

Modélisation itérative de courbes et surfaces : aspect multirésolution

E. TOSAN[★] -I. BAILLY-SALINS[★] -I. STOTZ[†] -G. GOUATY^{†★} -Y. WEINAND[†]

[★] LIRIS UMR CNRS 5205 - Université Claude Bernard Lyon I

[†] IBOIS - Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

eric.tosan@liris.cnrs.fr, gilles.gouaty@epfl.ch, ivo.stotz@epfl.ch

Résumé

Nous présentons un modèle itératif de figures à motifs fractals. Ce modèle est exprimé dans un formalisme type IFS (Iterated Function System), qui est relié à l'approche par schéma de subdivision. Ce modèle itératif permet de définir des formes à pôles multirésolution (courbes et surfaces).

Mots-clés : modèle itératif, IFS, schéma de subdivision, paramétrisation, forme à pôles, multirésolution.

1 Introduction

Nous avons développé une modélisation itérative qui permet d'exprimer dans un même formalisme, une grande généralité de formes [TBSG⁺06] : formes fractales définies par règles de production, formes issues de la CAO, courbes et surfaces définies par schéma de subdivision, ... Le principe de cette modélisation est de ramener les divers formulations (équations fonctionnelles, schémas de subdivision, formes à pôles, ...) à une description "type IFS", c.a.d. une famille finie de matrices de subdivision. L'intérêt de cette formulation est de pouvoir étudier les propriétés du modèle (existence des solutions, dérivabilité, ...) à travers les caractéristiques (vecteurs et valeurs propres) de ces matrices. PRAUTZSCH et MICHELLI l'avaient fait pour étudier les subdivisions de courbes à pôles [PM87]. DAUBECHIES et LAGARIAS l'avaient fait pour étudier une famille d'équations fonctionnelles décrivant, entre autres, des ondelettes [DL93]. Nous avons introduit un formalisme d'IFS projeté pour étendre les formes à pôles aux formes fractales [ZT96]. Nous avons montré que ce formalisme permet de décrire des figures (courbes, surfaces ou autre) dont on peut moduler la forme générale à l'aide de points de contrôle et l'aspect local (lisses, rugueux, spiralé) à l'aide des matrices de subdivision [TGB02].

Plus récemment, nous avons introduit une autre version de ce formalisme, dans lequel les courbes sont munies d'un motif local auto-affine [TGW06]. Dans cet article, nous présentons l'aspect multirésolution de ce modèle et son extension aux surfaces définies par produits tensoriels.

2 Modèle itératif

Nous avons introduit un formalisme, le BCIFS (Boundary Controlled Iterated Function System) [TBSG⁺06] que nous allons utiliser pour présenter les modèles itératifs de courbe et surface et en exprimer l'aspect multirésolution.

2.1 Espaces

À chaque figure est associé un espace de définition E^x . Les arcs paramétrés sont les fonctions continues de $[0, 1]$ dans E^a , leur ensemble est noté $\mathcal{C}^0([0, 1], E^a)$. Les carreaux paramétrés sont les fonctions continues de $[0, 1]^2$ dans E^f , leur ensemble est noté $\mathcal{C}^0([0, 1]^2, E^f)$.

Les E^x sont des espaces affines. $E^x = \mathbb{R}^2$ ou \mathbb{R}^3 décrit les espaces de modélisation 2D ou 3D, et $E^x = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{J^x}) = \{(x_i)_{i \in J^x} / \sum_{j \in J^x} x_j = 1\}$ décrit les espaces barycentriques associés aux formes à pôles — les indices de J^x sont des nœuds d'une grille de contrôle. En notant par $x(n)$ le niveau de raffinement n , $E^{x(n)}$ décrit les espaces associés à l'approche multirésolution.

2.2 Opérateurs de subdivision

Nous utilisons des opérateurs affines T_u^x de E^y dans E^x , notés $T_u^x : E^y \leftarrow E^x$ et représentés par des matrices homogènes $m_x \times m_y$ avec $m_x = 3, 4$ ou $|J^x|$ et $m_y = |J^y|$. Si $E^y = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{J^y})$ les T_u^x sont identifiables à des familles finies de points de E^x , notées $(p_j^x)_{j \in J^y}$ - avec J^y ensemble des nœuds d'une grille de contrôle.

Nous utilisons également des opérateurs permettant de plonger un espace dans un autre, c.a.d. une grille de contrôle dans une autre. Π_u^x est assimilable à une certaine fonction d'extraction d'indices $\eta_u^x : J^x \leftarrow J^y : \Pi_u^x e_j^y = e_{\eta_u^x(j)}^x$.

2.3 Figures produites

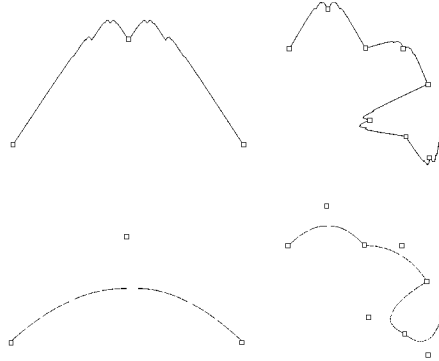


FIG. 1 – À gauche motifs à 3 points de contrôle (arcs de BÉZIER et de TAKAGI); à droite courbes composées de 4 motifs à 9 points de contrôle avec mise en commun d'un point.

La donnée de deux familles d'opérateurs de subdivision $(T_u^x)_{u \in \Sigma_C^x}, (T_u^y)_{u \in \Sigma_C^y}$ permet de définir des formes de manière récursive. Le processus itératif associé permet de générer deux suites de figures $K_{(n)}^x, K_{(n)}^y$ à partir d'une famille de primitives $K_{(0)}^y$. Nous distinguons les figures composées (courbes ou surfaces), définies par des équations :

$$K_{(n+1)}^x = \bigcup_{u \in \Sigma_C^x} T_u^x K_{(n)}^y \quad (1)$$

et les motifs (arcs ou carreaux) définis par des équations récursives :

$$K_{(n+1)}^y = \bigcup_{u \in \Sigma_C^y} T_u^y K_{(n)}^y \quad (2)$$

Sous la condition que les T_u^y soient contractants, la suite $K_{(n)}^y$ converge vers l'attracteur A^y de

l'IFS $\mathcal{T}^y = \{T_u^y/u \in \Sigma_C\}$ [BAR88]. A^y est un motif auto-affine :

$$A^y = \bigcup_{u \in \Sigma_C^y} T_u^y A^y = \mathcal{T}^y A^y.$$

La suite $K_{(n)}^x$ converge vers A^x union de duplicatas des attracteurs A^y :

$$A^x = \bigcup_{u \in \Sigma_C^x} T_u^x A^y.$$

La figure 1 montre des exemples de motifs et figures composées.

3 Modèle de courbes

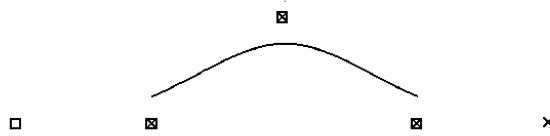


FIG. 2 – Courbe B-spline G^2 composée de deux arcs de BÉZIER à 4 points de contrôle, avec mise en commun de 3 points de contrôle.

3.1 Principe

Classiquement, les courbes B-spline sont définies par morceaux à partir d'arcs de BÉZIER. L'arc de BÉZIER est auto-affine, il est défini par morceaux à partir de lui-même. (L'algorithme d'affichage par subdivision de DE CASTELJAU est basé sur cette propriété.) Le raccord entre les pièces s'effectue par mise en commun de points de contrôle (Voir figure 2).

Nous avons montré que cette approche peut être généralisée à des formes fractales [TGW06]. Une courbe composée H^{\natural} est une union de duplicatas d'un arc H^a qui sert de motif (Voir figure 1). Le motif H^a est un arc auto-affine et défini par un IFS (Iterated Function System). Il est caractérisé par sa structure auto-affine et possède une bordure lui permettant de s'auto-raccorder.

Le nombre de points communs détermine l'ordre du raccord. Dans le cas classique, il s'agit du raccord G^k . Dans le cas fractal, cette notion est généralisée [TGW06].

3.2 Système itératif

Les équations (1) et (2), ne prennent en compte que l'aspect ensembliste de la modélisation. Pour définir des courbes paramétrées, il faut utiliser des équations fonctionnelles :

$$\begin{cases} H^{\natural} &= \Omega_T^{\natural} H^a, \\ H^a &= \Omega_T^a H^a, \\ c^s &= T^s c^s. \end{cases} \quad (3)$$

où :

- l'opérateur fonctionnel Ω_T^{\natural} définit une courbe composée H^{\natural} à partir d'un arc H^a qui sert de motif ;
- l'opérateur fonctionnel Ω_T^a décrit la structure auto-affine du motif H^a ;
- l'opérateur T^s caractérise le raccord des motifs.

Le système itératif associé permet de générer une suite de figures paramétrées :

$$\begin{cases} G_{(n+1)}^h &= \Omega_T^h G_{(n)}^a, \\ G_{(n+1)}^a &= \Omega_T^a G_{(n)}^a, \\ q_{(n+1)}^s &= T^s q_{(n)}^s. \end{cases} \quad (4)$$

Si les opérateurs Ω_T^a et T^s sont contractants, les suites de figures obtenues approximent les solutions de l'équation (3).

Pour définir les opérateurs fonctionnels Ω_T^x , il faut introduire des opérateurs de subdivision sur l'intervalle $[0, 1]$ et des contraintes sur les opérateurs $T_{A_i}^x$.

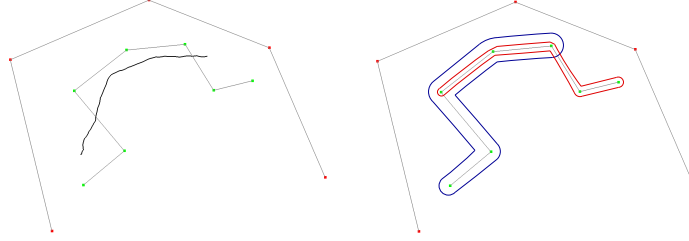


FIG. 3 – Courbe à cinq points de contrôle obtenue par concaténation de deux arcs à cinq points de contrôle avec mise en commun de trois points de contrôle.

3.3 Concaténation de courbes paramétrées

Étant donnée une subdivision de l'intervalle $[0, 1] : 0 = t_{S_0}^x < \dots < t_{S_{N_x}}^x = 1$, une courbe composée $G^x \in C^0([0, 1], E^x)$ est définie par concaténation de N_x arcs $G_{A_i}^x \in C^0([t_{S_i}^x, t_{S_{i+1}}^x], E^x)$ et identification des $N_x - 1$ points de raccord $G_{A_i}^x(t_{S_i}^x) = G_{A_{i+1}}^x(t_{S_{i+1}}^x)$.

En associant à la subdivision d'intervalle, une famille de N_x opérateurs affines $T_{A_i}^x$ telle que :
 $\begin{cases} T_{A_i}^x 0 &= t_{S_i}^x, \\ T_{A_i}^x 1 &= t_{S_{i+1}}^x; \end{cases}$ c'est-à-dire : $T_{A_i}^x s = (1-s)t_{S_i}^x + st_{S_{i+1}}^x$ et $(T_{A_i}^x)^{-1}t = \frac{t-t_{S_i}^x}{t_{S_{i+1}}^x-t_{S_i}^x}$ chaque duplicata de G^a est défini sur $[t_{S_i}^x, t_{S_{i+1}}^x] = T_{A_i}^x[0, 1]$ par : $G_{A_i}^x(t) = T_{A_i}^x G^a((T_{A_i}^x)^{-1}t)$.

En identifiant les matrices $T_{A_i}^x$ à des polygones de contrôle, le raccordement des composantes $G_{A_i}^x$ se fait classiquement par mise en commun de points de contrôle. Dans la figure 1, un seul point de contrôle est mis en commun. Dans la figure 4, deux et trois points de contrôle sont mis en commun.

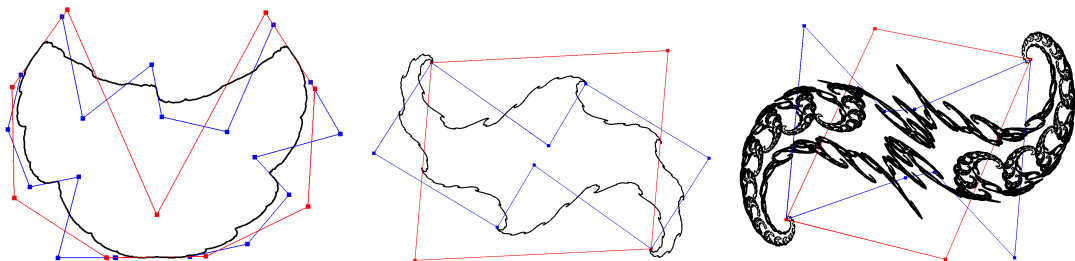


FIG. 4 – Courbes composées : à gauche avec deux points de contrôle en commun et un raccord tangentiel; à droite avec trois points en commun et un raccord spiralé.

En introduisant :

- l'espace de définition des motifs $E^a = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{J^a})$ avec $J^a = \{0, \dots, m_a - 1\}$;

– l'espace de définition des raccords $E^s = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{J^s})$ avec $J^s = \{0, \dots, m_s - 1\}$;
et en posant $\Delta = m_a - m_s$, la fonction d'extraction d'indices suivante permet d'exprimer les plongements d'un espace de contrôle dans un autre :

$$\nu(i, j) = \Delta i + j \quad (5)$$

Étant donnés deux opérateurs de bord $\Pi_0^a, \Pi_1^a : E^a \leftarrow E^s$ définis par :

$$\Pi_i^a e_j^s = e_{\nu(i, j)}^a \quad \text{pour } i = 0, 1 \text{ et } j = 0, \dots, m_s - 1$$

la famille d'opérateurs affines (T_S^a, T_A^a) comportant :

- N_x opérateurs de subdivision en arête $T_{A_i}^x : E^x \leftarrow E^a$ pour $i = 0, \dots, N_x - 1$;
 - $N_x + 1$ opérateurs de subdivision en sommet $T_{S_i}^x : E^x \leftarrow E^s$ pour $i = 0, \dots, N_x$;
- vérifie la relation d'incidence matricielle si :

$$\begin{cases} T_{A_i}^x \Pi_0^a &= T_{S_i}^x, \\ T_{A_i}^x \Pi_1^a &= T_{S_{i+1}}^x; \end{cases} \quad (6)$$

En notant $\mathcal{C}_\Upsilon^0([0, 1], E^a)$ l'ensemble des *motifs raccordable*, c'est-à-dire l'ensemble des arcs paramétrés G^a tels qu'il existe un point q^s de E^s vérifiant :

$$\begin{cases} G^a(0) &= \Pi_0^a q^s, \\ G^a(1) &= \Pi_1^a q^s; \end{cases} \quad (7)$$

on a la relation suivante entre matrices de subdivision et opérateurs fonctionnels [TGW06].

Proposition 3.1 *À toute famille d'opérateurs affines (T_S^x, T_A^x) vérifiant la relation d'incidence matricielle (6), on peut associer un opérateur fonctionnel $\Omega_T^x : \mathcal{C}_\Upsilon^0([0, 1], E^a) \rightarrow C^0([0, 1], E^x)$ défini par :*

$$\Omega_T^x G^a(t) = T_{A_i}^x G^a((T_{A_i}^x)^{-1}t) \quad \text{pour } t \in T_{A_i}^x[0, 1] = [t_{S_i}^x, t_{S_{i+1}}^x].$$

3.4 Définition d'arc auto-affine

Soit une subdivision de l'intervalle $[0, 1] : 0 = t_{S_0}^a < \dots < t_{S_N}^a = 1$ et les N opérateurs $T_{A_i}^a$ associés : $\begin{cases} T_{A_i}^a 0 &= t_{S_i}^a, \\ T_{A_i}^a 1 &= t_{S_{i+1}}^a. \end{cases}$ Dans l'ensemble \mathcal{C}_Υ des couples $(q^s, G^a) \in E^s \times C^0([0, 1], E^a)$ vérifiant la relation de bordure (7), les arcs auto-affines sont tels que :

$$\forall i = 0, \dots, N - 1 \forall t \in [0, 1] : H^a(T_{A_i}^a t) = T_{A_i}^a H^a(t),$$

Ils correspondent aux solutions (c^s, H^a) dans \mathcal{C}_Υ du système : $\begin{cases} H^a &= \Omega_T^a H^a, \\ c^s &= T^s c^s. \end{cases}$

L'opérateur (T^s, Ω_T^a) est défini par la famille d'opérateurs affines (T^s, T_S^a, T_A^a) comportant :

- un opérateur décrivant le comportement commun aux extrémités $T^s : E^s \leftarrow E^s$;
- N opérateurs d'arête $T_{A_i}^a : E^a \leftarrow E^a$ pour $i = 0, \dots, N - 1$;
- $N + 1$ opérateurs de sommet, en distinguant :
 - les $N - 1$ points de raccord $T_{S_i}^a : E^a \leftarrow E^s$ pour $i = 1, \dots, N - 1$;
 - les deux extrémités $T_{S_0}^a = \Pi_0^a T^s$ et $T_{S_N}^a = \Pi_1^a T^s$.

Si (T_S^a, T_A^a) vérifie la relation d'incidence matricielle (6), nous obtenons, en introduisant T^s , la nouvelle relation d'incidence suivante :

$$\begin{cases} T_{A_0}^a \Pi_0^a &= \Pi_0^a T^s, \\ T_{A_i}^a \Pi_1^a = T_{A_{i+1}}^a \Pi_0^a &= T_{S_i}^a, \\ T_{A_{N-1}}^a \Pi_1^a &= \Pi_1^a T^s. \end{cases} \quad (8)$$

On a la relation supplémentaire suivante entre matrices de subdivision et opérateurs fonctionnels [TGW06].

Proposition 3.2 *Si (T^s, T_S^a, T_A^a) vérifie la relation d'incidence matricielle (8), et si T^s est contractant dans E^s et les T_i^a sont contractants dans E^a , l'opérateur (T^s, Ω_T^a) est défini et contractant dans \mathcal{C}_Υ .*

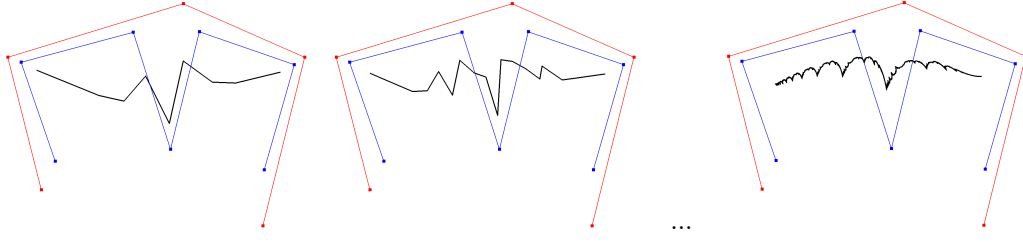


FIG. 5 – Suite de lignes brisées approximant un arc fractal.

3.5 Visualisation

En partant d'une primitive raccordable $G_{(0)}^a$, on obtient une suite d'arcs $G_{(n)}^a = (\Omega_T^a)^n G_{(0)}^a$. Elle est donnée par la suite de famille de matrices $T_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^a = T_{\alpha_1}^a \dots T_{\alpha_n}^a$ [TGW06]. En posant $K_{(n)}^a = G^a([0, 1])$, on retrouve l'algorithme déterministe des IFS :

$$\begin{aligned} K_{(n)}^a &= (T^a)^n K_{(0)}^a, \\ &= \bigcup_{\alpha \in \Sigma_A^n} T_{\alpha}^a K_{(0)}^a. \end{aligned}$$

La courbe composée correspondante est $G_{(n+1)}^{\natural} = \Omega_T^{\natural} G_{(n)}^a$. Elle est donnée par la suite de famille de matrices $T_u^{\natural} T_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^a$:

$$\begin{aligned} K_{(n+1)}^{\natural} &= \bigcup_{u \in \Sigma_A^{\natural}} T_u^{\natural} K_{(n)}^a, \\ &= \bigcup_{u \in \Sigma_A^{\natural}} \bigcup_{\alpha \in (\Sigma_A^a)^n} T_u^{\natural} T_{\alpha}^a K_{(0)}^a, \\ &= \bigcup_{\alpha \in \Sigma_A^{\natural} (\Sigma_A^a)^n} T_{\alpha}^{\natural} K_{(0)}^a. \end{aligned}$$

En prenant pour primitive $K_{(0)}^a$ le segment de droite reliant $\Pi_0^a q^s$ et $\Pi_1^a q^s$ avec q^s arbitraire. Les courbes affichées sont alors des lignes brisées, dont les arêtes sont les segments de droite :

$$T_{\hat{\alpha}_n(i)}^{\natural} [\Pi_0^a q^s, \Pi_1^a q^s] = [T_{\hat{\alpha}_n(i)}^{\natural} \Pi_0^a q^s, T_{\hat{\alpha}_n(i)}^{\natural} \Pi_1^a q^s]$$

se raccordant sur les sommets [TGW06] :

$$\begin{aligned} T_{\hat{\alpha}_n(i-1)}^{\natural} \Pi_1^a q^s &= T_{\hat{\sigma}_n(i)}^{\natural} q^s, \\ &= T_{\hat{\alpha}_n(i)}^{\natural} \Pi_0^a q^s. \end{aligned}$$

Si $q^s = c^s$ centre de T^s , le schéma est interpolant. Si $q^s \neq c^s$, le schéma est approximant. La figure 5 montre un tel schéma.

4 Description du modèle

Dans le paragraphe précédent, nous avons une description d'une classe de courbes par un système de contraintes topologiques et "différentielles" [TGW06]. Dans ces contraintes, il y a deux types d'équations : des insertions d'adjacence (raccords internes) apparaissant dans les relations (6) et (8) :

$$T_{A_i}^x \Pi_1^a = T_{A_{i+1}}^x \Pi_0^a.$$

et des conservations d'incidence (raccords sur les bords) apparaissant uniquement dans la relation (8) qui définit le motif :

$$T_{A_0}^x \Pi_0^a = \Pi_0^a T^s, \quad T_{A_{N-1}}^x \Pi_1^a = \Pi_1^a T^s.$$

Les premières conduisent à la construction de matrices globales par fusion des matrices de subdivision, les secondes à la détermination de masques.

Le modèle comporte trois niveaux de description liés entre eux :

- matrices de subdivision;
- matrices de raffinement;
- masques.

À travers ces niveaux, un lien peut être établi entre l'approche IFS et les autres approches des schémas de subdivision : raffinement de maillages et multirésolution.

4.1 Fusion des raccords

La donnée d'une famille de matrices (T_S^x, T_A^x) vérifiant la relation d'incidence matricielle (6) est équivalente à celle d'une matrice globale, notée $T_{\frac{x}{s}}^x$, obtenue par fusion des N matrices $T_{A_i}^x$ $m_x \times m_a$ et identification des $N - 1$ blocs $T_{S_i}^s$ $m_x \times m_s$:

$$T_{A_i}^x \Pi_1^a = T_{A_{i+1}}^x \Pi_0^a.$$

Le nombre de colonnes de $T_{\frac{x}{s}}^x$ est :

$$\begin{aligned} m_{x(1)} &= N_x m_a - (N - 1) m_s, \\ &= (N_x - 1) \Delta + m_a, \\ &= N_x \Delta + m_s. \end{aligned}$$

En posant $J^{x(1)} = \{0, \dots, m_{x(1)} - 1\}$, l'espace associé est $E^{x(1)} = B(\mathbb{R}^{J^{x(1)}})$. La fonction d'extraction d'indices (5) $\nu : (i, j) \in \mathbb{N}^2 \rightarrow i\Delta + j \in \mathbb{N}$ met en correspondance les colonnes des $T_{A_i}^x$ et celles de $T_{\frac{x}{s}}^x$.

Lemme 4.1 ν est une surjection de $\{0, \dots, N_x - 1\} \times J^a$ sur $J^{x(1)}$.

Preuve

$$\begin{aligned} \nu(\{0, \dots, N_x - 1\} \times J^a) &= \cup_{i=0}^{N_x-1} \nu(i, J^a), \\ &= \{0, \dots, N_x - 1\} \Delta + \{0, \dots, m_a - 1\}, \\ &= \{0, \dots, (N_x - 1) \Delta + m_a - 1\}, \\ &= \{0, \dots, m_{x(1)} - 1\}. \end{aligned}$$

△

Proposition 4.1 Étant donnée une famille de matrices (T_S^x, T_A^x) vérifiant la relation d'incidence matricielle (6), on peut lui associer une matrice $T_{\frac{x}{s}}^x$ définie pour chaque $k \in J^{x(1)}$ par :

$$T_{\frac{x}{s}}^x e_k^{x(1)} = T_{A_i}^x e_j^x \text{ avec } \nu(i, j) = k$$

Preuve

Comme $(i, j) \mapsto \nu(i, j)$ est une surjection de $\{0, \dots, N - 1\} \times J^a$ sur $J^{x(1)}$, les indices $k \in J^{x(1)}$ sont en bijection avec les classes d'équivalences :

$$(i, j) \equiv (i', j') \Leftrightarrow \nu(i, j) = \nu(i', j').$$

La relation sur les indices associée aux équations est :

$$\begin{aligned} T_{A_{i-1}}^x \Pi_1^a e_j^a = T_{A_i}^x \Pi_0^a e_j^a &\Leftrightarrow T_{A_{i-1}}^x e_{\nu(1,j)}^a = T_{A_i}^x e_{\nu(0,j)}^a, \\ &\Leftrightarrow T_{A_{i-1}}^x e_{j+\Delta}^a = T_{A_i}^x e_j^a. \end{aligned}$$

Comme $\text{Ker}(\nu) = (-1, \Delta)\mathbb{Z}^2$, la fermeture transitive de cette relation est \equiv :

$$\begin{aligned} (i, j) \equiv (i', j') &\Leftrightarrow (i' - i, j' - j) \in (-1, \Delta)\mathbb{Z}^2, \\ &\Leftrightarrow \nu(i, j) = \nu(i', j') \end{aligned}$$

On a :

$$\nu(i, j) = \nu(i', j') \Rightarrow T_{A_i}^x e_j^a = T_{A_{i'}}^x e_{j'}^a.$$

△

On introduit les opérateurs de plongement des composantes dans l'espace $E^{x(1)}$ sont :

- plongement des arêtes : $\Pi_{A_i}^{x(1)} e_j^a = e_{\nu(i,j)}^{x(1)}$ pour $i = 0, \dots, N - 1$ et $j = 0, \dots, m_a - 1$;
- plongement des sommets : $\Pi_{S_i}^{x(1)} e_j^s = e_{\nu(i,j)}^{x(1)}$ pour $i = 0, \dots, N$ et $j = 0, \dots, m_s - 1$;

Proposition 4.2 *La famille d'opérateurs $(\Pi_S^{x(1)}, \Pi_A^{x(1)})$ vérifie la relation d'incidence matricielle (6).*

Preuve

$$\begin{aligned} \nu(i, \nu(v, j)) &= \Delta i + (\Delta v + j), \\ &= \Delta(i + v) + j, \\ &= \nu(i + v, j), \\ \nu(i, \cdot) \circ \nu(v, \cdot) &= \nu(i + v, \cdot). \end{aligned}$$

et :

$$\Pi_{A_i}^{x(1)} \Pi_v^a = \Pi_{S_{i+v}}^{x(1)}$$

△

Corollaire 4.1 *Étant donnée T_{\cdot}^x , la famille de matrices (T_S^x, T_A^x) extraite :*

$$T_{A_i}^x = T_{\cdot}^x \Pi_{A_i}^{x(1)}, \quad T_{S_i}^x = T_{\cdot}^x \Pi_{S_i}^{x(1)}$$

vérifie la relation d'incidence matricielle (6).

Preuve

Pour $v = 0, 1$, on a :

$$\begin{aligned} \Pi_{A_i}^{x(1)} \Pi_v^a = \Pi_{S_{i+v}}^{x(1)} &\Rightarrow T_{\cdot}^x \Pi_{A_i}^{x(1)} \Pi_v^a = T_{\cdot}^x \Pi_{S_{i+v}}^{x(1)}, \\ &\Rightarrow T_{A_i}^x \Pi_v^a = T_{S_{i+v}}^x. \end{aligned}$$

△

4.2 Polygone de contrôle et matrice de raffinement

La matrice T_{\cdot}^h est identifiable au polygone de contrôle de la courbe dont les sommets sont ses colonnes : $T_{\cdot}^h = (p_k^{(1)})_{k \in J^h(1)}$. Comme l'indique la figure 3, chaque matrice $T_{A_i}^h$ est identifiable au polygone de contrôle d'une composante, extrait de celui de la courbe.

Les figures 3-5 montrent la relation entre le polygone initial $T_{\frac{h}{2}}^h$ et le polygone de niveau 1 $T_{\frac{h}{2}}^h T_{\frac{h}{2}}^a$. La matrice $T_{\frac{h}{2}}^a$ est une matrice de raffinement qui permet de passer du niveau 0 au niveau 1. Les $T_{A_i}^a$ vérifient la relation (8), ce qui se traduit par la relation suivante entre $T_{\frac{h}{2}}^a$ et T^s .

$$\text{En posant : } \begin{cases} \Pi_0^{a(1)} &= \Pi_{A_0}^{a(1)} \Pi_0^a, \\ \Pi_1^{a(1)} &= \Pi_{A_{N-1}}^{a(1)} \Pi_1^a, \end{cases} \quad , T_{\frac{h}{2}}^a \text{ et } T^s \text{ vérifient la relation d'incidence :}$$

$$\begin{cases} T_{A_0}^a \Pi_0^a &= \Pi_0^a T^s, \\ T_{A_{N-1}}^a \Pi_1^a &= \Pi_1^a T^s; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T_{\frac{h}{2}}^a \Pi_0^{a(1)} &= \Pi_0^a T^s, \\ T_{\frac{h}{2}}^a \Pi_1^{a(1)} &= \Pi_1^a T^s. \end{cases} \quad (9)$$

Proposition 4.3 *La donnée du couple $(T^s, T_{\frac{h}{2}}^a)$ vérifiant la relation de bordure (9) et celle de la famille (T^s, T_S^a, T_A^a) vérifiant la relation d'incidence (8) sont équivalentes.*

4.3 Classification

Les arcs auto-affines peuvent être classés par généralisation itérative des notions de CAO :

- $m_s - 1 = \dim(E^s)$ l'“ordre” de raccord itératif,
- $m_a - 1 = \dim(E^a)$ le “degré” itératif,
- $N = N_a$ le nombre de subdivisions de l'arc.

Chaque arc auto-affine est caractérisé par le triplet (N, Δ, m_s) avec $\Delta \geq 1$ et $N \geq 2$. À partir de ce triplet, on a $m_a = \Delta + m_s$, $m_{a(1)} = N\Delta + m_s$.

À partir de l'équation (9) il y a trois cas de dépendance des coefficients des matrices :

1. $\Delta \geq m_s$, les coefficients des $T_{S_i}^a$ et de T^s sont indépendants.
2. $N\Delta \geq m_s > \Delta$, les coefficients de T^s sont indépendants.
3. $m_s > N\Delta$, les coefficients de T^s sont donnés par des masques.

Si $\Delta - m_s \geq 0$, les matrices $T_{A_i}^a$ se décomposent en trois blocs :

$$\begin{aligned} m_a &= m_s + \Delta, \\ &= m_s + (\Delta - m_s) + m_s \end{aligned}$$

Les occurrences des matrices $T_{S_i}^a$ pour $i = 0, \dots, N$ sont disjointes dans $T_{A_i}^a$ et $T_{\frac{h}{2}}^a$:

$$T_{A_i}^a = (T_{S_i}^a | \dots | T_{S_{i+1}}^a)$$

Les motifs de la figure 1 sont donnés par deux matrices de subdivision — $N = 2, \Delta = 2, m_s = 1$ et $m_a = 3$

$$T_{A_0}^a = \begin{pmatrix} r_0 & s_0 & t_0 \\ 0 & s_1 & t_1 \\ 0 & s_2 & t_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T_{A_1}^a = \begin{pmatrix} t_0 & u_0 & 0 \\ t_1 & u_1 & 0 \\ t_2 & u_2 & r_0 \end{pmatrix}.$$

ou par la matrice de raffinement — $m_{a(1)} = 5$:

$$T_{\frac{h}{2}}^a = \begin{pmatrix} r_0 & s_0 & t_0 & u_0 & 0 \\ 0 & s_1 & t_1 & u_1 & 0 \\ 0 & s_2 & t_2 & u_2 & r_0 \end{pmatrix}$$

Si $N\Delta - m_s \geq 0$, la matrice $T_{\frac{h}{2}}^a$ se décompose en trois blocs :

$$\begin{aligned} m_{a(1)} &= m_s + N\Delta, \\ &= m_s + (N\Delta - m_s) + m_s. \end{aligned}$$

Les occurrences des matrices T_s sont disjointes dans $T_{\frac{h}{2}}^a$:

$$T_{\frac{h}{2}}^a = (\Pi_0^a T^s | \dots | \Pi_1^a T^s)$$

Les figures 3-5-6 sont décrites par la matrice de raffinement — $N = 2, \Delta = 2, m_s = 3$ et $m_a = 5, m_{a(1)} = 7$:

$$T_{\div}^a = \left(\begin{array}{ccc|ccc} r_0 & s_0 & t_0 & u_0 & 0 & 0 & 0 \\ r_1 & s_1 & t_1 & u_1 & 0 & 0 & 0 \\ r_2 & s_2 & t_2 & u_2 & r_0 & s_0 & t_0 \\ 0 & 0 & 0 & u_3 & r_1 & s_1 & t_1 \\ 0 & 0 & 0 & u_4 & r_2 & s_2 & t_2 \end{array} \right)$$

Si $N\Delta - m_s < 0$, on pose $l_s = m_s - N\Delta$ et la matrice T_{\div}^a se décompose en trois blocs :

$$\begin{aligned} m_{a(1)} &= N\Delta + m_s, \\ &= N\Delta + (m_s - N\Delta) + N\Delta, \\ &= N\Delta + l_s + N\Delta. \end{aligned}$$

Le bloc central $m_a \times l_s$ est la zône de chevauchement des occurrence de $\Pi_0^a T^s$ et $\Pi_1^a T^s$. Les paramètres indépendants sont regroupés dans $N\Delta$ masques.

La figure 2 est décrite par la matrice de raffinement — $N = 2, \Delta = 1, m_s = 3$ et $m_a = 4, m_{a(1)} = 5$:

$$T_{\div}^a = \left(\begin{array}{cc|c|cc} r_0 & s_0 & 0 & 0 & 0 \\ r_1 & s_1 & r_0 & s_0 & 0 \\ 0 & s_2 & r_1 & s_1 & r_0 \\ 0 & 0 & 0 & s_2 & r_1 \end{array} \right)$$

5 Courbes à pôles multirésolution

Les propriétés de niveau 1 du paragraphe 4.1 se généralisent à tous les niveaux n . Les formules se transposent en remplaçant selon les cas :

- $a(1)$ par $a(n)$ et N par $N_{x(n)} = N_a^n$,
- $\natural(1)$ par $\natural(n)$ et N_{\natural} par $N_{\natural(n)} = N_{\natural} N_a^{n-1}$.

À chaque figure x et chaque niveau n sont associés :

- un espace $E^{x(n)} = \mathbb{B}(\mathbb{R}^{J^{x(n)}})$ avec $J^{x(n)} = \{0, \dots, m_{x(n)} - 1\}$ et $m_{x(n)} = N_{x(n)}\Delta + m_s$;
- une famille de composantes comprenant des arêtes $\hat{\alpha}_n(i)$ avec $0 \leq i \leq N_{x(n)} - 1$ et des sommets $\hat{\sigma}_i(i)$ avec $0 \leq i \leq N_{x(n)}$.

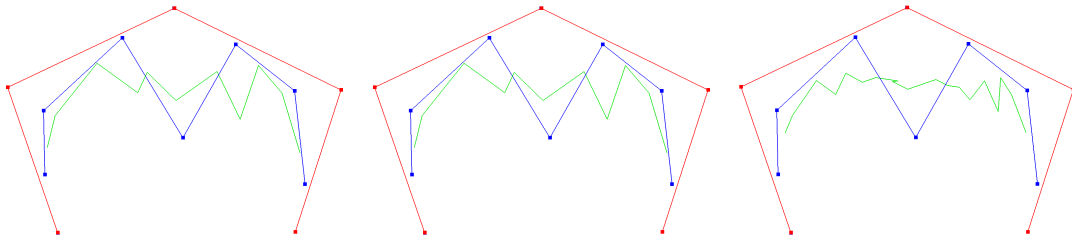


FIG. 6 – Suite de polygones de contrôle.

5.1 Polygones de contrôle

Dans [TGW06], nous avons montré que la famille $(T_{\hat{\sigma}_n}^x, T_{\hat{\alpha}_n}^x)$ vérifie la relation d'incidence matricielle (6). Une matrice globale T_{\div}^x est obtenue par fusion des matrices T_{α}^x représentant les composantes de niveau n et identification des blocs :

$$T_{\hat{\alpha}_n(i)}^x \Pi_1^a = T_{\hat{\alpha}_n(i+1)}^x \Pi_0^a.$$

On introduit les plongements de composante dans l'espace de niveau n donnés par :

- $\Pi_{\hat{\alpha}_n(i)}^{x(n)} e_j^a = e_{\nu(i,j)}^{x(n)}$ pour $i = 0, \dots, N_{x(n)} - 1$ et $j = 0, \dots, m_a - 1$;
- $\Pi_{\hat{\sigma}_n(i)}^{x(n)} e_j^s = e_{\nu(i,j)}^{x(n)}$ pour $i = 0, \dots, N_{x(n)}$ et $j = 0, \dots, m_s - 1$.

La matrice $T_{\frac{\cdot}{\cdot}n}^{\natural}$ est identifiable au polygone de contrôle de la courbe dont les sommets sont ses colonnes : $T_{\frac{\cdot}{\cdot}n}^{\natural} = (p_k^{(n)})_{k \in J^{x(n)}}$. La figure 6 montre une suite de tels polygones.

Chaque matrice $T_{\hat{\alpha}_n(i)}^{\natural}$ est identifiable au polygone de contrôle d'une composante, extrait de celui de la courbe $T_{\hat{\alpha}_n(i)}^{\natural} = T_{\frac{\cdot}{\cdot}n}^{\natural} \Pi_{\hat{\alpha}_n(i)}^{\natural(n)} = (p_{\nu(i,j)}^{(n)})_{j \in J^a}$.

5.2 Fonctions de mélange

Grace à une proposition de [TGW06], comme la famille d'opérateurs $(\Pi_{\hat{\sigma}_n}^{x(n)}, \Pi_{\hat{\alpha}_n}^{x(n)})$ vérifie la relation d'incidence matricielle (6), elle définit un opérateur fonctionnel $\Omega_{\Pi}^{x(n)}$ qui à tout arc raccordable G^a de $\mathcal{C}_{\Upsilon}^0([0, 1], E^a)$ associe une courbe composée $\Omega_{\Pi}^{x(n)} G^a$:

$$\Omega_{\Pi}^{x(n)} G^a(t) = \Pi_{\alpha}^{x(n)} G^a((T_{\alpha}^x)^{-1}t) \text{ pour } t \in T_{\alpha}^x[0, 1].$$

En posant $H^{x(n)} = \Omega_{\Pi}^{x(n)} H^a$, on voit que H^x est une forme à pôles multirésolution.

Proposition 5.1 *À tout niveau n , on a :*

$$H^x(t) = T_{\frac{\cdot}{\cdot}n}^x H^{x(n)}(t) = \sum_{k \in J^{x(n)}} H_k^{x(n)}(t) p_k^{(n)}.$$

Preuve

Pour $t \in T_{\alpha}^x[0, 1]$ on a :

$$\begin{aligned} H^x(t) &= T_{\alpha}^x H^a((T_{\alpha}^x)^{-1}t), \\ &= T_{\frac{\cdot}{\cdot}n}^x \Pi_{\alpha}^{x(n)} H^a((T_{\alpha}^x)^{-1}t), \\ &= T_{\frac{\cdot}{\cdot}n}^x H^{x(n)}(t). \end{aligned}$$

△

La famille de fonctions de mélange correspondante $H^{x(n)} = (H_k^{x(n)})_{k \in J^{x(n)}}$ est définie comme suit. Chaque intervalle $T_{\hat{\alpha}_n(i)}^x[0, 1]$, correspond à une composante $\hat{\alpha}_n(i)$ et on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k \in J^{x(n)}} H_k^{x(n)}(t) p_k &= T_{\hat{\alpha}_n(i)}^x H^a((T_{\hat{\alpha}_n(i)}^x)^{-1}t), \\ &= \sum_{j \in J^a} H_j^a((T_{\hat{\alpha}_n(i)}^x)^{-1}t) p_{\nu(i,j)}^{(n)}; \end{aligned}$$

L'expression de la fonction associée à chaque intervalle $T_{\hat{\alpha}_n(i)}^x[0, 1]$ est :

$$H_k^{x(n)}(t) = \begin{cases} H_j^a((T_{\hat{\alpha}_n(i)}^x)^{-1}t) & \text{si } \exists j \in J^a \text{ } k = \nu(i, j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

À i et k fixés, on a $k = \nu(i, j) = \Delta i + j \Rightarrow j = k - i\Delta$. La condition pour que la fonction soit non nulle est : $0 \leq j \leq m_a - 1 \Leftrightarrow 0 \leq k - i\Delta \leq m_a - 1$, d'où :

$$H_k^{x(n)}(t) = \begin{cases} H_{k-i\Delta}^a((T_{\hat{\alpha}_n(i)}^x)^{-1}t) & \text{si } 0 \leq k - i\Delta \leq m_a - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Sur chaque intervalle $T_{\hat{\alpha}_n(i)}^x[0, 1] = [t_{\hat{\sigma}_n(i)}^x, t_{\hat{\sigma}_n(i+1)}^x]$ on a :

$$H_k^{x(n)}(t) = \begin{cases} H_{k-i\Delta}^a\left(\frac{t - t_{\hat{\sigma}_n(i)}^x}{t_{\hat{\sigma}_n(i+1)}^x - t_{\hat{\sigma}_n(i)}^x}\right) & \text{si } \frac{k}{\Delta} \geq i \geq \frac{k - (m_a - 1)}{\Delta}, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

6 Surfaces

Le produit tensoriel transporte le produit de matrices, ceci permet d'étendre les propriétés des courbes aux surfaces.



FIG. 7 – Carreaux définis par produit tensoriel d'arcs : BÉZIER x BÉZIER, BÉZIER x TAKAGI, TAKAGI x TAKAGI.

6.1 Carreaux auto-affines

Le motif de surface est un carreau défini sur une grille $J^f = J^a \times J^b$ par produit tensoriel des motifs des courbes.

Si les IFS T_A^a et T_A^b vérifient la relation d'incidence matricielle (8), ils définissent deux arcs paramétrés H^a et H^b . L'IFS $T_{A_i \bullet A_j}^f = T_{A_i}^a \otimes T_{A_j}^b$ définit alors le carreau paramétré [ZT96] :

$$H^f(s, t) = H^a(s) \otimes H^b(t).$$

La figure 7 montre des carreaux obtenus par produit tensoriel des arcs de la figure 1.

La matrice de raffinement du carreau est le produit tensoriel des matrices de raffinement des arcs.

Proposition 6.1 De $T_{\dot{A}}^f = T_{\dot{A}}^a \otimes T_{\dot{A}}^b$ on extrait : $T_{A_i \bullet A_j}^f = T_{A_i}^a \otimes T_{A_j}^b$ avec T_A^a et T_A^b vérifiant la relation d'incidence matricielle (8).

Preuve

En introduisant $\Pi_{A_i \bullet A_j}^{f(1)} = \Pi_{A_i}^{a(1)} \otimes \Pi_{A_j}^{b(1)}$, plongement des composantes du carreau dans l'espace $E^{f(1)} = B(\mathbb{R}^{J^{f(1)}})$ associé à la grille $J^{f(1)} = J^{a(1)} \times J^{b(1)}$, on a :

$$\begin{aligned} T_{A_i \bullet A_j}^f &= T_{\dot{A}}^f \Pi_{A_i \bullet A_j}^{f(1)}, \\ &= (T_{\dot{A}}^a \otimes T_{\dot{A}}^b)(\Pi_{A_i}^{a(1)} \otimes \Pi_{A_j}^{b(1)}), \\ &= T_{\dot{A}}^a \Pi_{A_i}^{a(1)} \otimes T_{\dot{A}}^b \Pi_{A_j}^{b(1)}, \\ &= T_{A_i}^a \otimes T_{A_j}^b. \end{aligned}$$

△

6.2 Surfaces à pôles multirésolution

La surface composée est définie sur une grille de contrôle initiale $J^\sharp = J^a \times J^b$. À chaque niveau n , on peut lui affecter une grille de contrôle $J^{\sharp(n)} = J^{a(n)} \times J^{b(n)}$. En partant d'une famille de

points de contrôle initiale $T_{\div}^{\sharp} = (p_{jk}^{\sharp})_{(j,k) \in J^a \times J^b}$, la famille de points de contrôle de niveau n est donnée par :

$$T_{\div}^{\sharp} = T_{\div}^{\sharp} T_{\div}^{\sharp(1)}$$

avec $T_{\div}^{\sharp(1)} = T_{\div}^{\sharp(1)} \otimes T_{\div}^{\flat(1)}$ matrice de raffinement de niveau n , fusion des matrices de subdivision des composantes $T_{\alpha \bullet \beta}^{\sharp(1)} = T_{\alpha}^{\sharp(1)} \otimes T_{\beta}^{\flat(1)}$.

Les fonctions de mélange des surfaces sont les produits tensoriels des fonctions de mélange des courbes.

Proposition 6.2 *À chaque niveau n , on a : $H^{\sharp(n)}(s, t) = H^{\sharp(n)}(s) \otimes H^{\flat(n)}(t)$.*

Preuve

Pour $(s, t) \in T_{\alpha \bullet \beta}^x[0, 1]$ on a :

$$\begin{aligned} H^{\sharp(n)}(s, t) &= \Pi_{\alpha \bullet \beta}^{\sharp(n)} H^f((T_{\alpha \bullet \beta}^f)^{-1}(s, t)), \\ &= (\Pi_{\alpha}^{\sharp(n)} \otimes \Pi_{\beta}^{\flat(n)})(H^a((T_{\alpha}^a)^{-1}(s)) \otimes H^b((T_{\beta}^b)^{-1}(t))), \\ &= \Pi_{\alpha}^{\sharp(n)} H^a((T_{\alpha}^a)^{-1}(s)) \otimes \Pi_{\beta}^{\flat(n)} H^b((T_{\beta}^b)^{-1}(t)), \\ &= H_{\alpha}^{\sharp(n)}(s) \otimes H_{\beta}^{\flat(n)}(t), \\ &= H^{\sharp(n)}(s) \otimes H^{\flat(n)}(t). \end{aligned}$$

△

En posant $H^{\sharp} = T_{\div}^{\sharp} H^{\sharp(1)}(s, t)$, on obtient une surface à pôles multirésolution.

Proposition 6.3 *À chaque niveau n , on a : $H^{\sharp}(s, t) = T_{\div}^{\sharp} H^{\sharp(n)}(s, t)$.*

Preuve

$$\begin{aligned} T_{\div}^{\sharp} H^{\sharp(n)}(s, t) &= T_{\div}^{\sharp} (T_{\div}^{\sharp(1)} \otimes T_{\div}^{\flat(1)})(H^{\sharp(n)}(s) \otimes H^{\flat(n)}(t)), \\ &= T_{\div}^{\sharp} ((T_{\div}^{\sharp(1)} H^{\sharp(n)}(s)) \otimes (T_{\div}^{\flat(1)} H^{\flat(n)}(t))), \\ &= T_{\div}^{\sharp} (H^{\sharp(1)}(s) \otimes H^{\flat(1)}(t)), \\ &= T_{\div}^{\sharp} H^{\sharp(1)}(s, t). \end{aligned}$$

△

La figure 8 montre des exemples de surfaces dont la fonction de mélange est définie par produit tensoriel et le motif est un carreau de la figure 7.

6.3 Modulation multirésolution

À la famille de fonctions de mélange $H^{x(n)} = (H_k^{x(n)})_k$ est associé un espace de fonctions $\langle H_k^{x(n)}(t)/k \rangle$ (correspondant à l'espace des ondelettes). Cet espace est engendré à partir de la fonction de motif H^y (correspondant à la fonction d'échelle).

À tout niveau n , on peut moduler la forme en éditant et modifiant une grille de contrôle :

$$\hat{T}_{(n)}^x = \bar{T}_{(n)}^x + \delta T_{(n)}^x.$$

avec :

- $\bar{T}_{(n)}^x$ calculé par le schéma de subdivision à partir du niveau précédent : $\bar{T}_{(n)}^x = \hat{T}_{(n-1)}^x T_{\div}^{x(n-1)}$,
- $\delta T_{(n)}^x = (\delta p_k^{(n)})_{k \in J^{x(n)}}$ vecteurs modifiant les points de contrôle.

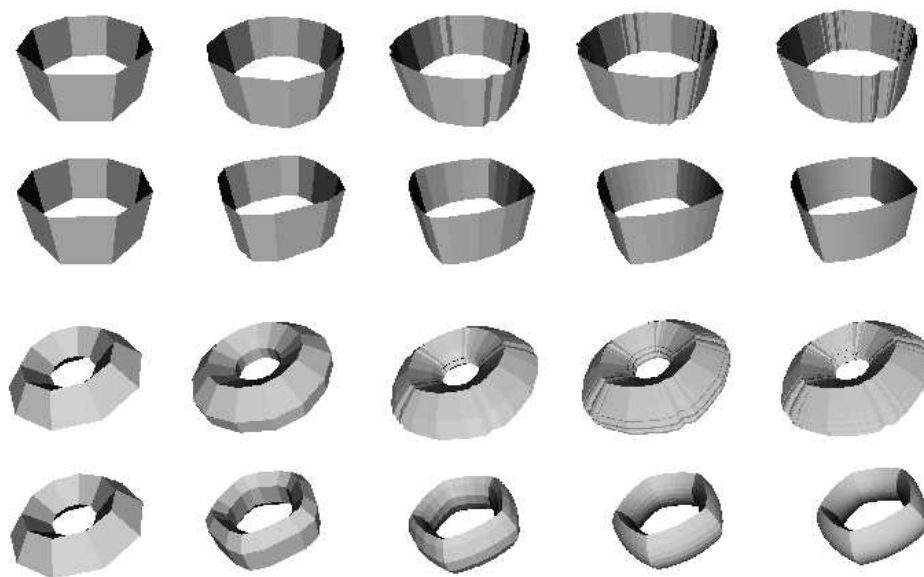


FIG. 8 – Les quatre premiers niveaux de raffinement de surfaces définies par produit tensoriel.

La suite de formes obtenues est :

$$\begin{aligned}
 \hat{H}_{(n)}^x(t) &= \hat{T}_{(n)}^x H^{x(n)}(t), \\
 &= \bar{T}_{(n)}^x H^{x(n)}(t) + \delta T_{(n)}^x H^{x(n)}, \\
 &= \bar{H}_{(n)}^x(t) + \delta H_{(n)}^x(t).
 \end{aligned}$$

La figure 9 montre la possibilité d'éditer des points de contrôle à différents niveaux n , ce qui permet une modulation des détails de plus en plus petits.

7 Conclusion

Grace à un modèle itératif, reliant deux approches (IFS et schémas de subdivision), nous avons développé un logiciel qui permet de créer et manipuler des formes à pôles multirésolution (courbes et surfaces). Ce formalisme combine les avantages des IFS — on peut choisir la texture géométrique locale (lisse, rugueuse, fractale, ...) — des formes à pôles — on peut moduler la forme générale — et de l'approche multirésolution — à chaque niveau de précision, on peut effectuer, via les points de contrôle des déformations locales et ajouter des détails.

Ce logiciel a cependant une limitation, il ne peut décrire que des surfaces dont les subdivisions ont une structure régulière (faces à 4 côtés et sommets de valence 4). En nous appuyant sur un modèle BCIFS plus général, nous pensons qu'il est possible de représenter des surfaces de subdivision dont la décomposition n'est plus régulière et possédant des singularités (points extraordinaires,...). C'est pourquoi nous nous intéressons à une formulation plus générale qui permet de créer et manipuler des formes à pôles dont la structure topologique et les grilles de points de contrôle ne sont pas limitées.

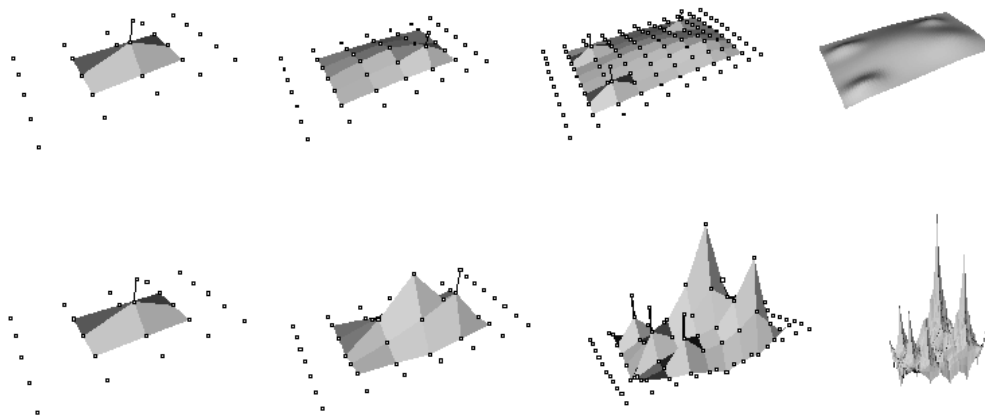


FIG. 9 – Carreaux avec des grilles de contrôle éditées et perturbées aux niveaux 1, 2 et 3.

Références

- [BAR88] M.F. BARNESLEY. ,*Fractal Everywhere*. ,Academic press, INC, 1988.
- [DL93] Ingrid DAUBECHIES and Jeffrey C. LAGARIAS. ,Two-scale difference equations II. local regularity, infinite products of matrices and fractals. ,*SIAM. J. Math. Anal.*, 23(4) :1031–1079, July 1993.
- [PM87] Hartmut PRAUTZSCH and Charles A. MICCHELLI. ,Computing curves invariant under halving. ,*Computer Aided Geometric Design*, (4) :133–140, 1987.
- [TBSG⁺06] E. TOSAN, I. BAILLY-SALINS, G. GOUATY, I. STOTZ, P. BUSER, and Y. WEINAND. ,Une modélisation géométrique itérative basée sur les automates. ,In *GTMG 2006, Journées du Groupe de Travail en Modélisation Géométrique, Cachan*, pages 155–169, 22-23 Mars 2006.
- [TGB02] Eric TOSAN, Eric GUERIN, and Attila BASKURT. ,Design and reconstruction of fractal surfaces. ,In IEEE Computer Society, editor, *6th International Conference on Information Visualisation IV 2002, London, UK*, pages 311–316, 10-12 July 2002.
- [TGW06] Eric TOSAN, Gilles GOUATY, and Yves WEINAND. ,Iterative modeling of curves with fractal pattern. ,Research Report RR-LIRIS-2006, LIRIS UMR 5205 CNRS, December 2006.
- [ZT96] Chems Eddine ZAÏR and Eric TOSAN. ,Fractal modeling using free form techniques. ,*Computer Graphics Forum*, 15(3) :269–278, August 1996. ,EUROGRAPHICS’96 Conference issue.