

Bords d'une surface médiane : Identifications et applications

Thomas Delame & Céline Roudet & Dominique Faudot

Le2i - Université de Bourgogne, Dijon

Résumé

Un squelette d'une forme fermée est une structure mince, centrée dans cette forme, décrivant sa topologie et sa géométrie. Les squelettes permettent de développer des applications interactives en synthèse d'images : l'utilisateur peut manipuler intuitivement des formes en modifiant leurs squelettes. Parmi toutes les formulations de squelettes, nous nous intéressons en particulier à la surface médiane. Ses éléments, nommés atomes, sont les sphères maximales intérieures à la forme décrite. Les positions des atomes sont organisées en courbes et surfaces, qui composent la structure squelettale. Cette structure peut être d'une grande aide pour manipuler une forme. Cependant, en pratique, les liens entre atomes qui définissent la structure squelettale ne suivent aucune règle. Il est alors difficile d'en faire usage. Nous proposons ici une contribution à l'obtention d'une structure squelettale utile, en présentant nos deux méthodes d'identification des bords de la structure squelettale. La force de ces méthodes est qu'elles ne nécessitent aucune donnée additionnelle. Nous terminons ce papier par quelques applications des bords ainsi calculés.

A skeleton is a thin centered structure in a closed object, describing the topology and the geometry of that object. Thanks to skeletons, it is possible to build interactive computer graphics applications : the user can intuitively interact with an object through its skeleton. Among the many existing skeleton formulations, we focus in particular on the medial surface. The elements of such a skeleton, named atoms, are the maximal inscribed spheres of the object. The positions of atoms are organised in curves and surfaces, forming the skeletal structure. This structure could improve a lot the interaction with an object through its skeleton. However, in practice, the links between atoms that define this structure, do not follow any rule. It is then hard to make an efficient use of it. In this paper, we propose two methods of skeleton boundary identification, as a first step toward the build of a skeletal structure ready to be used in interactive applications. The strength of our methods is that no additional data is required. We also show possible applications of those boundaries.

Mots-clés : surface médiane, bords de la surface médiane, importance des atomes, structure squelettale

1. Introduction

Les squelettes sont des structures qui décrivent les phénomènes de compréhension et de reconnaissance des formes chez l'être humain [Blu67, Ley92]. Des squelettes sont même calculés par le cortex visuel [LMRL98, HCC12] lors de ces phénomènes. En utilisant un squelette comme modèle de représentation des formes, nous serions capables d'établir un lien intuitif entre les utilisateurs et les applications interactives en synthèse d'image. En effet, les formes sont gé-

néralement représentées par des modèles qui répondent plus à des contraintes de performances qu'à l'importance d'une interaction intuitive avec l'utilisateur. Il est alors nécessaire d'apprendre à utiliser ce modèle, ainsi que les outils fournis sur ce modèle, pour pouvoir prévoir les résultats d'une interaction. Nous pensons que ce fossé entre l'utilisateur et les applications interactives peut être comblé par les squelettes.

Il existe un grand nombre de formulations des squelettes. Nous avons par exemple les squelettes courbes [DS06, CSM07], les squelettes voxels [TW02, DWT06] et les squelettes surfaces [BN78, BA84]. Parmi toutes ces formulations, la plus adaptée à une utilisation comme modèle de représentation des formes est la surface médiane [BN78]. Les élé-

ments d'un tel squelette, appelés atomes, sont les sphères maximales intérieures d'une forme. Ce sont ces sphères qui capturent la géométrie de l'objet. En trois dimensions, les positions des atomes, i.e. les centres de ces sphères, sont organisées en courbes et en surfaces appelées les composantes squelettiques. Nous considérons en particulier le squelette analytique de cette formulation : les grandeurs sont à valeur dans \mathbb{R} .

La surface médiane et la forme qu'elle décrit sont homotopiquement équivalents [Lie03]. Simplement, cela signifie que le squelette et l'objet sont connectés de la même manière, ou encore qu'ils possèdent la même structure de « branchement ». La topologie du squelette exact se traduit en pratique par des liens qui organisent un ensemble fini d'atomes. Le lien entre deux atomes a et b est noté $a \frown b$. Cette organisation, que nous appelons structure squelettale, capture la topologie de l'objet. Cette structure est nécessaire pour interagir avec une forme via son squelette. Nous donnons quelques exemples afin de faire sentir cette nécessité.

Plaçons-nous dans le cas d'une déformation interactive d'une forme à l'aide d'une souris. En plaçant une force sous le curseur, il est possible d'utiliser des équations de déformation des matériaux, par exemple, pour que cette force déforme le squelette, ergo que la forme soit modifiée par la trajectoire du curseur (comme réalisé en deux dimensions dans [DLCB11]). Ces équations utilisent des liens entre atomes, pour transmettre de proche en proche les contraintes le long du squelette. Grâce aux liens de la structure squelettale, il est aisé d'obtenir l'adjacence d'un atome. Un matériau a tendance à plus se fléchir là où il est plus mince. Ces zones correspondent aux endroits de faible largeur sur le squelette, détectables à l'aide de la structure squelettale également.

Les différentes courbes et surfaces de la structure squelettale, ont un étroit lien théorique avec les composantes logiques de la forme. Ces composantes logiques sont des unités sémantiques de la forme, comme les mains, les bras, le torse, la tête et les jambes pour le modèle d'un personnage. Avoir une segmentation du squelette en composantes squelettiques, c'est donc posséder une segmentation de la forme décrite par ce squelette. Pour reprendre l'exemple précédent de déformation interactive, nous pouvons limiter la propagation d'une contrainte à une composante squelettale, de sorte à ne déformer qu'une seule composante logique. Cela permet d'effectuer simplement une modification de la pose de la forme.

Il est commun de chercher à calculer l'importance des atomes d'une surface médiane. Grâce à cette importance, il est notamment possible de : simplifier une forme en retirant tous les atomes ayant une importance inférieure à un seuil (l'importance agi comme un niveau de détail) ou d'extraire un squelette courbe à partir de la surface médiane (le squelette courbe est considéré comme la partie la plus importante d'un squelette surface). L'importance permet aussi de pilo-

ter des opérations sur les squelettes. Supposons qu'un outil de changement de pose soit appliqué au niveau du bras d'un personnage. Lors de cette modification de pose, la main doit accompagner le bras dans son mouvement, au lieu de rester fixe et d'avoir le reste du corps qui se déplace. Ce problème peut être résolu si le tronc a une plus grande importance que la main. De même, avec une importance bien choisie, les contraintes de déformations peuvent être propagées dans la direction des importances croissantes afin d'avoir un impact visuellement perceptible sur la forme.

Les techniques récentes [DS06, RvWT08, JKT13] proposent de définir l'importance de sorte qu'elle croisse lorsqu'on se déplace sur la structure squelettale vers l'intérieur. Ces techniques calculent ce genre d'importance avec des données additionnelles impossibles à obtenir à partir du squelette seul. Si le squelette est modifié, pour traduire un changement de la forme, les importances des atomes ne peuvent être mises à jour. Remarquons qu'une telle importance est proportionnelle à la distance des bords du squelette. Une structure squelettale permet d'identifier simplement les atomes bords : tout voisinage de leurs positions sur la structure squelettale contient au moins un point qui n'est la position d'aucun atome. À partir d'un feu de prairie initié aux bords du squelette, il est donc possible d'obtenir une mesure d'importance croissant vers l'intérieur en prenant la date à laquelle la position d'un atome rencontre le front d'onde.

La structure squelettale est donc d'une aide non négligeable à l'interaction avec une forme décrite par un squelette. Cependant, en pratique, la structure squelettale ne permet pas d'avoir des voisinages cohérents, de segmenter le squelette en composantes squelettiques ou d'identifier les bords du squelette.

2. État de l'art

La première référence à une structure squelettale en pratique qui converge vers la topologie du squelette exact (lorsque le nombre d'atomes dans le squelette augmente) est due à l'algorithme de squelettisation du *Power Shape* [ACK01]. Elle est obtenue à partir d'une tétraédrisation de Delaunay d'un ensemble de sphères (aussi appelée tétraédrisation régulière). Ces sphères sont les sphères circonscrites à des tétraèdres de Delaunay d'un échantillonnage de la forme à squelettiser. Cependant cette structure est loin d'être suffisante pour la mise en place d'algorithmes efficaces sur les squelettes.

Idéalement, nous souhaiterions que la structure squelettale s'apparente à un maillage conforme : les sommets sont aux positions des atomes et les liens entre atomes induisent des faces qui ne s'intersectent pas entre elles. De plus, il serait intéressant que ce maillage soit varié par morceaux : tout voisinage d'un sommet est de dimension deux, sauf aux jonctions (dimension au moins égale à trois) et aux bords des composantes squelettiques. En pratique, il est rare, voire ex-

ceptionnel, d'obtenir ce genre de structure après la squelettisation d'une forme quelconque. Les faces induites par les liens forment une soupe de polygones. De plus, autour des jonctions entre les composantes squelettiques, des atomes de deux composantes différentes sont liés entre eux. Les liens entre atomes ont une telle complexité, qu'il est difficile d'en faire usage.

Les travaux tentant de résoudre le problème de la structure squelettique ne sont pas nombreux. Nous pouvons citer le squelette *Medial Scaffold* [LK01] qui repose sur une identification des atomes bords et les atomes jonctions, grâce à une classification des atomes sur le nombre et l'ordre de contact théorique des sphères maximales intérieures. Cette identification est effectuée lors de la squelettisation, car elle utilise des données additionnelles qui ne peuvent être calculées qu'à partir de la forme. Cette technique n'est donc pas compatible avec l'utilisation que nous voulons faire des squelettes. En effet, notre squelette comme modèle de représentation des formes va être de nombreuses fois modifié, pour refléter des interactions entre l'utilisateur et la forme. Nous serions donc dans l'incapacité d'actualiser les atomes bords et jonctions sans avoir recours à une coûteuse et approximative squelettisation. De plus, cette méthode ignore la structure squelettique en dehors des bords et des jonctions : le chaos règne à l'intérieur des composantes squelettiques.

Récemment, une méthode de squelettisation d'un maillage par contraction de sphères [MBC12] a été proposée. L'obtention de la surface médiane est très rapide, grâce à la parallélisation des traitements. Cependant la surface médiane est dépourvue de structure squelettique. Deux méthodes de reconstruction de cette structure ont alors été proposées [TJ12, JKT13], appelées reconstruction de Delaunay et reconstruction par variété. La première consiste à projeter toutes les positions d'atomes dont les sphères sont tangentes à un triangle T , dans le plan de T . Les positions sont ensuite triangulées par une triangulation de Delaunay. Cette triangulation est enfin reprojetée sur les atomes pour construire itérativement la structure squelettique. Le résultat produit une structure squelettique similaire à celle du *Power Shape* mais avec une quantité notable de petits trous. Nous savons, par les auteurs, que même si la structure produite est acceptable pour la visualisation, elle l'est bien moins pour une utilisation dans nos applications.

La seconde méthode de reconstruction, utilise les vecteurs caractéristiques. Les vecteurs caractéristiques $\vec{x}p_i$ d'un atome de position x indiquent les points de tangence p_i entre la sphère maximale et la surface de l'objet décrit. En pratique, les points p_i correspondent à un échantillonnage de la surface utilisé pour calculer le squelette. En regardant la variation des vecteurs caractéristiques d'un atome à un autre, la méthode de reconstruction par variété commence par grouper les atomes en composantes squelettiques. L'idée étant qu'une forte variation indique l'appartenance à deux composantes squelettiques différentes. Chaque composante

est ensuite maillée indépendamment grâce à un algorithme de sphère pivot [BMR*99]. Cette méthode propose une segmentation du squelette en composantes squelettiques grâce aux vecteurs caractéristiques, mais le squelette n'est pas totalement connecté : les jonctions sont exclues de toutes composantes.

Tous les travaux sur la structure squelettique utilisent des données additionnelles, obtenues lors de la squelettisation. Ces données ne peuvent être recalculées à partir du squelette seul. Nous souhaitons résoudre le problème de la structure squelettique, de manière indépendante de tout algorithme de squelettisation et de données additionnelles. Pour cela, nous devons identifier les composantes squelettiques à l'aide de la structure actuelle. Ces composantes sont délimitées par les bords et les jonctions. Nous proposons alors dans ce papier un moyen d'identifier les atomes bords d'un squelette. Un tel algorithme, à notre connaissance, n'est pas encore disponible, de sorte que l'on cherche souvent une solution alternative pour pallier l'inaccessibilité aux bords. Par exemple, dans [TJ12] les bords sont nécessaires pour calculer une mesure d'importance des atomes définie à partir d'équations de propagations. Les auteurs préfèrent approcher le résultat grâce à des données additionnelles, jugeant le problème d'identification des bords trop délicat.

Organisation du papier

Dans la section 3, nous présentons deux méthodes d'identification des bords. Ces deux méthodes diffèrent par la solution proposée pour réduire la complexité des liens entre atomes, afin de poser clairement la notion de voisinage. Nous proposons un voisinage dans l'espace \mathbb{Z}^3 (section 3.2.1) et un voisinage dans l'espace \mathbb{R}^2 (section 3.2.2). Nous donnons ensuite une méthode d'extraction des bords dans les deux cas (section 3.3). Dans la section 4, nous utilisons les bords ainsi obtenus pour calculer l'importance des atomes, détecter les composantes squelettiques courbes et hiérarchiser le squelette. Ces applications nous permettent de valider notre méthode en démontrant son utilité.

3. Identification des bords

Dans cette section, nous proposons nos méthodes d'identification des bords. Nous commençons par donner les définitions théoriques d'un bord, avant de choisir celle qui est la plus adaptée à nos contraintes. Cette définition repose sur la notion de voisinage d'une position d'un atome. Nous formalisons donc ensuite deux types de voisinages à mettre en pratique pour extraire les bords du squelette. Nous terminons cette section par la présentation de nos résultats.

3.1. Définitions théoriques d'un bord

Il existe deux définitions théoriques d'un atome bord. La première, que l'on retrouve dans la squelettisation du *Medial Scaffold* [LK01], utilise la notion de contact entre la

sphère maximale d'un atome et l'objet décrit par le squelette. Les contacts d'un atome sont classifiés selon leurs nombres et leurs types. En particulier, les atomes bords sont ceux dont les sphères sont osculatrices à l'objet, en un seul point de contact appartenant à une ligne de crête de l'objet. Cette situation ne peut pas être identifiée à partir du squelette seul : il nous faut connaître la surface de l'objet.

À l'aide de la topologie, nous posons une autre définition d'un atome bord. Nous commençons par expliciter le voisinage $\mathcal{V}(a)$ de la position p d'un atome a : c'est une partie de l'espace qui contient un ouvert \mathcal{U} , contenant lui-même p , i.e. $p \in \mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}(a)$. À l'aide des voisinages, nous identifions un atome bord a comme un atome pour lequel tout voisinage contient au moins un élément de la structure squelettale (une position d'un atome) et un élément extérieur (un point qui n'est la position d'aucun atome). Autrement dit, pour un atome bord, il n'est pas possible de construire un voisinage qui ne contient que des positions d'atomes. Cette définition est suffisamment générale pour être utilisée sur tout squelette, sans recourir à des données additionnelles.

3.2. Voisinage d'un atome

Notre définition d'un atome bord repose sur les voisinages. À cause de la complexité de la structure squelettale en pratique, il est délicat de connaître les points d'un voisinage qui correspondent à une position d'atome. Nous proposons de changer d'espace de travail, actuellement \mathbb{R}^3 , pour contourner la difficulté : \mathbb{Z}^3 et \mathbb{R}^2 . Nous présentons nos définitions pratiques d'un voisinage de la position d'un atome dans chacun de ces espaces.

3.2.1. Liens dans l'espace \mathbb{Z}^3

Supposons que l'on dispose d'un squelette voxel : les grandeurs sont à valeur dans \mathbb{Z} , donc les positions des atomes sont des voxels (que nous prenons cubiques, pour ne pas favoriser une direction) et les rayons sont des entiers positifs. Les liens entre atomes, pour ce squelette particulier, sont définis par la connexité considérée dans l'espace \mathbb{Z}^3 . La connexité la plus courante est la 26-connexité : deux voxels sont connectés si ils partagent au moins un sommet. Ces liens entre atomes sont plus facile à manipuler que les liens d'un squelette analytique. C'est pourquoi nous proposons de travailler temporairement avec un squelette voxel pour identifier les bords d'un squelette analytique.

La voxellisation du squelette, c'est-à-dire sa conversion dans cet espace peut se faire très efficacement. Pour cela nous considérons la subdivision d'un arbre octal jusqu'à une profondeur déterminée. Les primitives géométriques utilisées pour cette subdivisions sont les positions des atomes, ainsi que les arêtes, les triangles et les tétraèdres induits par les liens entre les atomes. Remarquons que si un sommet est dans une cellule de l'arbre octal, toute arête, tout triangle et tout tétraèdre ayant ce sommet, intersecte cette cellule.

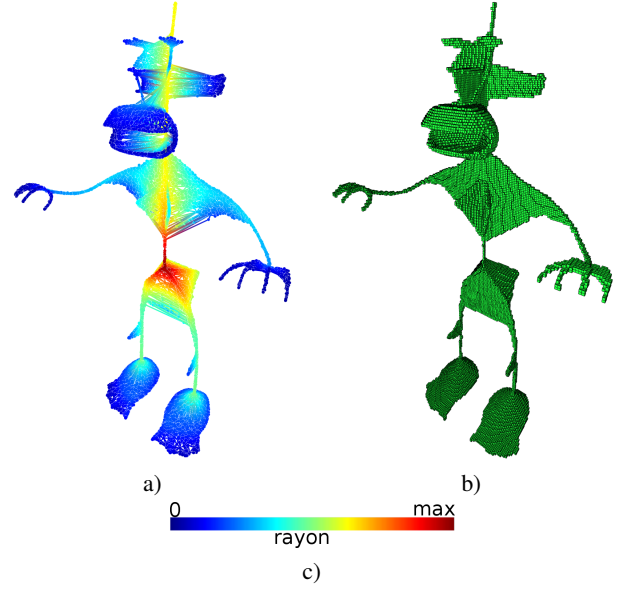


Figure 1: Illustration de la conversion de la structure squelettale dans l'espace \mathbb{Z}^3 . a) Surface médiane analytique. b) Structure squelettale dans \mathbb{Z} . c) Code couleur représentant les rayons des atomes.

En utilisant ces relations entre les primitives géométriques, la construction de l'arbre octal est grandement optimisée. La structure squelettale du squelette voxel correspond aux feuilles de l'arbre octal (voir la figure 1).

Sur les voxels, nous considérons la distance de Tchebychev d_{\max} : $d_{\max}(p, q) = \max\|p_i - q_i\|$. À l'aide de cette distance, nous construisons la base de voisinage d'un atome a de position p : $\mathcal{V}_{\mathbb{Z}^3, i}(a) = \{v : d_{\max}(v, p) \leq i\}$. Ces voisinages correspondent aux boules fermées pour la distance retenue. Il est alors aisé de savoir si un voxel de ce voisinage est la position d'un atome du squelette voxel.

3.2.2. Liens dans l'espace \mathbb{R}^2

Pour notre second voisinage, nous commençons par considérer l'apparence locale de l'objet autour d'un atome a . Pour cela, nous construisons l'ensemble $\text{APPARENCE}_{\kappa}(a)$, composé des atomes s tels qu'il existe un atome s' vérifiant :

- i) $s \cap s'$
- ii) les sphères de s' et a s'intersectent
- iii) $\|\text{POSITION}(s') - \text{POSITION}(a)\| < \kappa \cdot \text{RAYON}(a)$

Cet ensemble capture la configuration locale de l'atome a , ainsi que la géométrie locale, à un niveau de détail κ (voir la figure 2). Le point ii) évite d'avoir des atomes non pertinents dans l'ensemble, qui décrivent d'autres parties de l'objet et appartiennent à d'autres composantes squelettiques. La restriction de la structure squelettale aux atomes contenus dans $\text{APPARENCE}_{\kappa}(a)$, correspond à l'idée intuitive qu'on

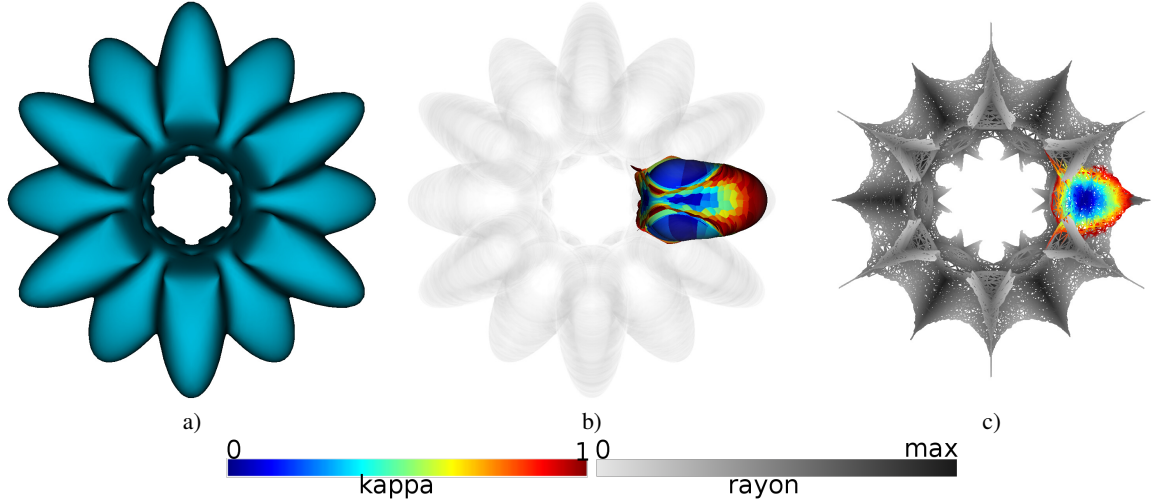


Figure 2: Illustration de la localité d'un atome. a) Objet décrit. b) Sphères de $\text{APPARENCE}_\kappa(a)$, le centre de a se trouve au niveau des sphères bleues (soit κ très petit). c) Restriction de la structure squelettale aux atomes de $\text{APPARENCE}_\kappa(a)$.

se fait du voisinage de la position d'un atome sur la structure squelettale.

La structure squelettale est un ensemble de courbes et de surface. Ainsi, tout voisinage de dimension trois contient au moins un point de l'espace qui n'est pas la position d'un atome. Il nous faut donc un voisinage formant une surface. Aussi, il n'est pas facile d'utiliser les liens dans la restriction de la structure squelettale aux atomes de $\text{APPARENCE}_\kappa(a)$ pour détecter si un point est la position d'un atome. Pour ces deux raisons, nous proposons de projeter cette restriction dans le plan tangent à la structure squelettale au niveau de la position de a . Ce plan tangent est approché en pratique par l'extraction des axes principaux des positions des atomes reliés à a . La projection est un graphe planaire, que nous notons $\mathcal{G}_\kappa(a)$.

Dans le plan, nous posons le disque centré sur la position de a et de rayon ρ comme étant le voisinage $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^2, \rho}(a)$. Pour analyser le contenu de ce voisinage, nous construisons le polygone $\mathcal{P}_\kappa(a)$, en réalisant l'union des arêtes de $\mathcal{G}_\kappa(a)$ et des triangles formés par tout triplet de nœuds deux à deux reliés. Nous considérons qu'un point est la position d'un atome s'il existe $\mathcal{P}_\kappa(a)$ contenant ce point.

3.3. Extraction des bords

Grâce aux deux voisinages de la position d'un atome présenté précédemment, nous montrons maintenant comment identifier les bords du squelette.

3.3.1. Utilisation de la voxellisation

Pour un atome a du squelette voxel, nous avons un voisinage $\mathcal{V}_{\mathbb{Z}^3, i}(a)$ dans lequel il est aisé de déterminer si un point

(un voxel) est la position d'un atome. Pour $i = 0$, le voisinage n'est pas pertinent, car il ne contient que a : aucun atome ne serait un bord si nous autorisons ce voisinage. Aussi, nous devons adapter quelque peu la définition d'un bord dans l'espace \mathbb{Z}^3 . En effet, le voisinage $\mathcal{V}_{\mathbb{Z}^3, 1}(a)$ ne contient généralement pas 27 voxels qui appartiennent à la structure squelettale du squelette voxel. Dans le cas contraire, cette structure squelettale formerait un volume au lieu d'un ensemble de courbes et de surfaces. Comme $\forall i \geq 1, \mathcal{V}_{\mathbb{Z}^3, 1}(a) \subseteq \mathcal{V}(a)_i$, chaque voisinage contient un voxel extérieur à la structure squelettale, et donc chaque atome est un bord. Nous proposons alors de lister les configurations de voxels, dans un voisinage, qui appartiennent au squelette.

Dans un voisinage $\mathcal{V}_{\mathbb{Z}^3, i}(a)$, il y a $n = (2 \cdot i + 1)^3$ voxels. Chacun de ces voxels peut faire partie du squelette ou non. Remarquons que le voxel position de l'atome a appartient toujours au squelette. Par conséquent, il y a 2^{n-1} configurations possibles dans ce voisinage. Nous avons donc tout intérêt à réduire autant que possible ce nombre, en choisissant de faibles valeurs de i . C'est pourquoi nous considérons uniquement $\mathcal{V}_{\mathbb{Z}^3, 1}(a)$. Malgré tout, le nombre de configurations d'un voisinage dépasse les soixante-sept millions pour $i = 1$. Nous utilisons donc un critère de caractérisation d'une configuration de bord.

En théorie et en général, la position d'un atome fait partie d'une surface. Son voisinage doit donc être plan. Sur une voxellisation, le squelette a une épaisseur locale de deux ou trois voxels. Pour se rapprocher de la théorie, nous projetons les voxels de $\mathcal{V}_{\mathbb{Z}^3, 1}(a)$ dans un plan passant par la position de a et orthogonal à un des axes du repère. Cette projection transforme le voisinage en un disque de rayon 1 (pour la distance de Tchebychev). Si un point du disque n'est pas la pro-

jection d'un voxel du squelette, a est alors un bord suivant l'axe du repère utilisé. Lorsque a est bord suivant au moins un axe, nous considérons qu'il est un bord du squelette.

Lorsque la normale du plan tangent au squelette en a est fortement différente des trois axes du repère, cette méthode peut conduire à beaucoup de faux positifs. Nous avons mis en place des filtrages pour éliminer ces atomes faussement détectés comme bords. Par exemple, remarquons qu'un bord n'est pas isolé : au moins un de ses voisins est un bord également. Nous choisissons ainsi d'ignorer toute composante d'atome bords de moins de trois éléments.

Pour réduire encore plus ces faux positifs, nous regardons certains voxels situés dans $\mathcal{V}_{\mathbb{Z}^3,2}(a)$. Soit v un voxel de l'un des disques, obtenus par la projection de $\mathcal{V}_{\mathbb{Z}^3,1}(a)$ suivant un axe du repère \vec{e}_i . En notant p la position de v , ce voxel est la position d'un atome lorsque l'un des trois voxels de coordonnées p , $p + \vec{e}_i$ et $p - \vec{e}_i$, appartient à la structure squelettale du squelette voxel. Pour les quatre voxels aux coins du disque, nous allons regarder également aux coordonnées $p + 2\vec{e}_i$ et $p - 2\vec{e}_i$. Nous autorisons ce cas particulier une seule fois par disque. Nous verrons dans la section 3.4.1 que cela réduit très fortement les faux positifs.

3.3.2. Utilisation du plan tangent

Supposons que l'atome a soit un bord. Ainsi, pour tout voisinage plan $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^2,p}(a)$, aucun polygone $\mathcal{P}_\kappa(a)$ ne contient totalement $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^2,p}(a)$. Au lieu de tester cela pour tout p et tout κ , remarquons que le polygone $\mathcal{P}_\kappa(a)$ a une taille maximale (à cause du point ii) de la définition de $\text{APPARENCE}_\kappa(a)$). Soit κ_0 la plus petite valeur de κ produisant ce polygone maximale. Pour tout $\kappa > \kappa_0$, le polygone est donc le même. Tout voisinage $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^2,p}(a)$ contient la position de a et au moins un point extérieur au squelette. Ce point extérieur est infiniment proche de la position de a dans le plan tangent. Cela signifie que la position de a est sur le contour du polygone $\mathcal{P}_{\kappa_0}(a)$. En réduisant κ de plus en plus à partir de κ_0 , le polygone devient de plus en plus petit. Cependant, la position de a fait toujours partie du polygone. Ainsi, dans le cas où a est un atome bord, sa position est sur le contour de $\mathcal{P}_\kappa(a)$, pour tout $\kappa > 0$.

En pratique, nous choisissons une valeur de κ et nous extrayons le contour de $\mathcal{P}_\kappa(a)$ directement à partir du graphe $\mathcal{G}_\kappa(a)$. Pour une petite valeur de κ , il est possible qu'un atome non bord a ait sa position sur ce contour. Ce cas survient lorsque les atomes sont relativement espacés les uns des autres. Nous considérons qu'un lien entre deux atomes n'est pertinent que si leurs sphères s'intersectent. En effet, dans le cas contraire, les deux atomes peuvent décrire des parties différentes de l'objet et appartenir à des composantes squelettiques sans relation. Avec une valeur de $\kappa = 1$, les sphères considérées contiennent au moins celles qui intersectent a . La présence d'un faux positif est fortement improbable avec une telle valeur.

Le temps de calcul nécessaire à la détection d'un bord est

proportionnel à la valeur de κ . Pour de meilleures performances, nous recommandons de définir la valeur de κ pour refléter au mieux la densité des positions des atomes dans un squelette. Cette densité est sensiblement la même pour des squelettes obtenus par le même algorithme de squelettisation avec des maillages qui ont des densités de sommets similaires. Dans nos expérimentations, nous nous sommes contentés d'une valeur $\kappa = 0.3$.

3.4. Résultats

La seule autre méthode existante, celle du squelette *Medial Scaffold*, qui identifie les bords (lors de la squelettisation) n'a pas d'implantation logicielle connue. Il nous est donc impossible de nous comparer de manière quantitative à cette méthode pour évaluer et valider nos travaux. Pour remédier à ce manque, nous illustrons les possibilités pratiques des bords que nous identifions, dans la section 4.

Pour la validation de nos résultats, nous reposons sur une évaluation perceptuelle : nous regardons si les bords, et les bords seuls, sont identifiés. Pour réaliser cela, nous avons choisi un ensemble de 27 objets, que nous avons squelettisé selon deux algorithmes différents, qui utilisent les diagrammes de Voronoï. Le premier squelette est le *Power Shape* [ACK01], noté \mathcal{S}_{Pow} . Le second squelette est le *Scale Axis* [MGP10], noté \mathcal{S}_{Scale} . Les structures squelettiques des deux types de squelette est obtenue par une tétraédrisation régulière. Le \mathcal{S}_{Scale} possède cependant une densité d'atomes bien plus élevée que \mathcal{S}_{Pow} , ce qui permet d'étudier la manière dont nos méthodes se comportent face à cette variation de densité.

Nous présentons nos résultats pour les deux méthodes, avant d'analyser leurs limitations.

3.4.1. À l'aide d'une voxellisation

Notre première méthode, présentée dans la section 3.3.1, identifie correctement les bords du squelette voxellisé, comme illustré par la figure 3. L'intérêt de regarder certains voxels de $\mathcal{V}_{\mathbb{Z}^3,2}(a)$ est également démontré par cette figure : un grand nombre de voxels faussement identifiés comme bords disparaissent.

Pour transférer les résultats obtenus à partir de la voxellisation vers un squelette, nous regardons le voxel dans lequel se trouve la position d'un atome : si ce voxel est un bord de la voxellisation, l'atome est marqué comme étant lui-même un bord. Nous obtenons alors une identification des bords du squelette analytique (voir la figure 4).

À cause de l'utilisation de la voxellisation, les résultats sont très peu influencés par une variation dans la structure squelettale. Sur les deux types de squelettes que nous avons testés, \mathcal{S}_{Pow} et \mathcal{S}_{Scale} , les bords sont très similaires, malgré la variation de la densité d'atomes.

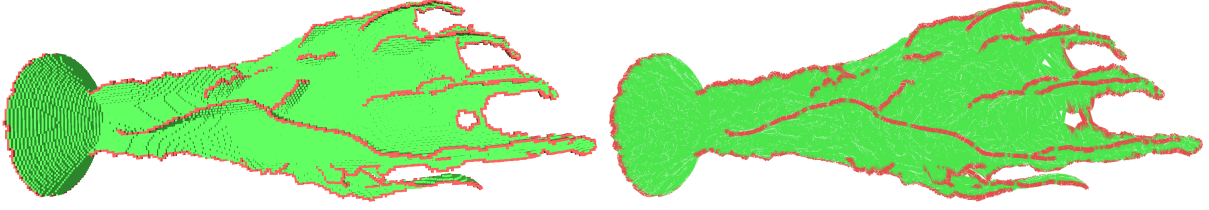


Figure 4: À partir d'une identification des bords de la voxelisation a), les bords du squelette analytique sont détectés b).

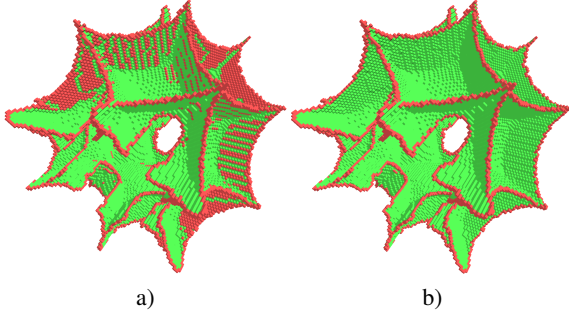


Figure 3: Illustration des voxels bords détectés sur la voxelisation d'un squelette. a) Seul le voisinage $\mathcal{V}_{\mathbb{Z}^3,1}(a)$ est considéré. b) Des configurations spéciales, faisant intervenir des éléments de $\mathcal{V}_{\mathbb{Z}^3,2}(a)$ permettent de retirer totalement les faux positifs sur ce modèle.

3.4.2. À l'aide d'une projection dans un plan

Notre méthode d'identification des bords grâce à un voisinage plan produit des résultats satisfaisants sur les deux types de squelettes étudiés. Cependant, il est difficile de valider visuellement ces résultats lorsque les squelettes sont bruités. En effet, un des bruits caractéristiques de la surface médiane donne une apparence hérissée à la structure squelettale (voir la figure 5 a) et b)). Les atomes faisant partie du hérississement sont alors identifiés comme des bords. À partir d'une image seule, il est ainsi délicat de savoir s'il s'agit d'atomes du hérississement ou de faux positifs dans la détection des bords. Pour vérifier le comportement de notre méthode, et convaincre le lecteur, nous nettoyons les squelettes du hérississement par la technique présentée dans [DRF13]. Nous constatons alors la précision de notre méthode sur les squelettes nettoyés (figure 5 c) et d)). La technique de nettoyage peut être utilisée sans contraintes, car, de même de nos méthodes dans ce papier, elle ne nécessite aucune donnée additionnelle et peut être utilisée sur toute surface médiane analytique.

Avec nos résultats, nous pouvons aussi vérifier la définition des bords données dans la théorie du *Medial Scaffold* [LK01]. En effet, en affichant l'union des sphères du squelette, on remarque que les atomes bords viennent mar-

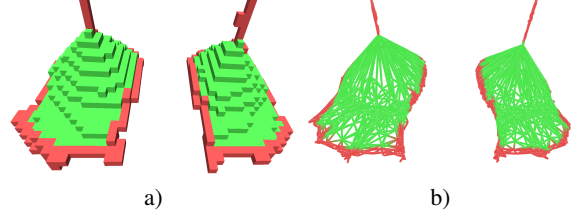


Figure 7: Illustration de l'importance d'avoir une voxelisation adéquate. a) La taille d'un voxel est relativement large par rapport à la densité d'atomes, sur les pieds du squelette d'Homer. b) Les bords identifiés sur le squelette sont en bandes de largeurs irrégulières, avec parfois des trous dans le contour.

quer des zones autour des lignes de crête de l'objet (voir la figure 6). Ainsi, notre méthode, qui utilise la définition topologique d'un bord sur la structure squelettale, produit les résultats escomptés, car ils correspondent aux définitions théoriques des atomes bords.

3.4.3. Limitations

L'inconvénient majeur de notre première méthode est sa dépendance à une voxelisation. Il est en effet nécessaire d'avoir une voxelisation qui approche correctement la structure squelettale du squelette. Augmenter le nombre de voxels n'est pas une solution. Plus le nombre de voxels est grand, plus leur taille est petite, car il s'agit de voxeliser le même espace. Avec une faible taille de voxel, peu d'atomes ont leurs positions à l'intérieur de voxels bords. Cela a pour conséquence une mauvaise identification des bords du squelette analytique : les bords sont clairsemés. À l'inverse, si les voxels ont une taille trop grande, les atomes identifiés forment de larges bandes. Il est parfois possible de rencontrer des bords larges avec des trous, comme le montre la figure 7. Nous recommandons l'utilisation de cette méthode sur les squelettes voxels uniquement, i.e. lorsqu'il s'agit d'applications où le squelette obtenu est déjà dans l'espace \mathbb{Z}^3 .

La seule contrainte de la méthode de la projection dans le plan tangent est l'implantation logicielle qui peut être délicate pour obtenir le contour du polygone $\mathcal{P}_K(a)$. Il est

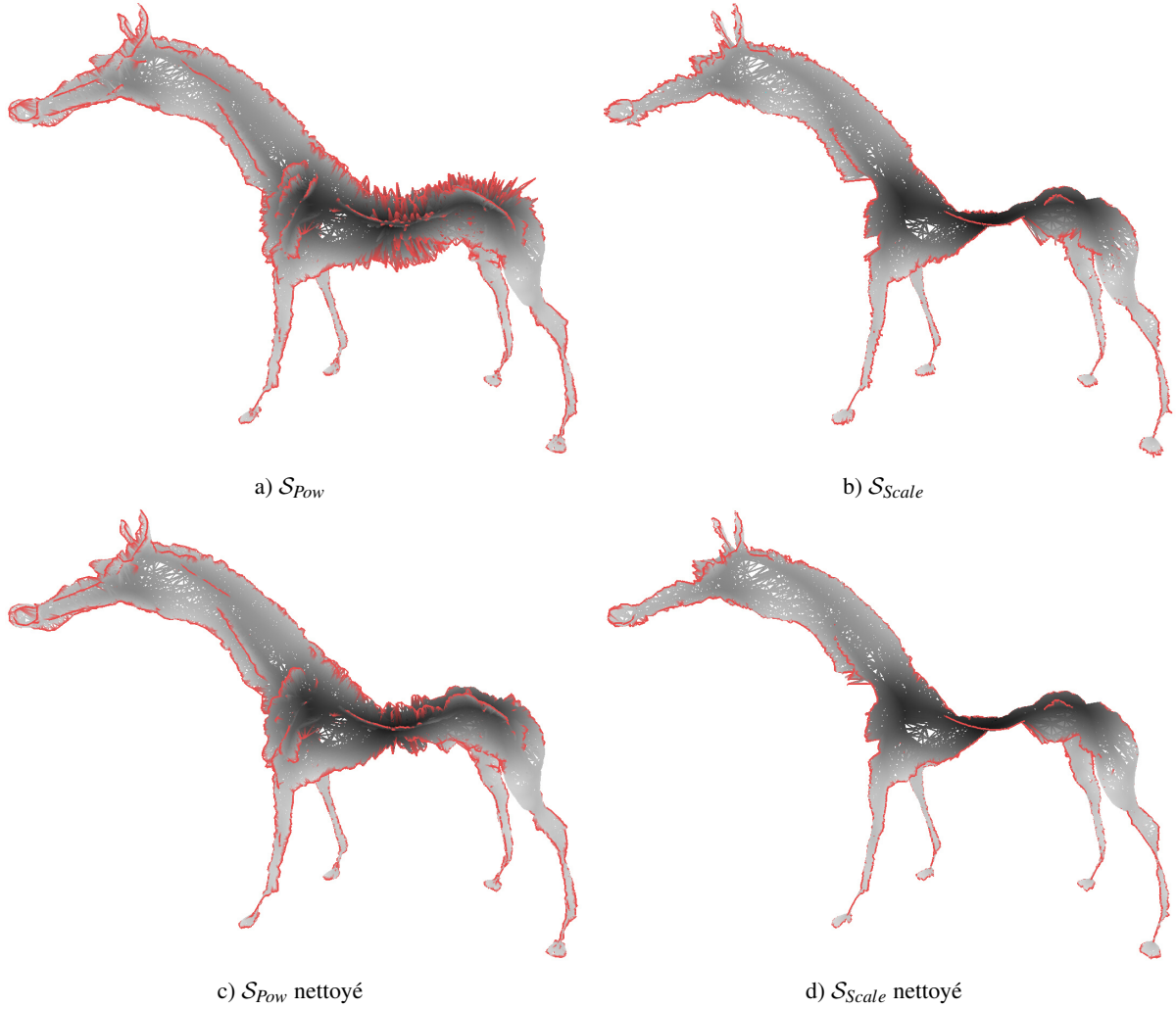


Figure 5: Identification des bords (en rouge) par projection sur plusieurs squelettes de la même forme. Le hérississement de la structure squelettale conduit à beaucoup d'atomes bords identifiés sur les squelettes S_{Pow} et S_{Scale} . Le nettoyage de ces squelettes permet une visualisation plus claire de nos résultats.

certes possible de tester si la position de a est à l'intérieur de ce polygone, ce qui est plus facile et plus rapide. Mais le contour permet bien plus que l'identification des bords. Par exemple, si a est un bord, la normale intérieure du contour donne la direction vers l'intérieur du squelette. De plus, deux atomes bords consécutifs sur le squelette ne sont pas forcément liés entre eux. Les sommets du contour du polygone, représentent les positions des atomes, mais également les intersections des arêtes du graphe $\mathcal{G}_K(a)$. En circulant sur le contour pour un bord a , il est possible d'identifier les atomes bords consécutifs. Ainsi, une segmentation des bords en composantes connexes est réalisable.

4. Applications

Dans cette section, nous illustrons les possibilités d'utilisation des bords identifiés par la méthode de projection dans le plan tangent. Nous commençons par calculer une importance pour chaque atome du squelette grâce à la propagation d'un flux. Nous utilisons ensuite les importances des atomes pour détecter les composantes squelettiques courbes à un niveau de détail près. Enfin, nous montrons comment construire une hiérarchie sur le squelette, dont la racine peut être utilisée pour l'animation squelettale.

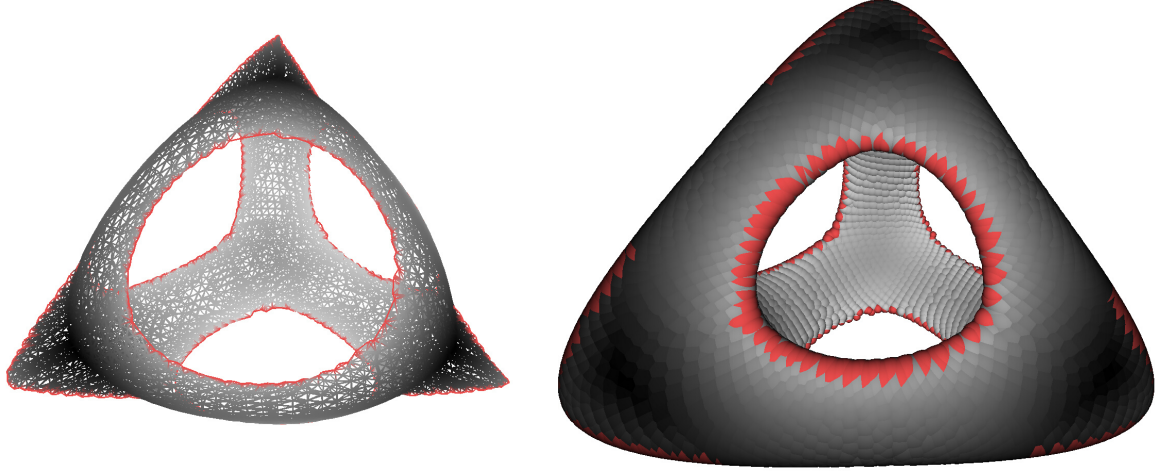


Figure 6: Illustration de la correspondance entre les atomes bords, que nous identifions par la structure squelettale, et la définition théorique d'un bord, comme étant une sphère tangente à l'objet en une ligne de crête.

4.1. Importance des atomes

En introduction, nous avons parlé d'une importance des atomes qui croît lorsque l'on se déplace vers l'intérieur, sur la structure squelettale. La direction de l'intérieur du squelette est égale à l'opposé de celle vers le bord le plus proche, selon la distance géodésique sur la structure squelettale. Remarquons que cette distance géodésique au bord le plus proche est une telle importance. Nous proposons donc de réaliser une approximation de la distance géodésique par une propagation de flux initié aux atomes bords pour calculer l'importance des atomes. La distance parcourue par le flux depuis les bords jusqu'à la position d'un atome a correspond alors à l'importance de a .

L'importance induite par la distance géodésique au bord n'est pas toujours adaptée. Lorsqu'une petite composante squelettale est reliée à une plus grande C , elle va modifier l'importance à la jonction avec C . Ainsi, l'importance ne sera pas monotone sur C si on se déplace vers l'intérieur. Pour résoudre ce problème, il nous faut contrôler la propagation du flux, de sorte qu'il ne puisse pas se transmettre d'une composante squelettale à une autre. Comme nous ne possédons pas de segmentation du squelette en composantes squelettals clairement définies, nous proposons d'utiliser à nouveau les bords. Dès que le flux rencontre la position d'un atome, il est dit brûlé. La transmission du flux se fait aux voisins d'un atome qui sont les bords du squelette formé en ignorant les atomes brûlés.

Comme le montre la figure 8, l'importance calculée correspond à nos attentes. Le contrôle de la propagation du flux permet une importance qui est monotone en se dirigeant vers l'intérieur du squelette. Cela peut être constaté au niveau des petites composantes représentant les veines de la main ou des petites composantes sous l'objet de genre 4. Nos résul-

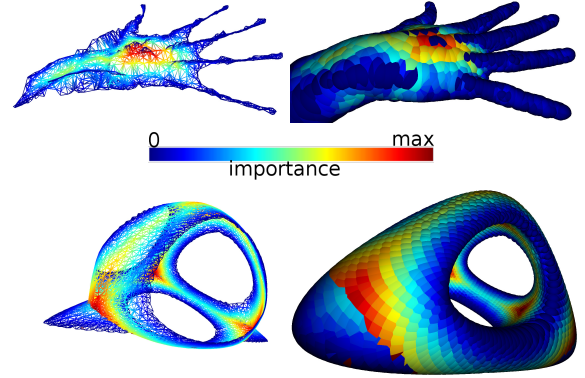


Figure 8: Illustration de l'importance des atomes calculées grâce à la détection des bords.

tats sont similaires à ceux présentés dans [TJ12], à la différence près que notre méthode ne nécessite aucune donnée additionnelle. Il est alors possible d'utiliser l'importance ainsi calculée pour simplifier une forme : cela se fait en filtrant les atomes ayant une importance inférieure à un seuil, avec des critères de préservation de la topologie du squelette.

4.2. Identification des composantes courbes

Nous pouvons aussi utiliser les bords et l'importance calculée grâce aux bords pour identifier les composantes courbes du squelette. En règle générale, les atomes sont rarement organisés en courbe, i.e. une chaîne d'atome ayant chacun uniquement deux voisins. L'idée serait alors d'identifier les composantes qui ont une épaisseur locale faible. Nous proposons de procéder en se plaçant au niveau d'un bord a ,

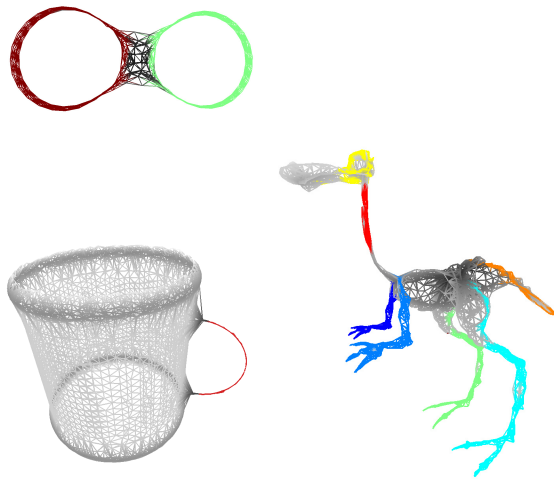


Figure 9: Identification des composantes squelettiques courbes à un niveau de détail près. Les différentes couleurs représentent les composantes détectées.

puis de parcourir la structure squelettale dans la direction de la normale à $\mathcal{P}_\kappa(a)$, jusqu'à atteindre un autre bord. La distance parcourue est notre estimation de l'épaisseur locale. En groupant les zones adjacentes d'épaisseur locale inférieure à une limite, nous avons une identification des composantes courbes à un niveau de détail près. Les résultats de nos premières expérimentations sont illustrés par la figure 9.

4.3. Hiérarchisation du squelette

Un squelette ayant uniquement des composantes squelettiques serait plus facile à manipuler pour interagir avec la forme qu'il décrit. De même, il est plus facile de clarifier, structurer et segmenter un tel squelette qu'un squelette ayant plusieurs composantes squelettiques surfaces. Cependant, sauf cas exceptionnel, les surfaces médianes ont toujours des composantes squelettiques surfaces. Nous proposons alors d'extraire un sous-ensemble du squelette, dont les atomes sont organisés en courbes uniquement. Ce sous-ensemble doit représenter les parties les plus importantes du squelette. Comme nous avons défini l'importance comme la distance au bord, les parties importantes d'un squelette se trouvent aux centres des composantes squelettiques. Nous appelons alors ce sous-ensemble le *meso-squelette*.

Le meso-squelette en lui-même ne permet pas de contrôler toute la forme. Il est nécessaire d'avoir une dépendance des atomes en dehors du meso-squelette avec ceux qui en font partie. Ainsi, une modification du meso-squelette est naturellement transmise à l'ensemble des atomes, ce qui induit une modification de la forme. Pour refléter cette dépendance, nous introduisons des liens hiérarchiques entre les atomes qui traduisent l'importance relative : un atome

père est plus important qu'un atome fils. Cette hiérarchie reprend la théorie présentée dans [DRF13] : les atomes les plus importants absorbent les moins importants en réorganisant la structure squelettale pour conserver la topologie du squelette. Le meso-squelette est la racine de cette hiérarchie.

Nous présentons dans la figure 10 un de nos premiers résultats sur la hiérarchisation du squelette. Ce processus est notamment possible grâce à l'obtention des bords d'un squelette, de l'importance des atomes et de l'identification des composantes squelettiques courbes. Le squelette ainsi hiérarchisé peut être utilisé pour l'animation squelettale : l'animateur interagit seulement avec le meso-squelette, les modifications sont transmises au reste des atomes, et la forme est modifiée. La différence avec les techniques traditionnelles d'animation squelettale est qu'il n'est pas nécessaire d'établir une correspondance entre l'objet à animer et la structure de contrôle. En effet, le squelette décrit déjà pleinement l'objet, qui peut être visualisé à l'aide des informations contenues dans le squelette seul (opération appelée *habillage* [DRF12]).

Conclusion

La structure squelettale est d'une importance majeure à la mise en pratique des surfaces médianes pour des applications interactives. Cependant, cette structure squelettale n'est pas suffisamment fiable pour être utilisée. L'identification des éléments importants du squelette, des bords et des jonctions entre les composantes squelettiques, de même que les composantes squelettiques elles-mêmes sont nécessaires. Dans ce papier, nous avons proposé une piste pour résoudre ces points, grâce à deux méthodes de détection des atomes bords. Nos méthodes ne nécessitent aucune donnée additionnelle, ce qui a deux conséquences distinctes. La première est de rendre nos méthodes applicables à n'importe quelle surface médiane. La seconde est d'autoriser la modification du squelette, car les bords peuvent être recalculés à partir du squelette modifié seul. Nous avons illustré les possibilités de ces bords en calculant les éléments importants du squelette, en identifiant les composantes squelettiques courbes et en hiérarchisant les atomes du squelette. Ces contributions sont une avancée vers la création d'un squelette idéal à l'interaction intuitive entre un utilisateur et une forme en trois dimensions.

Références

- [ACK01] AMENTA N., CHOI S., KOLLURI R. K. : The power crust. In *6th ACM symposium on Solid modeling and applications* (2001).
- [BA84] BRADY M. J., ASADA H. : Smooth local symmetries and their implementations. *International Journal of Robotic Research* (1984).
- [Blu67] BLUM H. : A Transformation for Extracting New

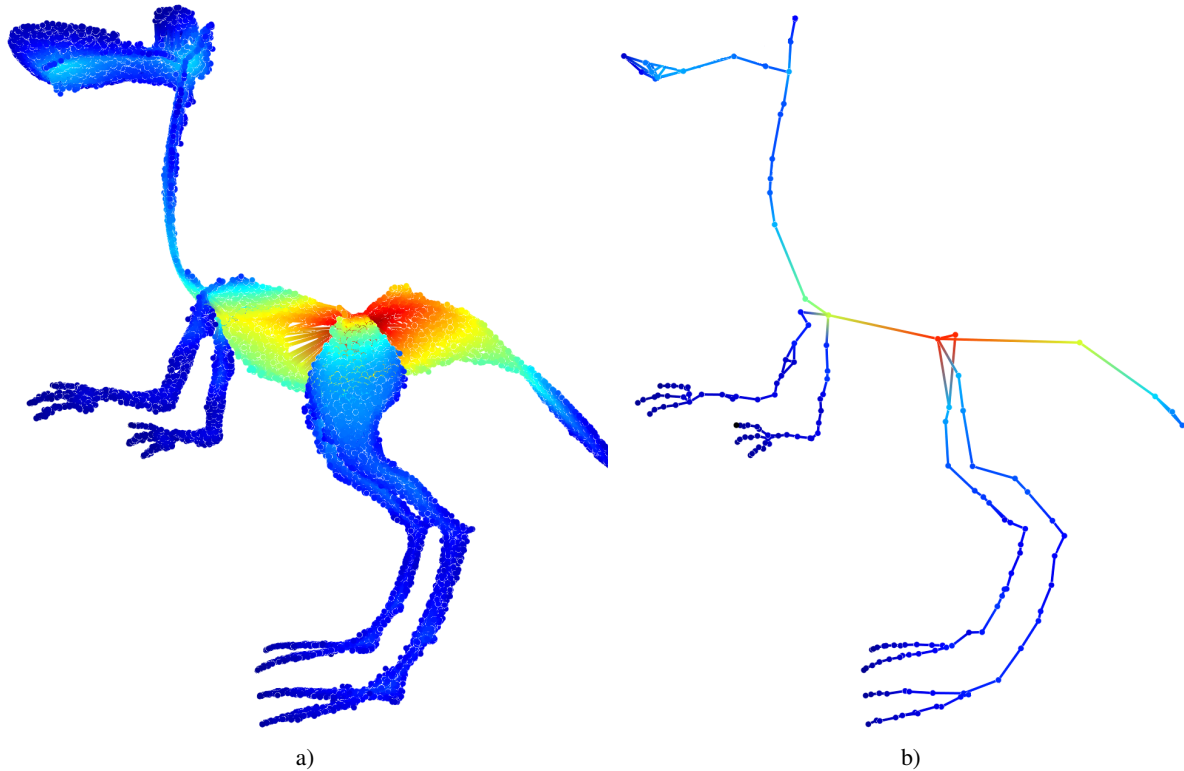


Figure 10: Illustration de la hiérarchisation du squelette. a) Squelette initial. b) Racine de la hiérarchie, i.e. le meso-squelette, pouvant être utilisé pour l'interaction avec la forme comme pour l'animation.

- Descriptors of Shape. In *Models for the Perception of Speech and Visual Form*. Cambridge, 1967.
- [BMR*99] BERNARDINI F., MITTLEMAN J., RUSHMEIER H., SILVA C., TAUBIN G. : The ball-pivoting algorithm for surface reconstruction. *Visualization and Computer Graphics, IEEE Transactions on*. Vol. 5, Num. 4 (1999).
- [BN78] BLUM H., NAGEL R. N. : Shape description using weighted symmetric axis features. *Pattern Recognition*. Vol. 10, Num. 3 (1978).
- [CSM07] CORNEA N. D., SILVER D., MIN P. : Curve-skeleton properties, applications, and algorithms. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*. Vol. 13 (2007).
- [DLCB11] DELAME T., LÉON J. C., CANI M. P., BLANCH R. : Gesture-based design of 2d contours : an alternative to sketching ? In *Proc. of the Eighth Eurographics Symposium on Sketch-Based Interfaces and Modeling* (2011), SBIM '11.
- [DRF12] DELAME T., ROUDET C., FAUDOT D. : From a medial surface to a mesh. *Computer Graphics Forum*. Vol. 31, Num. 5 (2012), 1637–1646.
- [DRF13] DELAME T., ROUDET C., FAUDOT D. : Identifying and structuring skeletal noise. In *Computational Science and Its Applications – ICCSA 2013*, vol. 7972 de *Lecture Notes in Computer Science*. 2013.
- [DS06] DEY T. K., SUN J. : Defining and computing curve-skeletons with medial geodesic function. In *Proceedings of the fourth Eurographics symposium on Geometry processing* (2006), SGP '06.
- [DWT06] DORTMONT M., WETERING H., TELEA A. : Skeletonization and distance transforms of 3d volumes using graphics hardware. In *Discrete Geometry for Computer Imagery*, vol. 4245 de *Lecture Notes in Computer Science*. 2006.
- [HCC12] HUNG C.-C., CARLSON E. T., CONNOR C. E. : Medial axis shape coding in macaque inferotemporal cortex. *Neuron*. Vol. 74, Num. 6 (2012).
- [JKT13] JALBA A. C., KUSTRA J., TELEA A. C. : Surface and curve skeletonization of large 3d models on the gpu. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*. Vol. 35, Num. 6 (2013).
- [Ley92] LEYTON M. : *Symmetry, causality, mind*. Cambridge, Mass. MIT Press, 1992.

- [Lie03] LIEUTIER A. : Any open bounded subset of \mathbb{R}^n has the same homotopy type than its medial axis. In *Proceedings of the Eighth ACM Symposium on Solid Modeling and Applications* (2003), SM '03.
- [LK01] LEYMARIE F. F., KIMIA B. B. : The shock scaffold for representing 3d shape. In *In Proc. of 4th International Workshop on Visual Form (IWVF4)* (2001).
- [LMRL98] LEE T. S., MUMFORD D., ROMERO R., LAMME V. A. F. : The role of the primary visual cortex in higher-level vision. *Vision Research*. Vol. 38 (1998).
- [MBC12] MA J., BAE S. W., CHOI S. : 3d medial axis point approximation using nearest neighbors and the normal field. *The Visual Computer*. Vol. 28, Num. 1 (2012).
- [MGP10] MIKLOS B., GIESEN J., PAULY M. : Discrete scale axis representations for 3d geometry. *ACM Trans. Graph.*. Vol. 29 (2010).
- [RvWT08] RENIERS D., VAN WIJK J., TELEA A. : Computing multiscale curve and surface skeletons of genus 0 shapes using a global importance measure. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*. Vol. 14, Num. 2 (mars 2008).
- [TJ12] TELEA A., JALBA A. : Computing curve skeletons from medial surfaces of 3d shapes. In *TPCG* (2012).
- [TW02] TELEA R., WIJK J. J. V. : An augmented fast marching method for computing skeletons and centerlines. In *in Proc. of the Symposium on Data Visualisation (VisSym'02)* (2002).