Expression analytique d'un maillage 3D

julien Ricard, David Coeurjolly, Atilla Baskurt

Laboratoire LIRIS - INSA - UCBL Lyon 1
Bâtiment Nautibus - 8, boulevard Niels Bohr
69622 Villeurbanne cedex, France
jricard@liris.cnrs.fr

1 Introduction

Une grande partie des méthodes d'indexation de modèles 3D calcule les descripteurs de formes en intégrant une fonction sur le volume de l'objet. Pour cela, l'objet est dans un premier temps discrétisé sur une grille de voxels et l'intégration est faite dans le domaine discret. C'est le cas par exemple de l'analyse en composantes principales, des moments géométriques, des moments de Zernike [1,2], ou de la transformée de Fourier[3].

Cette document présente une méthode permettant d'intégrer un objet 3D sans passer par une représentation discrète mais directement à partir de son maillage. Ces méthodes, qui se basent sur l'intégration du contour de l'objet, peuvent, comme nous le montrerons dans la dernière partie, servir au calcul des paramètres d'alignement, à l'extraction de descripteurs de forme ou à la création de vues par une méthode de Fourier Volume Rendering.

2 Cadre de l'analyse

2.1 Principe général

Le volume, le centre de gravité, les moments d'inertie et d'autres propriétés d'un solide sont définis par une intégrale triple dans un espace à trois dimensions définissant le volume de l'objet. L'intégrale d'une fonction f sur le domaine Q définit par le volume s'écrit :

$$I = \int_Q f dv \tag{1}$$

Cette fonction est difficilement intégrable, car même si la fonction à intégrer f est simple, le domaine d'intégration Q représentant le volume de l'objet est complexe. Pour intégrer sur une volume quelconque, si f est intégrable, le théorème de la divergence produit une méthode alternative pour évaluer les propriétés de l'intégrale d'un solide en intégrant sur les frontières du solide :

$$\int_Q f dv = \int_Q div(g) dv = \int_{\delta Q} g.nds \tag{2}$$

où g est une fonction vecteur, telle que la divergence de g est égale à la fonction f, δQ est la frontière de Q, n est le vecteur normal de la frontière et ds est la dérivée de la surface.

L'intégrale sur un volume 3D peut être vue comme la somme de l'intégrale de toutes les composantes frontières, comme le montre [4] et [5]. Dans le cas d'objets 3D maillés, le maillage représente la frontière du solide et il est dans ce cas facile de le parcourir. Ceci est exact sous l'hypothèse que les frontières de l'objet soient correctement définies et que le maillage soit une variété topologique (sans trous, orientable...). Cette méthode fournit l'expression analytique exacte de l'intégrale sur le volume de l'objet, pour une complexité linéaire au nombre de sommets du polyèdre.

Les éléments de surface de l'objet 3D peuvent être séparées en fonction du signe de leurs normales par rapport à un point fixe, généralement par rapport à l'origine du repère $(0,0,0)$, et l'on peut écrire :

$$\int_Q f(x,y,z)dv = \int_{\delta Q} g(x,y,z).nds = \int_{\delta Q_1} g(x,y,z).nds + \int_{\delta Q_2} g(x,y,z).nds \tag{3}$$

où δQ_1 est le sous ensemble de δQ tel que $\boldsymbol{n}$ est dans le sens du vecteur $\boldsymbol{(x,y,z)}$, formé entre l'origine et le centre de l'élément de surface, tel que $\boldsymbol{(x,y,z)}.\boldsymbol{n} > 0$ et δQ_2 est le sous ensemble de δQ tel que $\boldsymbol{(x,y,z)}.\boldsymbol{n} \geq 0$ (voir figure 1).

On peut retransformer les deux termes pour retourner en volumique :

$$\begin{aligned}\int_{\delta Q_1} g(x,y,z).nds + \int_{\delta Q_2} g(x,y,z).nds &= \int_{Q_1} f(x,y,z)dv + \int_{Q_2} f(x,y,z)dv \\ &= \sum_{\Delta v_i} S(\Delta v_i) \int_{\Delta v_i} f(x,y,z)dv \end{aligned} \tag{4}$$

où Δv_i le cône formé entre l'élément de surface Δs_i et l'origine du repère, comme le montre la figure 1. $S(\Delta v_i)$ est une fonction de signe calculé en fonction du sens des normales $\boldsymbol{n_i}$:

$$\begin{aligned} S(\Delta v_i) &= +1 \text{ si } \boldsymbol{(x,y,z)}.\boldsymbol{n_i} > 0, \\ &= -1 \text{ sinon.} \end{aligned} \tag{5}$$

La fonction de signe $S(\Delta v_i)$ détermine si l'intégrale Δv_i a une contribution positive ou négative à l'intégrale de Q. Si $\boldsymbol{n_i}$ est dans le même sens que $\boldsymbol{(x,y,z)}$, l'intégrale ΔV_1 a une contribution positive à Q, autrement elle a une contribution négative.

Ceci peut être illustré par un exemple, comme le montre la figure 2. Le tétraèdre $Q = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ à quatre faces, $F_1 = (v_1, v_4, v_2)$, $F_2 = (v_1, v_3, v_4)$, $F_3 = (v_4, v_3, v_2)$ et $F_4 = (v_1, v_3, v_2)$. L'ordre des sommets de chaque face est défini par la règle de la main droite, afin que le sens des normales de tous les triangles soit cohérent. La face F_i de Q forme avec l'origine O un tétraèdre $Q_i = (O, v_{i_1}, v_{i_2}, v_{i_3})$ où $(v_{i_1}, v_{i_2}, v_{i_3})$ sont les sommets de F_1. Quatre nouveaux tétraèdres, $Q_1 = (O, v_1, v_4, v_2)$, $Q_2 = (O, v_1, v_3, v_4)$, $Q_3 = (O, v_4, v_3, v_2)$ et $Q_4 =$

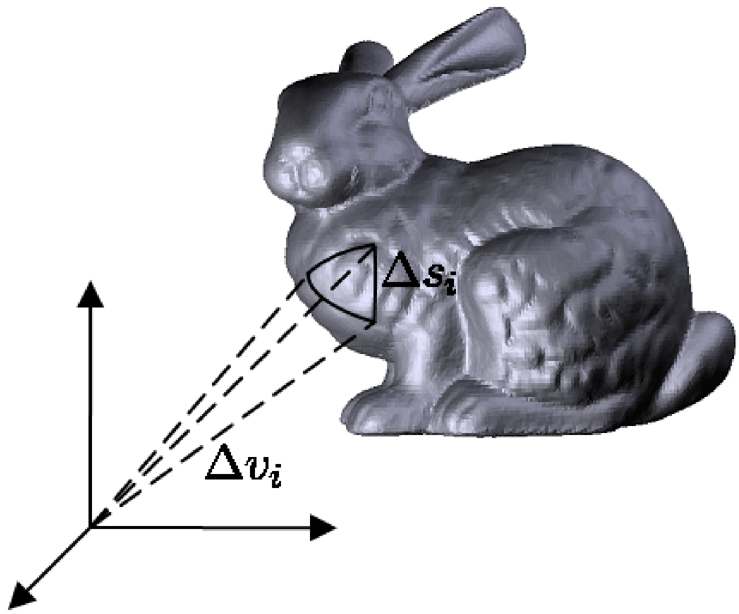

Fig. 1. Principe de l'intégration, un cône Δv est formé par un élément de surface Δs est l'origine du repère.

(O, v_1, v_3, v_2), sont ainsi formés. On peut noter que le tétraèdre Q_4 est positif selon S et que les tétraèdres Q_1, Q_2 et Q_3 sont négatif. Le tétraèdre Q est la somme signée des quatre tétraèdres Q_1, Q_2, Q_3 et Q_4 :

$$Q = Q_4 - Q_1 - Q_2 - Q_3. \tag{6}$$

2.2 Intégration sur un maillage 3D

Comme nous venons de le voir, le volume d'un objet 3D est égal à la somme signée des volumes des tétraèdres le composant et il en est de même pour les autres fonctions intégrales que l'on peut calculer sur un objet 3D. Pour calculer la valeur de l'intégrale d'une fonction $f(x, y, z)$ sur le volume d'un objet maillé, on peut procéder de la manière suivante :

1. orientation des faces : vérifier que le maillage est une variété combinatoire sans bord, et orienter les faces pour garantir que les normales des triangles adjacents sont cohérentes du point de vue de leur sens ;
2. pour chaque triangle de l'objet :
   - intégration de la fonction $f(x, y, z)$ sur le tétraèdre construit à partir du triangle et de l'origine du repère ;
   - sommation de la valeur de l'intégrale en fonction du signe de la fonction de signe S.

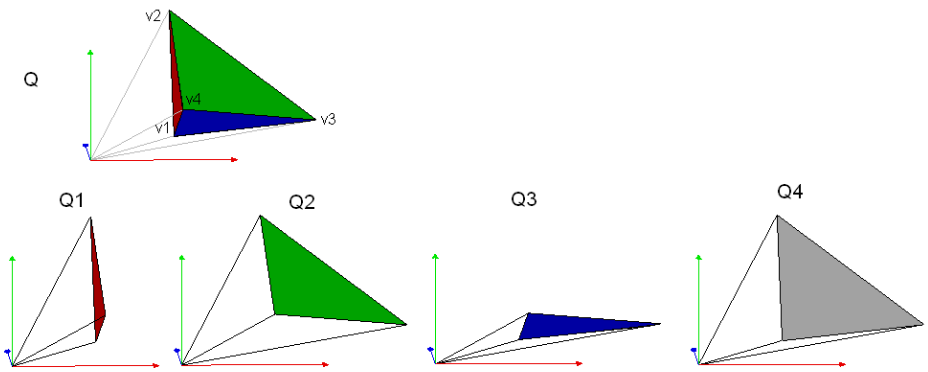

Fig. 2. Exemple de décomposition tétraédrique d'un objet 3D. L'objet Q peut être vu comme la somme CSG : $Q = Q_4 - Q_1 - Q_2 - Q_3$.

Pour orienter les normales et calculer les fonctions de signe S, le sens de la normale de chaque triangle adjacent est vérifié. Ceci revient à parcourir tous les triangles de l'objet et à vérifier que l'ordre des points fournit une normale dans le bon sens en fonction des triangles adjacents déjà parcourus.

3 Intégration d'un tétraèdre

3.1 Principe

Comme énoncé précédemment, le calcul d'une intégrale sur un objet tridimensionnel peut se faire en additionnant les contributions signées de l'intégrale de chaque tétraèdre. Ce qui revient à sommer les volumes des tétraèdres le composant :

$$I = \sum_{Q_i} S(Q_i) \int_{Q_i} f(x, y, z) dv. \tag{7}$$

Soit F_i un triangle composé des points $(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3})$, $(y_{i_1}, y_{i_2}, y_{i_3})$ et $(z_{i_1}, z_{i_2}, z_{i_3})$. On peut définir une transformation linéaire T_i telle que :

$$T_i = \begin{pmatrix} x_{i_1} & x_{i_2} & x_{i_3} \\ y_{i_1} & y_{i_2} & y_{i_3} \\ z_{i_1} & z_{i_2} & z_{i_3} \end{pmatrix} \tag{8}$$

qui transforme le tétraèdre unité orthogonale (tétraèdre formé de l'origine et des points $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$), en le tétraèdre défini par $(0, 0, 0)$ et les faces de F_i. On peut montrer que le déterminant de la matrice T_i est de même signe que la fonction de signe S. Cela conduit à :

$$\int_{Q_i} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{W_i} \|T_i\| \, f(X, Y, Z) dX dY dZ \tag{9}$$

où $\|T_i\|$ est la norme de la matrice de transformation T_i et W_i est le tétraèdre unité orthogonal selon la transformation :

$$\begin{cases} x = x_{i_1}X + x_{i_2}Y + x_{i_3}Z \\ y = y_{i_1}X + y_{i_2}Y + y_{i_3}Z \\ z = z_{i_1}X + z_{i_2}Y + z_{i_3}Z \end{cases} \tag{10}$$

On peut noter que l'intégration d'une fonction f sur le tétraèdre Q_i est égale au produit de l'intégrale de la fonction f sur le tétraèdre unité multiplié par la norme de la matrice de transformation $\|T_i\|$. D'autre part, le déterminant $|T_i|$ représente implicitement les effets de la fonction de signe $S(Q_i)$ et de la matrice $\|T_i\|$, ce qui peut s'écrire :

$$S(Q_i) \cdot \|T_i\| = \|T_i\| \tag{11}$$

Sous cette condition, l'intégrale d'une fonction f dévient :

$$I = \sum_{Q_i} |T_i| \int_{W_i} f(X, Y, Z) dX dY dZ \tag{12}$$

L'intégrale sur le volume d'un tétraèdre quelconque peut être calculée en se ramenant au tétraèdre unité orthogonale formé des points $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$). Une intégrale sur ce tétraèdre permet d'avoir un domaine intégration Q simple et facilement intégrable. Il suffit d'intégrer z sur $[0, 1]$, y sur $[0, 1 - z]$ et x sur $[0, 1 - z - y]$ et on peut ainsi écrire :

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-Z} \int_0^{1-Z-Y} f(X, Y, Z) dX dY dZ \tag{13}$$

3.2 Calcul des moments géométriques

Les moments géométriques tridimensionnels sont largement utilisé en indexation d'objets 3D, soit pour calculer des paramètres de normalisation (centre de gravité, axes principaux), soit comme descripteurs comme l'ont montré [6].

Les moments géométriques d'ordre $(p + q + r)$, notés par m_{pqr}, peuvent être calculés par :

$$m_{pqr} = \int_Q x^p y^q z^r dx dy dz \tag{14}$$

où Q est l'objet. La façon la plus répandue de calculer une telle intégrale est de discrétiser l'objet et de procéder dans l'espace discret par la formule :

$$m_{pqr} = \sum_{i=-N/2}^{N/2} \sum_{j=-N/2}^{N/2} \sum_{k=-N/2}^{N/2} i^p j^q k^r h(i, j, k) \qquad p, q, r = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots \tag{15}$$

où N est la taille de la discrétisation et $h(i, j, k) \rightarrow \{0, 1\}$ est une fonction définissant l'objet (intérieur/extérieur).

Une autre manière de procéder est d'intégrer la surface. Soit un tétraèdre Q composé des points $(0,0,0)$, (x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2) et (x_3,y_3,z_3), le calcul de l'expression analytique des moments géométriques peuvent se calculer en intégrant :

$$\begin{aligned} m_{pqr} &= \int_Q f(x,y,z)dxdydz \\ &= |T| \int_0^1 \int_0^{1-Z} \int_0^{1-Z-Y} f(X,Y,Z)dXdYdZ \end{aligned} \tag{16}$$

avec :

$$f(X,Y,Z) = (x_1X + x_2Y + x_3Z)^p(y_1X + y_2Y + y_3Z)^q(z_1X + z_2Y + z_3Z)^r \tag{17}$$

Soit l'expression du moment géométrique d'ordre $(0,0,0)$, la fonction à intégrer est égale à : $f(x,y,z) = x^0y^0z^0 = 1$. L'expression analytique d'un tel moment le long d'un tétraèdre unité peut se calculer :

$$\begin{aligned} m_{000} &= \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-z-y} dxdydz \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-z} (1-z-y)dydz \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2}z^2 - z + \frac{1}{2}dz = \frac{1}{6} \end{aligned} \tag{18}$$

Ceci est applicable quel que soit l'ordre des moments géométriques. Par exemple, les moments d'ordres inférieurs à 2 ont pour valeurs :

$$\begin{aligned} m_{000} &= \frac{1}{6}\left(x_1y_2z_3 - x_1y_3z_2 - y_1x_2z_3 + y_1x_3z_2 + z_1x_2y_3 - z_1x_3y_2\right) \\ m_{100} &= \frac{m_{000}}{4}\left(x_1 + x_2 + x_3\right) \\ m_{110} &= \frac{m_{000}}{20}\left(x_1(2y_1 + y_2 + y_3) + x_2(y_1 + 2y_2 + y_3) + x_3(y_1 + y_2 + 2y_3)\right) \\ m_{200} &= \frac{m_{000}}{10}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3\right) \end{aligned} \tag{19}$$

Nous verrons dans la dernière partie, les applications que peuvent avoir les moments géométriques en analyse de formes tridimensionnelles et les avantages que nous apporte le fait de les calculer de la sorte.

Le calcul des moments géométriques a été réalisé grâce à un logiciel de calcul formel Maple, pour tous les moments géométriques jusqu'a l'ordre 20. Le code source des formules analytiques des moments géométriques est disponible à l'adresse : http://liris.cnrs.fr/julien.ricard/index.php?page=publications.

3.3 Expression analytique de la transformée de Fourier

La transformée de Fourier est également un outil largement utilisée en indexation d'objets 3D [7]. Elle est basée sur une intégrale du volume de l'objet

$$F_{uvw} = \int_Q e^{-i(xu+yv+zw)} dxdydz. \tag{20}$$

La transformée de Fourier est aussi une intégration sur le volume interne d'un objet et peut être calculée en décomposant l'objet en tétraèdre et en sommant les contributions. Ceci peut se calculer selon la formule :

$$F(u,v,w) = \sum_{Q_i} |T_i| \int_{W_i} f(X,Y,Z) dXdYdZ \tag{21}$$

L'expression analytique de la transformée de Fourier d'un tétraèdre peut être calculée en intégrant sur le tétraèdre unité orthogonale l'expression :

$$f(x,y,z) = e^{-i(u(x_1X+x_2Y+x_3Z)+v(y_1X+y_2Y+y_3Z)+w(z_1X+z_2Y+z_3Z)} \tag{22}$$

L'expression générale à intégrer et la solution peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} F(u,v,w) &= |T| \int_W e^{-i(u(x_1X+x_2Y+x_3Z)+v(y_1X+y_2Y+y_3Z)+w(z_1X+z_2Y+z_3Z)} dV \\ &= |T| \begin{bmatrix} \frac{ie^{-iU_1}}{U_1(U_1-U_2)(U_1-U_3)} + \frac{ie^{-iU_2}}{U_2(U_2-U_1)(U_2-U_3)} \\ + \frac{ie^{-iU_3}}{U_3(U_3-U_2)(U_3-U_1)} - \frac{i}{U_1U_2U_3} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{23}$$

avec :

$$\begin{cases} U_1 = ux_1 + vy_1 + wz_1 \\ U_2 = ux_2 + vy_2 + wz_2 \\ U_3 = ux_3 + vy_3 + wz_3 \end{cases} \tag{24}$$

La formule 23 représente l'expression analytique de la transformée de Fourier d'un tétraèdre et permet de calculer la transformée de Fourier du maillage d'un objet 3D. Ceci est utilisé dans de nombreuses applications d'analyse de formes tridimensionnelles.

Cependant, cette expression n'est pas bien définie et ne peut pas être calculée pour tous les tétraèdres en tous les points de l'espace fréquentiel. En effet, cette expression est une somme de quotients qui ne sont pas définis lorsque les dénominateurs s'annulent. Il faut, dans ces cas, modifier la fonction à intégrer, $f(x,y,z)$ en fonction de la valeur de la solution et intégrer la nouvelle fonction. On peut expliciter 19 solutions S annulant la fonction dénominateur de $F(u,v,w)$:

$$F_{denum}(u,v,w) = U_1U_2U_3(U_1-U_2)(U_1-U_3)(U_2-U_3), \tag{25}$$

ce qui fournit les solutions suivantes :

$$S = \{\{u=0, v=0, w=0\},$$

$$
\begin{aligned}
&\{u=0,v=0,z_1=0\},\{u=0,v=0,z_2=0\},\{u=0,v=0,z_3=0\},\\
&\{u=0,v=0,z_1=z_2\},\{u=0,v=0,z_2=z_3\},\{u=0,v=0,z_1=z_3\},\\
&\left\{u=0,y_3=-\frac{wz_3}{v}\right\},\left\{u=0,y_2=-\frac{wz_2}{v}\right\},\left\{u=0,y_1=-\frac{wz_1}{v}\right\},\\
&\left\{u=0,y_2=\frac{vy_3+wz_3-wz_2}{v}\right\},\\
&\left\{u=0,y_1=\frac{vy_3+wz_3-wz_1}{v}\right\},\\
&\left\{u=0,y_1=\frac{vy_2+wz_2-wz_1}{v}\right\},\\
&\left\{x_3=-\frac{vy_3+wz_3}{u}\right\},\left\{x_2=-\frac{vy_2+wz_2}{u}\right\},\left\{x_1=-\frac{vy_1+wz_1}{u}\right\},\\
&\left\{x_2=-\frac{-ux_3-vy_3-wz_3+vy_2+wz_2}{u}\right\},\\
&\left\{x_1=-\frac{-ux_3-vy_3-wz_3+vy_1+wz_1}{u}\right\},\\
&\left\{x_1=-\frac{-ux_2-vy_2-wz_2+vy_1+wz_1}{u}\right\}\Bigg\}
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Pour chaque solutions S_i annulant le dénominateur de F, il faut modifier la fonction à intégrer f pour intégrer selon la solution S_i. Par exemple, pour les solutions $S_1 = \{u = 0, v = 0, w = 0\}$ et $S_2 = \{u = 0, v = 0, z_1 = 0\}$, les fonctions à intégrer deviennent :

$$
\begin{aligned}
&f_{S_1} = 1 \Rightarrow F_{S_1} = \tfrac{1}{6}\\
&f_{S_2} = e^{-iw(z_2Y+z_3Z)}\\
&\qquad \Rightarrow F_{S_2} = -\tfrac{wz_2^2z_3-wz_2z_3^2+z_3^2ie^{-iwz_2}+iz_2^2-z_3^2i-z_2^2ie^{-iwz_3}}{w^3z_2^2z_3^2(z_2-z_3)}
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Il faut expliciter les écritures analytiques de la transformation de Fourier pour toutes les valeurs de $\{u, v, w, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3\}$ et en particulier pour toutes les solutions des équations S. Ceci fait, le calcul de l'expression analytique de la transformée de Fourier peut se faire pour tous les triangles et en tous points de l'espace spectral. Ces calculs ont été réalisés au sein d'un logiciel de calcul formel Maple ce qui a permis d'expliciter l'expression analytique de la transformée de Fourier d'un objet 3D en tous points de l'espace. Les résultats et le code permettant de procéder à la transformée de Fourier d'un objet 3D maillé sont visibles dans l'annexe de ce document.

Pour illustrer le calcul analytique de la transformée de Fourier d'un objet maillé, nous avons mis en place un procédé de Fourier Volume Rendering [8]. Cette méthode de rendu d'objets permet de créer une image profondeur de l'objet sans projeter les voxels, mais en pratiquant une coupe dans l'espace spectral et en reconstruisant l'image réelle par un FFT inverse. L'image obtenue est une projection orthogonale de l'objet discret sur le plan image. L'extraction de la coupe de Fourier est faite sur la transformée de Fourier de l'objet discret.

Pour évaluer le procédé de calcul analytique de la transformée de Fourier, nous avons, au départ de l'objet maillé, calculé la transformée de Fourier pour tous les points d'une image spectrale et reconstruit l'image réel. La construction de la coupe est faite en définissant le plan de coupe comme N^2 points de l'espace spectral. L'expression analytique de la transformée de Fourier du maillage est calculée pour chaque point pour remplir le spectre 2D extrait. La figure 3 montre ce procédé sur l'objet 3D Bunny.

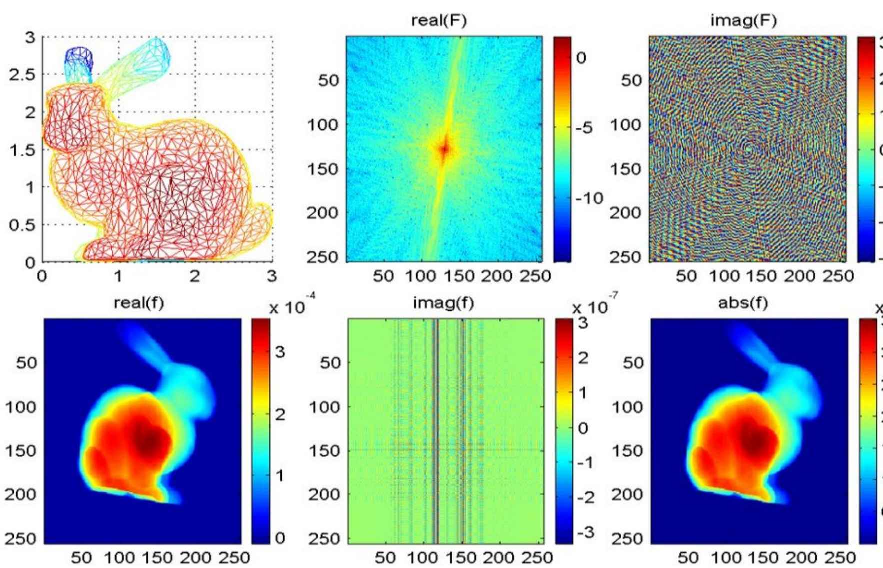

Fig. 3. Exemple de Fourier Volume Rendering de l'objet 3D Bunny. La première ligne représente, l'objet 3D maillé et les parties réelles et imaginaires du spectre extrait. La seconde ligne représente les parties réelles, imaginaires et la valeur absolue de l'image profondeur reconstruite.

La figure 4 présente deux exemples de rendu spectral sur l'objet Fandisk pour deux orientations et pour deux tailles de spectre extrait. Le système de rendu spectral extrait des vues par interpolation dans le domaine Fourier discret des objets 3D. Le fait de pratiquer le rendu par le processus que nous venons de présenter, en utilisant l'expression analytique de la transformée de Fourier, permet de ne pas faire d'interpolation sur le spectre discret et d'obtenir des vues exactes sans artefacts dus à la discrétisation. La figure 5 montre un exemple pour les trois types de rendu spectral : discret avec (a) et sans (b) interpolation et par l'expression analytique(c).

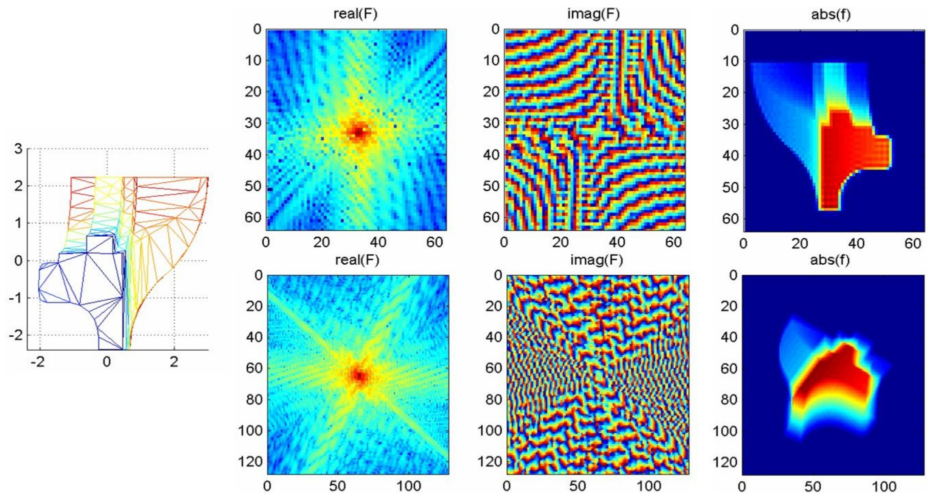

Fig. 4. Exemple de Fourier Volume Rendering de l'objet 3D maillé Fandisk, pour deux orientations quelconques et pour deux tailles du spectre extrait.

4 Application en analyse de formes 3D

4.1 Centrage et alignement d'un modèle 3D

De nombreuses méthodes d'indexation d'objets 3D ne sont pas intrinsèquement robustes aux translations, aux variations d'échelles et aux rotations. Pour palier à ces problèmes, la plupart de ces méthodes proposent de mettre en place un pré-traitement qui normalise l'objet 3D pour rendre les méthodes robustes à ces transformations. Pour rendre la méthode robuste aux translations, l'objet est centré par rapport au centre du repère par le calcul de son centre de gravité. Pour les variations d'échelles, l'objet est intégré dans une boite englobante et pour les rotations, les axes principaux de l'objet sont calculés afin de les aligner avec les axes du repère.

Le pré-traitement peut, soit se faire sur le maillage de l'objet 3D, et les paramètres sont calculés sur le nuage de points, soit se faire sur une représentation discrète de l'objet. Le calcul des paramètres sur le nuage de points constituant le maillage ne permet pas d'avoir une normalisation robuste car elle est dépendante de la répartition des points sur le maillage. Un même objet remaillé ne fournira pas les mêmes paramètres et ne sera pas normalisé de façon similaire.

Les paramètres de normalisation de l'objet peuvent aussi se calculer directement à partir du maillage en calculant les moments géométriques à partir de la surface des objets 3D, comme énoncé précédemment. La normalisation d'un objet 3D peut se faire en calculant les moment géométriques. Le centrage se fait grâce au moment géométrique : m_{100}, m_{010} et m_{001} en les additionnant aux coordonnées des points composant l'objet. Ces moments géométriques d'ordre 1 correspondent aux coordonnées du centre de gravité de l'objet. L'alignement

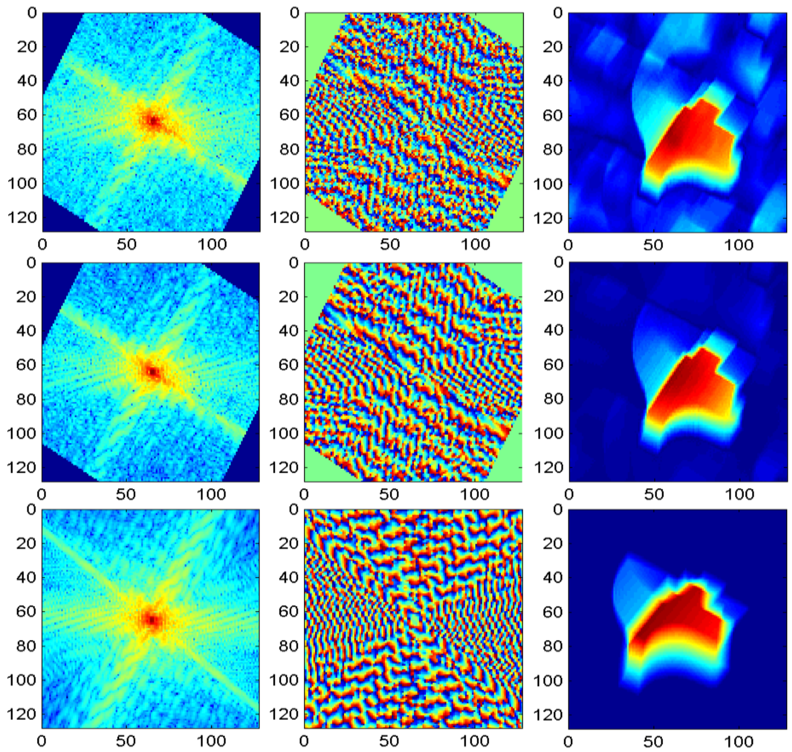

Fig. 5. Exemple de rendu spectral par un processus de Fourier Volume Rendering de l'objet 3D maillé Fandisk par trois types de rendu : discret avec interpolation (a), discret sans interpolation (b), par l'expression analytique(c).

se fait en calculant les vecteurs propres de la matrice I ce qui est aussi appelé analyse en composante principale (ACP). S est la matrice des moments d'ordre 2 :

$$I = \begin{bmatrix} m_{200} & m_{110} & m_{101} \\ m_{110} & m_{020} & m_{011} \\ m_{101} & m_{011} & m_{002} \end{bmatrix} \tag{28}$$

Le calcul des paramètres de normalisation sur une représentation directe de l'objet permet d'obtenir une normalisation indépendante du maillage et qui dépend du volume de l'objet. Une telle normalisation exige de transformer l'objet dans le domaine discret pour extraire ces paramètres. Pour ce faire, nous allons discrétiser l'objet et labelliser les voxels internes. Ces opérations ont un coût en $O(N^3 * T)$, où N est la taille de la discrétisation et T est le nombre de triangles composant l'objet. La figure 6 montre cinq objets d'une même classe de la base Semantic-3D normalisés en fonction de leurs nuages de points (a) ou de leur volume (b). La normalisation correspond à un centrage sur le centre de gravité de l'objet, une mise à l'échelle sur la boite englobante$[-1, 1]^3$ et un alignement sur les axes principaux. On peut voir que la normalisation suivant le nuage de points n'est pas robuste, car les objets d'une même classe n'ont pas la même répartition de leurs points. L'alignement volumique fournit des résultats plus cohérents, les centres de gravités et les paramètres de mise à l'échelle sont plus proches, ce qui fournit des alignements plus précis.

La figure 7 montre les différentes normalisations calculées en fonction du nuage de points de l'objet(a), de la représentation discrète de l'objet (b) et des moments géométriques calculés à partir de la surface de l'objet (c), pour un même objet 3D ayant subi différents remaillages. On peut tout de suite noter que la normalisation par rapport au nuage de points de l'objet n'est pas robuste au remaillage et que les objets normalisés n'ont pas le même alignement. Les deux autres normalisations, en fonction de la représentation discrète de l'objet et de la représentation tétraédrique, fournissent des bons résultats, car il n'y a pas de différences d'alignement entre les différents objets re-maillés.

L'extraction des paramètres de normalisation sur une représentation discrète des objets 3D doit se faire à une certaine résolution. Le choix de la résolution va modifier les paramètres de normalisation et par la même les objets normalisés. L'extraction des paramètres de normalisation sur la surface de l'objet est indépendante du choix de la résolution de discrétisation. Ce qui fournit des objets normalisés indépendants de tout paramètres.

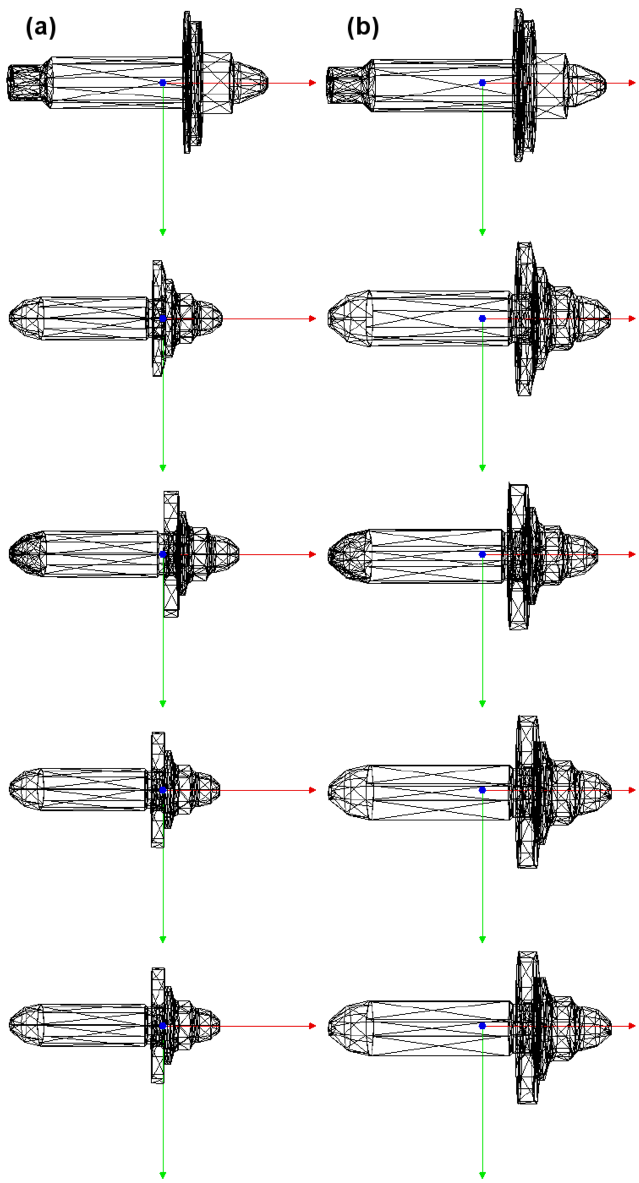

Fig. 6. Exemple de centrage, d'alignements et de mise à l'échelle sur une classe d'objets de la base Semantic-3D, avec une normalisation sur les points (a) et une normalisation volumique(b).

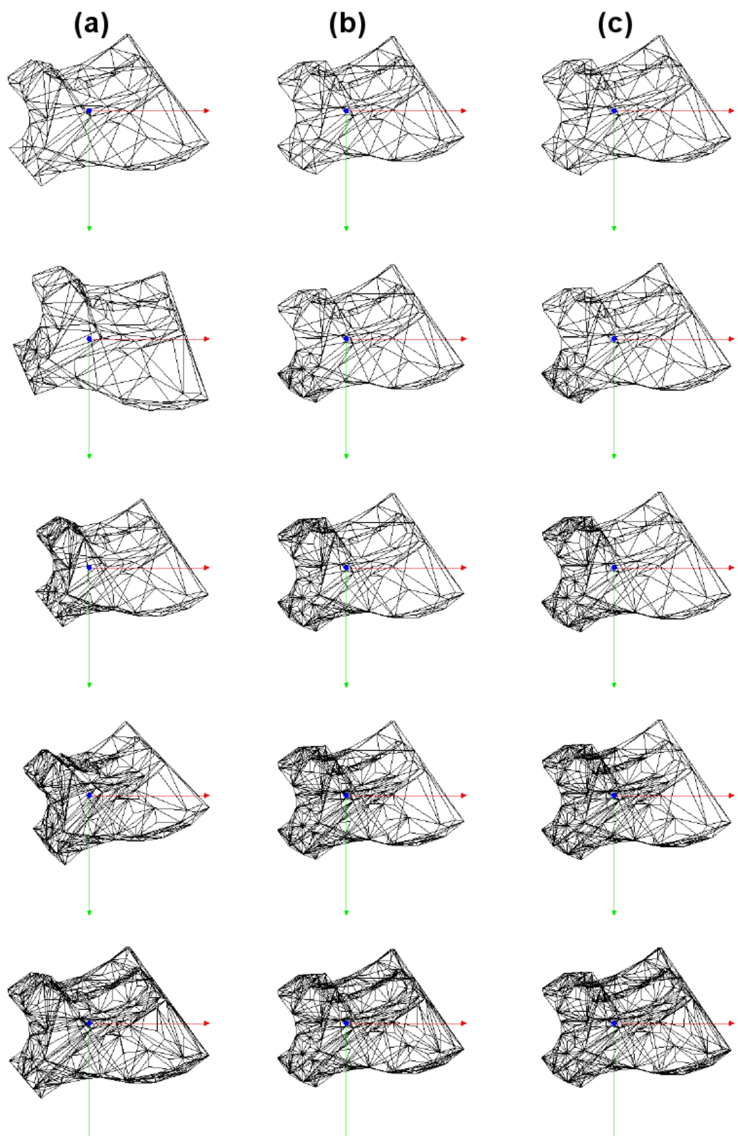

Fig. 7. Exemple d'alignement et de centrage d'un objet 3D remaillé, en calculant les paramètres sur le nuage de points(a), sur l'objet discrétisé (b) et sur la représentation tétraédrique de l'objet(c).

4.2 Descripteur de forme 3D

De nombreux descripteurs de forme calculent une intégrale sur le volume des objets 3D pour extraire une signature caractérisant la forme. On peut en particulier citer les méthodes régions basées sur les moments : Fourier 3D [7], Zernike 3D [1,2] et ART 3D [9]. L'intégration sur le volume d'un objet se fait en discrétisant l'objet sur une grille de voxels de taille N^3 et en calculant une somme discrète sur cette représentation.

Descripteur de Fourier 3D. [7] proposent d'utiliser les coefficients de la transformée de Fourier comme descripteur de forme. Les objets sont centrés, mis à l'échelle et alignés par une analyse en composante principale et discrétisés. Le calcul des premiers coefficients de Fourier se fait selon la formule :

$$g_{uvw} = \frac{1}{N^3} \sum_{i=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \sum_{l=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} q_{ikl} e^{-j\frac{2\pi}{N}(iu+kv+lw)} \tag{29}$$

où q_{ikl} est l'ensemble des voxels. Les valeurs absolues des coefficients g_{uvw} d'indices $-K \leq u, v, w \leq K$ sont sélectionnées comme descripteurs. Excepté le coefficient g_{000}, tous les coefficients complexes sont conjugués deux à deux (g_{uvw} est le conjugué de g_{-u-v-w}). Le vecteur descripteur consiste à $((2K+1)^3+1)/2$ valeurs réelles. Les meilleurs résultats sont obtenus pour $K = 3$.

Comme expliqué dans le paragraphe 3.3, la transformation de Fourier d'un objet 3D maillé peut être calculée en décomposant l'intégrale sur la forme sur chaque élément de forme élémentaire par la formule 23.

Descripteur de Zernike 3D. La description d'une forme par le descripteur de Zernike 3D a été définie par [1] et utilisé par [10,2] et est largement reconnue au sein de la communauté. Le calcul du descripteur de Zernike 3D, tel qu'il est proposé par les auteurs, se fait de façon discrète sur un objet discrétisé et normalisé, en combinant linéairement les moments géométriques m_{pqr}, pour tous $p, q, r > 0$ et $p + q + r \leq n$, avec $n \in [0, N]$ et $l \in [0, n]$, tel que $(n - l)$ est paire, et $m \in [-l, l]$. Le descripteur de forme de Zernike 3D est la norme du vecteur Ω_{nl} selon la formule :

$$F_{nl} = \|\Omega_{nl}\| \quad \text{ou :} \quad \Omega_{nl}^m = \frac{3}{4} \sum_{p+q+r \leq n} \overline{\chi_{nlm}^{pqr}} m_{pqr} \tag{30}$$

Les fonctions Ω_{nl}^m sont les moments de Zernike 3D d'un objet, et sont une combinaison linéaire des moments géométriques d'ordre n. La combinaison linéaire se fait grâce à la fonction χ_{nlm}^{pqr} selon la formule :

$$\chi_{nlm}^{pqr} = c_l^m 2^{-lm} \sum_{v=0}^{k} q_{kl}^v \sum_{\alpha=0}^{v} \binom{v}{\alpha} \sum_{\beta=0}^{v-\alpha} \binom{v-\alpha}{\beta} \sum_{u=0}^{m} (-1)^{m-u} \binom{m}{u} i^u$$
$$\cdot \sum_{\mu=0}^{\lfloor \frac{l-m}{2} \rfloor} (-1)^{\mu} 2^{-2\mu} \binom{l}{\mu} \binom{l-\mu}{m+\mu} \sum_{v=0}^{\mu} \binom{\mu}{v} \tag{31}$$

ou $2k = n - 1$, c_l^m est le facteur de normalisation et q_{kl}^v garantit l'orthogonalité des fonctions avec la sphère unité. Ces deux termes se calculent avec les formules suivantes :

$$c_l^m = c_l^{-m} = \frac{\sqrt{(2l+1)(l+m)!(l-m)!}}{l!} \tag{32}$$

$$q_{kl}^v = \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \sqrt{\frac{2l+4k+3}{3}} \binom{2k}{k} (-1)^v \frac{\binom{k}{k} \binom{2(k+l+v)+1}{2k}}{\binom{k+l+v}{k}} \tag{33}$$

Le calcul des descripteurs de Zernike 3D se base sur les moments géométriques calculés de façon discrète. Comme énoncé précédemment, il est plus efficace de calculer les moments géométriques en intégrant la surface de l'objet et en sommant la contribution signée des tétraèdres la composant que de les calculer à partir d'une discrétisation.

4.3 Complexité

Le principal avantage d'intégrer le volume d'un objet 3D sur son maillage et non sur une représentation volumique discrète est le gain de complexité dû principalement au fait de ne pas avoir à discrétiser l'objet 3D. Le coût d'un discrétisation d'un objet 3D est en $O(N^3 * T)$ où T est le nombre de triangles composant l'objet et N est la taille de la discrétisation. L'objet discrétisé doit ensuite être labellisé pour marquer les voxels internes, ce qui peut se faire en $O(N^3)$. L'intégration a alors un coût en $O(M)$ ou M est le nombre de voxels marqués. On peut noter que M est généralement supérieur à T le nombre de triangles composant l'objet. Alors que le coût de l'intégration sur le maillage de l'objet a un coût en $O(T)$.

	Discrétisation	Tétraédrique
Fourier 3D descriptor	$O\left(N^3 * T\right)$	$O\left(T\right)$
Zernike 3D descriptor	$O\left(N^3 * T\right)$	$O\left(T\right)$

Tab. 1. Comparaison des complexités des processus d'indexation par discrétisation de l'objet ou par intégration sur le maillage par décomposition tétraédrique. T est le nombre de triangles composant l'objet 3D et N est la taille de la grille de discrétisation.

5 Conclusion

Ces approches permettent de calculer directement l'intégrale d'un volume sur le maillage d'un objet 3D, sans passer par une phase de discrétisation, qui rallonge les calculs et est moins précis qu'un calcul analytique. Nous avons montré que l'expression analytique d'un maillage 3D peut être utilisée pour exprimer les moments géométriques ou la transformée de Fourier. Nous l'avons utilisé pour calculer les paramètres de normalisation et pour calculer des descripteurs : moments géométriques, descripteurs de Fourier et moments de Zernike.

L'intégration tétraédrique fournit l'expression analytique de l'intégrale de la fonction à intégrer sur le tétraèdre unité. Ce qui demande d'exprimer cette fonction sur tout le domaine à intégrer et surtout où la fonction n'est pas correctement définie, comme nous l'avons explicité pour la transformation de Fourier. Cette étape limite la généralisation pour n'importe quelle intégrale, car il est difficile d'intégrer une fonction quelconque.

Notre travail a principalement porté sur la mise en place des calculs et sur leur implantation au sein d'un logiciel de calcul formel pour expliciter les formules et l'utilisation des expressions analytiques dans différents programmes d'indexation d'objets 3D. Ces travaux se basent sur l'étude de l'intégration surfacique faite par [4] et reprise par [5], mais sont originaux, par la résolution de l'expression de Fourier analytique en tout point de l'espace et par les applications que nous avons présentées en analyse de formes.

Annexe : résolution de la transformée de Fourier d'un tétraèdre

La transformée de Fourier d'un objet 3D maillé peut se calculer directement sur le maillage, ceci est faisable si le maillage est une variété topologique (sans trous, orientable...). Sous cette condition, il faut intégrer sur le volume de l'objet la fonction :

$$f(x,y,z) = e^{-i(u(x_1X+x_2Y+x_3Z)+v(x_2X+y_2Y+z_2Z)+w(z_1X+z_2Y+z_3Z)}. \tag{34}$$

Cela revient à intégrer sur le tétraèdre unité selon l'expression :

$$F(u,v,w) = \int_0^1 \int_0^{1-Z} \int_0^{1-Y-Z} e^{-i\begin{pmatrix} u\,(x_1X+x_2Y+x_3Z) \\ +v\,(y_1X+y_2Y+y_3Z) \\ +w\,(z_1X+z_2Y+z_3Z) \end{pmatrix}} dXdYdZ \tag{35}$$

L'expression générale à intégrer et la solution générale peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} F(u,v,w) &= |T| \int_0^1 \int_0^{1-Z} \int_0^{1-Y-Z} e^{-i(u(x_1X+x_2Y+x_3Z)+v(y_1X+y_2Y+y_3Z)+w(z_1X+z_2Y+z_3Z)} dXdYdZ \\ &= |T| \begin{bmatrix} \frac{ie^{-iU_1}}{U_1(U_1-U_2)(U_1-U_3)} + \frac{ie^{-iU_2}}{U_2(U_2-U_1)(U_2-U_3)} \\ + \frac{ie^{-iU_3}}{U_3(U_3-U_2)(U_3-U_1)} - \frac{i}{U_1U_2U_3} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{36}$$

avec :

$$\begin{cases} U_1 = ux_1 + vy_1 + wz_1 \\ U_2 = ux_2 + vy_2 + wz_2 \\ U_3 = ux_3 + vy_3 + wz_3 \end{cases} \tag{37}$$

Cette solution générale n'est pas applicable en tout point de l'espace (x, y, z) pour toutes les valeurs de (u, v, w). Il faut rechercher les solutions où cette expression n'est pas définie et modifier la fonction à intégrer en fonction de ces solutions pour obtenir une définition analytique exacte en tout point.

Les solutions annulant le dénominateur de l'expression 36 sont :

$$
\begin{aligned}
S = \{ & \{u=0, v=0, w=0\}, \\
& \{u=0, v=0, z_1=0\}, \{u=0, v=0, z_2=0\}, \{u=0, v=0, z_3=0\}, \\
& \{u=0, v=0, z_1=z_3\}, \{u=0, v=0, z_2=z_3\}, \{u=0, v=0, z_1=z_2\}, \\
& \left\{u=0, y_1=-\frac{wz_1}{v}\right\}, \left\{u=0, y_2=-\frac{wz_2}{v}\right\}, \left\{u=0, y_3=-\frac{wz_3}{v}\right\}, \\
& \left\{u=0, y_2=-\frac{-y_3 v - wz_3 + wz_2}{v}\right\}, \\
& \left\{u=0, y_1=-\frac{-y_3 v - wz_3 + wz_1}{v}\right\}, \\
& \left\{u=0, y_1=-\frac{-wz_2 + wz_1 - y_2 v}{v}\right\}, \\
& \left\{x_3=-(\frac{y_3 v + wz_3}{u}\right\}, \left\{x_2=-\frac{y_2 v + wz_2}{u}\right\}, \left\{x_1=-\frac{y_1 v + wz_1}{u}\right\}, \\
& \left\{x_1=-\frac{-wz_2 + y_1 v - x_2 u + wz_1 - y_2 v}{u}\right\}, \\
& \left\{x_1=-\frac{-y_3 v - wz_3 - x_3 u + y_1 v + wz_1}{u}\right\}, \\
& \left\{x_2=-\frac{-y_3 v - wz_3 - x_3 u + y_2 v + wz_2}{u}\right\}\}
\end{aligned}
\tag{38}
$$

Il faut pour chaque solution, notée S_i, modifier la fonction f en f_i, en fonction de la solution et exprimer l'intégrale de f_i, notée F_i. Dans certain cas, l'intégrale F_i n'est pas définie en tout point, et il faut réitérer le processus en fonction des valeurs pour lesquelles elle n'est pas définie :

- F s'annule si : $S_1 = \{u=0, v=0, w=0\}$, sous cette condition :
  $f_1 = 1 \Rightarrow F_{S_1} = \frac{1}{6}$

- F s'annule si : $S_2 = \{u=0, v=0, z_2=0\}$, sous cette condition :
  $f_2 = e^{-Iw(z_1 X + z_2 Y + z_3 Z)}$
  $\Rightarrow F_2 = \frac{-i\begin{pmatrix} e^{-iwz_3} z_1^2 z_2 - z_1^2 z_2 - z_1^2 e^{-iwz_2} z_3 + z_1^2 z_3 - e^{-iwz_3} z_2^2 z_1 + z_2^2 z_1 \\ +z_1 e^{-iwz_2} z_3^2 - z_1 z_3^2 + z_2^2 e^{-iwz_1} z_3 - z_2^2 z_3 - z_2 e^{-iwz_1} z_3^2 + z_2 z_3^2 \end{pmatrix}}{z_2 z_3 w^3 (-z_3+z_1)(-z_3+z_2)(-z_2+z_1) z_1}$

  - F_2 s'annule si : $S_{2.1} = \{z_3 = 0\}$
    $\Rightarrow F_{2.1} = -I \frac{2e^{(-Iwz_1)-2+2Iz_1 w + z_1^2 w^2}}{2w^3 z_1^3}$
    - $F_{2.1}$ s'annule si : $\{z_1 = 0\} \Rightarrow F_{2.1.1} = \frac{1}{6}$

- F_2 s'annule si : $S_{2.2} = \{z_1 = 0\}$
  $\Rightarrow F_{22} = -I\frac{w^2z_3^2-2+2Iwz_3+2e^{-Iwz_3}}{2z_3^3w^3}$

- F_2 s'annule si : $S_{2.3} = \{z_1 = z_3\}$
  $\Rightarrow F_{23} = -I\frac{w^2z_3^2-2+2Iwz_3+2e^{-Iwz_3}}{2z_3^3w^3}$

- F s'annule si : $S_2 = \{u = 0, v = 0, z_3 = 0\}$, sous cette condition :
  $f_3 = e^{-Iw(z_1X+z_2Y)} \Rightarrow F_3 = -\frac{-Ie^{-Iwz_2}z_1^2+Ie^{-Iwz_1}z_2^2-Iz_2^2+z_1^2wz_2+Iz_1^2-z_2^2z_1w}{w^3z_2^2(z_1-z_2)z_1^2}$

  - F_3 s'annule si : $S_{3.1} = \{z_1 = 0\}$
    $\Rightarrow F_{3.1} = -\frac{I(2e^{-Iwz_2}+z_2^2w^2+2Iz_2w-2}{2w^3z_2^3}$

  - F_3 s'annule si : $S_{3.2} = \{z_1 = z_2\}$
    $\Rightarrow F_{3.2} = -\frac{-Ie^{-Iwz_2}+e^{-Iwz_2}z_2w+z_2w+2I}{2z_2^3w^3}$

- F s'annule si : $S_4 = \{u = 0, v = 0, z_1 = 0\}$, sous cette condition :
  $f_4 = e^{-Iw(z_2Y+z_3Z)} \Rightarrow F_4 = -\frac{z_2^2z_3w-z_2z_3^2w+Ie^{-Iwz_2}z_3^2+Iz_2^2-Iz_3^2-Ie^{-Iwz_3}z_2^2}{z_3^2w^3(z_2-z_3)z_2^2}$

  - F_4 s'annule si : $S_{4.1} = \{z_2 = z_3\}$
    $\Rightarrow F_{4.1} = -\frac{wz_3+2I+e^{-Iwz_3}wz_3-2Ie^{-Iwz_3}}{w^3z_3^3}$

- F s'annule si : $S_5 = \{u = 0, v = 0, z_1 = z_3\}$, sous cette condition :
  $f_5 = e^{-Iw(z_3X+z_2Y+z_3Z)}$
  $\Rightarrow F_5 = \frac{Iz_2^2-2Iz_2z_3+Iz_3^2-Ie^{-Iwz_2}z_3^2-Ie^{-Iwz_3z_2^2}-e^{-Iwz_3}z_2z_3^2w+2Ie^{-Iwz_3}z_2z_3+e^{-Iwz_3}z_2^2z_3w}{z_2(z_2-z_3)^2z_3^2w^3}$

  - F_5 s'annule si : $S_{5.1} = \{z_2 = z_3\}$
    $\Rightarrow F_{5.1} = \frac{I(2-2e^{-Iwz_3}-2Ie^{-Iwz_3}wz_3+e^{-Iwz_3}w^2z_3^2}{w^3z_3^3}$

- F s'annule si : $S_6 = \{u = 0, v = 0, z_2 = z_3\}$, sous cette condition :
  $f_6 = e^{-Iw(z_1X+z_3Y+z_3Z)}$
  $\Rightarrow F_6 = \frac{-Iz_1+2Iz_3-z_3^2w+z_1wz_3)e^{-Iwz_3}}{w^3z_3^2(z_1-z_3)^2} + \frac{I(z_1^2-2z_1z_3+z_3^2-z_3^2e^{-Iwz_1})}{w^3z_3^2(z_1-z_3)^2z_1}$

- F s'annule si : $S_7 = \{u = 0, v = 0, z_1 = z_2\}$, sous cette condition :
  $f_7 = e^{-Iw(z_2X+z_2Y+z_3Z)}$
  $\Rightarrow F_7 = -\frac{(-2Iz_2+Iz_3+z_2^2w-z_2z_3w)e^{-Iwz_2}}{w^3(z_2-z_3)^2z_2^2} - \frac{Ie^{-Iwz_3}}{w^3z_3(z_2-z_3)^2} + \frac{I}{z_2^2w^3z_3}$

- F s'annule si : $S_8 = \{u = 0, y_1 = \frac{-wz_1}{v}\}$, sous cette condition :
  $f_8 = e^{-I(y_2Yv+y_3Zv+wz_2Y+wz_3Z)}$
  $\Rightarrow F_8 = -\frac{Ie^{-I(y_2v+z_2w)}}{(y_2v+z_2w)^2(y_2v+z_2w-vy_3-wz_3)} + \frac{Ie^{-I(vy_3+wz_3)}}{(vy_3+wz_3)^2(y_2v+z_2w-vy_3-wz_3)}$
  $-\frac{y_2y_3v^2+Ivy_2+y_2vwz_3+vz_2wy_3+Ivy_3+z_2w^2z_3+Iwz_2+Iwz_3}{(vy_3+wz_3)^2(y_2v+z_2w)^2}$
  - F_8 s'annule si : $S_{8.1} = \{y_3 = \frac{-wz_3}{v}\}$,
    sous cette condition : $f_{8.1} = e^{-IY(vy_2+wz_2)}$

$\Rightarrow F_{8.1} = \frac{-Ie^{-I(y_2v+z_2w)}}{(y_2v+z_2w)^3} - \frac{I(2Ivy_2-2+z_2^2w^2+2y_2vz_2w+2Iz_2w+y_2^2v^2)}{2(y_2v+z_2w)^3}$

– $F_{8.1}$ s'annule si : $S_{8.1.1} = \{y_2 = -z_2w/v\} \Rightarrow F_{8.1.1} = \frac{1}{6}$

– F_8 s'annule si : $S_{8.2} = \{y_2 = \frac{-z_2w}{v}\}$,
sous cette condition : $f_{8.2} = e^{-IZ(y_3v+wz_3)}$
$\Rightarrow F_{8.2} = \frac{-Ie^{-I(vy_3+wz_3)}}{(vy_3+wz_3)^3} - \frac{I(v^2y_3^2+2vy_3wz_3+w^2z_3^2+2Iwz_3-2+2Ivy_3)}{2(vy_3+wz_3)^3}$

– F_8 s'annule si : $S_{8.3} = \{y_2 = \frac{vy_3+wz_3-z_2w}{v}\}$,
sous cette condition : $f_{8.3} = e^{-I(y_3v+wz_3)(Y+Z)}$
$\Rightarrow F_{8.3} = \frac{-(wz_3+vy_3-2I)e^{-I(vy_3+wz_3)}}{(vy_3+wz_3)^3} - \frac{vy_3+2I+wz_3}{(vy_3+wz_3)^3}$

– F s'annule si : $S_9 = \{u = 0, y_2 = \frac{-wz_2}{v}\}$,
sous cette condition : $f_9 = e^{-I(y_1Xv+y_3Zv+wz_1X+wz_3Z)}$
$\Rightarrow F_9 = \frac{-Ie^{-I(y_1v+z_1w)}}{(y_1v+z_1w)^2(y_1v+z_1w-vy_3-wz_3)} + \frac{Ie^{-I(vy_3+wz_3)}}{(y_1v+z_1w-vy_3-wz_3)(vy_3+wz_3)^2}$
$- \frac{y_1y_3v^2+y_1vwz_3+Iy_1v+Ivy_3+vy_3z_1w+Iwz_3+w^2z_3z_1+Iz_1w}{(vy_3+wz_3)^2(y_1v+z_1w)^2}$

– F_9 s'annule si : $S_{9.1} = \{y_3 = \frac{-wz_3}{v}\}$,
sous cette condition : $f_{9.1} = e^{-IX(y_1v+z_1w)}$
$\Rightarrow F_{9.1} = \frac{-Ie^{-I(y_1v+z_1w)}}{(y_1v+z_1w)^3} - \frac{I(2Iy_1v+2Iz_1w-2+w^2z_1^2+v^2y_1^2+2y_1vz_1w)}{2(y_1v+z_1w)^3}$

– F_9 s'annule si : $S_{9.1} = \{y_1 = \frac{vy_3+wz_3-z_1w}{v}\}$,
sous cette condition : $f_{9.2} = e^{-I(y_3v+wz_3)(X+Z)}$
$\Rightarrow F_{9.2} = \frac{-(wz_3+vy_3-2I)e^{-I(vy_3+wz_3)}}{(vy_3+wz_3)^3} - \frac{vy_3+2I+wz_3}{(vy_3+wz_3)^3}$

– F s'annule si : $S_{10} = \{u = 0, y_3 = \frac{-wz_3}{v}\}$,
sous cette condition : $f_{10} = e^{-I(y_1Xv+y_2Yv+wz_1X+wz_2Y)}$
$\Rightarrow F_{10} = \frac{Ie^{-I(y_2v+z_2w)}}{(y_2v+z_2w)^2(y_1v-y_2v+z_1w-z_2w)} - \frac{Ie^{-I(y_1v+z_1w)}}{(y_1v+z_1w)^2(y_1v-y_2v+z_1w-z_2w)}$
$- \frac{y_2v^2y_1+Iy_1v+z_2wy_1v+Ivy_2+y_2vz_1w+z_2w^2z_1+Iwz_2+Iz_1w}{(y_2v+z_2w)^2(y_1v+z_1w)^2}$

– F_{10} s'annule si : $S_{10.1} = \{y_1 = \frac{y_2v-z_1w+z_2w}{v}\}$,
sous cette condition : $f_{10.1} = e^{-I(vy_2+wz_2)(X+Y)}$
$\Rightarrow F_{10.1} = \frac{-(y_2v+z_2w-2I)e^{-I(y_2v+z_2w)}}{(y_2v+z_2w)^3} - \frac{y_2v+2I+z_2w}{y_2v+z_2w)^3}$

– F s'annule si : $S_{11} = \{u = 0, y_2 = -\frac{-vy_3-wz_3+wz_2}{v}\}$,
sous cette condition : $f_{11} = e^{I(y_1Xv+Yy_3v+Ywz_3+y_3Zv+wz_1X+wz_3Z)}$
$\Rightarrow F_{11} = \frac{-Ie^{-I(y_1v+z_1w)}}{(y_1v+z_1w-vy_3-wz_3)^2(y_1v+z_1w)} + \frac{I}{(vy_3+wz_3)^2(y_1v+z_1w)}$
$+ \frac{(y_1y_3v^2-Ivy_1+y_1vwz_3-v^2y_3^2+2Ivy_3-2vy_3wz_3+vy_3z_1w-w^2z_3^2-Iwz_1+w^2z_3z_1+2Iwz_3)e^{-I(vy_3+wz_3)}}{(vy_3+wz_3)^2(y_1v+z_1w-vy_3-wz_3)^2}$

– F_{11} s'annule si : $S_{11.1} = \{y_1 = \frac{vy_3+wz_3-z_1w}{v}\}$,
sous cette condition : $f_{11.1} = e^{-I(y_3v+wz_3)(X+Y+Z)}$

$$\Rightarrow F_{11.1} = \frac{I(-2Ivy_3-2Iwz_3+w^2z_3^2-2+2vy_3wz_3+v^2y_3^2)e^{-I(vy_3+wz_3)}}{2(vy_3+wz_3)^3} + \frac{I}{(vy_3+wz_3)^3}$$

– F s'annule si : $S_{12} = \{u = 0, y_1 = -\frac{-vy_3-wz_3+wz_1}{v}\}$,
sous cette condition : $f_{12} = e^{-I(Xy_3v+Xwz_3+y_2Yv+y_3Zv+wz_2Y+wz_3Z)}$
$$\Rightarrow F_{12} = \frac{-Ie^{(-I(y_2v+z_2w)}}{(y_2v+z_2w-vy_3-wz_3)^2(y_2v+z_2w)} + \frac{I}{(vy_3+wz_3)^2(y_2v+z_2w)}$$
$$+\frac{(y_2y_3v^2+y_2vwz_3-Ivy_2-v^2y_3^2+vz_2wy_3-2vy_3wz_3+2Ivy_3-Iwz_2-w^2z_3^2+z_2w^2z_3+2Iwz_3)e^{-I(vy_3+wz_3)}}{(y_2v+z_2w-vy_3-wz_3)^2(vy_3+wz_3)^2}$$

– F s'annule si : $S_{13} = \{u = 0, y_1 = -\frac{-vy_2-wz_2+wz_1}{v}\}$,
sous cette condition : $f_{13} = e^{-I(Xvy_2+Xwz_2+y_2Yv+y_3Zv+wz_2Y+wz_3Z)}$
$$\Rightarrow F_{13} = \frac{-(-y_2y_3v^2+Ivy_3-vz_2wy_3+y_2^2v^2-2Iy_2v-y_2vwz_3+2y_2vz_2w-2Iwz_2+Iwz_3+z_2^2w^2-z_2w^2z_3)e^{-I(y_2v+z_2w)}}{(y_2v+z_2w)^2(y_2v+z_2w-vy_3-wz_3)^2}$$
$$-\frac{Ie^{-I(vy_3+wz_3)}}{(vy_3+wz_3)(y_2v+z_2w-vy_3-wz_3)^2} + \frac{I}{(y_2v+z_2w)^2(vy_3+wz_3)}$$

– F s'annule si : $S_{14} = \{x_1 = -\frac{y_1v+wz_1}{u}\}$,
sous cette condition : $f_{14} = e^{-I(x_2Yu+x_3Zu+y_2Yv+y_3Zv+wz_2Y+wz_3Z)}$
$$\Rightarrow F_{14} = \frac{-Ie^{-I(ux_2+y_2v+z_2w)}}{(ux_2+y_2v+z_2w)^2(ux_2-ux_3+y_2v-vy_3+z_2w-wz_3)} + \frac{Ie^{-I(ux_3+vy_3+wz_3)}}{(ux_2-ux_3+y_2v-vy_3+z_2w-wz_3)(ux_3+vy_3+wz_3)^2}$$
$$-\frac{\begin{pmatrix} x_2x_3u^2+x_2uvy_3+x_2uwz_3+Iux_2+ux_3y_2v+ux_3z_2w+Iux_3+w^2z_3z_2 \\ +Ivy_2+Iwz_2+v^2y_3y_2+wz_3y_2v+vy_3z_2w+Iz_3w+Iy_3v \end{pmatrix}}{(ux_3+vy_3+wz_3)^2(ux_2+y_2v+z_2w)^2}$$

– F_{14} s'annule si : $S_{14.1} = \{x_3 = -\frac{vy_3+wz_3}{u}\}$,
sous cette condition : $f_{14.1} = e^{-IY(ux_2+vy_2+wz_2)}$
$$\Rightarrow F_{14.1} = \frac{-Ie^{-I(y_2v+ux_2+z_2w)}}{(y_2v+ux_2+z_2w)^3}$$
$$-\frac{I(2Ivy_2+2Iz_2w+u^2x_2^2+2y_2vux_2+2y_2vz_2w+2ux_2z_2w+y_2^2v^2+2Iux_2+z_2^2w^2-2)}{2(y_2v+ux_2+z_2w)^3}$$

– $F_{14.1}$ s'annule si : $S_{14.1.1} = \{x_2 = -\frac{y_2v+z_2w}{u}\} \Rightarrow F_{14.1.1} = \frac{1}{6}$

– F_{14} s'annule si : $S_{14.2} = \{x_2 = -\frac{y_2v+z_2w}{u}\}$,
sous cette condition : $f_{14.2} = e^{-IZ(ux_3+y_3v+wz_3)}$
$$\Rightarrow F_{14.2} = \frac{-Ie^{-I(ux_3+vy_3+wz_3)}}{(ux_3+vy_3+wz_3)^3}$$
$$-\frac{I(-2+2Iwz_3+2Ivy_3+v^2y_3^2+w^2z_3^2+2ux_3vy_3+2ux_3wz_3+2vy_3wz_3+u^2x_3^2+2Iux_3)}{(ux_3+vy_3+wz_3)^3}$$

– F_{14} s'annule si : $S_{14.3} = \{x_2 = \frac{vy_3+ux_3+wz_3-y_2v-z_2w}{u}\}$,
sous cette condition : $f_{14.3} = e^{-I(ux_3+y_3v+wz_3)(Y+Z)}$
$$\Rightarrow F_{14.3} = \frac{-(ux_3+wz_3+vy_3-2I)e^{-I(ux_3+vy_3+wz_3)}}{(ux_3+vy_3+wz_3)^3} - \frac{ux_3+vy_3+2I+wz_3}{(ux_3+vy_3+wz_3)^3}$$

– F s'annule si : $S_{15} = \{x_2 = -\frac{vy_2+wz_2}{u}\}$,
sous cette condition : $f_{15} = e^{-I(x_1Xu+x_3Zu+y_1Xv+y_3Zv+wz_1X+wz_3Z)}$
$$\Rightarrow F_{15} = \frac{-Ie^{-I(ux_3+vy_3+wz_3)}}{(vy_3+ux_3+wz_3-y_1v-z_1w-x_1u)(ux_3+vy_3+wz_3)^2} + \frac{Ie^{-I(x_1u+y_1v+z_1w)}}{(x_1u+y_1v+z_1w)^2(vy_3+ux_3+wz_3-y_1v-z_1w-x_1u)}$$
$$-\frac{\begin{pmatrix} u^2x_3x_1+Iux_3+ux_3z_1w+x_3uy_1v+Ix_1u+ux_1wz_3+ux_1vy_3+vy_3z_1w \\ +y_1vwz_3+Iy_1v+y_1y_3v^2+Iwz_3+Iz_1w+w^2z_3z_1+Ivy_3 \end{pmatrix}}{(x_1u+y_1v+z_1w)^2(ux_3+vy_3+wz_3)^2}$$

- F_{15} s'annule si : $S_{15.1} = \{x_3 = -\frac{vy_3+wz_3}{u}\}$,
  sous cette condition : $f_{15.1} = e^{-IX(ux_1+y_1v+z_1w)}$
  $\Rightarrow F_{15.1} = \frac{-Ie^{-I(x_1u+y_1v+z_1w)}}{(x_1u+y_1v+z_1w)^3}$
  $- \frac{I(w^2z_1^2+2y_1vz_1w+2x_1uy_1v+2x_1uz_1w+x_1^2u^2+2Iz_1w+2Iux_1+v^2y_1^2-2+2Iy_1v)}{2(x_1u+y_1v+z_1w)^3}$

- F_{15} s'annule si : $S_{15.2} = \{x_1 = \frac{vy_3+ux_3+wz_3-y_1v-z_1w}{u}\}$,
  sous cette condition : $f_{15.2} = e^{-I(ux_3+y_3v+wz_3)(X+Z)}$
  $\Rightarrow F_{15.2} = \frac{-(ux_3+wz_3+vy_3-2I)e^{-I(ux_3+vy_3+wz_3)}}{(ux_3+vy_3+wz_3)^3} - \frac{ux_3+vy_3+2I+wz_3}{(ux_3+vy_3+wz_3)^3}$

- F s'annule si : $S_{16} = \{x_3 = -\frac{vy_3+wz_3}{u}\}$,
  sous cette condition : $f_{16} = e^{-I(x_1Xu+x_2Yu+y_1Xv+y_2Yv+wz_1X+wz_2Y)}$
  $\Rightarrow F_{16} = \frac{Ie^{-I(y_2v+ux_2+z_2w)}}{(y_2v+ux_2+z_2w)^2(x_1u-ux_2+y_1v-y_2v+z_1w-z_2w)}$

  $- \frac{Ie^{-I(x_1u+y_1v+z_1w)}}{(x_1u+y_1v+z_1w)^2(x_1u-ux_2+y_1v-y_2v+z_1w-z_2w)}$

  $- \frac{y_2v^2y_1+Iy_1v+z_2wy_1v+ux_2y_1v+y_2vx_1u+y_2vz_1w+Ivy_2+z_2w^2z_1+Iz_1w+Ix_1u+u^2x_2x_1+z_2wx_1u+ux_2z_1w+Iwz_2+Iux_2}{(y_2v+ux_2+z_2w)^2(x_1u+y_1v+z_1w)^2}$

  - F_{16} s'annule si : $S_{16.1} = \{x_1 = -\frac{-ux_2+y_1v-y_2v+z_1w-z_2w}{u}\}$,
    sous cette condition : $f_{16.1} = e^{-I(wz_2+ux_2+vy_2)(Y+X)}$
    $\Rightarrow F_{16.1} = \frac{-(y_2v+ux_2-2I+z_2w)e^{-I(y_2v+ux_2+z_2w)}}{(y_2v+ux_2+z_2w)^3} - \frac{y_2v+ux_2+z_2w+2I}{(y_2v+ux_2+z_2w)^3}$

- F s'annule si : $S_{17} = \{x_1 = -\frac{-wz_2+vy_1-ux_2+wz_1-vy_2}{u}\}$,
  sous cette condition : $f_{17} = e^{-I(Xux_2+Xvy_2+Xwz_2+x_2Yu+x_3Zu+y_2Yv+y_3Zv+wz_2Y+wz_3Z)}$
  $\Rightarrow F_{17} = \frac{-Ie^{-I(ux_3+vy_3+wz_3)}}{(ux_3+vy_3+wz_3)(vy_3+ux_3+wz_3-ux_2-y_2v-z_2w)^2}$
  $+ \frac{I}{(y_2v+ux_2+z_2w)^2(ux_3+vy_3+wz_3)}$
  $+ \frac{\begin{pmatrix} (u^2x_2x_3 + 2Iz_2w + x_3uy_2v + z_2wux_3 - u^2x_2^2 + ux_2vy_3 - 2y_2vux_2 - 2ux_2z_2w \\ -Iwz_3 + ux_2wz_3 - y_2^2v^2 - z_2^2w^2 + z_2w^2z_3 + y_2vwz_3 - Ivy_3 + y_2y_3v^2 \\ -Iux_3 + 2Ivy_2 + vz_2wy_3 + 2Iux_2 - 2y_2vz_2w)e^{-I(y_2v+ux_2+z_2w)} \end{pmatrix}}{(y_2v+ux_2+z_2w)^2(vy_3+ux_3+wz_3-ux_2-y_2v-z_2w)^2}$

  - F_{17} s'annule si : $S_{17.1} = \{x_2 = \frac{vy_3+ux_3+wz_3-y_2v-z_2w}{u}\}$,
    sous cette condition : $f_{17.1} = e^{-I(ux_3+y_3v+wz_3)(X+Y+Z)}$
    $\Rightarrow F_{17.1} = \frac{I}{(ux_3+vy_3+wz_3)^3}$
    $+ \frac{I(v^2y_3^2-2Iwz_3-2Ivy_3+u^2x_3^2+2ux_3vy_3+w^2z_3^2-2-2Iux_3+2ux_3wz_3+2vy_3wz_3)e^{-I(ux_3+vy_3+wz_3)}}{2(ux_3+vy_3+wz_3)^3}$

- F s'annule si : $S_{18} = \{x_1 = -\frac{-vy_3-wz_3-ux_3+vy_1+wz_1}{u}\}$,
  sous cette condition : $f_{18} = e^{-I(Xy_3v+Xux_3+Xwz_3+x_2Yu+x_3Zu+y_2Yv+y_3Zv+wz_2Y+wz_3Z)}$
  $\Rightarrow F_{18} = -\frac{Ie^{-I(y_2v+ux_2+z_2w)}}{(vy_3+ux_3+wz_3-ux_2-y_2v-z_2w)^2(y_2v+ux_2+z_2w)} + \frac{I}{(ux_3+vy_3+wz_3)^2(y_2v+ux_2+z_2w)}$
  $- \frac{\begin{pmatrix} (-y_2y_3v^2 - x_3uy_2v + Iwz_2 - y_2vwz_3 + v^2y_3^2 - ux_2vy_3 - vz_2wy_3 - 2Iwz_3 \\ +2vy_3wz_3 + 2ux_3vy_3 - 2Ivy_3 + w^2z_3^2 + 2ux_3wz_3 - 2Iux_3 - z_2wux_3 \\ -z_2w^2z_3 + u^2x_3^2 - u^2x_2x_3 - ux_2wz_3 + Ivy_2 + Iux_2)e^{-I(ux_3+vy_3+wz_3)} \end{pmatrix}}{(ux_3+vy_3+wz_3)^2(vy_3+ux_3+wz_3-ux_2-y_2v-z_2w)^2}$

– F_{18} s'annule si : $S_{18.1} = \{x_2 = \frac{vy_3+ux_3+wz_3-y_2v-z_2w}{u}\}$,
sous cette condition : $f_{18.1} = e^{-I(ux_3+y_3v+wz_3)(X+Y+Z)}$

$$\Rightarrow F_{18.1} = \frac{I}{(ux_3+vy_3+wz_3)^3} + \frac{I(v^2y_3^2-2Iwz_3-2Ivy_3+u^2x_3^2+2ux_3vy_3+w^2z_3^2-2-2Iux_3+2ux_3wz_3+2vy_3wz_3)e^{-I(ux_3+vy_3+wz_3)}}{(ux_3+vy_3+wz_3)^3}$$

– F s'annule si : $S_{19} = \{x_2 = -\frac{-vy_3-wz_3-ux_3+vy_2+wz_2}{u}\}$,
sous cette condition : $f_{19} = e^{-I(x_1Xu+Yy_3v+Yux_3+Ywz_3+x_3Zu+y_1Xv+y_3Zv+wz_1X+wz_3Z)}$

$$\Rightarrow F_{19} = \frac{I}{(ux_3+vy_3+wz_3)^2(x_1u+y_1v+z_1w)} - \frac{Ie^{-I(x_1u+y_1v+z_1w)}}{(vy_3+ux_3+wz_3-y_1v-z_1w-x_1u)^2(x_1u+y_1v+z_1w)} - \frac{\begin{pmatrix} (-y_1y_3v^2-2Iwz_3-x_3uy_1v-y_1vwz_3+v^2y_3^2-vy_3z_1w+2ux_3vy_3 \\ +2vy_3wz_3-ux_1vy_3+Ix_1u-ux_1wz_3+u^2x_3^2-w^2z_3z_1-2Ivy_3 \\ +Iz_1w-2Iux_3+Iy_1v-u^2x_3x_1+2ux_3wz_3-ux_3z_1w+w^2z_3^2)e^{-I(ux_3+vy_3+wz_3)} \end{pmatrix}}{(ux_3+vy_3+wz_3)^2(vy_3+ux_3+wz_3-y_1v-z_1w-x_1u)^2}$$

Le code Maple de ces résolutions, ainsi que l'implémentation du calcul du Fourier d'un objet 3D dont le maillage est une variété topologique, sont disponibles, en langage C et en Matlab, sur la page Web : http://liris.cnrs.fr/julien.ricard/index.php?page=publications

Remerciement

Ce travail est financé par le Ministère Français de la recherche dans le cadre du projet RNRT SEMANTIC-3D (http://www.semantic-3d.net).

Références

1. Canterakis, N. : 3d zernike moments and zernike affine invariants for 3d image analysis and recognition. In : 11th International Conference on Image Analysis (ICIA '99), Kangerlussuaq, Groenland (1999)
2. Novotni, M., Klein, R. : Shape retrieval using 3d zernike descriptors. Computer Aided Design **36**(11) (2004) 1047–1062
3. Saupe, D., Vranic, D.V. : 3d model retrieval with spherical harmonics and moments. In : the 23rd Symposium on Pattern Recognition (DAGM '01), Londres, Royaume-Unis, Springer-Verlag (2001) 392–397
4. Lien, S.L.C. : Combining Computation with Geometry. PhD thesis, Technical Report. California Institute of Technology, Pasadena, Californie (1984)
5. Zhang, D., Chen, T. : Efficient feature extraction for 2d/3d objects in mesh representation. In : IEEE International Conference on Image Processing (ICIP '01). Volume 1., Thessaloniki, Gréce (2001) 935–938
6. Paquet, E., Rioux, M. : The mpeg-7 standard and the content-based management of three-dimensional data : A case study. In : IEEE International Conference on Multimedia Computing Systems (ICMCS '99). Volume 1., Florence, Italie (1999) 375–380

7. Vranic, D.V., Saupe, D. : 3d shape descriptor based on 3d fourier transform. In : EURASIP Conference on Digital Signal Processing for Multimedia Communications and Services (ECMCS '01), Budapest, Hongrie (2001) 271–274
8. Malzbender, T. : Fourier volume rendering. ACM Transactions on Graphics **12**(3) (1993) 233–250
9. Ricard, J., Coeurjolly, D., Baskurt, A. : Generalizations of angular radial transform for 2d and 3d shape retrieval. Pattern Recognition Letters **26**(14) (2005) 2174–2186
10. Novotni, M., Klein, R. : 3d zernike descriptors for content based shape retrieval. In : the eighth ACM symposium on Solid modeling and applications (SM '03), ACM Press (2003) 216–225