

Segmentation interactive d'images par combinaison de courbes géodésiques par morceaux

Julien MILLE¹, Sébastien BOUGLEUX² et Laurent COHEN³

¹Université de Lyon, CNRS
Université Lyon 1, LIRIS, UMR5205
F-69622, Villeurbanne, France

²Université de Caen-Basse Normandie, GREYC, UMR6072
F-14050, Caen, France

³Université Paris-Dauphine, CEREMADE, UMR7534
F-75016, Paris, France

Résumé

Lorsqu'on souhaite segmenter un objet d'intérêt dans une image avec la possibilité d'avoir une interaction *a priori*, une manière naturelle de procéder est de placer manuellement des points le long du contour de l'objet. En construisant un chemin entre chaque couple de points consécutifs et en assemblant bout-à-bout ces chemins, on génère un contour fermé. Lorsque n points sont reliés deux à deux par des chemins qui suivent les contours saillants, la courbe obtenue risque de ne pas être simple. Ce problème peut survenir lorsque les points sont irrégulièrement répartis sur le bord de l'objet ou lorsque le contour est peu marqué par endroits. Nous proposons une méthode garantissant un contour fermé et simple tout en étant robuste au placement initial des points. L'idée centrale de ce travail est de considérer plusieurs chemins possibles par couple de points consécutifs et de sélectionner la combinaison de chemins de manière à ce que la structure produite corresponde à un contour fermé, simple, et pertinent du point de vue de la segmentation. Pour cela, nous nous intéressons à une catégorie plus large de chemins, dits « géodésiques par morceaux ». L'énergie mise en jeu comporte, en plus de termes de type « contour » et « région » classiques en analyse d'images, comporte un nouveau terme qui favorise une courbe simple, en pénalisant les recouvrements et les auto-intersections. Étant donnés n points et K chemins par couple de points consécutifs, nous introduisons également un algorithme heuristique en $O(Kn^2)$ pour déterminer une combinaison satisfaisante, au lieu d'utiliser une recherche exhaustive en $O(K^n)$. Enfin, nous présentons les résultats obtenus sur des images de la base Grabcut. Ce document est, à quelques modifications près, une traduction de l'article paru à la conférence BMVC 2013 [MBC13].

Mots-clés : Segmentation, chemin, géodésique, énergie, minimisation

1. Introduction

Les méthodes basées sur la minimisation d'énergies reposent sur un cadre mathématique rigoureux et peuvent être appliquées en segmentation interactive d'images. Lorsque l'interaction consiste à définir *a priori* une séquence ordonnée de points répartis le long du contour de l'objet d'intérêt, une manière intuitive de procéder est de calculer un chemin entre chaque couple de points consécutifs, l'assemblage bout-à-bout de ces chemins formant un contour

fermé. En matière d'optimisation, le calcul de chemins est avantageux par rapport à des méthodes de minimisation locale comme la descente de gradient. En effet, dans la plupart des cas, le chemin calculé est le minimum global de la fonction de coût. Cette propriété est vraie, par exemple, pour l'algorithme de Dijkstra, qui détermine un chemin de longueur minimale dans un graphe orienté sans cycle négatif. Parmi les approches de segmentation interactive qui reposent sur une modélisation de l'image en graphe, citons les ciseaux intelligents (ou *live-wire*) [MB98] et leur extension « à la volée » [FUM00], ainsi que l'algorithme Riverbed [MFaS12] basé sur la transformée IFT [FSL04].

En ce qui concerne les approches continues, la méthode des chemins minimaux [CK97] permet de minimiser globalement la fonctionnelle d'énergie du contour actif géodésique [CKS97] lorsque les extrémités de la courbe sont fixées. Le chemin extrait est alors une *géodésique*. Une version interactive de cette méthode a été proposée dans [GDGC02]. Que ce soit dans l'approche initiale ou dans son extension interactive, notons que l'extraction des chemins minimaux utilise une méthode de propagation de front de type *Fast Marching* [Tsi95, Set96] en $O(N \log N)$, où N est la taille de l'image. Contrairement à un contour actif classique, les points de contrôle (ici, les extrémités), sont fixes et doivent donc obligatoirement être situés sur le contour de l'objet d'intérêt. La méthode des chemins minimaux ne travaille pas sur une courbe capable de se déformer. De plus, étant donné le nombre réduit de points de contrôle, les géodésiques ne parviennent pas toujours à créer un contour pertinent en cas d'image très bruitée ou de contours mal définis. Tandis que des extensions ont été proposées afin d'éviter ces derniers inconvénients [BC09, KYT12, AY11], le modèle de contour actif géodésique par morceaux (CAGM) [MC09] apporte la possibilité de déformer la courbe tout conservant une construction par géodésiques. Il permet de définir une énergie de type région sur un contour fermé, comme le terme d'attache aux données du modèle de Chan-Vese [CV01], à l'inverse des approches précédentes qui ne permettent de minimiser que des termes de type contour. Cependant, le contour fermé obtenu n'est pas nécessairement une courbe simple, un inconvénient certain pour la segmentation d'objets. Ce problème peut survenir lorsque les points sont irrégulièrement répartis sur le bord de l'objet ou lorsque le contour est peu marqué par endroits. Les chemins minimaux privilégiant les raccourcis et les zones de fort gradient, il se peut qu'une géodésique atteigne une extrémité en partant à l'opposé de la direction souhaitée, recouvrant d'autres géodésiques et créant ainsi un contour aberrant.

Pour résoudre ce problème, nous développons une méthode garantissant un contour fermé et simple tout en étant robuste au placement initial des points. L'idée centrale de ce travail est de considérer plusieurs chemins possibles par couple de points consécutifs et de sélectionner la combinaison de chemins de manière à ce que la structure produite corresponde à un contour fermé, simple, et pertinent du point de vue de la segmentation. Pour cela, au lieu de ne considérer que des géodésiques, nous nous intéressons à une classe plus large de chemins, dits *admissibles*. Ces chemins admissibles, qui sont géodésiques par morceaux, correspondent aux routes qui parcourent les vallées de la carte de distance géodésique. Les chemins admissibles sélectionnés sont ceux dont la combinaison minimise une énergie. Celle-ci, en plus de termes de type « gradient » et « région » classiques en analyse d'images, comporte un nouveau terme qui favorise une courbe simple, en pénalisant les recouvrements et les auto-intersections. Étant donnés n points et au plus K chemins

par couple de points consécutifs, nous introduisons un algorithme heuristique en $O(Kn^2)$ pour déterminer une combinaison satisfaisante, au lieu d'utiliser une recherche exhaustive en $O(K^n)$. Enfin, nous présentons les résultats obtenus sur des images de la base Grabcut.

2. Contexte : chemins minimaux et courbes géodésiques par morceaux

Afin d'extraire des structures dans une image $I: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^d$, Cohen et Kimmel [CK97] ont proposé de déterminer des courbes de longueur minimale, au sens d'une métrique isotrope définie à partir d'un potentiel $P: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^{*+}$. Lorsque les structures recherchées sont des contours, un choix pertinent de potentiel est $P = g + w$, où $g: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction décroissante de la norme du gradient de I à une échelle s :

$$g(x) = \frac{1}{1 + \|\nabla G_s * I(x)\|} \quad (1)$$

où G_s est un noyau Gaussien et $w \in \mathbb{R}^{*+}$ est une constante de régularisation. À échelle fixée, plus w est choisie élevée, plus la contribution de la composante Euclidienne de la longueur est grande, la courbe tendant vers un segment de droite. Étant donnés deux points a et b , le chemin de longueur minimale, ou *géodésique*, qui les relie,

$$\gamma_{a,b} = \underset{\substack{\mathcal{C} \subset \mathcal{D} \\ \mathcal{C}(0) = a \\ \mathcal{C}(1) = b}}{\operatorname{argmin}} \left\{ L[\mathcal{C}] = \int_0^1 P(\mathcal{C}(u)) \|\mathcal{C}'(u)\| du \right\} \quad (2)$$

peut être obtenu à partir de la carte de distance géodésique $U_a: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^+$, également appelée carte d'*action minimale*, qui associe à tout point $x \in \mathcal{D}$, la longueur de la géodésique reliant a à x . L'action minimale est solution de l'équation dite *Eikonale*, propriété qui lui permet d'être calculée efficacement à l'aide du *Fast Marching* (FM) [Tsi95, Set96], une méthode de propagation de front pouvant être implantée en $O(N \log N)$ opérations, N étant la taille de la grille. Une fois l'action calculée, la géodésique entre a et b est construite par descente de gradient sur U_a . Cette approche ne parvient pas toujours à extraire la courbe souhaitée, comme le montre la Fig. 1(d). Les difficultés surviennent lorsque le potentiel P est trop bruité, lorsque le contour est trop long (au sens Euclidien du terme) ou lorsque la constante de régularisation w est réglée à une valeur trop grande.

Une possibilité pour pallier ce problème est d'avoir recours au calcul d'une courbe géodésique par morceaux, c-à-d une séquence de géodésiques reliant successivement des points donnés (cf Fig. 1(e)). Selon ce principe, le modèle de contour actif géodésique par morceaux (CAGM) [MC09] est généré en assemblant bout-à-bout des chemins géodésiques construits à partir d'un ensemble de sommets $\mathcal{V} =$

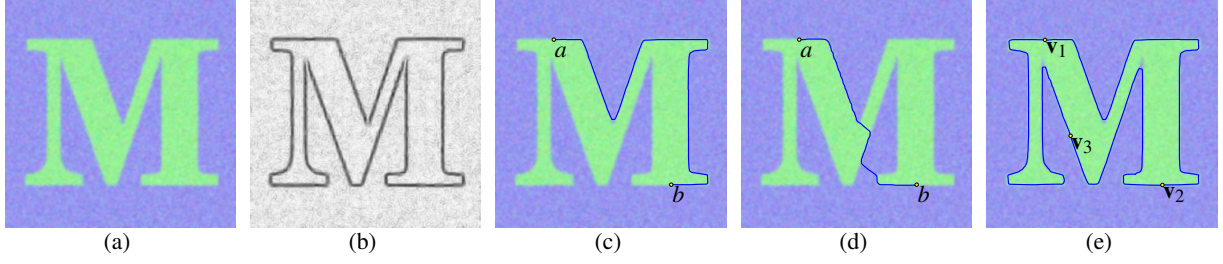


Figure 1: (a) Image initiale. (b) Potentiel P . (c) Avec une constante de régularisation w suffisamment faible, la géodésique entre les deux points donnés suit le contour de l'objet. (d) Si la constante de régularisation w est trop élevée, la géodésique a tendance à créer des raccourcis (e) Contour géodésique par morceaux.

$\{\mathbf{v}_i\}_{1 \leq i \leq n}$. Considérons l'opérateur de concaténation de courbe \mathbb{U} tel que

$$(\mathcal{C}_1 \mathbb{U} \mathcal{C}_2)(u) = \begin{cases} \mathcal{C}_1(2u) & \text{si } 0 \leq u \leq 1/2 \\ \mathcal{C}_2(2u-1) & \text{si } 1/2 < u \leq 1 \end{cases}, \quad (3)$$

valable seulement si $\mathcal{C}_1(1) = \mathcal{C}_2(0)$. La courbe fermée résultant de la concaténation des géodésiques successives est

$$\Gamma = \gamma_{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2} \mathbb{U} \gamma_{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3} \mathbb{U} \dots \mathbb{U} \gamma_{\mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v}_n} \mathbb{U} \gamma_{\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_1}.$$

Il est important de garder à l'esprit qu'en général, une concaténation de géodésiques n'est pas une géodésique elle-même. Il est par contre approprié de la qualifier de *géodésique par morceaux*. Le modèle de CAGM consiste à déterminer la séquence de n sommets qui génère la courbe géodésique par morceau minimisant la fonctionnelle d'énergie E :

$$E[\Gamma] = \omega_{\text{edge}} E_{\text{edge}}[\Gamma] + \omega_{\text{region}} E_{\text{region}}[\Gamma]. \quad (4)$$

L'énergie de contour intègre le long des géodésiques la fonction de détection de contour g définie à l'Eq. (1). Elle est normalisée par la longueur Euclidienne $|\Gamma|$ afin de ne pas pénaliser les contours longs. Ainsi, les chemins courts, qui risqueraient d'être des raccourcis indésirables, ne sont pas privilégiés :

$$\begin{aligned} E_{\text{edge}}[\Gamma] &= \frac{1}{|\Gamma|} \int_0^1 g(\Gamma(u)) \|\Gamma'(u)\| du \\ &= \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{i=1}^n \int_0^1 g(\gamma_{\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}}(u)) \|\gamma'_{\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}}(u)\| du. \end{aligned} \quad (5)$$

Le terme région pénalise un contour géodésique dont l'intérieur Ω_{in} et l'extérieur Ω_{out} sont hétérogènes en terme d'intensité ou de couleur. De même que le terme d'attache aux données du modèle de Chan-Vese [CV01], l'énergie de région utilise la somme des erreurs quadratiques par rapport aux moyennes :

$$E_{\text{region}}[\Gamma] = \int_{\Omega_{\text{in}}} \|I(x) - \mu_{\text{in}}\|^2 dx + \int_{\Omega_{\text{out}}} \|I(x) - \mu_{\text{out}}\|^2 dx \quad (6)$$

Le CAGM permet d'allier les avantages des chemins minimaux à ceux des modèles basés région. Cependant, il s'avère qu'il souffre d'un inconvénient majeur : étant donné un ensemble de sommets, le contour géodésique par

morceaux liant ces sommets n'est pas nécessairement une courbe simple. Comme illustré en Fig. 1(e), ce genre de situation peut survenir lorsque les sommets initiaux sont distribués irrégulièrement autour du contour. Dans ce cas, les géodésiques ont tendance à s'agglomérer sur certaines portions du contour tout en délaissant d'autres parties, au lieu de couvrir l'ensemble du contour. La raison en est que chaque géodésique est générée indépendamment des autres, afin que la construction de la courbe géodésique par morceaux soit indépendante de l'ordre de parcours des paires de sommets consécutifs. Ce phénomène peut se produire aussi bien dès l'initialisation qu'au cours de l'évolution.

On pourrait imaginer imposer une contrainte dure de non-recouvrement entre les chemins ou pénaliser un ensemble de chemins entourant une région d'aire trop faible. Malheureusement, le fait même que les chemins soient construits indépendamment les uns des autres empêchent la formulation de ce type de contrainte.

3. Combinaison de chemins admissibles

Afin de remédier au problème des recouvrements de géodésiques, en supposant que l'on dispose d'un choix de plusieurs chemins entre chaque paire de sommets consécutifs, l'idée fondamentale de notre contribution consiste à sélectionner la combinaison de chemins conduisant au meilleur contour. Cette courbe fermée, lisse par morceaux, est construite en sélectionnant, pour chaque paire de sommets consécutifs, un chemin parmi un ensemble de chemins possibles. La pertinence du contour obtenu est mesurée à l'aide d'une fonctionnelle d'énergie qui combine des termes d'attache aux données classiques avec un nouveau terme pénalisant les recouvrements et les auto-intersections, encourageant ainsi une courbe simple.

3.1. Ensembles de chemins admissibles

Pour un couple de sommets consécutifs $(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1})$, soit \mathcal{A}_i un ensemble de K_i chemins admissibles connectant les deux

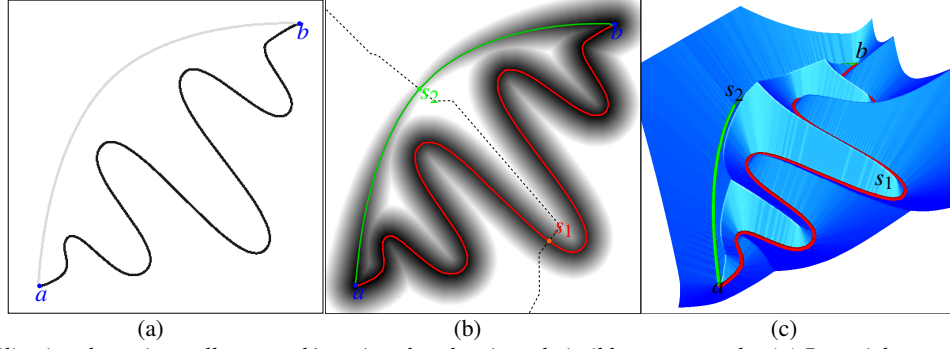


Figure 2: Utilisation des points selles pour déterminer les chemins admissibles entre a et b : (a) Potentiel mettant en évidence deux chemins distincts. (b) Carte d'action, avec les deux chemins admissibles et leurs points selles respectifs situés à mi-chemin. (c) Représentation 3D correspondante

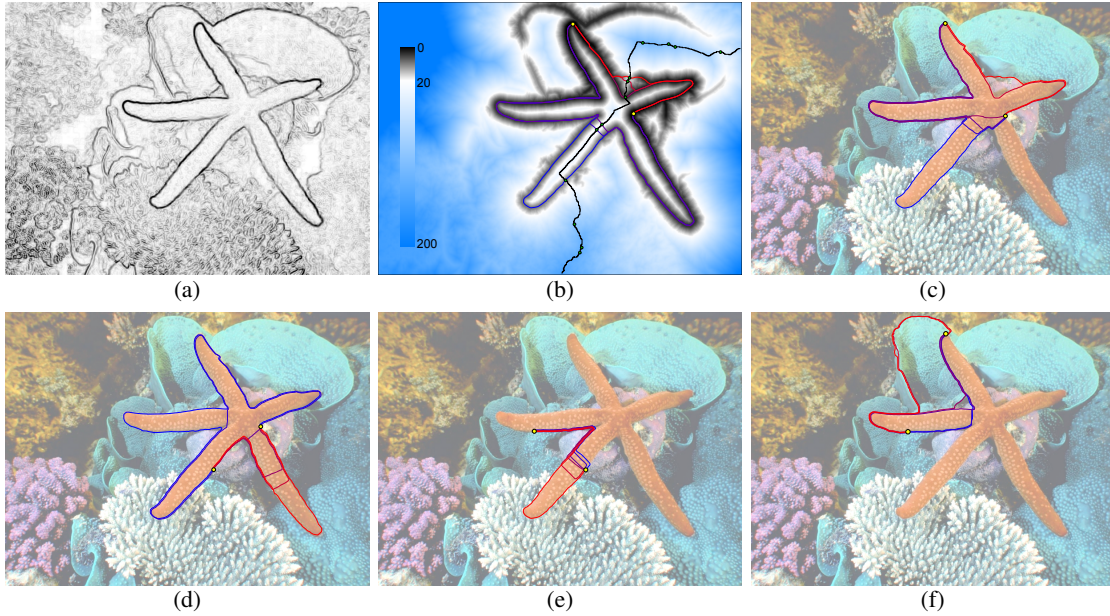


Figure 3: (a) Potentiel P . (b) Courbe médiane (en noir), points selles (en vert) et chemins admissibles correspondants superposés à la carte d'action combinée. (c-f) Ensemble admissible pour chaque couple de sommets consécutifs avec $n = 4$. Les chemins sont triés (du bleu au rouge) par extériorité croissante

sommets,

$$\mathcal{A}_i = \{\gamma_{i,j}\}_{1 \leq j \leq K_i},$$

que nous appelons *ensemble admissible*. Pour le construire, on pourrait penser dans un premier temps résoudre le problème des K plus courts chemins [Yen71, Epp98]. Cependant, il est peu probable que cette approche génère des contours exploitables dans le cas d'images réelles, car les $K - 1$ chemins suivants risqueraient fort d'être identiques au plus court chemin, à d'infimes décalages près. Par ailleurs, le principe des K plus courts chemins, discret par nature, rentre difficilement dans notre cadre continu. Une autre manière de procéder qui vient naturellement à l'esprit est

de calculer K chemins disjoints, comme dans [MBC12]. Lors de la construction d'un chemin γ , on interdit aux futurs autres chemins de passer par les points déjà visités par γ , en affectant $P(x)$ à $+\infty$ pour tout x appartenant à γ . Cependant, cette approche supprime de manière arbitraire des portions de contours qui pourraient être empruntées par d'autres chemins intéressants. De plus, dans le cas de contours flous, les zones de faible potentiel peuvent devenir assez épaisses. Deux chemins disjoints \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 risquent alors d'emprunter la même portion de contour, \mathcal{C}_2 n'étant qu'une courbe parallèle de \mathcal{C}_1 .

Afin de générer l'ensemble admissible, nous proposons

une approche basée sur l'extraction de *points selles*. Ces points critiques ont déjà été exploités dans le cadre des cartes d'action minimale [DC01]. Comme expliqué en Section 2, la géodésique reliant deux points a et b est extraite en propageant l'action minimale à partir de a , jusqu'à atteindre b , et en réalisant une descente de gradient à partir de b . L'inverse est également possible. Une troisième manière de faire consiste à propager **simultanément** à partir de a et b , s'arrêter au premier lieu de rencontre des deux fronts, de réaliser une descente de gradient à partir de chaque côté du lieu de rencontre, et d'assembler les deux chemins obtenus de manière appropriée.

Cette dernière procédure sert de base à la génération des chemins multiples. Lorsque la propagation est réalisée à partir de deux sources, générant alors ce que nous appellerons la *carte d'action combinée* $U_{a,b} = \min(U_a, U_b)$, les deux fronts de propagation se rencontrent aux **points selles** de $U_{a,b}$ (voir Fig 2(a) et 2(b)). Si l'on se représente l'action comme l'altitude dans une zone montagneuse, les points selles sont les cols des différentes routes reliant a et b , comme illustré en Fig. 2(c). Ces routes peuvent avoir des sections en commun, mais chaque route parcourt au moins partiellement sa propre vallée.

Soit $m_{a,b} : [0, 1] \rightarrow \mathcal{D}$ la *courbe médiane*, considérée au moins de classe C^2 , qui parcourt l'ensemble des points équidistants, au sens géodésique, de a et b ,

$$\{x \mid U_a(x) = U_b(x)\}.$$

Cette courbe décrit une crête sur la carte d'action combinée et ne contient que des points critiques, dans la mesure où $\nabla U_{a,b}$ n'est pas défini pour les points de $m_{a,b}$. Cependant, $U_{a,b}$ peut être dérivé **le long** de la courbe médiane, ce qui permet de définir les points selles comme les minima locaux de $U_{a,b}$ le long de $m_{a,b}$. En pratique, les valeurs d'action sont lissées le long de $m_{a,b}$ avant d'en extraire les minima locaux. De plus, au lieu de conserver tous les points selles comme points de départ potentiels de chemins, leur nombre est limité à une valeur seuil K_{\max} fixée au préalable. Les points selles sont considérés par action croissante, en veillant à éliminer ceux trop proches de points selles déjà sélectionnés. Comme le montre la Fig. 3(b), de nombreux points selles sont ignorés volontairement car leur action est trop élevée ou car ils sont trop proches de points selles d'action inférieure.

La courbe construite par concaténation des chemins admissibles sélectionnés doit être un contour pertinent pour la segmentation. Entre autres qualités, la courbe doit être simple, c-à-d sans point multiple. Plutôt que d'imposer à la courbe d'être simple via une contrainte dure, qui risquerait d'exclure des chemins intéressants, cette propriété est encouragée via un nouveau terme d'énergie. Ce terme pénalise

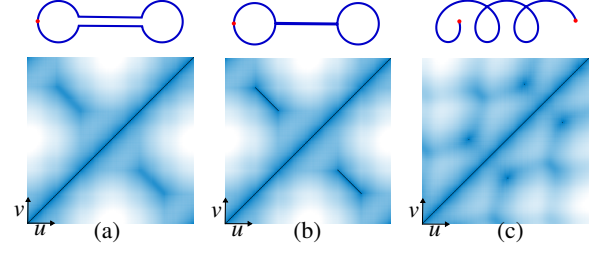


Figure 4: Distance ϕ_C représentée dans le plan (u, v) pour différentes courbes : (a) Sur une courbe simple, ϕ_C s'annule uniquement sur la diagonale. (b) Sur une courbe avec une portion d'auto-recouvrement, ϕ_C présente deux lignes supplémentaires de zéros. (c) Sur une courbe avec des auto-intersections, ϕ_C présente des zéros isolés

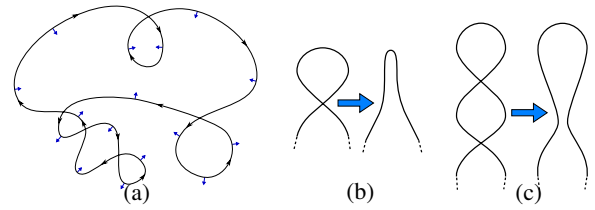


Figure 5: Courbe présentant des auto-intersections et des boucles inversées : (a) Une courbe non-simple avec des points doubles ordinaires qui peut être dénouée par (b) un mouvement de Reidemeister de type I et (c) un mouvement de Reidemeister de type II

la quantité de « non-simplicité » de la courbe. Il est basé sur une distinction entre les différents types de points doubles, que nous décrivons par la suite.

3.2. Recouvrement et bouclage

Considérons une courbe C fermée et régulière, c-à-d qui ne présente pas de singularité au sens de la paramétrisation, son vecteur direction C' ne s'annulant en aucun point. Si C est non-simple, elle possède un certain nombre de *points multiples* qui doivent être étudiés. Nous ne considérons ici que les *points doubles*[†], qui peuvent être de deux sortes. Soit $(u, v) \in [0, 1]^2$ une paire de positions sur la courbe, telle que $u \neq v$, correspondant à un point double : $C(u) = C(v)$. Si (u, v) désigne un point en lequel la courbe est tangente à elle-même, les vecteurs direction $C'(u)$ et $C'(v)$ sont colinéaires. Si par contre (u, v) correspond à une auto-intersection (on parle également de *point double ordinaire*), les vecteurs direction ont des orientations différentes. Cette distinction permet d'appréhender séparément les défauts

[†]. Dans le cas présent, les courbes avec des points de multiplicité > 2 sont détectées et exclues de la recherche

de la courbe, qui ne sont pas nécessairement liés. Une courbe qui possède des points d'auto-tangence aura des portions sur lesquelles elle se recouvre, comme illustré sur la Fig. 4(b), tandis qu'une courbe qui possède des points d'auto-intersection, comme illustré sur la Fig. 4(c), sépare le domaine image en plus de deux régions connexes.

En ce qui concerne le premier type de points doubles, la « quantité de recouvrement » est mesurée par la longueur des portions qui se recouvrent. Considérons la fonction ϕ correspondant à la distance Euclidienne entre deux points de la courbe,

$$\phi_C(u, v) = \|C(u) - C(v)\|.$$

Le niveau zéro de ϕ_C ,

$$\mathcal{Z}_C = \{(u, v) \mid C(u) = C(v)\},$$

est l'ensemble des paires de positions dont les points sont confondus. Evidemment, cette ensemble n'est jamais vide, car il contient toutes les paires (u, u) . Dans le plan (u, v) , la longueur totale de recouvrement est exprimée comme le périmètre du domaine $\{(u, v) \mid \phi_C(u, v) \geq 0\}$:

$$\begin{aligned} |\mathcal{Z}_C| &= \int_0^1 \int_0^1 \|\nabla H(\phi_C(u, v))\| du dv \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \delta(\phi_C(u, v)) \|\nabla \phi_C(u, v)\| du dv \end{aligned} \quad (7)$$

où ∇ est l'opérateur de gradient selon (u, v) , H est l'échelon de Heaviside et δ est la distribution de Dirac. On peut montrer que, si C est simple, alors $|\mathcal{Z}_C| = \sqrt{2}$ (voir la preuve en annexe A). Pour s'en convaincre, le lecteur prêter attention aux graphiques de la Fig. 4, dans laquelle les segments noirs correspondent aux segments de recouvrement. Si la courbe n'est pas simple, $|\mathcal{Z}_C| \geq \sqrt{2}$. Par ailleurs, la mesure $|\mathcal{Z}_C|$ est intrinsèque, c-à-d indépendante de la paramétrisation, et invariante à l'échelle. On notera que les auto-intersections sont des segments de recouvrement de longueur zéro, et ne contribuent donc pas à $|\mathcal{Z}_C|$. En discrétisant C en une courbe 4-connexe, composée de M points dans \mathbb{Z}^2 , la longueur des segments de recouvrement (7) est calculée en $O(M)$ opérations.

Tandis que les points doubles tangents servent à mesurer la quantité de recouvrement, les points doubles ordinaires sont utilisés pour mesurer la quantité de « bouclage » (on pourrait également parler d'enchevêtrement). Considérons une courbe fermée régulière C , orientée dans le sens horaire, présentant des points doubles ordinaires, comme illustré à la Fig. 5(a). Elle sépare le domaine image en sous-domaines disjoints, dont certains sont délimités par des *boucles inversées*, c-à-d des portions de courbes le long desquelles le vecteur normal C'^\perp pointe à l'extérieur (par convention, on considère un repère dans lequel, sur une courbe parcourue dans le sens horaire, C'^\perp pointe à l'intérieur). Nous proposons de quantifier le bouclage de C

comme le ratio entre la surface délimitée par des boucles inversées et la surface totale délimitée par C . D'une certaine manière, cette proportion est liée au travail devant être exercé pour « dénouer » la courbe.

Une courbe avec des auto-intersections peut être considérée comme la projection plane d'un nœud, rigoureusement un plongement du cercle unité dans l'espace Euclidien \mathbb{R}^3 . En nous basant sur la théorie des nœuds [Ada04, p. 13] [Arn94], nous considérons des configurations correspondant à des nœuds pouvant être dénoués par des mouvements de Reidemeister de type I et II (voir Fig. 5(b) et 5(c), respectivement). Une boucle simple, décrite par un unique segment de courbe inversé et mettant en jeu une intersection, correspond à un mouvement de Reidemeister de type I, tandis qu'une boucle double, mettant en jeu deux intersections, correspond à un mouvement de Reidemeister de type II. Soit $SL(C) \subset [0, 1]^2$ l'ensemble des paires de positions (u, v) , telles que $u < v$, correspondant à des intersections qui interviennent dans les boucles simples. Soit $DL(C) \subset [0, 1]^2 \times [0, 1]^2$ l'ensemble des paires doubles $((u_1, v_1), (u_2, v_2))$, telles que $u_1 < u_2$ et $v_1 > v_2$, correspondant à des paires d'intersections qui forment des boucles doubles. La *surface totale inversée* $\mathcal{I}[C]$ est calculée en temps linéaire en $|C|$ via une discrétisation des intégrales obtenues en appliquant le théorème de Green :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}[C] &= - \sum_{(s,t) \in SL(C)} \min \left(0, \int_s^t \frac{C^\perp \cdot C'}{2} du \right) \\ &\quad - \sum_{((s_1, t_1), (s_2, t_2)) \in DL(C)} \min \left(0, \int_{s_1}^{s_2} \frac{C^\perp \cdot C'}{2} du + \int_{t_2}^{t_1} \frac{C^\perp \cdot C'}{2} du \right) \end{aligned} \quad (8)$$

De cette manière, seules les intégrales de contour négatives, qui correspondent à des portions de courbe inversées, contribueront à $\mathcal{I}[C]$.

3.3. Optimisation

Déterminer la meilleure combinaison de chemins admissibles revient à déterminer la séquence $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ conduisant au minimum de l'énergie $E[\gamma_{1,x_1} \cup \gamma_{2,x_2} \cup \dots \cup \gamma_{n-1,x_{n-1}} \cup \gamma_{n,x_n}]$, où le label x_i correspond au chemin choisi dans l'ensemble \mathcal{A}_i , et où E est une extension de l'énergie décrite dans l'Eq. (4) du CAGM. L'énergie E est formulée de manière à pénaliser les contours qui comportent des zones de recouvrement ou des intersections, qui sont situés sur des zones de faible gradient image ou qui délimitent des régions dont les distributions image sont mélangées :

$$E[\Gamma] = E_{\text{simplicity}}[\Gamma] + \omega_{\text{edge}} E_{\text{edge}}[\Gamma] + \omega_{\text{region}} E_{\text{region}}[\Gamma]. \quad (9)$$

Les poids ω_{edge} et ω_{region} sont des paramètres, définis par l'utilisateur, qui contrôlent l'influence relative des termes contour et région par rapport au terme de simplicité. Ce dernier fait intervenir les mesures de recouvrement et de bou-

clage définis aux Eq. (7) et (8),

$$E_{\text{simplicity}}[\Gamma] = \frac{|\mathcal{Z}_\Gamma| - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{|\Omega_{\text{in}}(\Gamma)|} \mathcal{I}[\Gamma]$$

Le terme contour est le même que celui de l'Eq. (5). En ce qui concerne le terme région, au lieu d'utiliser le modèle constant par morceaux du CAGM, qui n'est valable que pour les objets et les fonds relativement homogènes, nous utilisons le coefficient de Bhattacharyya entre les distributions de probabilités de la fonction image à l'intérieur et à l'extérieur de Γ , comme dans [MRT07] :

$$E_{\text{region}}[\Gamma] = \int_C \sqrt{p_{\text{in}}(\Gamma, \alpha) p_{\text{out}}(\Gamma, \alpha)} d\alpha \quad (10)$$

Les distributions de probabilité considérées sont les fonctions de vraisemblance, estimées par noyau Gaussien. Pour une valeur d'image (couleur) α ,

$$\begin{aligned} p_{\text{in}}(\Gamma, \alpha) &= \frac{1}{|\Omega_{\text{in}}(\Gamma)|} \int_{\Omega_{\text{in}}(\Gamma)} G_\sigma(\alpha - I(x)) dx \\ p_{\text{out}}(\Gamma, \alpha) &= \frac{1}{|\Omega_{\text{out}}(\Gamma)|} \int_{\Omega_{\text{out}}(\Gamma)} G_\sigma(\alpha - I(x)) dx \end{aligned}$$

où Ω_{in} et Ω_{out} sont respectivement l'intérieur et l'extérieur de Γ . Considérons maintenant la recherche de la séquence optimale $\{x_1, \dots, x_n\}$. Pour n sommets et au plus K_{max} chemins par couple de sommets consécutifs, une recherche exhaustive aurait une complexité en $O(K_{\text{max}}^n)$. Au lieu de tester toutes les combinaisons possibles, nous proposons un algorithme glouton en $O(n^2 K_{\text{max}})$, qui s'appuie sur une réorganisation spécifique des chemins. Au sein de chaque ensemble admissible \mathcal{A}_i , les chemins sont triés par ordre croissant d'extériorité \mathcal{X} , c-à-d l'aire signée, exprimée via le théorème de Green, formée par le chemin \mathcal{C} et le segment de droite orienté reliant $\mathcal{C}(1)$ à $\mathcal{C}(0)$:

$$\mathcal{X}[\mathcal{C}] = \frac{1}{2} \int_0^1 \mathcal{C}^\perp \cdot \mathcal{C}' du + \frac{1}{2} \mathcal{C}(1)^\perp \cdot \mathcal{C}(0)$$

Les calculs menant à cette expression sont détaillés en annexe B. Si la droite passant par $\mathcal{C}(0)$ et $\mathcal{C}(1)$ est prise comme un axe de référence horizontal, l'extériorité est négative (resp. positive) si \mathcal{C} majoritairement en haut (resp. en dessous) de l'axe. Les sommets étant ordonnés sur le contour de l'objet dans le sens horaire, les chemins admissibles sont ré-ordonnés du plus intérieur au plus extérieur (cf Fig. 3(c-f)).

La méthode de recherche part de la séquence de labels correspondant à la configuration la plus intérieure : $\{1, \dots, 1\}$. La séquence de labels est modifiée selon un algorithme glouton, en testant itérativement des séquences candidates. A chaque itération, étant donnée la séquence courante \mathcal{S} , les séquences candidates sont celles qui diffèrent de \mathcal{S} d'au plus un label. Seul l'incrément de label est considérée. Par exemple, si la séquence courante est $\{2, 3, 1\}$, les séquences candidates sont $\{3, 3, 1\}$, $\{2, 4, 1\}$ et $\{2, 3, 2\}$. La séquence candidate conduisant à un

minimum de l'énergie, quelle que soit l'énergie courante, est choisie comme séquence courante pour la prochaine itération. La séquence donnant l'énergie minimum rencontrée depuis le début (le minimum « global ») est mise à jour au fur et à mesure des itérations. Les séquences candidates n'étant générées que par incrément de label, le contour croît de manière monotone.

4. Expérimentation and discussion

Nous évaluons la capacité de notre modèle à extraire les contours d'objets simplement connexes dans des images couleur naturelles, étant donné un nombre variable de sommets initiaux le long de l'objet. Les tests sont menés sur des images de la base Grabcut [RKB04], en comparant nos résultats avec ceux obtenus à l'aide du CAGM [MC09] (sans déformation, ce qui revient à relier les sommets par les géodésiques). Ainsi, nous mettons en évidence les améliorations apportées par l'utilisation des chemins admissibles et du nouveau terme d'énergie. Afin d'avoir un regard critique sur notre contribution, la Fig. 6 illustre des cas typiques où l'approche proposée apporte de nettes améliorations par rapport au CAGM, mais aussi des améliorations moindre voire pas d'amélioration. En ce qui concerne le réglage des paramètres, les deux méthodes sont chacune évaluées dans la configuration la plus favorable. En effet, les paramètres tels que la constante de régularisation w (pour les deux méthodes) et les poids d'énergie ω_{edge} et ω_{region} (pour notre modèle uniquement), ont été ajustés séparément à chaque test, pour accomplir la meilleure segmentation possible. L'espace de couleur est également choisi en fonction de l'image, entre RGB ou son homologue perceptuellement uniforme Lab, ce qui a une influence sur le potentiel P (pour les deux méthodes) et les densités de probabilité de couleur impliquées dans l'énergie de région (10).

L'image BANANA (ligne 1) correspond à une situation où notre approche n'améliore pas la segmentation par rapport au CAGM, tout du moins pour la configuration de sommets initiaux considérée. Malgré le fond complexe et la présence de nombreux contours à l'intérieur de l'objet, les bords sont suffisamment bien définis et les sommets équitablement répartis le long du bord pour que le CAGM construise le bon contour.

Les images FLOWER (ligne 2) et DOLL (ligne 3) sont des cas où le CAGM génère des recouvrements importants entre géodésiques lorsque peu de sommets sont fournis, bien qu'ils soient régulièrement espacés le long du contour. Le CAGM n'ayant pas de contrainte de non-recouvrement des chemins, il favorise systématiquement les portions de contour ayant le potentiel le plus faible. Par conséquent, des portions de contour sont ignorées, non pas à cause de leur longueur, mais en raison du gradient plus faible par endroits (et du potentiel plus élevé, donc). Par contre, ces

portions de contour, bien qu'elles n'appartiennent pas au chemin minimal, génèrent tout de même des vallées dans la carte de distance géodésique et ont de fortes chances d'être empruntées par des chemins admissibles dans notre approche. En ce sens, la méthode proposée est moins sensible à la faiblesse des contours.

Les images CERAMIC (ligne 4) et TEDDY (ligne 5) sont des cas où le CAGM génère des *raccourcis* à travers l'objet, en raison de la présence de contours intérieurs plus forts que les contours réels. Les énergies de région et de simplicité contribuent à résoudre ce problème. La première favorise des distributions de couleur bien distinctes entre l'intérieur et l'extérieur, tandis que la seconde évite les recouvrements entre chemins. Les raccourcis, qui ont tendance à emprunter des portions déjà occupées par d'autres chemins et qui génèrent une région extérieure contenant des parties de l'objet, sont donc pénalisés. Enfin, l'image MUSHROOM (ligne 6) est affectée à la fois par des problèmes de raccourcis et de bords faibles par endroits.

5. Conclusion

Via la recherche d'une combinaison optimale de chemins admissibles, étant donnée une fonctionnelle d'énergie dotée d'un nouveau terme favorisant les courbes simples, notre approche a vocation à résoudre d'importants problèmes survenant en segmentation basée sur les chemins de coûts minimaux, à savoir les raccourcis et la création de contours aberrants. La comparaison avec le CAGM, qui requiert les mêmes informations *a priori*, démontre les avantages de notre approche.

Annexes

A: Terme de recouvrement

Soit \mathcal{C} une courbe régulière paramétrée sur l'intervalle $[0, L]$. Soit ϕ une fonction de classe C^1 , définie sur $[0, L]^2$, mesurant la distance entre deux positions sur la courbe :

$$\phi_{\mathcal{C}}(u, v) = \|\mathcal{C}(u) - \mathcal{C}(v)\|^p$$

où p est un réel positif quelconque. La « longueur » du niveau zéro de $\phi_{\mathcal{C}}$,

$$|\mathcal{Z}_{\mathcal{C}}| = \int_0^L \int_0^L \delta(\phi(u, v)) \|\nabla \phi(u, v)\| du dv, \quad (11)$$

correspond à la quantité d'auto-recouvrement de \mathcal{C} .

Proposition :

Si \mathcal{C} est simple, alors $|\mathcal{Z}_{\mathcal{C}}| = L\sqrt{2}$.

Preuve :



Figure 6: Résultat sur un échantillon de la base Grabcut. Colonne de gauche : potentiel. Colonne au centre : CAGM sans déformation (courbe géodésique par morceau). Colonne à droite : combinaison de chemins admissibles

Au préalable, exprimons le gradient de ϕ dans l'espace (u, v) (les dérivées partielles sont notées en indice) :

$$\begin{aligned} \nabla \phi(u, v) &= [\phi_u(u, v) \ \phi_v(u, v)]^T \\ &= p \|\mathcal{C}(u) - \mathcal{C}(v)\|^{p-2} \begin{bmatrix} \mathcal{C}'(u) \cdot (\mathcal{C}(u) - \mathcal{C}(v)) \\ -\mathcal{C}'(v) \cdot (\mathcal{C}(u) - \mathcal{C}(v)) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Si \mathcal{C} est régulière et simple, en faisant varier u dans l'inter-

Figure 7: L'extériorité d'une courbe ouverte est exprimée comme l'aire signée des sous-domaines qu'elle délimite avec le segment de droite reliant ses deux extrémités

valle $[0, L]$, $\phi(u, v)$ s'annule uniquement lorsque $u = v$. Donc, pour un v fixé, on a :

$$\delta(\phi(u, v)) = \frac{\delta(u - v)}{|\phi_u(v, v)|} \quad (12)$$

En remplaçant (12) dans (11) et utilisant une identité de la distribution δ :

$$\begin{aligned} |\mathcal{Z}_C| &= \int_0^L \int_0^L \delta(\phi(u, v)) \|\nabla \phi(u, v)\| du dv \\ &= \int_0^L \int_0^L \frac{\delta(u - v)}{|\phi_u(v, v)|} \|\nabla \phi(u, v)\| du dv \\ &= \int_0^L \frac{\|\nabla \phi(v, v)\|}{|\phi_u(v, v)|} dv \end{aligned}$$

Trivialement, $\phi(v, v) = 0$. Cependant, en développant le gradient, on obtient :

$$\begin{aligned} |\mathcal{Z}_C| &= \int_0^L \left\{ \frac{p \|\mathcal{C}(v) - \mathcal{C}(v)\|^{p-2}}{p \|\mathcal{C}(v) - \mathcal{C}(v)\|^{p-2}} \right. \\ &\quad \left. \frac{\sqrt{2(\mathcal{C}'(v) \cdot (\mathcal{C}(v) - \mathcal{C}(v)))^2}}{|\mathcal{C}'(v) \cdot (\mathcal{C}(v) - \mathcal{C}(v))|} \right\} dv \\ &= \int_0^L \sqrt{2} dv \\ &= L\sqrt{2} \end{aligned}$$

B: Extériorité

Soit \mathcal{C} une courbe régulière lisse par morceaux, paramétrée sur l'intervalle $[0, 1]$. Si elle est fermée, simple et orientée positivement, de telle manière que le vecteur normal \mathcal{C}'^\perp pointe à l'intérieur, l'aire à l'intérieur de la courbe peut être exprimée à l'aide du théorème de Green :

$$\begin{aligned} |\Omega_{in}(\mathcal{C})| &= \frac{1}{2} \int_0^1 \mathcal{C}^\perp(u) \cdot \mathcal{C}'(u) du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x(u)y'(u) - x'(u)y(u) du \end{aligned}$$

Si on calcule la quantité précédente sur une courbe fermée non-simple, on obtient l'aire signée, dans laquelle les composantes orientées positivement et négativement ont une contribution respectivement positive et négative.

Proposition :

L'aire signée formée par la courbe ouverte \mathcal{C} , paramétrée sur $[0, 1]$, et le segment de droite de $\mathcal{C}(1)$ allant à $\mathcal{C}(0)$ (cf

Fig. 7), que nous appelons *extériorité* dans le corps de l'article, peut s'exprimer sous la forme :

$$\mathcal{X}[\mathcal{C}] = \frac{1}{2} \int_0^1 \mathcal{C}^\perp \cdot \mathcal{C}' du + \frac{1}{2} \mathcal{C}^\perp(1) \cdot \mathcal{C}(0)$$

Preuve :

Soit S une paramétrisation uniforme du segment de droite reliant $\mathcal{C}(1)$ à $\mathcal{C}(0)$, sur l'intervalle $[0, 1]$:

$$S(u) = (1 - u)\mathcal{C}(1) + u\mathcal{C}(0)$$

L'aire signée est obtenue en appliquant le théorème de Green par morceaux :

$$\begin{aligned} \mathcal{X}[\mathcal{C}] &= \frac{1}{2} \int_0^1 \mathcal{C}^\perp \cdot \mathcal{C}' du + \frac{1}{2} \int_0^1 S^\perp(u) \cdot S'(u) du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \mathcal{C}^\perp \cdot \mathcal{C}' du \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^1 ((1 - u)\mathcal{C}^\perp(1) + u\mathcal{C}^\perp(0)) \cdot (\mathcal{C}(0) - \mathcal{C}(1)) du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \mathcal{C}^\perp \cdot \mathcal{C}' du \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - u)\mathcal{C}^\perp(1) \cdot \mathcal{C}(0) + u\mathcal{C}^\perp(1) \cdot \mathcal{C}(0) du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \mathcal{C}^\perp \cdot \mathcal{C}' du + \frac{1}{2} \int_0^1 \mathcal{C}^\perp(1) \cdot \mathcal{C}(0) du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \mathcal{C}^\perp \cdot \mathcal{C}' du + \frac{1}{2} \mathcal{C}^\perp(1) \cdot \mathcal{C}(0) \end{aligned}$$

Références

- [Ada04] ADAMS C. : *The Knot Book : An elementary introduction to the mathematical theory of knots*. American Mathematical Society, 2004.
- [Arn94] ARNOLD V. : Plane curves, their invariants, perestroikas and classification. *Advances in Soviet Mathematics : Singularities and Bifurcations*. Vol. 21 (1994), 33–91.
- [AY11] APPIA V., YEZZI A. : Active geodesics : Region-based active contour segmentation with a global edge-based constraint. In *IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV)* (Barcelona, Spain, 2011), pp. 1975–1980.
- [BC09] BENMANSOUR F., COHEN L. : Fast object segmentation by growing minimal paths from a single point on 2D or 3D images. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*. Vol. 33, Num. 2 (2009), 209–221.
- [CK97] COHEN L., KIMMEL R. : Global minimum for active contour models : a minimal path approach. *International Journal of Computer Vision*. Vol. 24, Num. 1 (1997), 57–78.
- [CKS97] CASELLES V., KIMMEL R., SAPIRO G. : Geodesic active contours. *International Journal of Computer Vision*. Vol. 22, Num. 1 (1997), 61–79.

- [CV01] CHAN T., VESE L. : Active contours without edges. *IEEE Transactions on Image Processing*. Vol. 10, Num. 2 (2001), 266–277.
- [DC01] DESCHAMPS T., COHEN L. : Fast extraction of minimal paths in 3D images and applications to virtual endoscopy. *Medical Image Analysis*. Vol. 5, Num. 4 (2001), 281–299.
- [Epp98] EPPSTEIN D. : Finding the k shortest paths. *SIAM Journal of Computing*. Vol. 28, Num. 2 (1998), 652–673.
- [FSL04] FALCÃO A., STOLFI J., LOTUFO R. : The Image Foresting Transform : Theory, algorithms, and applications. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. Vol. 26, Num. 1 (2004), 19–29.
- [FUM00] FALCÃO A., UDUPA J., MIYAZAWA F. : An ultra-fast user-steered image segmentation paradigm : Live Wire on the Fly. *IEEE Transactions on Medical Imaging*. Vol. 19, Num. 1 (2000), 55–62.
- [GDGC02] GÉRARD O., DESCHAMPS T., GREFF M., COHEN L. : Real-time interactive path extraction with on-the-fly adaptation of the external forces. In *European Conference on Computer Vision (ECCV)* (Copenhagen, Denmark, 2002), vol. 3, pp. 807–821.
- [KYT12] KAUL V., YEZZI A., TSAI Y. : Detection of curves with unknown endpoints and arbitrary topology using minimal paths. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. Vol. 34, Num. 10 (2012), 1952–1965.
- [MB98] MORTENSEN E., BARRETT W. : Interactive segmentation with intelligent scissors. *Graphical Models and Image Processing*. Vol. 60, Num. 5 (1998), 349–384.
- [MBC12] MILLE J., BOUGLEUX S., COHEN L. : Minimally overlapping paths sets for closed contour extraction. In *International Conference on Computer Vision Theory and Applications (VISAPP)* (Rome, Italy, 2012).
- [MBC13] MILLE J., BOUGLEUX S., COHEN L. : Combination of paths for interactive segmentation. In *British Machine Vision Conference (BMVC)* (Bristol, UK, 2013).
- [MC09] MILLE J., COHEN L. : Geodesically linked active contours : evolution strategy based on minimal paths. In *2nd International Conference on Scale Space and Variational Methods in Computer Vision (SSVM)* (Voss, Norway, 2009), vol. 5567 de *LNCS*, Springer, pp. 163–174.
- [MFaS12] MIRANDA P., FALCÃO A., SPINA T. : Riverbed : A novel user-steered image segmentation method based on optimum boundary tracking. *IEEE Transactions on Image Processing*. Vol. 21, Num. 6 (2012), 3042–3052.
- [MRT07] MICHAILOVICH O., RATHI Y., TANNENBAUM A. : Image segmentation using active contours driven by the Bhattacharyya gradient flow. *IEEE Transactions on Image Processing*. Vol. 16, Num. 11 (2007), 2787–2801.
- [RKB04] ROTHER C., KOLMOGOROV V., BLAKE A. : Grabcut : Interactive foreground extraction using iterated graph cuts. *ACM Transactions on Graphics*. Vol. 23, Num. 3 (2004), 309–314.
- [Set96] SETHIAN J. : A fast marching level set method for monotonically advancing fronts. *Proceedings of the National Academy of Science*. Vol. 93, Num. 4 (1996), 1591–1595.
- [Tsi95] TSITSIKLIS J. : Efficient algorithms for globally optimal trajectories. *IEEE Transactions on Automatic Control*. Vol. 40, Num. 9 (1995), 1528–1538.
- [Yen71] YEN J. : Finding the K shortest loopless paths in a network. *Management Science*. Vol. 17, Num. 11 (1971), 712–716.