

# Interpolation dans l'espace des sphères pour l'habillage de squelettes curvilignes

Lucie Druoton et Lionel Garnier

LE2I, UMR CNRS 6306, Université de Bourgogne, faculté Mirande, 21000 Dijon

---

## Résumé

Plusieurs méthodes, utilisant des maillages, des surfaces paramétriques ou des surfaces implicites ont été développées afin de pouvoir réaliser l'habillage de squelettes, en particulier l'habillage de squelettes curvilignes. Une surface canal est une enveloppe à un paramètre de sphères, ce qui rend leur utilisation légitime pour mener à bien ce travail. Afin de faciliter leur utilisation, nous nous plaçons dans l'espace des sphères qui présente l'avantage de les manipuler sous forme de courbes plutôt que sous forme de surfaces. A partir de points représentant un ensemble fini de sphères centrées sur le squelette discret d'une surface 3D, nous utilisons une interpolation dans l'espace des sphères qui permet d'obtenir une courbe paramétrée, et donc continue, qui représente une famille de sphères dans l'espace 3D. Une fois cette courbe déterminée, nous pouvons habiller le squelette 3D avec autant de sphères que nous le voulons ou bien dessiner directement les cercles caractéristiques de la surface enveloppe.

Several methods using meshes, parametric surfaces or implicit surfaces have been developed in order to find the envelope of skeletons, especially skeletons which are curves. A canal surface is an envelope of a one-parameter family of spheres, that is why we want to use it. To simplify the work, we use the space of spheres where canal surfaces have the advantage to be represented by curves. From points representing a finite set of spheres centered on the skeleton of a 3D surface, we use an interpolation method in the space of spheres which provides us to obtain a parametric curve, representing a continuous family of spheres in the 3D space. Once determined this curve, we can have the envelope of the 3D skeleton with as many spheres as we want or, we can directly draw the characteristic circles of the surface.

---

**Mots-clés :** Modélisation géométrique, habillage squelettes curvilignes, espace des sphères, interpolation

## 1 Introduction

Le squelette est une représentation des objets utilisée pour la reconnaissance et la description des formes. Cette notion, connu sous le nom d'axe médian, a été introduite par Blum [Blu67]. Le squelette est défini par l'ensemble des centres des boules maximales d'un objet. En trois dimensions, le squelette d'un objet continu peut être un point, un segment, une courbe, une surface (plane ou non). Se limiter à la squelettisation d'objets échantillonnés par un ensemble fini de points, restreint les possibilités de squelettes aux points, segments et surfaces planes approchant le squelette réel de l'objet.

De plus, en considérant un processus d'amincissement de la forme (principe du feu de prairie), il est possible de se restreindre aux squelettes curvilignes (segments, courbes et ensemble de courbes). Ces types de squelettes ont l'avantage de conserver la forme de l'objet. Le fait de considérer la valeur du rayon de la sphère maximale associée à un point du squelette permet la réversibilité du processus.

Actuellement, l'habillage des surfaces à squelettes s'effectue avec des primitives simples : sphères, blobs, ellipsoïdes, cônes, [Mur91, ABM94, BJMR01, DRF]. Cependant, lors de la reconstruction de l'objet, des « formes non désirées » apparaissent souvent. Nous pouvons citer, par exemple, des bosses (plusieurs sphères contiguës) ou des points singuliers.

La représentation des surfaces canal, enveloppe à un paramètre de sphères, est très simple dans l'espace des sphères. En effet, une surface enveloppe de sphères est représentée par une courbe (sous certaines conditions) sur une quadrique (une sphère unité de dimension 4 pour une métrique précise) dans un espace de dimension 5. De plus, il existe aussi dans cet espace une représentation de l'espace usuel à trois dimensions.

Comme les surfaces à squelette ont un lien étroit avec les sphères, il est légitime de se demander si nous pouvons simplifier le traitement de ces surfaces en utilisant l'espace des sphères.

Ce travail se concentre donc sur l'habillage de squelettes obtenus dans l'espace 3D en utilisant autant de sphères qu'il en faut pour éliminer les effets de bosses. Nous nous plaçons dans l'espace des sphères et travaillons à partir de sphères représentatives d'une surface, centrées sur le squelette de celle-ci, précédemment calculées par un algorithme de squelettisation. Dans cet espace, nous avons besoin de définir un processus d'interpolation permettant de construire des courbes sur la quadrique. Nous utiliserons pour cela une inversion particulière dans l'espace de dimension 5. Ensuite, nous pouvons déterminer une courbe paramétrée qui nous permet d'obtenir un squelette curviligne continu, approximation du squelette réel d'un objet 3D. De plus, grâce à cette représentation sous forme de courbe dans l'espace des sphères, nous pouvons aussi simplement déterminer les points de tangence entre les sphères et la surface (et donc les points de la surface).

Nous allons, dans cet article, expliquer comment nous effectuons cette interpolation et illustrer cela par un exemple. Nous présentons ici les tous premiers résultats sur ce travail.

## 2 L'espace des sphères

### 2.1 La représentation de l'espace des sphères dans l'espace de Lorentz

L'espace (vectoriel) de Lorentz, noté  $\overrightarrow{\mathbb{L}_{4,1}}$ , est le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 5 muni de la forme bilinéaire  $\mathcal{L}_{4,1}$ , symétrique, définie et de signature (4; 1) définie par :

$$\mathcal{L}_{4,1}(\vec{u}, \vec{v}) = -x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$$

où  $\vec{u}(x_0; x_1; x_2; x_3; x_4)$  et  $\vec{v}(y_0; y_1; y_2; y_3; y_4)$  [LW08]. La forme quadratique  $\mathcal{Q}_{4,1}$  associée à  $\mathcal{L}_{4,1}$  est définie par :

$$\mathcal{Q}_{4,1}(\vec{u}) = \mathcal{L}_{4,1}(\vec{u}, \vec{u}) = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

L'espace (affine) de Lorentz est l'espace affine d'origine  $O_5(0; 0; 0; 0; 0)$  et d'espace vectoriel attaché  $\overrightarrow{\mathbb{L}_{4,1}}$ . Dans cet espace, la quadrique  $\Lambda^4$  :

$$\Lambda^4 = \{M \in \mathbb{L}_{4,1}, \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{O_5M}) = 1\} \quad (1)$$

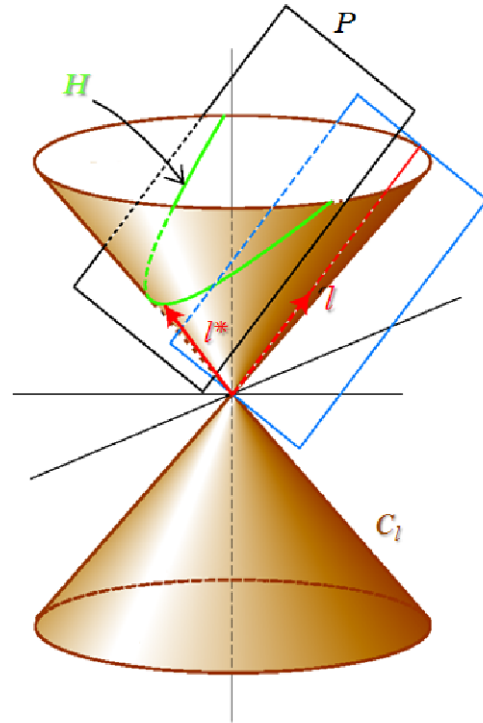
est la sphère unité de dimension 4 pour la forme de Lorentz. Elle représente l'espace des sphères orientées de  $\mathbb{R}^3$ .

Chaque sphère de  $\mathbb{R}^3$  (orientation prise en compte par convention avec un signe sur le rayon [GDL12]) est associée à un point de cette quadrique  $\Lambda^4$ , table 1. Notons que les plans sont considérés comme des sphères de rayons infini, c'est pourquoi ils sont aussi représentés dans ce modèle.

Cette construction est proposée dans [LW08] et reprise dans [DGL11] et peut être réalisée grâce à une représentation de  $\mathbb{R}^3$  dans l'espace de Lorentz : le paraboloïde  $H$ , section du cône de lumière (appellation provenant de la théorie de la relativité) :

$$C_l = \{M \in \mathbb{L}_{4,1}, \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{O_5M}) = 0\} \quad (3)$$

par un hyperplan  $P$  est isométrique à  $\mathbb{R}^3$ .



**Figure 1:** Cône de lumière et représentation de  $\mathbb{R}^3$  dans l'espace de Lorentz

Par construction, le cône de lumière est l'ensemble des vecteurs positions qui annulent la forme de Lorentz et, notons que, contrairement à l'habitude, chacun de ces vecteurs est  $\mathcal{L}_{4,1}$ -orthogonal à lui-même. En adoptant toujours le vocabulaire de la théorie de la relativité, nous pouvons distinguer deux autres types de vecteurs positions :

- les vecteurs dont la forme de Lorentz est négative, dit de type temps, sont à l'intérieur du cône de lumière ;
- les vecteurs dont la forme de Lorentz est positive, dit de type espace, sont à l'intérieur du cône de lumière.

| Nature dans $\mathbb{R}^3$ |                      | Coordonnées $(x_0; x_1; x_2; x_3; x_4)$ dans $\mathbb{L}_{4,1}$  | Condition                    |
|----------------------------|----------------------|--|------------------------------|
| Sphère orientée            | Centre : $(a; b; c)$ | Point de $\Lambda^4 \subset \mathbb{L}_{4,1}$  | $r \neq 0$                   |
|                            | Rayon : $r$          | $\sigma = \begin{pmatrix} \frac{1}{2r} (a^2 + b^2 + c^2 - r^2 + 1) \\ \frac{a}{r} \\ \frac{b}{r} \\ \frac{c}{r} \\ \frac{1}{2r} (a^2 + b^2 + c^2 - r^2 - 1) \end{pmatrix} \quad (2)$ |                              |
| Plan affine                | $ax + by + cz = d$   | $(d; a; b; c; d)$  | $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 1$ |

**Table 1:** Correspondance entre les sphères orientées de  $\mathcal{E}_3$  et les points de  $\Lambda^4$ . L'orientation d'une sphère est donnée par le signe de son rayon  $r$  et l'orientation d'un plan par le sens de son vecteur normal

Une courbe de l'espace des sphères représente donc une famille à un paramètre de sphères. Une condition nécessaire pour que cette courbe modélise une surface canal est la suivante : en tout point de la courbe, le vecteur tangent est de type espace, la courbe est alors dite de type espace [LS11, LW12]. Si les vecteurs tangents sont de type lumière ou temps, la famille à un paramètre de sphères n'admet pas d'enveloppe.

Nous pouvons, dès à présent, comprendre le travail à effectuer pour habiller nos squelettes 3D : d'abord nous pouvons associer à chaque sphère centrée sur le squelette un point de l'espace des sphères  $\Lambda^4$ . Ensuite, nous devons trouver une courbe sur la quadrique qui passe par ces points et qui soit de type espace pour que la famille de sphères obtenue en retour admette une enveloppe. Pour cela, nous allons utiliser une interpolation dans l'espace de Lorentz. Le problème qui se pose alors est de rester sur la quadrique  $\Lambda^4$ .

## 2.2 Interpolation dans l'espace des sphères

En utilisant les courbes d'interpolation usuelles aux points ou vecteurs de contrôle (splines, Bézier) dans l'espace de Lorentz, il n'y a aucune raison que la courbe obtenue soit sur  $\Lambda^4$ . Nous allons donc définir une transformation géométrique permettant de passer d'un espace « courbe » (la sphère unité  $\Lambda^4$  de l'espace de Lorentz) à un espace « plan » (un hyperplan de l'espace de Lorentz). Pour cela, nous allons adapter l'inversion euclidienne à l'espace de Lorentz.

Rappelons, que dans un espace euclidien  $\mathcal{E}$ , l'inversion usuelle de pôle  $\Omega$  et de rapport  $k$ , non nul, est définie de

$\mathcal{E} - \{\Omega\}$  dans lui-même par :

$$\overrightarrow{\Omega M'} = \frac{k}{\overrightarrow{\Omega M}^2} \overrightarrow{\Omega M}$$

où  $M'$  est l'image du point  $M$  par cette inversion. Une inversion est involutive et l'image d'une sphère dont le pôle appartient à cette dernière est un plan. Plus de propriétés sont disponibles dans [Lad03, Gar07].

### 2.2.1 Inversion de l'espace des sphères

Nous pouvons généraliser la définition de l'inversion à l'espace de Lorentz en considérant la forme de Lorentz plutôt que le produit scalaire usuel, [GD13] :

**Définition 1 :** Inversion dans l'espace de Lorentz

Soit  $k$  un réel non nul et  $\Omega$  un point de  $\mathbb{L}_{4,1}$ . Soit  $C_\Omega$  le cône de lumière de sommet  $\Omega$  c'est-à-dire :

$$C_\Omega = \{M \in \mathbb{L}_{4,1}, Q_{4,1}(\overrightarrow{\Omega M}) = 0\} \quad (4)$$

L'inversion, de pôle  $\Omega$  et de rapport  $k$  est l'application de  $\mathbb{L}_{4,1} - C_\Omega$  dans lui-même qui à tout point  $M$  associe le point  $M'$  tel que :

$$\overrightarrow{\Omega M'} = \frac{k}{Q_{4,1}(\overrightarrow{\Omega M})} \overrightarrow{\Omega M}$$

Remarquons que la forme de Lorentz n'est pas définie positive (ou négative), cette inversion n'est donc pas définie sur tout l'espace. C'est pourquoi les directions lumière passant par le pôle de l'inversion (formant le cône de lumière  $C_\Omega$ ) sont à exclure.

Comme dans le cas euclidien, une inversion possède quelques propriétés remarquables [Hir65, GD13] :

- C'est une involution, c'est-à-dire que son carré est l'identité ;
- L'image d'un plan ou d'une sphère par une inversion est un plan ou une sphère. En particulier, l'image d'un plan ou d'une sphère par une inversion dont le centre  $\Omega$  appartient à ce plan ou cette sphère est un plan.

Prenons le point  $\Omega$  sur la quadrique  $\Lambda^4$  et l'inversion de rapport 1 et de centre  $\Omega$ , notée  $i_{\Omega,1}$ . L'image de la quadrique  $\Lambda^4$  par l'inversion  $i_{\Omega,1}$  est un hyperplan de  $\mathbb{L}_{4,1}$ .

Nous pouvons maintenant, après avoir déterminé chacune des images des points de  $\Lambda^4$  correspondant aux sphères centrées sur le squelette par l'inversion  $i_{\Omega,1}$ , effectuer une interpolation dans l'hyperplan  $i_{\Omega,1}(\Lambda^4)$  par une courbe spline de degré 2.

De plus, nous pouvons effectuer cette interpolation quel que soit le centre d'inversion  $\Omega$  sous condition qu'il soit sur la quadrique  $\Lambda^4$ . Nous pouvons en choisir un en particulier qui peut simplifier les calculs mais il ne faut pas oublier que le résultat obtenu pourrait dépendre de ce choix. Ensuite, il ne reste alors qu'à revenir par la même inversion sur la quadrique  $\Lambda^4$ . Enfin, il faut noter aussi que lorsque l'interpolation dans  $i_{\Omega,1}(\Lambda^4)$  nous permet d'obtenir des morceaux de courbes quadratiques, nous obtenons, lors du retour sur la quadrique, des morceaux de courbes de degré au plus 4.

### 2.2.2 Détermination de la surface obtenue

En supposant que la courbe paramétrée obtenue soit de type espace, condition nécessaire pour que la famille de sphères associées dans  $\mathbb{R}^3$  admette une enveloppe, nous avons deux manières de représenter la surface enveloppe obtenue : soit nous affichons autant de sphères que nécessaire pour la visualisation (il est même envisageable de déterminer un procédé de raffinement en fonction de différentes zones ou de la taille des sphères), soit nous affichons les cercles caractéristiques de la surface (cercles de tangence entre la surface et les sphères de l'enveloppe).

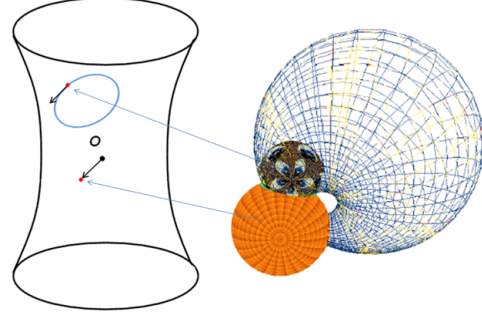
La première solution est possible directement avec les formules données en paragraphe 2.1, table 1.

En ce qui concerne la seconde méthode d'affichage, il est nécessaire de calculer le cercle de tangence entre la surface et une sphère de l'enveloppe.

En réalité, ce cercle est un cercle d'intersection entre deux sphères particulières déterminées directement à partir de la courbe paramétrée dans l'espace des sphères. Nous avons insisté jusqu'ici sur le fait que cette courbe est de type espace, c'est-à-dire qu'en chaque point, le vecteur tangent à la courbe est de type espace. Ce vecteur va nous permettre de considérer une seconde sphère : celle associée au point de  $\Lambda^4$ , intersection entre la quadrique et la demi-droite passant

par l'origine et engendrée par ce vecteur. Cette sphère est orthogonale à la première et l'intersection des deux sphères est un cercle caractéristique de la surface enveloppe, [DGL12].

Par abus, nous pouvons associer directement une sphère à un vecteur espace  $\mathcal{L}_{4,1}$ -unitaire de  $\overline{\mathbb{L}_{4,1}}$ . Ainsi, si nous considérons un vecteur tangent  $\vec{u}$   $\mathcal{L}_{4,1}$ -unitaire en un point  $\sigma$  d'une courbe paramétrée de type espace de  $\Lambda^4$  alors l'intersection des deux sphères associées à  $\vec{u}$  et à  $\sigma$  est un cercle de la surface canal.



**Figure 2:** Représentation d'un cercle caractéristique d'une surface canal dans l'espace des sphères (ici la surface canal est une cyclide de Dupin)

### 3 Algorithme et premiers résultats

Dans l'état actuel de notre avancement, nous n'avons pas de condition(s) permettant de savoir si le vecteur tangent à la courbe est de type espace : nous supposons donc que la courbe obtenue sur  $\Lambda^4$  l'est.

Toutefois, nous allons utiliser des sphères centrées sur un squelette curviligne extrait par un algorithme de squelettisation à partir d'un nuage de points. Nous avons remarqué que lorsque le nuage de points précité est assez dense, les sphères obtenues sont très proches et sécantes deux à deux séquentiellement. Cela implique que les points correspondants dans l'espace des sphères sont très proches et que les vecteurs joignant ces points deux à deux sont de type espace ce qui laisse penser que localement la courbe interpolant les données sera de type espace.

Cette supposition sera bien évidemment à vérifier.

Nous présentons ici un algorithme permettant d'afficher une surface enveloppe interpolée à partir de données discrètes qui habille le squelette de cette surface en supposant que les sphères prises comme données d'entrées satisfont les conditions pour obtenir une courbe paramétrée de type espace sur  $\Lambda^4$ , algorithme 1. Les figures (3), (4) et (5) illustrent ce procédé. La première représente les sphères centrées sur un squelette, la seconde, un ensemble de sphères obtenu par interpolation dans l'espace des sphères et, la troisième,

un ensemble de cercles caractéristiques de la surface canal obtenue après interpolation.

---

**Algorithme 1** Habillage de squelettes curvilignes
 

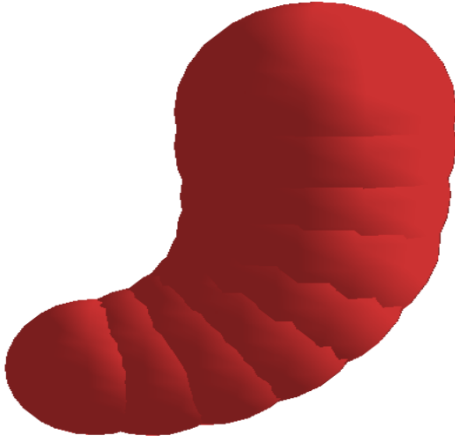
---

**Entrée :** Une famille finie de sphères  $S_k$ ,  $k \in \{1; \dots; n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , centrées sur le squelette curviligne d'une surface discrétisée

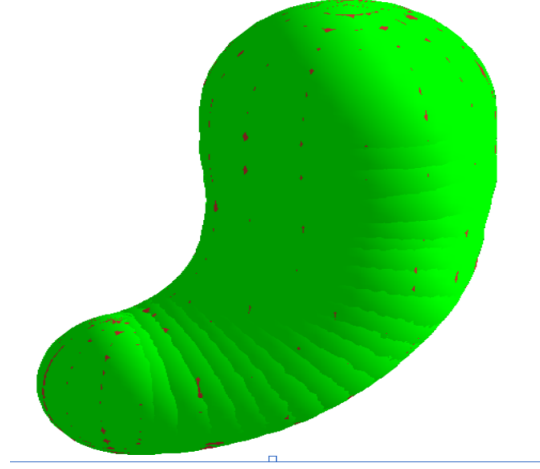
1. Détermination des points  $\sigma_k$  de  $\Lambda^4$  correspondants aux sphères  $S_k$
2. Choix du pôle  $\Omega$  de l'inversion sur  $\Lambda^4$
3. Détermination des images  $i_{\Omega,1}(\sigma_k)$  par l'inversion de centre  $\Omega$  et de rapport 1 dans l'hyperplan  $i_{\Omega,1}(\Lambda^4)$ .
4. Détermination de la courbe paramétrée  $C(t)$ ,  $t \in I$  interpolant les points  $i_{\Omega,1}(\sigma_k)$
5. Détermination de la courbe  $i_{\Omega,1}(C(t))$ , image par l'inversion de  $C(t)$ , sur la quadrique  $\Lambda^4$
6. Affichage dans  $\mathbb{R}^3$  :  
choix d'un nombre fini de valeurs  $t_j$  de  $I$ 
  - Soit afficher les sphères  $S(t_j)$  correspondantes aux points  $i_{\Omega,1}(C(t_j))$
  - Soit afficher les cercles caractéristiques, intersection entre les sphères  $S(t_j)$  associées aux points  $i_{\Omega,1}(C(t_j))$  et les sphères associées aux vecteurs tangents  $\frac{d}{dt}(i_{\Omega,1}(C(t)))$

**Sortie :** Un habillage du squelette curviligne d'une surface

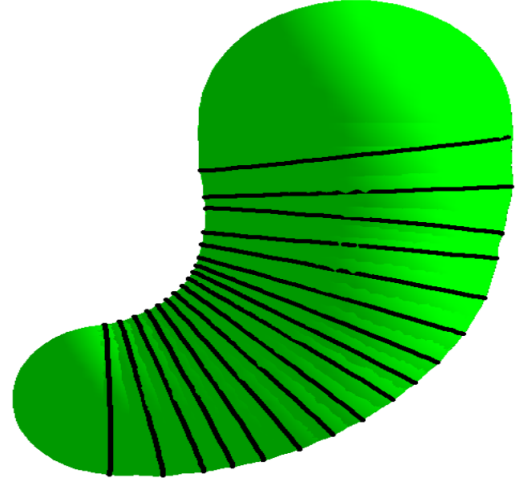
---



**Figure 3:** Sphères centrées sur un squelette curviligne.



**Figure 4:** Habillage du squelette après interpolation dans l'espace des sphères par un ensemble de sphères vertes. Les sphères centrées sur le squelette de départ (sphères de la figure (3)) sont contenues dans l'ensemble des sphères vertes.



**Figure 5:** Ensemble de cercles caractéristiques de la surface canal obtenue par notre méthode d'habillage du squelette. Les sphères vertes sont les sphères de la figure (4).

#### 4 Conclusion et perspectives

Dans cet article, nous avons présenté une méthode permettant d'habiller un squelette curviligne en utilisant une famille à un paramètre de sphères orientées : le résultat final est donc une surface canal. Pour mener à bien notre travail, nous avons adapté la définition de l'inversion dans un espace euclidien à l'espace de Lorentz dans lequel les surfaces canal sont représentées par des courbes. Notre méthode permet de simplifier le travail à réaliser car il est plus facile de manipuler des courbes que des surfaces.

Le centre de l'inversion que nous utilisons étant situé sur l'espace des sphères (qui est une sphère unité pour la forme de Lorentz), l'image de cet espace par l'inversion est un hyperplan dans lequel nous pouvons effectuer une interpolation. L'inversion étant involutive, l'image de la courbe interpolée dans l'hyperplan est sur la quadrique  $\Lambda^4$ .

Par la suite, nous devons déterminer les conditions qui nous assurent que le vecteur tangent à la courbe sur  $\Lambda^4$  est de type espace, condition nécessaire pour que la surface associée admette une enveloppe. Nous devons aussi étudier le rôle du pôle de l'inversion et son éventuelle influence sur le résultat.

Dans un avenir plus lointain, nous comptons utiliser le cadre de l'algèbre géométrique conforme afin de pouvoir utiliser facilement des outils très performants pour l'implémentation de ce travail.

#### Références

- [ABM94] ATTALI D., BERTOLINO P., MONTANVERT A. : Using polyballs to approximate shapes and skeletons. In *ICPR94* (1994), pp. A :626–628.
- [BJMR01] BANÉGAS F., JAEGER M., MICHELUCCI D., ROELENS M. : The ellipsoidal skeleton in medical applications. In *Proceedings of the Sixth ACM Symposium on Solid Modeling and Applications* (New York, NY, USA, 2001), SMA '01, ACM, pp. 30–38.
- [Blu67] BLUM H. : A Transformation for Extracting New Descriptors of Shape. In *Models for the Perception of Speech and Visual Form*, Wathen-Dunn W., (Ed.). MIT Press, Cambridge, 1967, pp. 362–380.
- [DGL11] DRUOTON L., GARNIER L., LANGEVIN R. : Les cyclides de Dupin et l'espace des sphères. *Revue Electronique Francophone d'Informatique Graphique*. Vol. 5, Num. 1 (2011), 41–59.
- [DGL12] DRUOTON L., GARNIER L., LANGEVIN R. : Iterative construction of dupin cyclides characteristic circles using non-stationary iterated function systems (ifs). *Computer Aided Design* (2012).
- [DRF] DELAMÉ T., ROUDET C., FAUDOT D. : From A Medial Surface To A Mesh. pp. 1637–1646.
- [Gar07] GARNIER L. : *Mathématiques pour la modélisation géométrique, la représentation 3D et la synthèse d'images*. Ellipses, 2007. ISBN : 978-2-7298-3412-8.
- [GD13] GARNIER L., DRUOTON L. : Inversions de coniques à centres vues comme des cercles. *AFIG 2013* (2013).
- [GDL12] GARNIER L., DRUOTON L., LANGEVIN R. : Subdivisions itératives d'arcs d'ellipses et d'hyperboles et application à la visualisation de cyclides de Dupin. *Revue Electronique Francophone d'Informatique Graphique* (2012).
- [Hir65] HIRST T. : On the quadric inversion of plane curves. In *Royal Society (Great Britain)* (1865), vol. 14, pp. 91–106.
- [Lad03] LADEGAILLERIE Y. : *Géométrie affine, projective, euclidienne et anallagmatique*. Ellipses, Paris, 2003. ISBN 2-7298-1416-7.
- [LS11] LANGEVIN R., SOLANES G. : The geometry of canal surfaces and the length of curves in de sitter space. *Advances in Geometry*. Vol. 11, Num. 4 (November 2011), 585–601.
- [LW08] LANGEVIN R., WALCZAK P. : Conformal geometry of foliations. *Geom Dedicata*. Vol. 132, Num. 5 (2008), 135–178.
- [LW12] LANGEVIN R., WALCZAK P. : Canal foliations of  $s^3$ . *Journal of the Mathematical Society of Japan*. Vol. 64(2) (2012), 659–682.
- [Mur91] MURAKI S. : Volumetric shape description of range data using "blobby model". In *Proceedings of the 18th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques* (New York, NY, USA, 1991), SIGGRAPH '91, ACM, pp. 227–235.