

# Reconstruction topologique et géométrique d’objets complexes sur grilles isothétiques irrégulières

Concours Jeune Chercheur : Oui

## Résumé

Dans cet article, nous abordons le problème de la vectorisation d’images binaires sur grilles isothétiques irrégulières. La représentation d’un objet par segments de droites a été largement développée dans le cadre de l’analyse de documents, où une image est organisée sur une grille discrète régulière. Sans considérer l’application finale, nous proposons de décrire en premier lieu la topologie d’un objet irrégulier à deux dimensions avec son graphe de Reeb associé. De plus, nous recodons cet objet avec des arcs discrets irréguliers. La seconde phase de notre algorithme consiste à réaliser une reconstruction polygonale de l’objet avec des morceaux de droites discrètes, grâce à ces arcs élémentaires. Enfin, nous présentons l’efficacité de notre méthode sur des exemples divers, puis nous discutons de ses applications futures et de son amélioration.

## Mots clefs

Grilles irrégulières, géométrie discrète, topologie discrète, reconstruction.

## 1 Introduction

La représentation, la description et la classification de caractères et de symboles sont des tâches nécessaires dans de nombreuses applications actuelles. Elles sont appliquées sur des images généralement organisées sur des grilles régulières, *i.e.* tous les pixels ont la même taille, et leur position est indexée de manière simple. Cependant, il est fréquent de diviser successivement une image en sous-images, *e.g.* avec un *quadtree* [1]. Ces techniques décrivent des régions intéressantes de l’image par un ensemble de pixels irréguliers. Dans cet article, nous introduisons le concept de représentation de formes sur une *grille isothétique irrégulière* (notée  $\mathbb{I}$ -grille) [2]. Les pixels sont définis par des tailles et des positions variables, et peuvent être déterminées par des règles de subdivision. Nous proposons de représenter la topologie des éléments contenus dans l’image irrégulière à deux dimensions (2-D) en construisant leur graphe de Reeb associé [3]. Puis, nous les décrivons par une structure polygonale simple qui respecte le modèle de supercouverture discret étendu défini dans [2]. De plus, cette structure préserve la topologie que nous détaillons dans la phase précédente. Nous nous intéressons clairement au problème de la *vectorisation* sur grilles isothétiques irrégulières, et pas uniquement dans le cadre de l’analyse

de documents. En effet, nous pouvons aussi considérer une subdivision d’une partie de  $\mathbb{R}^2$  représentant les solutions d’une fonction donnée  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Les algorithmes développés en arithmétique d’intervalles sont des approches intéressantes pour aborder ces problèmes [4, 5, 6].

Les techniques de vectorisation développée jusqu’à maintenant sur le plan discret régulier dépendent de l’application finale de la méthode et de la culture scientifique des auteurs [7, 8, 9]. Nous nous concentrons ici sur quelques méthodologies de vectorisation, largement développées pour des applications d’analyse de document. A notre connaissance, il n’existe aucune extension de ces approches sur grilles isothétiques irrégulières. Les méthodes basées sur le *run length encoding* (RLE) construisent d’abord une décomposition en cellules allongées suivant un axe de l’image. Dès lors, on construit un graphe d’adjacence de droites (*line adjacency graph* ou LAG) [10, 11]. Ces méthodes cherchent à décrire la topologie des objets rencontrés dans l’image, mais la structure géométrique qu’on en déduit doit être améliorée par de nombreux post-traitements. Les méthodes de squelettisation et d’amincissement sont assurément les plus souvent employées en vectorisation. Un état de l’art des méthodes de vectorisation basée sur le squelette peut être lu dans [12]. Le but est ici de calculer un axe médian de l’objet qui représente de manière minimale sa forme [13]. Néanmoins, ces techniques modifient la géométrie originale de l’objet pour obtenir une description minimale de celui-ci. De plus, elles nécessitent une phase de pré-traitement par filtrage ou par lissage pour réduire le bruit pouvant perturber l’axe médian calculé. De manière plus générale, un objet peut contenir des trous, et peut être composé d’*arcs épais*. Dans les travaux de Debled et al. [14, 15], la définition de *segment flou* rejoint ce concept d’arc régulier épais. Mais, au-delà de cette représentation géométrique d’arcs, la structuration globale n’est pas discutée, ainsi il n’y a pas de description de la topologie des objets reconnus.

Dans cet article, nous introduisons d’abord les concepts de  $k$ -arcs et de  $k$ -objets en rappelant quelques définitions, puis nous énonçons le modèle de supercouverture étendu sur une  $\mathbb{I}$ -grille. Nous rappelons également le principe de la reconstruction inversible de  $k$ -arcs décrite dans [16]. Dans la troisième partie, nous détaillons les deux principales phases de notre système : la reconstruction homotope d’un objet complexe basée sur le graphe de Reeb [3], et sa reconstruction polygonale. Puis, nous présentons divers résultats pour illustrer les deux phases de l’algorithme. Nous

montrons également la robustesse de la reconstruction polygonale par un test sur une image de dessin technique de grande taille. Nous discutons finalement des applications de notre contribution, et de l'amélioration globale de ses performances.

## 2 Préliminaires

Nous définissons tout d'abord une grille isothétique irrégulière, notée  $\mathbb{I}$ , comme un pavage du plan avec des rectangles isothétiques. Nous rappelons juste que chaque rectangle  $P$  (également appelé *cellule*) de  $\mathbb{I}$  est défini par son centre  $(x_P, y_P) \in \mathbb{R}^2$  et sa taille  $(l_P^x, l_P^y) \in \mathbb{R}^2$ . Dans notre étude, la relation d'adjacence est une notion importante que nous décrivons par les définitions suivantes.

**Définition 2.1** (*ve-adjacence et e-adjacence*). Soit  $P$  et  $Q$  deux cellules.  $P$  et  $Q$  sont *ve-adjacentes* (vertex and edge adjacent) si :

$$\text{ou} \begin{cases} |x_P - x_Q| = \frac{l_P^x + l_Q^x}{2} \text{ et } |y_P - y_Q| \leq \frac{l_P^y + l_Q^y}{2} \\ |y_P - y_Q| = \frac{l_P^y + l_Q^y}{2} \text{ et } |x_P - x_Q| \leq \frac{l_P^x + l_Q^x}{2} \end{cases}$$

$P$  et  $Q$  sont *e-adjacentes* (edge adjacent) si nous considérons un "ou" exclusif et des inégalités strictes dans la définition de *ve-adjacence* ci-dessus. Par la suite,  $k$  indique une  $k$ -adjacence avec  $k = e$  ou  $k = ve$ .

**Définition 2.2** ( $k$ -arc). Soit  $\mathcal{E}$  un ensemble de cellules,  $\mathcal{E}$  est un  $k$ -arc si et seulement si pour tout élément de  $\mathcal{E} = \{P_i, i \in \{1, \dots, n\}\}$ ,  $P_i$  a exactement deux cellules  $k$ -adjacentes, sauf  $P_1$  et  $P_n$  qui sont appelées extrémités du  $k$ -arc.

**Définition 2.3** ( $k$ -objet). Soit  $\mathcal{E}$  un ensemble de cellules,  $\mathcal{E}$  est un  $k$ -objet si et seulement si pour tout couple de cellules  $(P, Q)$  appartenant à  $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ , il existe un  $k$ -chemin entre  $P$  et  $Q$  dans  $\mathcal{E}$ .

Nous considérons maintenant l'extension du modèle de supercouverture issu de [17] sur grilles isothétiques irrégulières [2] pour discrétiser des objets euclidiens sur  $\mathbb{I}$ .

**Définition 2.4** (Supercouverture sur grilles isothétiques irrégulières). Soit  $F$  un objet euclidien dans  $\mathbb{R}^2$ . La supercouverture  $\mathbb{S}(F)$  est définie sur une grille isothétique irrégulière  $\mathbb{I}$  par :

$$\begin{aligned} \mathbb{S}(F) &= \{P \in \mathbb{I} \mid \mathbb{B}^\infty(P) \cap F \neq \emptyset\} \\ &= \{P \in \mathbb{I} \mid \exists (x, y) \in F, |x_P - x| \leq l_P^x/2 \\ &\quad \text{et } |y_P - y| \leq l_P^y/2\} \end{aligned}$$

où  $\mathbb{B}^\infty(P)$  est le rectangle centré sur  $(x_P, y_P)$  de taille  $(l_P^x, l_P^y)$  (si  $l_P^x = l_P^y$ ,  $\mathbb{B}^\infty(P)$  est la boule centrée en  $(l_P^x, l_P^y)$  de taille  $l_P^x$  pour la norme  $L_\infty$ ).

Nous présentons maintenant l'algorithme de reconstruction d'un  $k$ -arc que nous utilisons dans notre phase de représentation géométrique d'objet complexe (section 3.2). De

plus, cette approche respecte le modèle de supercouverture nous venons d'énoncer. L'algorithme proposé dans [16] pour décomposer une courbe en segments est d'abord basé sur la définition suivante d'une droite discrète irrégulière.

**Définition 2.5** (Droite discrète isothétique irrégulière). Soit  $S$  un ensemble de cellules dans  $\mathbb{I}$ ,  $S$  est appelé est un morceau de droite discrète irrégulière (ou DDI) ssi il existe une droite euclidienne  $l$  telle que :

$$S \subseteq \mathbb{S}(l)$$

En d'autres termes,  $S$  est un morceau de DDI ssi il existe  $l$  telle que pour tout  $P \in S$ ,  $\mathbb{B}^\infty(P) \cap l \neq \emptyset$ .

L'algorithme inspiré de [18] utilise principalement les procédures de construction et de mise à jour d'un cône de visibilité. On remarquera que l'on fixe d'abord l'extrémité  $p_0$  du premier segment tel que  $p_0 \in P_0$ . La figure 1 illustre la construction progressive des cônes dans un  $k$ -arc, et la segmentation en portions de droites en résultant.

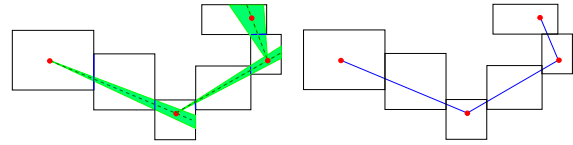


Figure 1 – Un exemple de construction progressive de cônes dans un  $k$ -arc (gauche), et la reconstruction en segments que l'on obtient (droite).

## 3 Représentation d'objets complexes sur grilles isothétiques irrégulières

### 3.1 Reconstruction topologique d'objets complexes

Pour représenter la forme d'un  $k$ -objet  $\mathcal{E}$ , nous avons choisi une approche incrémentale directionnelle. Elle permet de construire son graphe de Reeb associé  $G$ , comme dans le domaine continu (voir la figure 2). Ce graphe, basé sur la théorie de Morse [19, 20], est aussi utilisé dans diverses applications de description de courbes et de surfaces [21, 22, 23]. Le graphe de Reeb  $G$  est associé à une fonction de hauteur  $f$  définie sur  $\mathcal{E}$ , et les noeuds de  $G$  représentent les points critiques de  $f$ . De plus, nous voulons représenter un arc entre deux noeuds par un  $k$ -arc, pour avoir une information topologique minimale dans la représentation de  $\mathcal{E}$ . Ces arcs seront segmentés dans l'étape de description polygonale de  $\mathcal{E}$  (section 3.2).

Nous notons les bords gauche, droit, haut et bas d'une cellule  $P$  respectivement  $P^L$ ,  $P^R$ ,  $P^T$  et  $P^B$ . On a, par exemple, l'abscisse de  $P^L$  égale à  $x_P - (l_P^x/2)$  (que l'on note par commodité  $P^L = x_P - (l_P^x/2)$ ). Nous dirons également qu'un  $k$ -arc  $A$  et une cellule  $P$  sont  $k$ -adjacents s'il existe une cellule  $Q$  dans  $A$  telle que  $P$  et  $Q$  sont

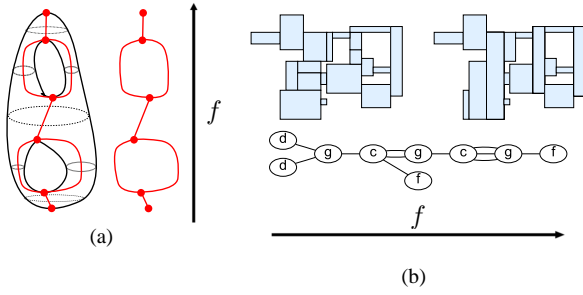


Figure 2 – (a) : un exemple de graphe de Reeb  $G$  d'un objet continu  $\mathcal{E}$ . Les noeuds de  $G$  représentent les points critiques de  $f$  (maxima, minima, points d'inflexion), et un arc est une composante connexe de  $\mathcal{E}$  entre deux points critiques. (b) : un exemple d'un objet irrégulier  $\mathcal{E}$  (gauche), la structure finalement recodée avec des  $k$ -arcs (droite) et le graphe de Reeb associé à la fonction de hauteur  $f$  définie sur  $\mathcal{E}$  (bas). Les noeuds  $d$ ,  $f$ ,  $g$  et  $c$  représentent les cellules début, fin, groupe et coupe respectivement dans le graphe.

$k$ -adjacentes. Soit  $\mathcal{E} = \{P_i\}_{i=0, \dots, n}$  un ensemble 2-D de cellules donné. On choisit en premier lieu une direction pour traiter les cellules de  $\mathcal{E}$ . Sans perte de généralité, on peut supposer que l'on prend l'orientation de gauche à droite, *i.e.* la fonction de hauteur  $f$  est définie suivant l'axe des  $X$ . Au temps  $t = 0$ , on fusionne ensemble toutes les cellules  $k$ -adjacentes  $P$  de  $\mathcal{E}$  avec le plus petit bord gauche  $x_{t=0} = x_0$ , *e.g.*  $P^L = x_0 = 0$ . Cette étape de fusion est réalisée par la procédure de mise à jour décrite ci-après. Ces  $m$  collections de cellules définissent les *cellules début* des  $k$ -arcs initialement reconnus  $A_0, A_1, \dots, A_m$ .

**Procédure de mise à jour.** Soit  $A$  un  $k$ -arc, et  $P_1, P_2$  deux cellules adjacentes de  $\mathcal{E}$  telles que  $P_1 \in A$ ,  $P_1^L < P_2^L$ , et  $P_2$  doit être ajoutée à  $A$ . Si  $P_2^L = P_1^R$ , on ajoute juste  $P_2$  à  $A$ , sinon la procédure *met à jour* l'arc  $A$  avec  $P_2$ , et recode éventuellement  $A$ . Pour cela, on construit d'abord le *plus grand rectangle commun*  $F_2$  de  $P_1$  et  $P_2$ .

**Définition 3.1** (Plus grand rectangle commun). Soit  $P_1$  et  $P_2$  deux rectangles adjacents.  $F_2$  est le plus grand rectangle commun (ou PGRC) de  $P_1$  et  $P_2$  ssi

- i)  $F_2 \subseteq P_1 \cup P_2$ ,
- ii)  $F_2 \cap P_1 \neq \emptyset$ ,
- iii)  $F_2 \cap P_2 \neq \emptyset$ ,
- iv) il n'existe pas de rectangle plus grand que  $F_2$  par inclusion respectant i), ii) and iii).

Ensuite, nous considérons les rectangles  $P_1 - F_2$  et  $P_2 - F_2$ . Si  $P_1^R < P_2^R$ , on note  $P_1 - F_2 = F_1$  et  $P_2 - F_2 = F_3$ , sinon on préférera  $P_1 - F_2 = \{F_1, F_3\}$ . On peut remarquer que ces rectangles peuvent être vides, *e.g.*  $F_3 = \emptyset$  si  $P_1^R = P_2^R$ , puisque dans ce cas  $F_3^L = F_3^R$ . La figure 3 présente les cinq configurations générales de la procédure de mise à jour (il en existe cinq autres, obtenues par symétrie quand  $P_2^T > P_1^T$ ), et le recodage de l'arc que l'on doit

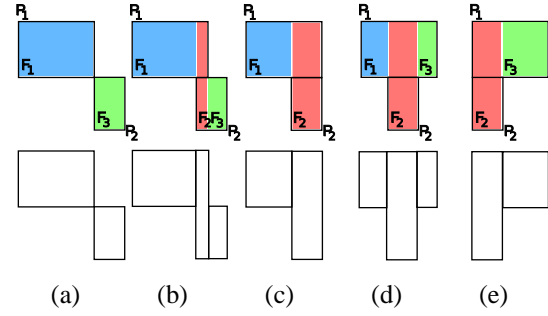


Figure 3 – Les rectangles  $F_1, F_2$  et  $F_3$  dans la procédure de mise à jour (haut), et les cellules associées (bas). Lorsque  $P_1^R < P_2^R$  (a et b),  $P_1 - F_2 = F_1$  et  $P_2 - F_2 = F_3$ , sinon  $P_1 - F_2 = \{F_1, F_3\}$  (d et e). Si  $P_1^R = P_2^R$ ,  $F_2 = \emptyset$ , quand  $P_1^R = P_2^R$ ,  $F_3 = \emptyset$  et finalement  $F_1 = \emptyset$  dans le cas où  $P_1^L = P_2^L$ .

réaliser. De plus, nous proposons de réduire le nombre de cellules dans  $A$  en joignant les deux rectangles  $F_1$  et  $F_3$  si  $F_1^T = F_3^T$ ,  $F_1^B = F_3^B$  et  $F_2 = \emptyset$ . Cette jonction est traitée en remplaçant  $F_1$  et  $F_3$  par le rectangle  $F_1 \cup F_3$ . Enfin, la procédure se termine en supprimant  $P_1$  de  $A$ , et en ajoutant les cellules correspondant aux rectangles  $F_1$  et  $F_2$  à  $A$ .  $F_3$  est empilé dans  $\mathcal{E}$ , et sera traité ultérieurement ; plus exactement au temps  $t$  tel que  $x_t = F_3^L$ .

Au temps  $t + 1$ , notre algorithme consiste à fusionner les cellules adjacentes avec le même bord gauche  $x_{t+1}$  en  $k$  cellules  $C_1, C_2, \dots, C_k$  (voir la procédure de mise à jour). Ces cellules candidates peuvent être ajoutées à un ou plusieurs arcs parmi  $A_i$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$  si elles sont adjacentes à  $A_i$ . Il est clair que seule une cellule  $Q$  construite au temps  $t$  et ayant un bord droit  $Q^R$  égal à  $x_{t+1}$  peut respecter l'adjacence avec une cellule  $C_j$ ,  $j \in \{1, \dots, k\}$ . Une cellule  $C_j$  peut être traitée de plusieurs manières :

- $C_j$  n'est adjacente à aucun  $k$ -arc  $A_i$ . On initialise un nouveau  $k$ -arc  $A_{m+1}$  et on l'affecte avec la cellule  $C_j$ .  $C_j$  représente la *cellule début* de  $A_{m+1}$ .
- Si  $C_j$  est adjacente avec un  $k$ -arc  $A_i$ , alors on met à jour  $A_i$  avec  $C_j$ .
- Quand  $C_j$  est  $k$ -adjacent avec  $p$   $k$ -arcs  $A_i, A_{i+1}, \dots, A_{i+p}$ , c'est une *phase de regroupement*. Premièrement, on met à jour chaque arc avec  $C_j$ . La cellule  $C_j$  est ensuite marquée comme *cellule groupe* et indique que chaque arc  $A_i, \dots, A_{i+p}$  possède un arc  $A_{m+1} = \{C_j\}$  lié comme *arc suivant*.
- Le cas où  $p$  cellules  $C_j, C_{j+1}, \dots, C_{j+p}$  sont  $k$ -adjacentes avec un arc  $A_i$  est une *phase de découpe*. On met d'abord à jour  $A_i$  avec  $C_j$  par la procédure de mise à jour. Ensuite, on note  $Q$  la cellule dans  $A_i$  telle que  $Q^R = x_{t+1}$ . Nous définissons aussi  $p$  nouveaux arcs suivants  $A_{m+1}, \dots, A_{m+p}$  de  $A_i$  tels que  $A_{m+1} = \{Q, C_j\}, \dots, A_{m+p} = \{Q, C_{j+p}\}$ . Dans ces  $p$  arcs et dans  $A_i$ ,  $Q$  est marqué comme une *cellule coupe*.

Quand l'algorithme se termine, au temps  $t$  tel que  $x_t$  est le plus grand bord gauche dans  $\mathcal{E}$ , on définit la dernière

cellule ajoutée dans tous les arcs  $A_i$  comme une *cellule fin*. Nous illustrons dans la figure 4 la construction progressive du graphe et le recodage du  $k$ -objet présenté dans la figure 2 (b) dans cinq étapes de l’algorithme.

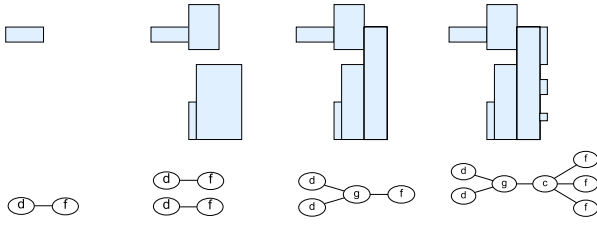


Figure 4 – Les arcs reconnus et le graphe de Reeb associé pour quelques itérations de notre méthode sur l’objet présenté figure 2 (b). D’abord, on initialise un arc avec la cellule de plus petit bord gauche. Puis, on met à jour et on recode progressivement les arcs. La troisième et la quatrième image présentent les phases de regroupement et de découpe. On peut noter que l’étape de recodage n’est pas détaillée dans cette figure, et que les arcs  $g - c$  représentent un  $k$ -arc avec une seule cellule dans cet exemple.

Notre algorithme construit finalement une représentation homotope complète de  $\mathcal{E}$  avec le graphe de Reeb  $G$  en reconnaissant et en liant les cellules  $d$ ,  $g$ ,  $c$  et  $f$  (voir également les figures 2 et 4). Il existe neuf configurations possibles d’arcs dans  $G$  :  $d - c$ ,  $d - g$ ,  $d - f$ ,  $c - c$ ,  $c - g$ ,  $c - f$ ,  $g - c$ ,  $g - g$  et  $g - f$ . Le nombre de points critiques dans  $f$  peut être lié au nombre d’Euler  $\chi$  de  $\mathcal{E}$  [3]. Considérons l’équation suivante, où  $G$  est noté comme le couple d’ensembles de sommets et d’arêtes  $(V, E)$  :

$$\chi = \sum_{n \in V, (n=d) \vee (n=f)} (deg(n)) - \sum_{n \in V, (n=c) \vee (n=g)} (deg(n) - 2)$$

où  $deg(n)$  est le *degré* du nœud  $n$  dans  $G$ , donc  $deg(n) = 1$  si  $n$  est un nœud *début* ou *fin*. Le nombre d’Euler permet de décrire la topologie d’un objet par une valeur unique. Par exemple, pour un tore,  $\chi = 0$ , pour un disque,  $\chi = 2$ , et l’objet décrit dans la figure 2 (b) possède un nombre d’Euler  $\chi = -4$ ; on peut également dire que cette forme est homéomorphe à un tore avec trois trous, où  $\chi = 2 - 2 \times \#(\text{trous}) = -4$ . Au-delà de ces invariants topologiques obtenus par les points critiques, la structure du graphe dépend clairement de la direction choisie pour la fonction de hauteur  $f$ . Une partie des nœuds et des arcs peut changer, mais l’information sur la topologie de  $\mathcal{E}$ , *i.e.* les nœuds internes de  $G$ , n’est pas modifiée. Le nombre d’Euler est un exemple de l’emploi du graphe de Reeb pour la description de forme. Soit maintenant  $\mathcal{E}'$  l’objet dessiné dans la quatrième image de la figure 4. Les trois cellules ajoutées durant la dernière itération peuvent représenter du bruit modifiant le contour de  $\mathcal{E}'$ . Le graphe de Reeb est changé par une phase de découpe, trois nœuds

sont créés, alors que ces cellules sont peut-être nuisibles. En fait, le problème de la perturbation du contour de  $\mathcal{E}'$  pourrait être certainement réduit si l’objet est d’abord filtré ou lissé. Ce genre de pré-traitement est souvent adopté, quelque soit l’approche choisie pour la représentation de forme, *e.g.* la squelettisation. Enfin, avec la procédure de mise à jour, nous recodons les cellules de  $\mathcal{E}$  afin qu’un  $k$ -arc soit toujours représenté entre deux nœuds de  $G$ . Ce réarrangement géométrique dépend assurément de la direction de  $f$ , mais ne change ni la topologie ni le contour du  $k$ -arc reconnu. La structure topologique est simple, et prépare la phase suivante de notre système global de reconstruction d’objets complexes.

### 3.2 Reconstruction polygonale d’objets épais

Comme la reconstruction en polygones affecte toujours le premier point  $p_0$  comme le centre de la première cellule traitée (section 2), nous proposons de commencer la reconstruction de tous les  $k$ -arcs calculés dans la phase précédente par les nœuds *groupe* et *coupe* détectés dans le graphe de Reeb  $G$ . Nous assurons ainsi que chacun de ces nœuds particuliers de  $G$  sera représenté par un seul point dans la polygonalisation finale. Les segments sont reconnus de l’intersection entre plusieurs parties de l’objet  $\mathcal{E}$  vers ses extrémités, *i.e.* nous considérons les arcs  $g - f$ ,  $c - f$ ,  $g - d$  et  $c - d$  de  $G$ . De plus, puisque l’algorithme de reconnaissance est glouton, les éventuelles erreurs induites par notre approche de cône de visibilité sont propagées vers les extrémités de  $\mathcal{E}$ , et non pas vers ces intersections qui décrivent la forme de l’objet. Pour les arcs  $c - c$ ,  $g - g$ ,  $g - c$  et  $c - g$  de  $G$ , nous proposons de réaliser une reconstruction bidirectionnelle qui démarre de chaque nœud de l’arc, et se termine en son centre. Par conséquent, l’éventuelle erreur de reconstruction serait concentrée au milieu de ces arcs. Cette approche confirme que les nœuds  $g$  et  $c$  de  $G$  représentent les lieux où la description de sa géométrie doit être précise. Enfin, nous choisissons de traiter les arcs  $d - f$  avec la même reconstruction bidirectionnelle, qui apparaît comme le moyen le plus efficace de garantir une reconstruction robuste.

Nous ne traitons pas le problème de liaison entre deux reconstructions sur le  $k$ -arc (reconstruction avec *patch*), car une technique générale et efficace de jointure entre deux droites discrètes impliquerait que notre algorithme ne serait plus linéaire [24]. Par conséquent, nous ajoutons juste un segment entre les deux polygones. Cette phase de notre système ne peut être considérée sans *patch*, puisque nous utilisons les points internes de la forme de  $\mathcal{E}$  pour guider la reconstruction géométrique.

Dans la figure 5, nous illustrons le comportement de notre algorithme dans le cas de l’objet  $\mathcal{E}$  présenté dans la section précédente. Nous montrons également l’intérêt de notre approche pour un objet complexe symétrique.

Contrairement aux méthodes conventionnelles de vectorisation, nous proposons une technique qui respecte le mo-

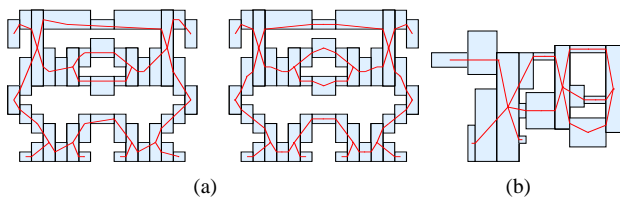


Figure 5 – Si nous considérons l’orientation originale des  $k$ -arcs, la forme du  $k$ -objet présenté dans la section suivante (a-gauche) n’est pas correctement définie puisque la symétrie n’est plus préservée. Donc, nous proposons de démarrer la reconstruction par les noeuds  $g$  et  $c$  (a-droite). Cette structure respecte le modèle de supercouverture, et la forme symétrique de cet objet. Nous montrons également le résultat de notre algorithme sur le  $k$ -objet présenté dans la section précédente (b).

dèle de supercouverture sur une  $\mathbb{I}$ -grille. Nous ne traitons pas de la qualité de la structure globale déduite de cette seconde étape de notre système. Pour introduire cette notion de qualité dans le cadre de l’analyse de document, on pourra se référer à [25].

## 4 Expériences et résultats

Dans la figure 6, nous présentons la structure polygonale obtenue sur une image réarrangée par une approche basée sur le quadtree. La reconstruction des  $k$ -arcs reste à l’intérieur de l’objet, et les noeuds *groupe* et *coupe* sont représentés par un seul point dans la reconstruction. La représentation polygonale permet aussi de mesurer des caractéristiques géométriques (e.g. la longueur) d’une fonction complexe  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  (figure 7).  $f$  est d’abord discrétisée par un algorithme de calcul par intervalles [6] sous la forme d’un ensemble de cellules  $\mathcal{E}$ , puis nous utilisons notre système pour décrire de manière minimale les courbes de  $\mathcal{E}$ . Enfin, pour montrer la robustesse de notre système, nous présentons dans la figure 8 les reconstructions polygonale et topologique d’une grande image de dessin technique.

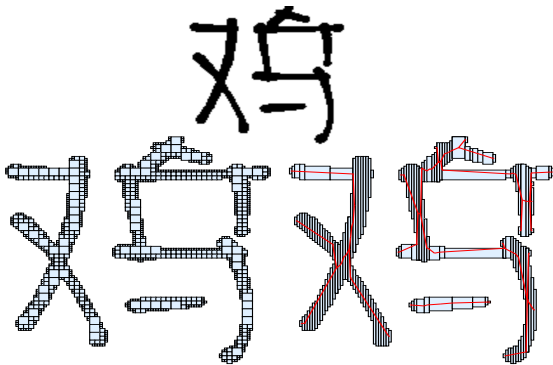


Figure 6 – Une image d’un caractère chinois (haut), compressée par une approche basée sur un quadtree (gauche). Nous montrons le recodage final en  $k$ -arcs et la polygonalisation (droite).

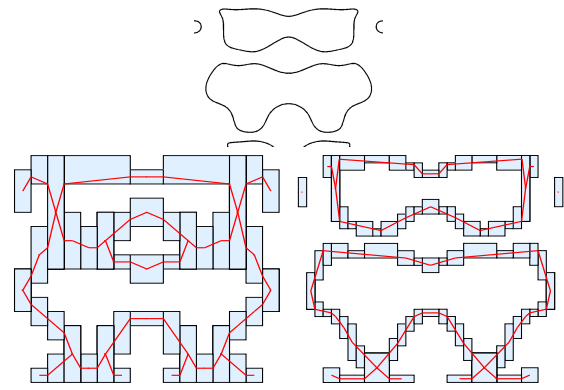


Figure 7 – La fonction  $x^2 + y^2 + \cos(2\pi x) + \sin(2\pi y) + \sin(2\pi x^2) \cos(2\pi y^2) = 1$  sur  $[-1; 1] \times [-1; 1]$  (haut) discrétisée par un algorithme décrit dans [6] avec deux résolutions différentes, puis recodée et polygonalisée (bas).

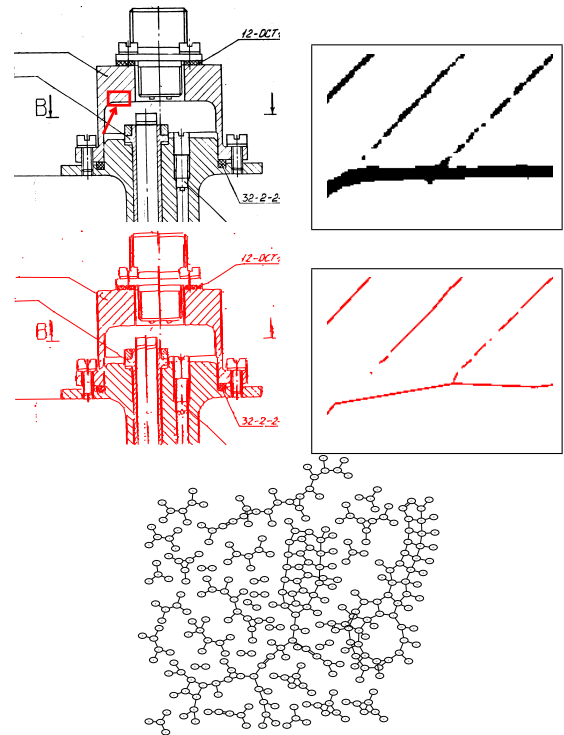


Figure 8 – Une image de dessin technique de taille 1765 x 1437 pixels soumise à notre système, et une partie zoomée, indiquée par la flèche (haut). La polygonalisation que nous obtenons et le zoom associé sont présentés (centre). Le graphe de Reeb complet (environ 300 noeuds) est également illustré dans un format circulaire (bas).

## 5 Bilan et perspectives

Dans cet article, nous proposons d’élargir le point de vue des méthodologies de vectorisation à la représentation isothétique irrégulière des données binaires. Selon l’application finale de notre système, nous pouvons traiter l’image initiale avec des opérations de pré-traitement, réorganiser

le graphe de Reeb (contraction d'arcs, etc.), ou réarranger les segments finalement calculés dans la seconde phase. La reconstruction géométrique reste à l'intérieur de l'objet, *i.e.* elle respecte le modèle de supercouverture discrète irrégulière. De plus, cette reconstruction homotope préserve la topologie décrite par le graphe de Reeb. Donc, notre système est robuste, et topologiquement et géométriquement correct. Le graphe de Reeb peut être étendu à la description d'objets en trois dimensions (3-D), avec une approche incrémentale similaire. Cependant, la reconstruction basée sur le cône de visibilité est difficilement adaptable à de tels objets irréguliers. Notre système devrait être modifié pour fournir une polygonalisation 3-D basée sur le graphe de Reeb.

## Références

- [1] H. Samet. The quadtree and related hierarchical data structures. *ACM Computer Survey*, 16(2) :187–260, 1984.
- [2] D. Coeurjolly. Supercover model and digital straight line recognition on irregular isothetic grids. Dans *12th International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery*, pages 311–322. LNCS 3429, 2005.
- [3] G. Reeb. Sur les points singuliers d'une forme de pfaff complément intégrable ou d'une fonction numérique. *Comptes Rendus de L'Académie ses Séances*, pages 847–849, 1946.
- [4] L.H. de Figueiredo, R. Van Iwaarden, et J. Stolfi. Fast interval branch-and-bound methods for unconstrained global optimization with affine arithmetic. Rapport technique IC-9708, Institute of Computing, Univ. of Campinas, juin 1997.
- [5] B. Kearfott. Interval computations : introduction, uses, and resources. *Euromath Bulletin*, 2(1) :95–112, 1996.
- [6] J.M. Snyder. Interval analysis for computer graphics. *Computer Graphics*, 26(2) :121–130, juillet 1992.
- [7] L.P. Cordella et M. Vento. Symbol recognition in documents : a collection of techniques ? *International Journal on Document Analysis and Recognition*, 3(2) :73–88, 2000.
- [8] X. Hilaire et K. Tombre. Robust and accurate vectorization of line drawings. Dans *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2005.
- [9] L. Wenyin et D. Dori. From raster to vectors : extracting visual information from line drawings. *Pattern Analysis and Application*, 2(1) :10–21, 1999.
- [10] M. Burge et W.G. Kropatsch. A minimal line property preserving representation of lines images. *Computing*, 62 :355–368, 1999.
- [11] A. Elgammal et M.A. Ismail. Graph-based segmentation and feature-extraction framework for arabic text recognition. Dans *6th International Conference on Document Analysis and Recognition (ICDAR 01)*, Seattle, Washington, Septembre 2001.
- [12] L. Lam, S.W. Lee, et Suen C.Y.. Thinning methodologies - a comprehensive survey. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14(9) :869–885, 1992.
- [13] R. Klette et A. Rosenfeld. *Digital geometry*. Elsevier, San Fransisco, 2004.
- [14] I. Debled, S. Tabbone, et L. Wendling. Fast polygonal approximation of digital curves. Dans *International Conference on Pattern Recognition*, volume 1, pages 465–468, Cambridge, United Kingdom, aout 2004.
- [15] I. Debled, F Feschet, et J. Rouyer-Degli. Optimal blurred segments decomposition in linear time. Dans *12th International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery*, pages 311–322. LCNS 3429, 2005.
- [16] D. Coeurjolly et L. Zerarga. Supercover model, digital straight line recognition and curve reconstruction on the irregular isothetic grids. *Computer and Graphics*, 30(1) :46–53, 2006.
- [17] D. Cohen-Or et A. Kaufman. Fundamentals of surface voxelization. *Graphical models and image processing : GIMP*, 57(6) :453–461, novembre 1995.
- [18] I. Sivignon, R. Breton, F. Dupont, et E. Andres. Discrete analytical curve reconstruction without patches. *Image and Vision Computing*, 23(2) :191–202, 2005.
- [19] A. Gramain. *Topologie des surfaces*. Presses Universitaires Françaises, 1971.
- [20] J.C. Hart. Computational topology for shape modeling. Dans *Shape Modeling International SMI'99*, pages 36–43, Aizu, Japan, mars 1999. IEEE Computer Society.
- [21] F. Hétry. *Méthodes de partitionnement de surfaces*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, Grenoble, France, septembre 2003.
- [22] T. Tung. *Indexation 3D de bases de données d'objets 3D par graphes de Reeb améliorés*. Thèse de doctorat, Telecom Paris, ENST/TIC, Paris, France, juin 2005.
- [23] Y. Xiao, P. Siebert, et N. Werghi. A discrete reeb graph approach for the segmentation of human body scans. Dans *4th International Conference on 3D Digital Imaging and Modeling*, pages 378–385, Banff, Canada, octobre 2003.
- [24] R. Breton. *Reconstruction inversible d'objets discrets 2D*. Thèse de doctorat, Université de Poitiers, Poitiers, France, décembre 2003.
- [25] L. Wenyin et D. Dori. A protocol for performance evaluation of line detection algorithms. *Machine Vision and Applications*, 9(5/6) :240–250, 1997.