet, cet aspect est déterminé par les paramètres de l'auto-affinité : il reste lisse ou rugueux de manière homogène. Nous cherchons à construire des formes paramétrées dont l'aspect peut varier, passer du lisse au rugueux. Nous proposons ici un nouveau modèle basé sur les IFS qui permet de moduler cet aspect de manière continue.

Dans un premier temps, nous présentons ce modèle en nous limitant à la construction d'arcs de courbes et d'attracteurs à topologie filaire.

2. Objectif et plan

Dans la première partie, nous rappelons le formalisme des IFS, la notion de fonction d'adressage, ainsi que l'expression des conditions de raccords assurant l'obtention de courbes. La deuxième partie présente un opérateur d'interpolation qui sera à la base de la construction des courbes mixtes. Nous verrons que cet opérateur conserve les conditions de raccords. Dans la troisième nous présentons

comment peut être construite une courbe mixte à partir de deux IFS en utilisant le principe de l'opérateur d'interpolation et la fonction d'adressage. Enfin, dans la quatrième partie, nous montrons comment la construction de courbes mixtes peut être généralisée à un nombre quelconques d'IFS.

Partie 1 – IFS et formes paramétrées

3. Le formalisme des IFS

Étant donné un espace métrique complet E (généralement $E = \mathbb{R}^2$ ou \mathbb{R}^3), un IFS (Iterated Function System) est un ensemble fini d'opérateurs contractants $\mathbb{T} = \{T_i, i=0, N-1\}$ qui agissent sur les points de E . A cet ensemble fini est associé un opérateur, appelé opérateur de Hutchinson, qui agit sur les compacts de E (noté $C(E)$):

$$\mathbb{T} : C(E) \rightarrow C(E)$$

$$K \rightarrow \mathbb{T}(K) = \bigcup_{i=0}^{N-1} T_i(K)$$

par abus, nous utilisons la même notation pour

l'opérateur de Hutchinson et l'IFS à partir duquel il est défini.

Cet opérateur est également contractant dans $C(E)$ muni de la distance de Hausdorff et admet un point fixe, appelé attracteur [BAR88]:

$$A(\mathbb{T}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{T}^n(K) \quad \text{avec } K \text{ un compact non vide quelconque.}$$

$A(\mathbb{T}) = A$ possède par définition du point fixe et des propriétés de contraction des opérateurs

T_i une structure autosimilaire $A = \bigcup_{i=0}^{N-1} T_i(A)$. La nature de l'autosimilarité dépendant de la nature des opérateurs T_i . Généralement les opérateurs sont choisis parmi les éléments du semi-groupe (noté S) des transformations affines contractantes.

4. Fonction d'adressage

Tous les attracteurs peuvent être paramétrés de manière formelle. Pour cela on se donne un ensemble fini d'indices $\Sigma = \{0, \dots, N-1\}$ et on considère qu'un IFS est une famille d'opérateurs indicés dans Σ : $\mathbb{T} = (T_i)_{i \in \Sigma}$.

L'attracteur A associé à \mathbb{T} , est alors muni d'une fonction d'adressage [BAR88] définie sur

$$\Sigma^\omega \text{ l'ensemble des mots infinis sur } \Sigma.$$

On définit la fonction d'adressage

$$\phi : \Sigma^\omega \rightarrow A \subset E$$

$$\sigma \rightarrow \phi(\sigma) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_{\sigma_1} T_{\sigma_2} \cdots T_{\sigma_n} p$$

où $p \in E$ et on montre que $\phi(\sigma)$ est indépendant de p .

Cette fonction associe à tout mot de Σ^ω un point p_σ de l'attracteur. En ce sens p_σ a pour adresse s . La fonction ϕ peut être vue également comme un système de paramétrage de l'attracteur. Cette fonction d'adressage est toujours surjective de Σ^ω dans A mais généralement pas injective.

5. Formes à pôles fractales

La distinction entre l'espace d'itération E , dans lequel sont définis les attracteurs, et l'espace de modélisation E_M , dans lequel sont définis les formes à modéliser, permet de généraliser la modélisation par IFS et de définir des projections d'attracteurs [ZT96][ZT97].

En prenant comme espace d'itération un espace barycentrique : $B(\mathbb{R}^J) = \left\{ \lambda \mid \sum_{i \in J} \lambda_i = 1 \right\}$, et comme projection une combinaison affine de points de contrôle dans l'espace de modélisation :

$$Q\lambda = \sum_{i \in J} \lambda_i q_i \quad \text{avec} \quad Q = (q_i)_{i \in J} \text{ et } q_i \in E_M$$

on définit des formes fractales à pôles générales : $\sigma \in \Sigma^\omega \rightarrow Q\phi(\sigma) = \sum_{i \in J} \phi_i(\sigma) q_i \in E_M$

La notion de forme fractale à pôles généralise à la fois la notion d'attracteur d'IFS et la notion classique de formes à pôles. Dans ce cas, l'ensemble des opérateurs S est le semigroupe des matrices dont les colonnes sont des vecteurs barycentriques.

Si on limite l'espace d'itération à l'espace convexe $B^+(\mathbb{R}^J) = B(\mathbb{R}^J) \cap \{\lambda_j \geq 0\}$, l'ensemble des opérateurs est le semigroupe des matrices de Markov.

6. Construction de formes paramétrées

On peut montrer que sous certaines conditions de raccords, les IFS définissent des formes paramétrées [TOS99a][TOS99b] La définition des formes fractales paramétrées (courbes, surfaces, ...) est alors dérivée des fonctions d'adressage.

6.1. Paramétrisation des attracteurs

Étant donnés deux IFS $\mathbb{T} = \{T_i, i \in \Sigma\}$, $\mathbb{T}' = \{T'_i, i \in \Sigma\}$ indicés par le même ensemble

Σ , sous certaines contraintes sur les IFS, on peut définir une application continue

$$H : A \rightarrow E' \quad \text{vérifiant [TOS99b]: } \forall p \in A \quad H(T_i p) = T'_i H(p) \quad (1)$$

Nous avons appelé morphisme d'IFS une telle fonction car elle transporte les subdivisions des attracteurs et les fonctions d'adressage (voir figure 1).

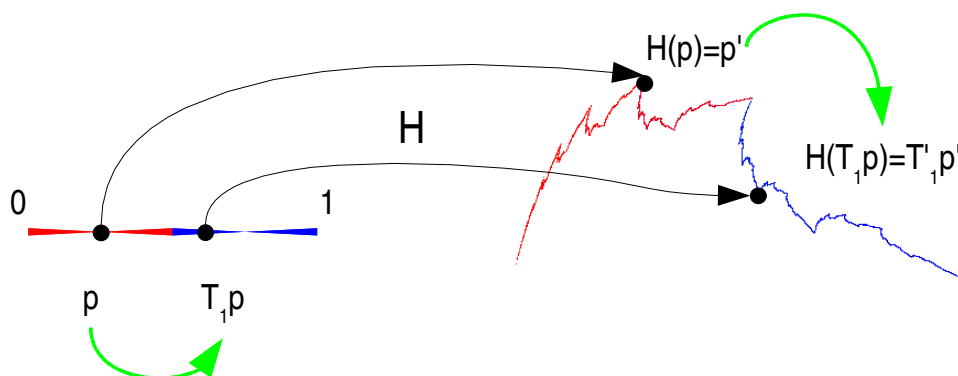


Figure 1: Exemple de morphisme d'IFS, qui à l'attracteur $A = [0,1]$, fait correspondre l'attracteur A' en mettant en relation les structures des deux attracteurs.

En posant $A = A(\mathbb{T})$ et $A' = A(\mathbb{T}')$, on a : $H(A) = A'$ et $H \circ \phi = \phi'$.

En fixant ϕ , la fonction H est définie à partir de la fonction d'adressage ϕ' :

$$\forall p \in A \exists \sigma \in \Sigma^\omega \text{ tel que } p = \phi(\sigma)$$

et on a : $H(p) = \phi'(\sigma)$.

En considérant l'attracteur de départ A comme un domaine de paramétrisation et l'IFS de départ \mathbb{T} comme une subdivision standard de A , les IFS d'arrivée \mathbb{T}' définissent des familles de formes paramétrées.

En prenant pour espace d'arrivée un espace barycentrique $E = B(\mathbb{R}^J)$,

la fonction H définit une forme à pôles paramétrée : $p \in A \rightarrow QH(p) = \sum_{j \in J} H_j(p) q_j$

En choisissant $A = [0,1]$, H sera un arc paramétré.

Pour que H définisse un arc, les conditions de raccord s'expriment simplement car les bords sont des points. Dans le cas des carreaux, ces conditions peuvent être explicitées de façon plus générale suivant le même principe [TOS99a], mais l'écriture et les notations sont plus complexes car les bords sont des arcs.

C'est pourquoi dans cet exposé, nous avons choisi de nous limiter à la présentation de courbes, même si les démonstrations restent vraies dans le cas général.

6.2. Arcs paramétrés

Soit $\mathbb{T} = \{T_0, T_1\}$ un IFS composé de 2 opérateurs. En faisant l'hypothèse que les points

extrémités c_i des courbes correspondent aux centres des opérateurs, i.e. $T_i c_i = c_i$, une condition suffisante pour que l'IFS définisse une courbe paramétrée est [ZAIR97] :
 $T_0 c_1 = T_1 c_0$.

Si l'IFS est composé de N opérateurs, la condition s'écrit :

$$T_i c_{N-1} = T_{i+1} c_0 \text{ pour } i=0, \dots, N-2 \text{ et } T_0 c_0 = c_0 \quad T_{N-1} c_{N-1} = c_{N-1} \quad (I)$$

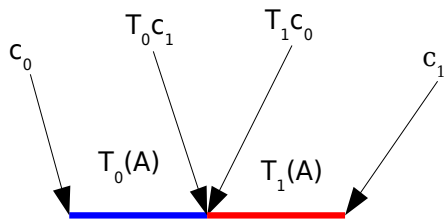


Figure 2: Exemple de raccords sur [0,1]

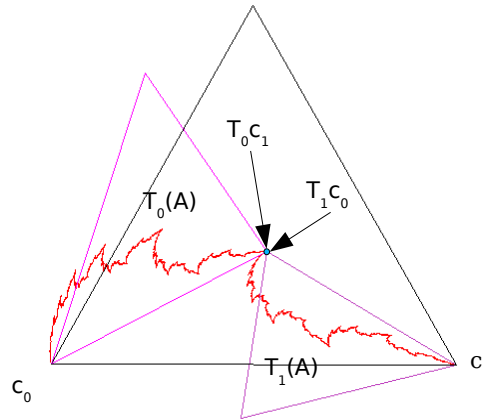


Figure 3: Exemple de raccords sur une courbe

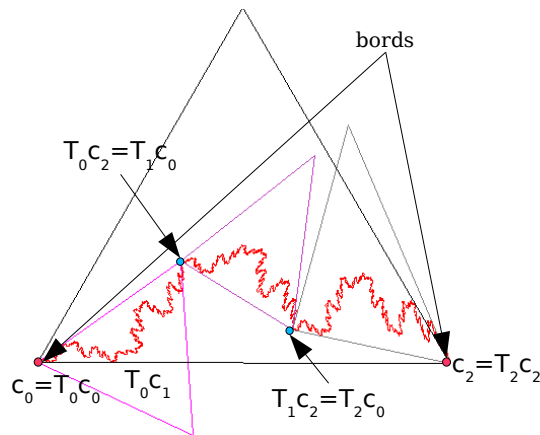


Figure 4: Exemple de raccords sur une courbe définie par 3 transformations

6.3. Figures filaires

Nous avons généralisé cette condition pour définir des attracteurs filaires [TOS99b][TOS99b]. Pour cela, il est nécessaire d'identifier, d'une part les points de l'attracteur à partir desquels sont réalisés les raccords (ce qui se fera par l'adresse), et d'autre part comment sont effectivement réalisés les raccords en mettant en relation un point transformé avec un autre point transformé (exemple correspondant à la

figure 4 $T_0(2^\omega) = T_1(0^\omega)$.

En notant :

- \mathcal{U} l'ensemble des adresses désignant les points sur lesquelles les composantes de l'attracteur se raccordent (voir exemple figure 4 où $\mathcal{U} = \{0^\omega, 1^\omega\}$)
- Y une relation d'équivalence sur $\Sigma \mathcal{U}$ désignant les raccords.

Dans le cas filaire, \mathcal{U} et Y sont des ensembles finis.

$$\tau_k \in \mathcal{U} \Rightarrow \phi(\tau_k) = c_k, \quad \tau_k = k^\omega \text{ et } \phi(k^\omega) = c_k \text{ centre de } T_k, \text{ c.a.d. } T_k c_k = c_k .$$

Notons par $\mathcal{R}_Y(\mathcal{S})$ l'ensemble des IFS qui vérifient la condition de raccord :

$$((i\tau_k), (j\tau_l)) \in Y \Rightarrow T_i(\phi(\tau_k)) = T_j(\phi(\tau_l))$$

Notons par $\mathcal{I}_Y(\mathcal{S})$ l'ensemble des IFS appartenant à $\mathcal{R}_Y(\mathcal{S})$ et qui vérifient la condition d'intersection :

$$p \in T_i A \cap T_j A \Rightarrow \exists ((i\tau_k), (j\tau_l)) \in Y \Rightarrow p = T_i(\phi(\tau_k)) = T_j(\phi(\tau_l))$$

Proposition : condition faible de raccord

Si $\mathbb{T} \in \mathcal{I}_Y(\mathcal{S})$ et $\mathbb{T}' \in \mathcal{R}_Y(\mathcal{S})$ alors il existe une fonction continue $H : A \rightarrow A'$ vérifiant l'équation (1).

Preuve

voir [TOS99a]

Proposition : condition forte de raccord

Si $\mathbb{T} \in \mathcal{I}_Y(\mathcal{S})$ et $\mathbb{T}' \in \mathcal{I}_Y(\mathcal{S})$ alors la fonction H de A sur A' est continue, inversible et d'inverse continue, i.e. H est un homéomorphisme de A sur A' .

Preuve

voir [TOS99a]

Etant donné un attracteur A dont la structure de raccord de subdivision est donnée par Y :

- $\mathcal{I}_Y(\mathcal{S})$ définit une classe d'attracteurs homéomorphes à A . Si \mathbb{T}' vérifie la condition forte de raccord, H est un homéomorphisme et la dimension topologique de A est égale à la dimension topologique de A' .
- $\mathcal{R}_Y(\mathcal{S})$ définit une classe de formes paramétrés dans A .

Si \mathbb{T}' vérifie la condition faible de raccord, H est continue.

La dimension topologique de $A' = H(A)$ est supérieure ou égale à la dimension topologique de A , sauf cas dégénéré où A' peut se réduire à un point comme par exemple le cas où les T_i' possèdent le même points fixes $c_i' = c' \forall i$

6.4. Remarque sur les courbes paramétrées

La famille des arcs de courbe définis par IFS binaire, est définie par $\mathcal{U} = \{0^\omega, 1^\omega\}$ et $Y = \{(01^\omega, 10^\omega)\}$.

Dans ce cas, le domaine est $A = [0, 1]$:

- L'IFS de départ correspond à la subdivision binaire de l'intervalle $A = [0, 1] : T_0 s = 1/2 - s, T_1 s = 1/2 + 1/2 s$

- La fonction d'adressage associée ϕ correspond au développement binaire des nombres réels entre

$$0 \text{ et } 1 : \phi(\sigma) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \sigma_i$$

- Les extrémités de $[0, 1]$ sont : $\phi(0^\omega) = 0$, $\phi(1^\omega) = 1$.

- La condition de raccord est : $T_0 \phi(1^\omega) = T_1 \phi(0^\omega) \Leftrightarrow T_0 1 = T_1 0$

- La condition d'intersection correspond au double développement binaire de $1/2$:

$$T_0 [0, 1] \cap T_1 [0, 1] = [0, 1/2] \cap [1/2, 1] = 1/2 \Rightarrow 1/2 = \phi(01^\omega) = \phi(10^\omega) .$$

Pour que H définisse une courbe paramétrée simple, H doit être un homéomorphisme, c'est-à-dire \mathbb{T}' doit vérifier la condition forte de raccord. Cependant, cela exclut certains objets de dimension topologique 1 tel que ce que nous appelons la courbe de Takagi bouclée, présentant un nombre non dénombrable de points doubles. Mais ces objets sont esthétiquement intéressants et afin de les considérer dans la suite de l'exposé nous entendrons par courbe paramétrée définie par un IFS, toute fonction H associée à un IFS vérifiant la condition faible de raccord (I). Ceci implique que nous pouvons avoir des courbes paramétrées H dont les images $H(A)$ sont des surfaces comme par exemple le planaire de Peano.

Partie 2

7. Opérateur d'interpolation

Dans [GEN92a] et [GEN92b] nous avons introduit un opérateur d'interpolation permettant de passer continûment d'un attracteur à un autre.

$$I_N \times I_N \times \mathbb{R} \rightarrow I_N$$

$$(\mathbb{T}^0, \mathbb{T}^1, \lambda) \rightarrow \mathbb{T}^\lambda = (1 - \lambda) \mathbb{T}^0 + \lambda \mathbb{T}^1$$

où $\mathbb{T}^\lambda = \{T_i^\lambda, i \in \Sigma\}$ et $T_i^\lambda = (1 - \lambda) T_i^0 + \lambda T_i^1$

La figure 5 montre l'interpolation d'une courbe de Takagi « bouclée » et d'une courbe de Von Koch pour différentes valeurs de $\lambda \in [0, 1]$

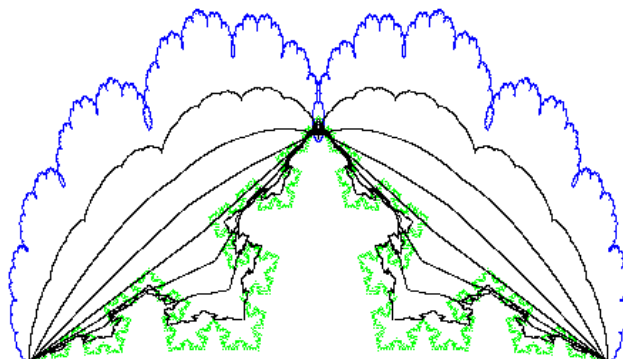


Figure 5: Interpolation d'IFS entre la courbe de Von Koch et La courbe de Takagi bouclée pour les valeurs de λ : 0, 0.125; 0.25; 0.375; 0.5; 0.6.25; 0.750; 0.875; 1

Ce type d'opérateur permet de réaliser ce qu'on appelle du « morphing » permettant de passer continûment d'un objet à un autre.

Cette opération est possible grâce à deux propriétés :

- La combinaison convexe de deux IFS est un IFS : Le semigroupe \mathcal{S} des opérateurs contractants étant convexe, l'ensemble des familles finies d'opérateurs $\mathcal{S}^\Sigma = \{(T_i, i \in \Sigma) \mid T_i \in \mathcal{S}\}$ est également convexe. (Dans le cas affine, cela traduit par la combinaison convexe de matrices.)
- La fonction qui associe un attracteur à un IFS est continue.

En effet on a :

Proposition:

La fonction : $t \in [0, 1] \rightarrow A^t = A(\mathbb{T}^t) \in C(E)$ est continue.

Preuve

La fonction : $t \in \mathbb{R} \rightarrow (1-t)\mathbb{T}^0 + t\mathbb{T}^1 \in \mathcal{S}$ est affine et la fonction $\mathbb{T} \rightarrow A(\mathbb{T})$ est continue. Voir [GEN92a].

Cette propriété de convexité est conservée par les ensembles d'IFS qui décrivent des familles paramétrées.

Etant donnée une famille finie de points $c = (c_i)_{i \in \Sigma_\delta}$, $\Sigma_\delta \subset \Sigma$,

on lui associe le sous-ensemble $\mathfrak{R}(c)$ de $\mathfrak{R}_Y(\mathcal{S})$ des IFS qui vérifient :

$$I^w \in \mathcal{U} \Rightarrow T_i c_i = c_i .$$

Proposition:

$\mathfrak{R}(c)$ est une partie convexe de $\mathfrak{R}_Y(\mathcal{S})$.

Preuve:

Si \mathbb{T}^0 et $\mathbb{T}^1 \in \mathfrak{R}(c)$ alors $\forall \lambda \in [0,1], \mathbb{T}^\lambda = (1-\lambda)\mathbb{T}^0 + \lambda\mathbb{T}^1 \in \mathfrak{R}(c)$.

$$\mathbb{T}^0 \text{ et } \mathbb{T}^1 \in \mathfrak{R}(c)$$

donc $((i\tau_k), (j\tau_l)) \in Y \Rightarrow T_i^p(c_k) = T_j^p(c_l)$ avec $p=1,2$

Soit $((i\tau_k), (j\tau_l)) \in Y$

$$\begin{aligned} T_i^\lambda(c_k) &= (1-\lambda)T_i^0(c_k) + \lambda T_i^1(c_k) \\ &= (1-\lambda)T_j^0(c_l) + \lambda T_j^1(c_l) \\ &= T_j^\lambda(c_l) \end{aligned}$$

Etant donné un IFS \mathbb{T}^D dans $\mathfrak{S}_Y(S)$ définissant un domaine de paramétrisation

$$D = A(\mathbb{T}^D) \text{ , on a :}$$

Corollaire

Tout IFS défini par une combinaison convexe dans $\mathfrak{R}(c)$: $\mathbb{T}^\mu = \sum_j \mu_j T_i^j$, avec

$$\mu = (\mu_j) \in B^+(\mathbb{R}^J) \text{ et } \mathbb{T}^j \in \mathfrak{R}(c) \text{ , définit une forme paramétrée : } H^\mu : D \rightarrow E \text{ .}$$

Preuve

$$\mathbb{T}^\mu \in \mathfrak{R}(c) \text{ , donc } \mathbb{T}^\mu \in \mathfrak{R}_Y(S) \text{ .}$$

Il lui est associée la forme paramétrée $H^\mu : D \rightarrow E$ telle que $H^\mu(\phi^D(\sigma)) = \phi^\mu(\sigma)$.

Remarque :

Si $\mathfrak{S}_Y(S)$ définit l'intervalle $D=[0,1]$ alors $\mathfrak{R}(c_0, c_1)$ définit une famille d'arcs paramétrés d'extrémités : $H(0) = c_0$ et $H(1) = c_1$ (voir figure 5).

De manière plus générale, si $\mathfrak{S}_Y(S)$ définit un attracteur filaire D , l'ensemble $\mathfrak{R}(c_0, \dots, c_{N-1})$ définit une famille de formes paramétrées passant par les sommets : $H(s_0) = c_0, \dots, H(s_{N-1}) = c_{N-1}$ (voir figure 6).

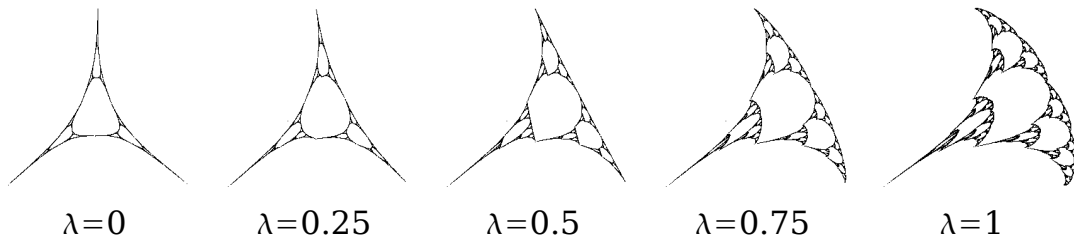


Figure 6: Exemple d'interpolations entre deux structures filaires (à gauche $\lambda=0$ et à droite $\lambda=1$) construites avec les mêmes raccords. Pour les différentes valeurs de λ , les structures obtenues possèdent toujours les mêmes raccords.

8. Familles d'interpolation d'IFS

Il est possible de définir d'autres opérateurs d'interpolation appelés également opérateurs de morphing comme dans [MAR04].

Une autre façon de réaliser un opérateur d'interpolation, est de construire l'interpolation directement à partir des fonctions d'adressages ϕ^0 et ϕ^1 en faisant l'interpolation point à point entre les points de même adresse de chaque attracteur.

En effet, on peut, à partir de deux fonctions d'adressage ϕ^0 et ϕ^1 , définies par les IFS respectifs \mathbb{T}^0 et \mathbb{T}^1 indicés par le même ensemble Σ , il est possible de définir une troisième fonction $(1-\lambda)\phi^0(\sigma)+\lambda\phi^1(\sigma)$ avec $\sigma\in\Sigma^\omega$.

Remarque : $\phi^\lambda\neq(1-\lambda)\phi^0+\lambda\phi^1$ dans le cas général.

La figure 7 montre deux interpolations entre une courbe de Takagi bouclée et une courbe de Von Koch pour une même valeur de λ (ici égale à 0,5). En noir une interpolation des IFS et en rouge une interpolation des fonctions d'adressage.

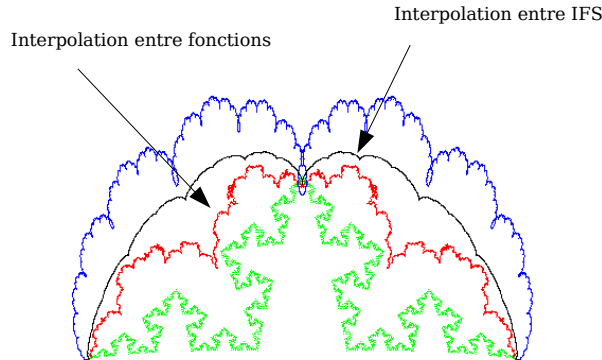


Figure 7: En noir, interpolation d'IFS. En rouge interpolation de fonction d'adressage, entre la courbe de Von Koch et la courbe de Takagi bouclée. Dans les 2 cas $\lambda = 0.5$

A toute combinaison de fonctions d'adressage $\phi = (1-\lambda)\phi^0 + \lambda\phi^1$ correspond une combinaison de formes paramétrées : $(1-\lambda)H^0(s) + \lambda H^1(s) = (1-\lambda)\phi^0(\sigma) + \lambda\phi^1(\sigma)$ avec $\sigma \in \Sigma^\omega$ et $s = \phi^D(\sigma)$.

Les familles définies par interpolation des fonctions $G(\mu, s) = \sum_j \mu_j H^j(s)$ sont affines par rapport à $\mu = (\mu_j)_{j \in J}$.

La famille définie par interpolation des IFS possèdent une autre propriété. La fonction qui associe à un IFS chaque valeur de la fonction d'adressage est analytique [GUE05]:

$$\mathbb{T} \rightarrow \Psi_\sigma(\mathbb{T}) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_{\sigma_1} \circ T_{\sigma_2} \circ \dots \circ T_{\sigma_n}(p)$$

Ceci permet d'effectuer de l'ajustement et de l'approximation non linéaire [GUE05]. Nous en déduisons la propriété suivante de la famille d'interpolation :

Proposition

La fonction $H : B^+(\mathbb{R}^J) \times D \rightarrow E$ définie par $H(\mu, s) = H^\mu(s)$ est analytique par rapport à μ et continue par rapport à s .

Preuve

Pour tout μ fixé, la fonction $H^\mu : D \rightarrow E$ est continue.

Pour tout s fixé, il existe σ tel que $s = \phi(\sigma)$ et $H^\mu(s) = \phi^\mu(\sigma) = \Psi_\sigma(\mathbb{T}^\mu)$

avec $\mu \rightarrow \mathbb{T}^\mu$ fonction affine et Ψ_σ fonction analytique.

La construction des formes modulées est basée sur l'interpolation d'IFS. Comme on va le voir dans la suite, celle-ci garantit un meilleur contrôle de l'aspect local.

Partie 3

9. Principe d'une forme à aspect modulé

Introduisons le principe de notre modèle en faisant un parallèle avec le lien existant entre l'ensemble de Mandelbrot et les ensembles de Julia. Ces derniers sont autosimilaires par des opérateurs non-affines $J_c = f_1(J_c) \cup f_2(J_c)$ où $f_1(z) = \sqrt{z-c}$ et $f_2(z) = -\sqrt{z-c}$ alors que l'ensemble de Mandelbrot M ne possède pas cette propriété.

Il est localement « autosimilaire » au sens suivant : à chaque point c de M est associé un IFS $\mathbb{T}^c = \{f_1, f_2\}$ et autour de ce point c , l'ensemble de Mandelbrot « ressemble » à l'ensemble de Julia correspondant J_c , c.a.d. à l'attracteur de \mathbb{T}^c .

En ce sens, l'ensemble de Mandelbrot apparaît comme une cartographie des ensembles de Julia [BAR88].

Nous proposons un modèle géométrique fractal qui possède le même type de propriété.

Nous allons définir une figure paramétrée H^M où autour de chaque point $p = H^M(s)$ est associé un aspect local déterminé par un IFS \mathbb{T}^s . Localement la figure A^M ressemblera à l'attracteur A^s de \mathbb{T}^s .

Pour cela, nous proposons de construire une famille continue d'IFS paramétrée dans le domaine D et de nous servir de cette famille pour définir la figure paramétrée H^M .

Autrement dit, on va définir une famille continue : $s \in D \rightarrow (H^M(s), \mathbb{T}^s)$ telle que :

H^M est approximée sur un voisinage de s par H^s la forme paramétrée autosimilaire associée à \mathbb{T}^s .

La figure 8 présente le principe de construction d'une telle famille.

A gauche une famille continue $F(t, s) = H^t(s)$, à droite $H^M(s) = F(s, s)$.

Famille d'IFS paramétrés par λ

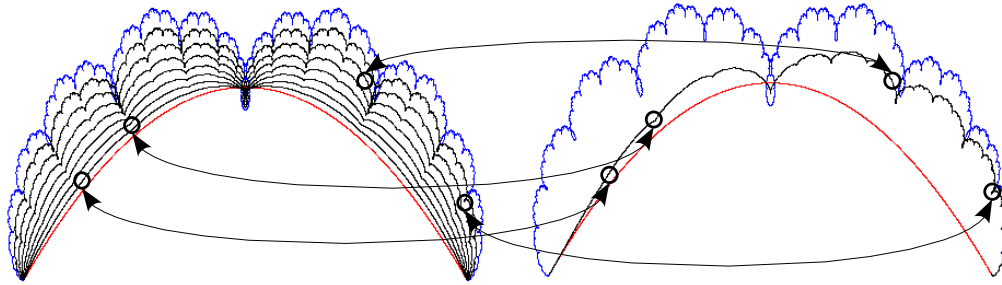


Figure 8: A gauche, une famille de courbes obtenues par interpolation d'IFS entre une courbe de Bézier et une courbe de Takagi bouclée pour différentes valeurs de λ . A droite, une courbe dont l'aspect correspond à une courbe de la famille.

10. Fonction de mélange

La famille $H(\mu, s)$ construite par interpolation d'IFS permet de définir une telle forme paramétrée. Grâce à l'introduction d'une fonction de mélange $H^B(s) = (H_j^B(s))$, une famille continue d'IFS est définie à partir d'une famille finie d'IFS de contrôle $(\mathbb{T}^j)_{j \in J}$:

$$\mathbb{T}^s = \sum_j H_j^B(s) \mathbb{T}^j .$$

Ce qui permet de définir et moduler la fonction H^M .

Proposition :

Etant donnée une fonction de mélange continue $H^B : D \rightarrow B^+(\mathbb{R}^J)$, et une famille finie d'IFS (\mathbb{T}^j) dans $\mathfrak{R}(c)$, la fonction $H^M : D \rightarrow E$ définie par

$$H^M(s) = H(H^B(s), s) \text{ est continue.}$$

Preuve

H^M est une composition de fonctions continues.

Dans la figure 5, on a l'interpolation élémentaire :

$$\mathbb{T}(t) = H_0^B(t) \mathbb{T}^0 + H_1^B(t) \mathbb{T}^1 \text{ avec } H_0^B(t) = 1 - t \text{ et } H_1^B(t) = t$$

et on a : $\mathbb{T}(0) = \mathbb{T}^0$ et $\mathbb{T}(1) = \mathbb{T}^1$.

Si s est voisin de t , $H^M(s)$ a l'aspect de $H(H^B(t), s)$ fonction associée à $\mathbb{T}(t)$.

En particulier, on retrouve aux extrémités les aspects de A^0 et A^1 . On a au voisinage de 0 : $H^M(s)$ proche de $H^0(s)$ associée à \mathbb{T}^0 et au voisinage de 1 : $H^M(s)$ proche de $H^1(s)$ associée à \mathbb{T}^1 .

Il est possible de généraliser cette construction à toute famille finie d'IFS $\{\mathbb{T}^0, \dots, \mathbb{T}^{P-1}\}$. La pondération paramétrée entre IFS peut être effectuée avec des polynômes de Bernstein. On prend $H^B(t) = B(t)$ où $B(t)$ représente le vecteur des polynômes de Bernstein. On obtient un « arc de Bézier » d'IFS dont les points de contrôle sont $\mathbb{T}^0, \dots, \mathbb{T}^{P-1}$. Voir figures 13 14 15 16 17.

En prenant des coordonnées homogènes et un espace projectif, on obtient un « arc de Bézier rationnel » d'IFS. Voir figure 15 16 17.

11. IFS de mélange

La fonction de mélange peut être définie par un IFS \mathbb{T}^B indicé par Σ et opérant dans l'espace barycentrique.

Les fonctions de mélange classiques (Bézier, B-spline, ...) peuvent être générées par des matrices de subdivision, par exemple : $\mathbb{T}^B = \{D_0, D_1\}$ constitué des matrices de De Casteljau et défini dans l'espace barycentrique de dimension P. Grâce à cette propriété, le formalisme des formes à pôles a pu être étendue aux formes fractales [ZAIR96].

Nous proposons d'utiliser cette approche pour définir un modèle encore plus général décrivant des formes dont l'aspect local est variable et modulé à partir de formes auto-affines.

Ce modèle est basé sur la donnée d'un couple $((\mathbb{T}^j), \mathbb{T}^B)$ avec :

- $(\mathbb{T}^j)_{j \in J}$ famille finie d'IFS de contrôle,
- \mathbb{T}^B IFS de mélange.

A partir de ce couple vont être générés :

- une fonction d'adressage $\phi^M : \Sigma^\omega \rightarrow E$
- un « attracteur » $A^M = \phi^M(\Sigma^\omega) \in C(E)$
- une forme paramétrée $H^M : D \rightarrow E$.

Pour cela, on va prendre :

- les IFS de contrôle $\mathbb{T}^j \in \mathfrak{R}(c)$,

- l'IFS de mélange $\mathbb{T}^B \in \mathcal{R}_Y(S_B)$, défini dans l'espace $B^+(\mathbb{R}^J)$ et par conséquent avec S_B ensemble des matrices de Markov $J \times J$.

Définition :

A tout couple $((\mathbb{T}^j), \mathbb{T}^B) \in \mathcal{R}(c)^J \times \mathcal{R}_Y(S_B)$ est associée une fonction d'adressage $\phi^M : \Sigma^\omega \rightarrow E$ définie comme suit.

A chaque adresse s est associée un vecteur de pondération $\mu = \phi^B(\sigma)$, un IFS $\mathbb{T}^\mu = \sum_j \mu_j \mathbb{T}^j$ et une fonction d'adressage ϕ^μ .

La fonction d'adressage associée à $((\mathbb{T}^j), \mathbb{T}^B)$ est donnée par : $\phi^M(\sigma) = \phi^\mu(\sigma)$

ou encore $\phi^M(\sigma) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_{\sigma_1}^{\phi^B(\sigma)} T_{\sigma_2}^{\phi^B(\sigma)} \dots T_{\sigma_n}^{\phi^B(\sigma)} p$

Proposition :

A tout couple $((\mathbb{T}^j), \mathbb{T}^B) \in \mathcal{R}(c)^J \times \mathcal{R}_Y(S_B)$ est associée une fonction continue $H^M : D \rightarrow E$ vérifiant :

- pour tout $s = \phi^D(\sigma) : H^M(\phi^D(\sigma)) = \phi^M(\sigma)$
- $H^M(s) = H(H^B(s), s)$

Preuve :

Pour tout $s = \phi^D(\sigma)$ on a : $H(\mu, s) = H^\mu(s) = \phi^\mu(\sigma)$

En prenant $\mu = H^B(s) = \phi^B(\sigma)$ on a : $H^M(s) = H(\mu, s) = H^\mu(s) = \phi^\mu(\sigma) = \phi^M(\sigma)$.

On a un modèle de forme paramétrée dont on peut moduler l'aspect :

- chaque \mathbb{T}^j décrit une forme H^j paramétrée dans D, la famille $(\mathbb{T}^j)_{j \in J}$ décrit une base d'« aspect » ;
- \mathbb{T}^B décrit une fonction de mélange H^B paramétrée dans D ;
- le couple $((\mathbb{T}^j), \mathbb{T}^B)$ décrit la forme paramétrée associée $H^M(s)$.

Comme H^B est continue, la variation d'aspect est continue : des valeurs de paramètres proches vont donner des valeurs de pondérations proches et des formes auto-affines proches :

$$s \text{ proche de } s' \Rightarrow \mu = H^B(s) \text{ proche de } \mu' = H^B(s') \Rightarrow \mathbb{T}^\mu \text{ proche de } \mathbb{T}^{\mu'}$$

Exemple

Étant donnés 3 IFS \mathbb{T}^B , \mathbb{T}^0 et \mathbb{T}^1 , indicés par le même ensemble Σ .

Notons par ϕ^B , ϕ^0 et ϕ^1 , les fonctions d'adressage respectives et par A^B , A^0 et A^1 les attracteurs respectifs.

Les courbes mixtes sont décrites avec :

- deux IFS de contrôle \mathbb{T}^0 et \mathbb{T}^1 ,

- l'IFS de mélange $\mathbb{T}^B = \left\{ \left(\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \right) \right\}$ qui génère la base de Bernstein

$$H^B(s) = (1-s, s).$$

La figure 9 montre une courbe mixte construite à partir d'une courbe de Takagi « bouclée » et d'une courbe de Bézier.

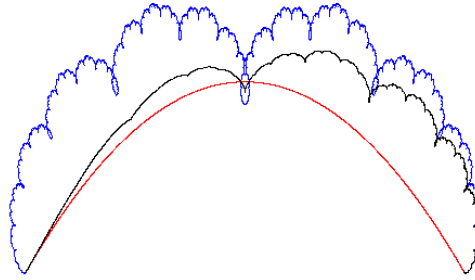


Figure 9: Courbe mixte construite à partir d'une courbe de Bézier et d'une courbe de Takagi bouclée.

Plus la valeur de $\phi^B(\sigma)$ est proche de $e_0 = (1, 0) = \phi^B(0^\omega)$, plus $\phi^M(\sigma)$ est proche de $\phi^0(\sigma)$ et plus A ressemblera localement à A^0 . Inversement, plus la valeur de $\phi^B(\sigma)$ est proche de $e_1 = (0, 1) = \phi^B(1^\omega)$, plus $\phi^M(\sigma)$ est proche de $\phi^1(\sigma)$ et plus A ressemblera localement à A^1 (dans cet exemple $e_0 = \phi(0^\omega)$ et $e_1 = \phi(1^\omega)$ sont les extrémités de la courbe de degré 1 définie par la base de Bernstein A^B).

Contre-exemples

Il est nécessaire d'avoir des IFS de contrôle \mathbb{T}^j et des IFS de mélange \mathbb{T}^B avec des raccords compatibles.

Étant donnés deux IFS de contrôle \mathbb{T}^0 et \mathbb{T}^1 qui décrivent des courbes (leur domaine de paramétrisation est $D = [0, 1]$) et dont la structure de raccord est standard.

La figure 10 montre un exemple de construction à partir d'un IFS de mélange \mathbb{T}^B dont le domaine de paramétrisation D^B est l'ensemble de Cantor.

Le résultat obtenu présente des discontinuités dues à celles de D^B . $\mathbb{T}^i \in \mathcal{R}_Y(S)$ et $\mathbb{T}^B \in \mathcal{S}_{Y'}(S)$ avec $Y \neq Y'$ et $D \neq D^B$

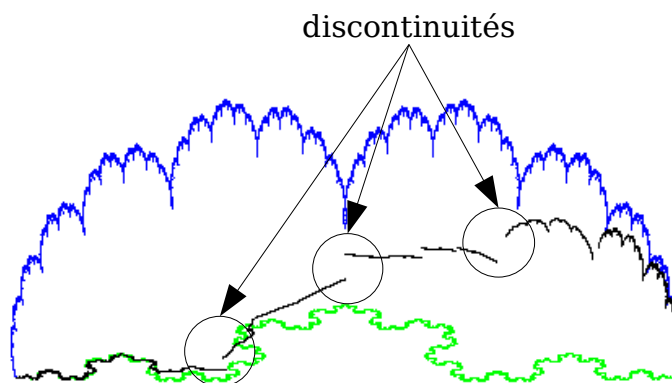


Figure 10: Exemple de construction ne respectant pas les conditions de raccords d'obtention d'une courbe. $\mathbb{T}^i \in \mathcal{R}_Y(S)$ et $\mathbb{T}^B \in \mathcal{S}_Y(S)$ avec $Y \neq Y'$ et $D \neq D^B$

La figure 11 montre un exemple de construction à partir d'un IFS de mélange \mathbb{T}^B dont le domaine de paramétrisation est $D^B = [0, 1]$, mais qui ne possède pas les mêmes conditions de raccords que \mathbb{T}^0 et \mathbb{T}^1 . $\mathbb{T}^i \in \mathcal{R}_Y(S)$ et $\mathbb{T}^B \in \mathcal{S}_{Y'}(S)$ avec $Y \neq Y'$. Les raccords de \mathbb{T}^0 et \mathbb{T}^1 sont réalisés comme illustrés par la figure 2, alors que ceux de \mathbb{T}^B sont réalisés comme présenté dans la figure 12.

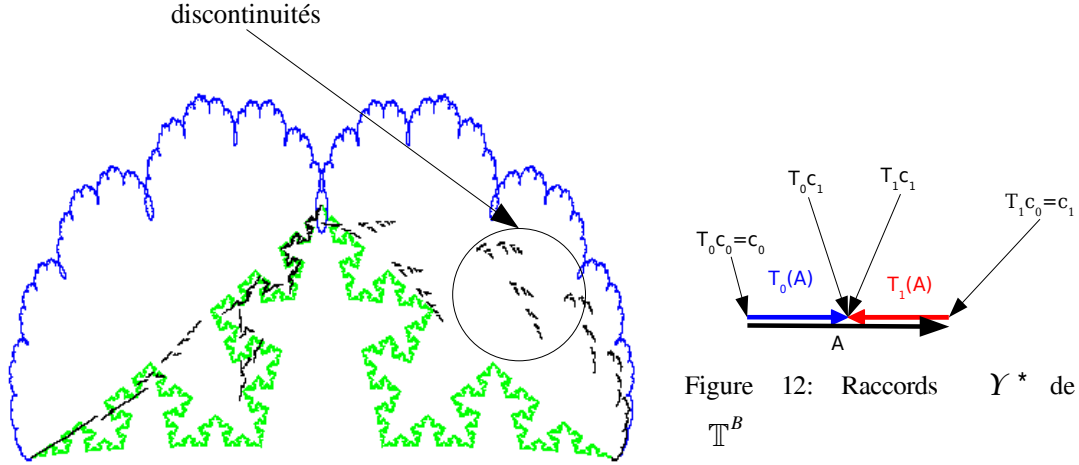


Figure 11: Exemple de construction ne respectant pas les conditions de raccords d'obtention d'une courbe. $\mathbb{T}^j \in \mathcal{R}_Y(S)$

et $\mathbb{T}^B \in \mathcal{S}_{Y^*}(S)$ avec $Y \neq Y^*$

11.1. Visualisation

Nous exposons une méthode simple d'approximation directement issue de sa définition.

A partir d'un descripteur $((\mathbb{T}^j), \mathbb{T}^B)$ du modèle, la fonction H^M peut être approximée ou tabulée et la figure A^M peut être visualisée.

Le principe est le suivant :

pour une adresse σ , on calcule d'abord le vecteur des pondérations :

$$\phi^B(\sigma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{T}_{\sigma_1}^B \cdots \mathbb{T}_{\sigma_n}^B p_B \in B^+(\mathbb{R}^J)$$

puis l'IFS associé : $\left\{ T_i^{\phi^B(\sigma)} = \sum_{j \in J} \phi_j^B(\sigma) T_i^j, i \in I \right\}$

et ensuite le point : $\phi^M(\sigma) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_{\sigma_1}^{\phi^B(\sigma)} T_{\sigma_2}^{\phi^B(\sigma)} \cdots T_{\sigma_n}^{\phi^B(\sigma)} p$

Pour effectuer les calculs, il suffit de se fixer un niveau d'adresse n (nombre d'itérations) et pour tous les mots finis de longueur n , i.e. $\sigma^n \in \Sigma^n$, calculer les valeurs correspondantes des fonctions d'adressage : $\phi^M(\sigma^n \tau) = T_{\sigma_1}^{\phi^B(\sigma^n)} T_{\sigma_2}^{\phi^B(\sigma^n)} \cdots T_{\sigma_n}^{\phi^B(\sigma^n)} p$ avec $p = \phi(\tau)$.

En pratique on peut prendre pour p un centre de T_i : $p = \phi(i^\omega) = c_i$ (Les c_i pour $i=0,1$ sont donnés et égaux à e_0 ou e_1 dans les exemples).

Dans la pratique comme on se limite à un nombre fini d'itérations, (i.e. $\phi^M(\sigma)$ est approximé par

$\phi^M(\sigma^n \tau)$ il est plus judicieux de choisir un point appartenant à la figure, car tous ses transformés appartiendront à l'attracteur (ou seront encore plus proches de l'attracteur).

Pour tout σ , on a : $\phi^M(\mathbf{0}^\omega) = c_0 \rightarrow \phi^M(\sigma^n \mathbf{0}^\omega) = T_{\sigma_1}^{\phi^B(\sigma_n)} T_{\sigma_2}^{\phi^B(\sigma_n)} \dots T_{\sigma_n}^{\phi^B(\sigma_n)} p$

avec $p = c_0$.

Mais généralement la convergence est rapide (sauf si les constantes de contraction sont proches de 1) et sur un nombre relativement faible d'itérations (8 à 10 itérations) on obtient une bonne approximation.

Algorithme

// Initialisation de p_B

$$p_B = e_0 = (1, 0, \dots, 0)$$

Pour $\sigma^n \in \Sigma^n$

$$\text{calculer } \phi^B(\sigma^n \mathbf{0}^\omega) = T_{\sigma_1}^B T_{\sigma_2}^B \dots T_{\sigma_n}^B p_B$$

$$\text{pour chaque } i \in \Sigma \text{ calculer } T_i^{\phi^B(\sigma^n \mathbf{0}^\omega)} = \sum_{j \in J} \phi_j^B(\sigma^n \mathbf{0}^\omega) T_i^j$$

// initialisation de p

$$p = c_0$$

$$\text{calculer } \phi^M(\sigma^n \mathbf{0}^\omega) = T_{\sigma_1}^{\phi^R(\sigma^n \mathbf{0}^\omega)} T_{\sigma_2}^{\phi^R(\sigma^n \mathbf{0}^\omega)} \dots T_{\sigma_n}^{\phi^R(\sigma^n \mathbf{0}^\omega)} p$$

afficher $\phi^M(\sigma^n \mathbf{0}^\omega)$

fin Pour

pour chaque niveau n , on a une tabulation de H^M et un remplissage de A^M .

12. Propriétés

Des propriétés des IFS classiques ne peuvent s'étendre au nouveau modèle. $\phi^M(i\sigma)$ ne peut se calculer à partir de $\phi^M(\sigma)$. En effet, $\phi^M(\sigma)$ est calculé à partir de $\phi^B(\sigma)$ alors que

$$T_i^{\phi^B(\sigma)} \text{ et } \phi^M(i\sigma) \text{ sont calculés à partir de } \phi^B(i\sigma).$$

Autrement dit $\phi^M(i\sigma) \neq T_i^{\phi^B(i\sigma)} \phi^M(\sigma)$.

Par contre, certaines propriétés analytiques des IFS, liant descripteur et formes générées restent vérifiées. La fonction liant descripteur et forme générée peut être écrite de façon plus explicite et concise.

En notant $P(\mathbb{T}^J)$ l'opérateur de passage de l'espace barycentrique des pondérations à l'espace des

$$\text{IFS : } P(\mathbb{T}^J) \mu = \sum_j \mu_j \mathbb{T}^j,$$

$$\text{on a : } T_i^{\phi^B(\sigma)} = P(\mathbb{T}^J) \Psi_\sigma(\mathbb{T}^B)$$

et $\phi^M(\sigma)$ est défini par l'expression suivante :

$$\phi^M(\sigma) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_{\sigma_1}^{\phi^B(\sigma)} T_{\sigma_2}^{\phi^B(\sigma)} \dots T_{\sigma_n}^{\phi^B(\sigma)} p = \Psi_\sigma(P(\mathbb{T}^J) \Psi_\sigma(\mathbb{T}^B))$$

Proposition

En notant $\mathbb{T}^M = ((\mathbb{T}^J), \mathbb{T}^B)$ le descripteur du modèle, on a :

- 1) $\mathbb{T}^M \rightarrow \phi^M$ est analytique,
- 2) $\mathbb{T}^M \rightarrow H^M$ est analytique,
- 3) $\mathbb{T}^M \rightarrow A^M$ est continue.

Preuve

Comme on a $(\mathbb{T}^J) \rightarrow P(\mathbb{T}^J)$ affine, $\mu \rightarrow P(\mathbb{T}^J)\mu$ affine et Ψ_σ analytique,

la fonction $\mathbb{T}^M \rightarrow \Psi_\sigma^M(\mathbb{T}^M)$ est analytique.

La fonction $\Psi^M(\mathbb{T}^M, \sigma) = \Psi_\sigma^M(\mathbb{T}^M)$ est analytique en \mathbb{T}^M et continue en σ .

- 1) $\Psi^M = \Psi^M(\mathbb{T}^M, \cdot)$
- 2) en tout point s il existe σ tel que $s = \phi(\sigma)$ et on a :

$$\Psi_\sigma(\mathbb{T}^M) = H^M(s)$$

La fonction $h(\mathbb{T}^M, s) = \Psi_\sigma(\mathbb{T}^M)$ est analytique en \mathbb{T}^M et continue en s .

$$H^M = h(\mathbb{T}^M, \cdot)$$

- 3) $\phi \rightarrow \phi(\Sigma^\omega)$ est continue.

Ce modèle permet de définir des « mixages » de formes paramétrées.

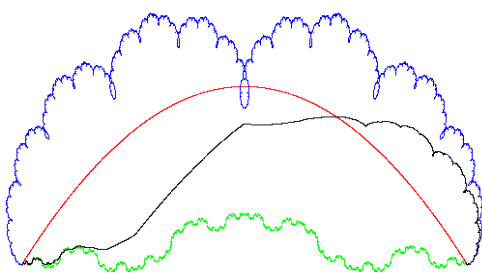


Figure 13 Exemple de mixage de 3 IFS (courbe de Von Koch « dégénérée », courbe de Bézier, courbe de Takagi bouclée) par une courbe de Bézier d'ordre 2

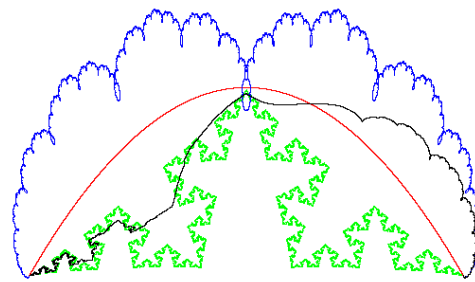


Figure 14: Exemple de mixage de 3 IFS (courbe de Von Koch, courbe de Bézier, courbe de Takagi bouclée) par une courbe de Bézier d'ordre 2

Exemple figure 13 d'une courbe mixte en noir, construite à partir de 3 IFS de contrôles dont les attracteurs sont représentés en bleu (courbe de Takagi « bouclée » due à la présence de rotation), rouge

(courbe de Bézier) et vert (Courbe de Von Koch « dégénérée »). Le mixage de ces IFS est réalisé à l'aide d'une Bézier à trois points de contrôle. Sur la figure 14 même construction pour laquelle le troisième IFS de contrôle a été modifié pour avoir une courbe de Von Koch plus marquée.

La suite des 3 figures 15, 16, 17 montre le même mixage que la figure 14 pour lequel nous avons utilisé comme fonction de mélange une courbe de Bézier rationnelle. Les différentes figures sont obtenues en faisant varier les poids des IFS de contrôle de façon respective (4,1,1), (1,4,1) et (1,1,4). Ce qui permet, comme pour les Bézier rationnelles, de contrôler l'influence de chaque IFS de contrôle.

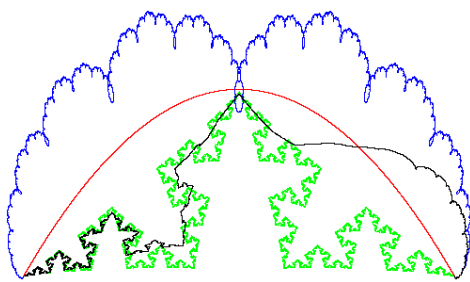


Figure 15: Courbe mixte construite à partir d'une courbe Takagi Bouclée, d'une courbe de Bézier, d'une courbe de Von Koch. Le mélange est réalisé à l'aide d'une courbe de Bézier rationnelle dont les poids sont respectivement 1, 1 et 4.

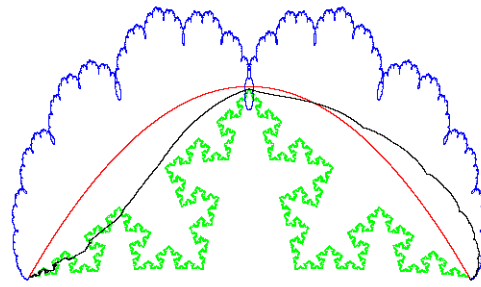


Figure 16: Même construction que la figure 15 mais avec les poids respectifs: 1, 4 et 1.

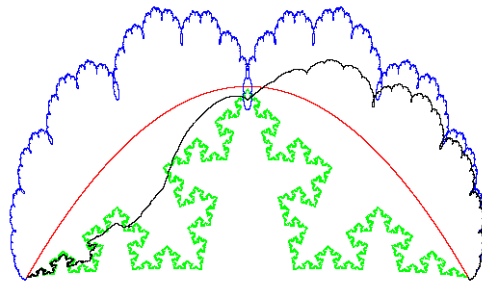


Figure 17 : Même construction que la figure 15 mais avec les poids respectifs: 4, 1 et 1.

La figure 18 présente une courbe mixte toujours construite à partir des 3 mêmes courbes de contrôle mais en utilisant une courbe de Takagi comme interpolant.

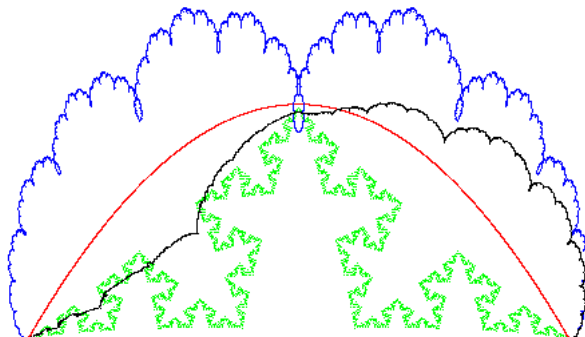


Figure 18: En noir, une courbe mixte construite à partir des même courbes que la figure 15 mais l'IFS mélangeur est une courbe de Takagi

13. Modulation de figures filaires

Les propriétés sur lesquelles repose la construction des courbes mixtes: condition faible et forte de raccord, propriétés de continuité et de convexité de l'opérateur d'interpolation, propriété de continuité de la fonction H^M sont indépendantes de la topologie des objets. Il est alors possible d'appliquer ce type de construction aux figures filaires.

Dans les 3 exemples illustrés par les figures 20 21 22, nous construisons des figures filaires à partir de conditions de raccords induites par celles d'un triangle de Sierpinski. Les figures sont construites à partir d'une même famille de 3 IFS $\{\mathbb{T}^0, \mathbb{T}^1, \mathbb{T}^2\}$ et d'IFS de mélange \mathbb{T}^B différents pour chaque exemple mais dont les raccords sont ceux d'un triangle de Sierpinski (voir figure 19).

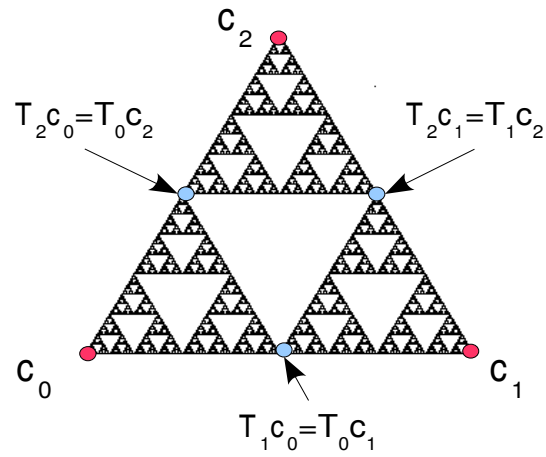


Figure 19: Conditions de raccords pour triangle de Sierpinski

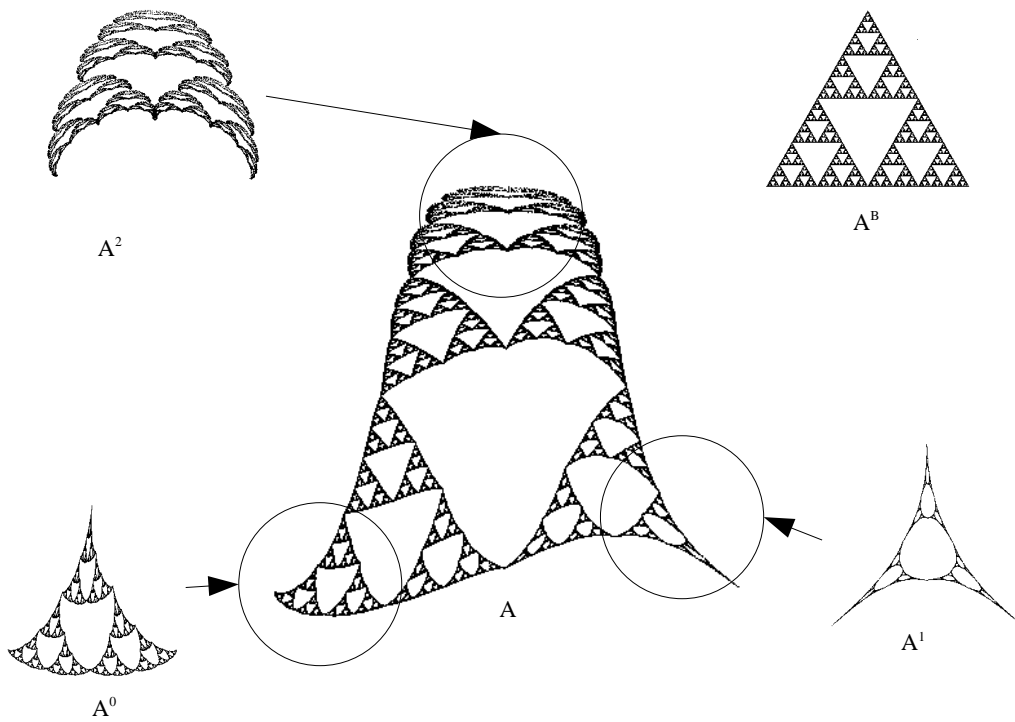


Figure 20: Figure filaire mixte construite à partir de 3 IFS de même raccords que le triangle de Sierpinski et avec pour d'IFS de mélange celui du triangle de Sierpinski

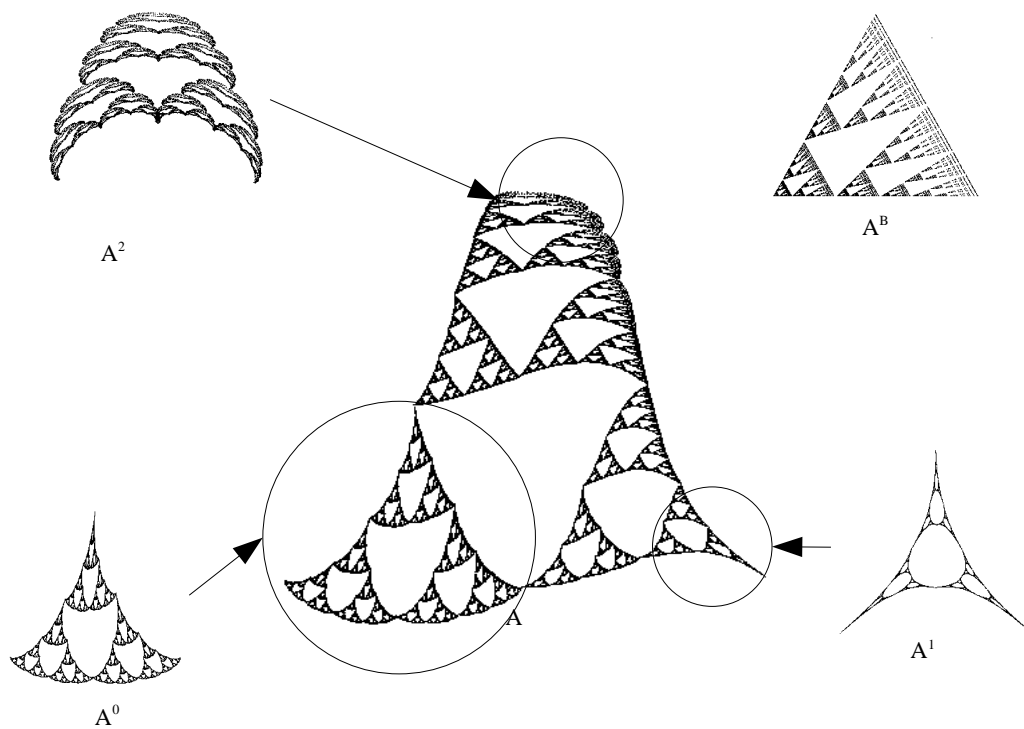


Figure 21: Figure filaire mixte construite à partir de 3 IFS de même raccords que le triangle de Sierpinski et avec pour IFS de mélange un IFS similaire au triangle de Sierpinski avec une contraction plus prononcée pour la première transformation T_0^B (voir A^B). Ceci a pour conséquence d'augmenter la « zone d'influence » de l'attracteur A^0 .

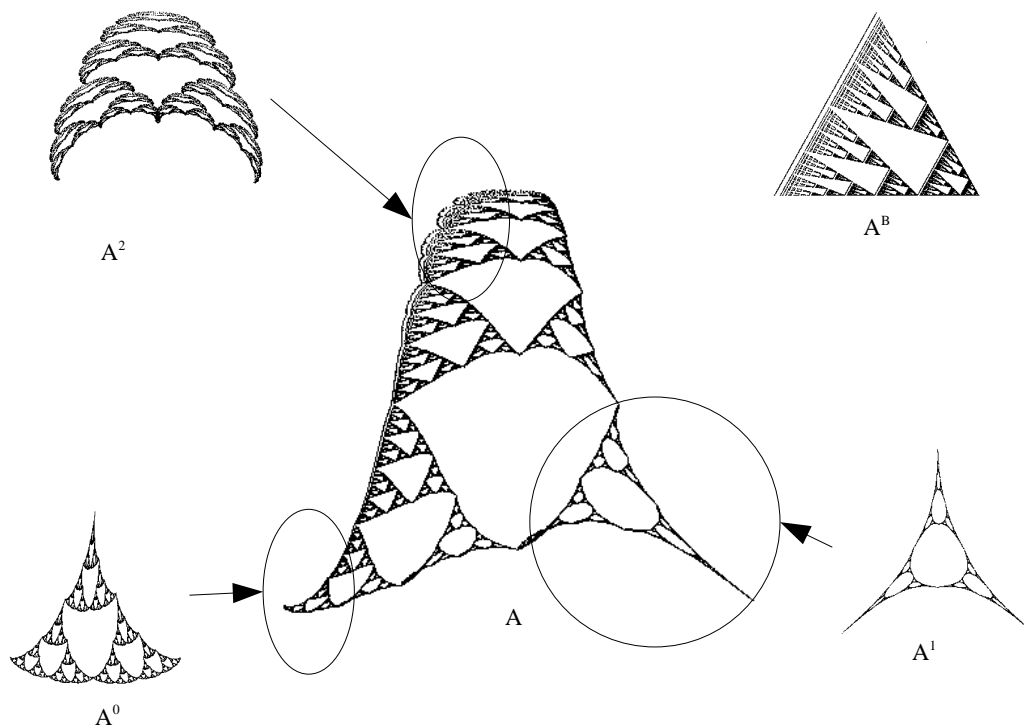


Figure 22: Figure filaire mixte construite à partir de 3 IFS de même raccords que le triangle de Sierpinski et avec pour IFS de mélange un IFS similaire au triangle de Sierpinski avec une contraction plus prononcée pour la deuxième transformation T_1^B (voir A^B). Ceci a pour conséquence d'augmenter la « zone d'influence » de l'attracteur A^1

14. Conclusion

Le modèle de forme fractale mixte que nous proposons permet de construire des objets présentant simultanément différents aspects empruntés à des formes de contrôle décrites par des IFS. L'influence de chaque forme de contrôle étant elle-même déterminée par un IFS appelé IFS de « mélange ». Ainsi, nous pouvons construire des objets dont les parties présenteront différentes caractéristiques pouvant aller de l'aspect fractale à l'aspect lisse et ceci avec un changement continu. Cette construction conserve les conditions de raccords des attracteurs et ainsi garantie la topologie de l'objet finale : courbes, figures filaires comme illustré dans cet article.

Bibliographie

[BAR88] M.F. BARNESLEY. Fractal Everywhere. Academic press, INC, 1988.

[GEN92a] Christian GENTIL. Les fractales en synthèse d'image : le modèle IFS. Université LYON

1,1992.

- [GEN92b] C. GENTIL et E. TOSAN. Description of fractal with IFS. In COMPUTERGRAPHICS'92, editors, Portuguese ACM Chapter, Lisbon, Portugal, december 1992
- [GUE05] Eric Guérin and Eric Tosan. Fractal Inverse Problem: Approximation Formulation and Differential Methods. In Jacques Lévy Véhel and Evelyne Lutton, editors, Fractal in Engineering: New Trends in Theory and Applications, pages 271-285. Springer, , 2005.
- [MAR04] Tomek Martyn. A new approach to morphing 2D affine IFS fractals. Computers & Graphics, vol 28, issue 2:249-272, April 2004
- [TOS99a] Eric TOSAN. Surfaces fractales définies par leurs bords. In L. Briard, N. Szafran and B. Lacolle, editors, Journées "Courbes, Surfaces et algorithmes", Grenoble, Septembre 1999
- [TOS99b] Eric TOSAN. Wire Frame Fractal Topology and IFS Morphisms. In TUDelf INRIA, editors, 4th Conference Fractals in Engineering, The Netherlands, June 1999
- [ZT96] Chems Eddine ZAIR and Eric TOSAN. Fractal modeling using free form techniques. Computer Graphics Forum, 15(3):269-278, August 1996
- [ZT97] Chems Eddine ZAIR and Eric TOSAN. Unified IFS-based Model to Generate Smooth or Fractal Forms. In A Le Méhauté, C. Rabut, and L. L. Shumaker, editors, Surface Fitting and Multiresolution Methods, pages 335-344. Vanderbilt University Press, Nashville, TN, 1997.